
De (lege) getallenlijn voor het rekenen tot 100

- een realistische versus een voorgestructureerde leerlijn -

A.S. Klein & M. Beishuizen
Vakgroep Onderwijsstudies, R.U. Leiden

1 inleiding

In het onderzoeksproject 'Flexibilisering van rekenstrategieën op een verschillende kennisbasis'¹ worden twee experimentele leerlijnen vergeleken voor het optellen en aftrekken tot 100. Beide leerlijnen gebruiken daarbij de (lege) getallenlijn en zijn vervangend voor de leergang in de methode 'Rekenen & Wiskunde'² in groep 4.

Aanleiding voor het onderzoek vormde onder meer de PPO-peiling uit 1987 waaruit bleek dat het met de procedurele en strategische kennis (of flexibel rekenen) van onze basisschoolleerlingen matig gesteld is (Wijnstra, 1988). Wat betreft de procedurele kennis: halverwege groep 5 blijkt slechts 55 procent van de leerlingen over voldoende procedurele vaardigheden te beschikken om een opgave als $64 - 28$ correct op te lossen. Ten aanzien van de strategische kennis bleek dat aan het einde van het basisonderwijs 75 procent van de leerlingen gebruik maakt van omslachtige, algoritmische/cijferende oplossingen (waarbij méér fouten worden gemaakt) (Bokhove & Janssen, 1988). Ook de resultaten van het MORE-onderzoek (Gravemeijer, e.a. 1993) laten zien dat de flexibiliteit in oplossingsstrategieën van leerlingen te wensen overlaat. Dit geldt zelfs voor leerlingen die volgens een realistische methode ('De wereld in getallen') rekenonderwijs hebben gekregen. Mede hierdoor is in Nederland besloten om meer aandacht te besteden aan basisvaardigheden binnen het rekenonderwijs. Zo werd onder meer het rekenen tot 100 (R100) als centraal thema opgenomen in het innovatieproject 'Speerpunt Rekenen'. Daarnaast neemt R100 ook een centrale plaats in binnen de 'Proeve'-publicaties (Treffers & De Moor, 1990). Ook in Leiden was men al enige tijd bezig met onderzoek rond R100. Met name het onderscheid tussen de (kardinale) 1010 of splitsmethode versus de (ordinaire) G10 of rijmethode stond daar in de belangstelling. Een overzicht van de belangrijkste procedures en de daarbij door ons gebruikte afkortingen wordt in figuur 1 weergegeven. De wijze en het tijdstip waarop

je leerlingen met deze twee verschillende oplossingsmethoden moet confronteren had ook de aandacht (Van Mulken, 1992).

Optellen met tientalpassering: $45 + 39$	Aftrekken met tientalpassering: $65 - 49$
G10: $45 + 30 = 75$; $75 + 5 = 80$; $80 + 4 = 84$ ¹	G10: $65 - 40 = 25$; $25 - 5 = 20$; $20 - 4 = 16$ ¹
G10V: $45 + 40 = 85$; $85 - 1 = 84$ ¹	G10V: $65 - 50 = 15$; $15 + 1 = 16$ ¹
10t: $40 + 30 = 70$; $70 + 5 = 75$; $75 + 5 = 80$; $80 + 4 = 84$	10t: $60 - 40 = 20$; $20 + 5 = 25$; $25 - 5 = 20$; $20 - 4 = 16$
1010: $40 + 30 = 70$; $5 + 5 = 10$; $10 + 4 = 14$; $70 + 14 = 84$	1010: $60 - 40 = 20$; $5 - 9 = 4$ (richtingsfout) $20 + 4 = 24$ (fout antwoord)
A10: $45 + 5 = 50$; $50 + 34 = 84$ ¹	A10: $65 - 5 = 60$; $60 - 40 = 20$; $20 - 4 = 16$ ¹
BC: $45 + 39 = 84$ (geautomatiseerd)	BC: $65 - 49 = 16$ (geautomatiseerd)
	∩: $65 - 49 = 16$ (want $49 + 16 = 65$) ²

¹ Varianten van de rijmethode (Treffers & De Moor, 1990)

² Hiermee wordt het 'relatieboogje' bedoeld (Treffers & Veltman, 1994)

figuur 1: hoofdrekenprocedures voor het optellen en aftrekken tot 100 (Van Mulken, 1992)

Daarnaast is onderzocht wat de invloed van het gebruik van hulpmaterialen als rekenstaven en honderdveld was op beide strategieën (Beishuizen, 1993). Vanuit deze interesse is dan ook het samenwerkingsproject gestart tussen Utrecht en Leiden. In dit project staat 'de ontwikkeling van procedurele en flexibele rekenstrategieën en curriculum vernieuwing in het domein R100 (groep 4 basisschool)' centraal. Hiertoe worden twee didactische leerlijnen voor het optellen en aftrekken tot 100 met elkaar vergeleken: een realistische (Proeve)leerlijn en een meer voorgestructureerde (Stadia-)leerlijn. Hieronder wordt ingegaan op de inhoud en opbouw van beide leerlijnen.

2 twee didactische leerlijnen voor het rekenen tot 100

In groep 4 van het basisonderwijs staat het optellen en aftrekken tot 100 centraal. Voor deze leeftijdsgroep zijn binnen het eerdergenoemde onderzoeksproject twee leerlijnen ontworpen die als volgt kunnen worden gekenschetst.

Proeve-leerlijn

De Proeve-leerlijn is gebaseerd op de realistische vakdidactiek zoals uitgewerkt in de 'Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool' (Treffers & De Moor, 1990). Binnen de Proeve-leerlijn streeft men ernaar om kinderen te stimuleren tot het zelf ontdekken van oplossingen en aan te sluiten bij spontane en informele strategieën.

Er is veel ruimte voor interactieve klasgesprekken die een beroep doen op inzicht en flexibiliteit. In deze gesprekken worden oplossingsstrategieën besproken en vergeleken. Het kralensnoer en later de getallenlijn worden hierbij als contextmodel gebruikt, waarmee aan de hand van spontane interventies van kinderen diverse strategieën naast elkaar aan bod komen. Er is natuurlijk ook sprake van procedurele oefening, maar flexibilisering komt op de eerste plaats. Er is veel aandacht voor toepassingsgerichte (context)opgaven die als introductie worden gebruikt voor verschillende somtypen en oplossingsmanieren.

Stadia-leerlijn

De Stadia-leerlijn is gebaseerd op ideeën uit het Leids onderzoek naar 'Cognitieve strategieën bij rekenen' (Beishuizen, 1993; Felix, 1992; Van Mulken, 1992). De nadruk wordt gelegd op het geleidelijk en inzichtelijk aanleren van een aantal opeenvolgende rekenprocedures. Als voorwaarde voor flexibilisering van rekenstrategieën wordt de aanwezigheid van een procedurele kennisbasis gesteld (Glaser & Bassok, 1989).

Dat betekent dat gedurende de eerste helft van het jaar alleen de G10-procedure centraal staat. Pas gedurende de tweede helft van het jaar worden andere oplossingsmanieren geïntroduceerd. Met name zwakkere rekenaars zouden door een vroegtijdige introductie van verschillende strategieën in verwarring raken (Ruijssenaars, 1994). Deze leerlingen zouden dan ook van de voorgestructureerde opzet van de Stadia-leerlijn profiteren.

Flexibilisering van 'handige' rekenstrategieën, bij grotere sommen gedurende de tweede helft van het leerjaar, zou vooral plaatsvinden vanwege de neiging bij leerlingen tot 'cognitive economy' (Baroody & Ginsburg, 1986) of het vermijden van belasting van het werkgeheugen. De getallenlijn wordt gebruikt als instructiemodel, voorafgegaan door de zogenaamde stavenlijn. In vergelijking met de Proeve-leerlijn is er minder aandacht voor toepassingsgerichte (context)opgaven. Bovendien worden deze opgaven als toepassing achteraf gebruikt en niet ter introductie van een nieuw somtype of nieuwe oplossingsmanier.

3 onderzoeksvragen

De twee leerlijnen vertrekken elk vanuit verschillende theoretische en didactische standpunten. Hieruit voortvloeiend, kunnen er met betrekking tot de resultaten van beide leerlijnen een aantal rivaliserende verwachtingen geformuleerd worden die onder meer betrekking hebben op ontwikkeling van strategische en procedurele kennis, verschillen tussen goede en zwakke rekenaars en motivatie ten aanzien van rekenen.

Een compleet overzicht van alle verzamelde gegevens zal later worden gerapporteerd.³ In deze bijdrage willen we ons beperken tot de verwachtingen ten aanzien van het eindniveau van de procedurele en strategische vaardigheden met betrekking tot het optellen en aftrekken tot 100.

verschillen Proeve- en Stadia-leerlijn

Binnen de Proeve-leerlijn wordt, vooral gedurende de eerste helft van het leerjaar, meer aandacht besteed aan contextopgaven dan binnen de Stadia-leerlijn waar kale sommen meer centraal staan. Gedurende de tweede helft van het leerjaar verdwijnen deze verschillen. Wij vragen ons af of er hierdoor aan het einde van het leerjaar (juni) verschillen ontstaan tussen beide leerlijnen ten aanzien percentage goed gemaakte opgaven (kale som en context) en variatie in oplossingsmanieren bij de verschillende somtypen.

verschillen tussen goede en zwakke rekenaars binnen beide leerlijnen

Binnen de Proeve-leerlijn wordt van meet af aan aandacht besteed aan verschillende oplossingsmanieren. De Stadia-leerlijn daarentegen is meer voorgestructureerd waarvan met name zwakke rekenaars meer profijt zouden hebben. We verwachten dan ook grotere verschillen in beheersingspercentage tussen goede en zwakke rekenaars binnen de Proeve-leerlijn dan binnen de Stadia-leerlijn. Ten aanzien van de gebruikte oplossingsmanieren zullen zwakkere Proeve-leerlingen wellicht meer oplossingsmanieren vertonen, maar daarbij ook meer fouten maken.

verschillen tussen Proeve/Stadia-leerlingen en landelijke normgroep

Een belangrijk verschil tussen de leerlingen van zowel de Stadia- als de Proeve-leerlijn en een landelijke normgroep is het gebruik van de (lege) getallenlijn tegenover (voornamelijk) het honderdveld. We vragen ons dan ook af of er verschillen in percentage goed gemaakte sommen zijn tussen beide groepen, ten aanzien van het optellen en aftrekken tot 100.

4 onderzoeksoepzet

Gedurende twee leerjaren zijn op kleine schaal in groep 4 van het basis-onderwijs, de Stadia- en de Proeve-leerlijn ontwikkeld, uitgetoetst en bijgesteld. Voor de Proeve-leerlijn is dat in nauw overleg gebeurd met A. Treffers van het Freudenthal instituut. Aangezien de indeling en vormgeving van zowel de Stadia- als de Proeve-leerlijn gebaseerd zijn op de methode 'Rekenen & Wiskunde' hebben we scholen benaderd die reeds enkele jaren ervaring hebben met deze methode. Gedurende het schooljaar 1994-'95 hebben tien klassen (groep 4) van negen basisscholen met de Stadia- of de Proeve-leerlijn gewerkt (N = 376). Deze klassen waren in paren gematched op grond van de scores op de Cito-toets LeerlingVolgSysteem eind groep 3 (E3) en kregen vervolgens of de Stadia- of de Proeve-leerlijn. Zowel leerlingen als leerkrachten werkten met onze experimentele werkbladen en handleidingen, in plaats van hun 'gewone' rekenboekjes. We bespreken hier de resultaten van acht scholen (vier Stadia- en vier Proeve-klassen, N = 214). Als gevolg van een leerkrachtwisseling is er op één school vertraging ontstaan, waardoor de toetsen daar ook later zijn afgenomen. Zoals eerder gemeld, zullen de volledige gegevens van alle onderzoeksscholen later worden gerapporteerd. Wat betreft de selectie van goede en zwakke rekenaars: op grond van de E3-scores van het Cito LeerlingVolgSysteem hebben we per leerlijn 25 goede en 25 zwakke rekenaars geselecteerd die we gedurende het schooljaar ook individueel hebben getoetst. Als zwakke rekenaars hebben we gekozen voor overwegend D-leerlingen⁴, als goede rekenaars voor overwegend B-leerlingen.

gebruikte toetsen en werkwijze

Gedurende het schooljaar zijn op vijf verschillende momenten toetsen afgenomen om zowel de cognitieve ontwikkeling als affectieve processen (motivatie) ten aanzien van rekenen te meten. In deze bijdrage beperken wij ons tot de resultaten die in juni 1995 door de leerlingen zijn behaald op de toets Flexibel Rekenen en op de Cito-toets LeerlingVolgSysteem eind groep 4 (E4).

toets Flexibel Rekenen

De toets 'Flexibel Rekenen' is in het kader van het onderzoeksproject ontwikkeld en bestaat uit 21 opgaven. De getallen van de opgaven zijn zo gekozen dat verschillende oplossingsmanieren worden uitgelokt (zie figuur 2 voor een volledig overzicht van alle aangeboden somtypen en verwachte oplossingsprocedures).

Er zijn zowel optel- als aftreksommen aangeboden die bovendien in kale en contextvorm zijn aangeboden. Daarnaast zijn er ook nog sommen aan-

geboden waarbij het verschil in prijs, leeftijd of gewicht moest worden uitgerekend. De leerlingen werd voor het maken van de toets niet alleen gevraagd het antwoord op te schrijven, maar ook op een kladblaadje te laten zien hoe ze de som hadden uitgerekend. Omdat de leerlingen gedurende het hele schooljaar gewend waren ook in hun werkbladen hun oplossingsmanier te laten zien, met behulp van getallenlijn, pijlschema of stapjes, kregen we via deze toets een goed beeld van de door de leerling gebruikte oplossingsprocedures.

Item nummer en verwachte procedure	Optellen Formule	Optellen Context	Aftrekken Formule	Aftrekken Context	Context Verskil
1 G10	$57 + 36 =$	$48 + 37 =$	$75 - 36 =$	$84 - 26 =$	74 en 36
2 1010	$42 + 43 =$	$33 + 34 =$	$65 - 33 =$	$85 - 42 =$	65 en 32
3 G10V	$54 + 39 =$	$54 + 29 =$	$84 - 29 =$	$63 - 29 =$	73 en 29
4 \cap (alleen Proeve)			$71 - 69 =$	$81 - 79 =$	61 en 59
5 \cap (alleen Proeve)			$62 - 48 =$	$72 - 58 =$	82 en 68

figuur 2: gebruikte items in de toets 'Flexibel Rekenen': aanbiedingsvorm en verwachte oplossingsprocedures

Cito-toets LeerlingVolgSysteem eind groep 4 (E4)

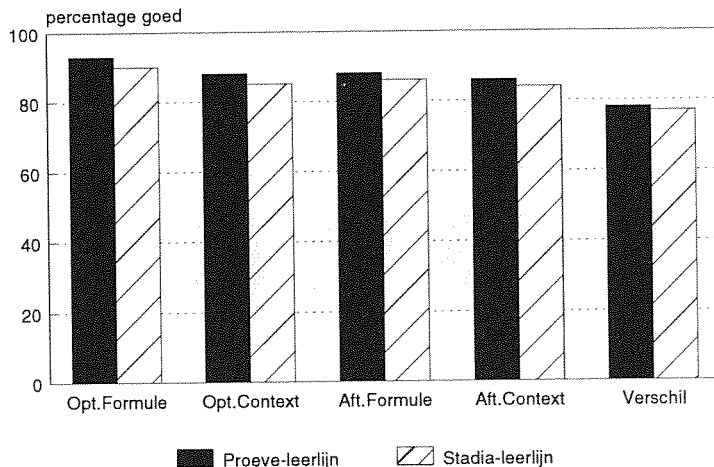
Gedurende het onderzoek zijn de E3-, M4- en E4-toetsen afgenomen van het LeerlingVolgSysteem van het Cito.⁵ We rapporteren hier alleen de resultaten van de E4-toets. Deze resultaten zullen worden vergeleken met gegevens van een normgroep die we van het Cito hebben gekregen. Deze normgroep bestaat uit scholen die overwegend een realistische rekenmethode gebruiken. Als model voor het rekenen tot 100 wordt daarbij vooral het honderdveld gebruikt. Er dient te worden opgemerkt dat de normgroep een oververtegenwoordiging kent van relatief zwakkere scholen. Vandaar dat we, indien er sprake is van verschillen tussen beide groepen op de E4-toets, rekening zullen houden met eventuele verschillen die er al waren op de E3-toets.

5 resultaten

verschillen Proeve- en Stadia-leerlijn: hele groep

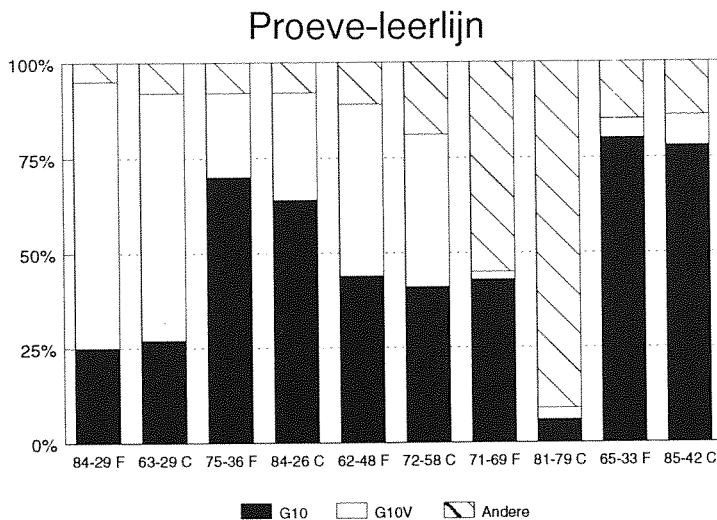
In figuur 3 wordt een overzicht gegeven van het percentage goed-gemaakte sommen door Stadia- en Proeve-leerlingen voor de verschillende onderdelen van de toets Flexibel Rekenen. Uit deze figuur blijkt niet dat er ver-

schillen zijn tussen Stadia- en Proeve-leerlingen in percentage goed gemaakte sommen. Wel zien we dat de verschilsommen moeilijker worden gevonden dan de andere sommen.

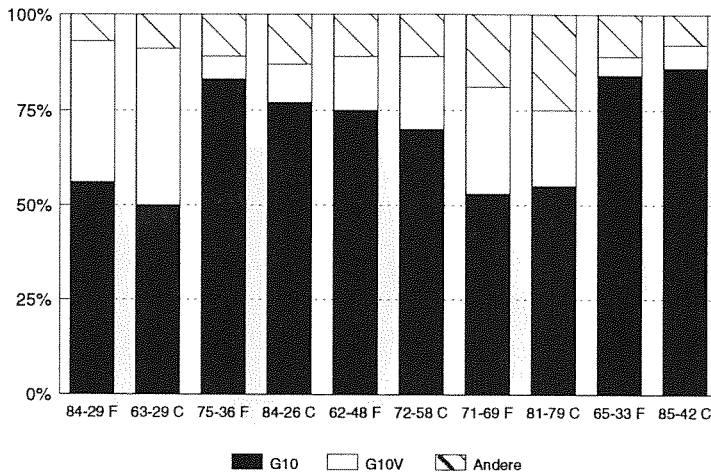


figuur 3: percentages goed-gemaakte sommen door Stadia-leerlingen (N = 96) en Proeve-leerlingen (N = 101) op de toets 'Flexibel Rekenen' in juni

In figuur 4 wordt een indruk gegeven van de gebruikte oplossingsmanieren op deze toets. We beperken ons daarbij tot 'aftrekken kale sommen en contextopgaven' omdat deze het meest interessant zijn. Overigens leverden de optelsommen en de verschilsommen vergelijkbare verschillen in proceduregebruik op tussen Stadia- en Proeve-leerlijn.



Stadia-leerlijn



figuur 4: gebruikte oplossingsprocedures voor aftrekken kale sommen en contextopgaven door Stadia-leerlingen (N = 96) en Proeve-leerlingen (N = 101) op de toets 'Flexibel Rekenen' in juni

Wanneer we naar de gebruikte procedures kijken dan zien we dat de Proeve-leerlingen hun oplossingsprocedure laten afhangen van de getalskenmerken van de opgave: bij een som als $84 - 29$ gebruikt meer dan de helft van de Proeve-leerlingen de G10V-procedure terwijl dat bij de Stadia-leerlingen veel minder het geval is. Bij de opgave $81 - 79$ gebruikt rond de 90 procent van de Proeve-leerlingen het handige 'boogje' (aanvullen) om de som uit te rekenen terwijl meer dan de helft van de Stadia-leerlingen gebruik maakt van het omslachtige aftrekken. Over het geheel zien we dus dat bij de Stadia-leerlingen de G10-procedure domineert terwijl de Proeve-leerlingen veel flexibeler gebruik maken van de verschillende oplossingsprocedures.

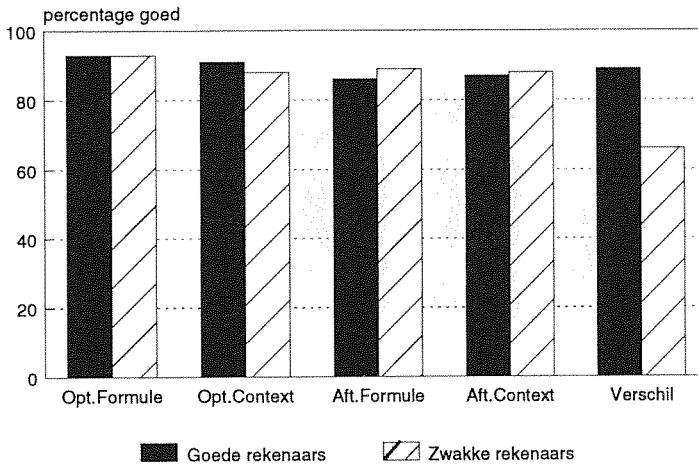
verschillen Stadia- en Proeve-leerlijn: goede en zwakke rekenaars

Tot nu toe hebben we de hele groep Stadia- en Proeve-leerlingen met elkaar vergeleken. Hoe verschillen nu de prestaties van goede en zwakke rekenaars van elkaar binnen de beide leerlijnen. Figuur 5 geeft een overzicht van de percentages goede antwoorden van goede en zwakke rekenaars van beide leerlijnen voor de verschillende onderdelen van de toets Flexibel Rekenen.

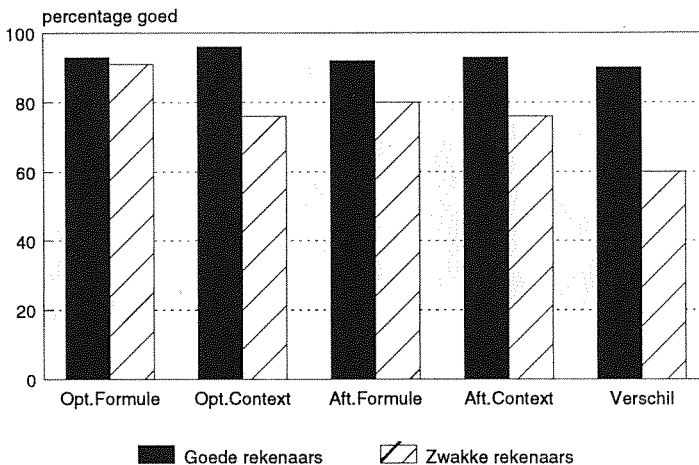
We zien dat de verschillen tussen goede en zwakke rekenaars voor de onderdelen 'Optellen Context', 'Aftrekken Formule' en 'Aftrekken Context' bij

de Stadia-leerlijn groter zijn dan bij de Proeve-leerlijn. Daarnaast zien we dat de verschillen tussen goede en zwakke rekenaars voor beide leerlijnen het grootst zijn voor de verschilsommen. Vervolgens zijn we geïnteresseerd in de gebruikte oplossingsprocedures van de zwakke rekenaars van de Stadia- en de Proeve-leerlijn.

Proeve-leerlijn

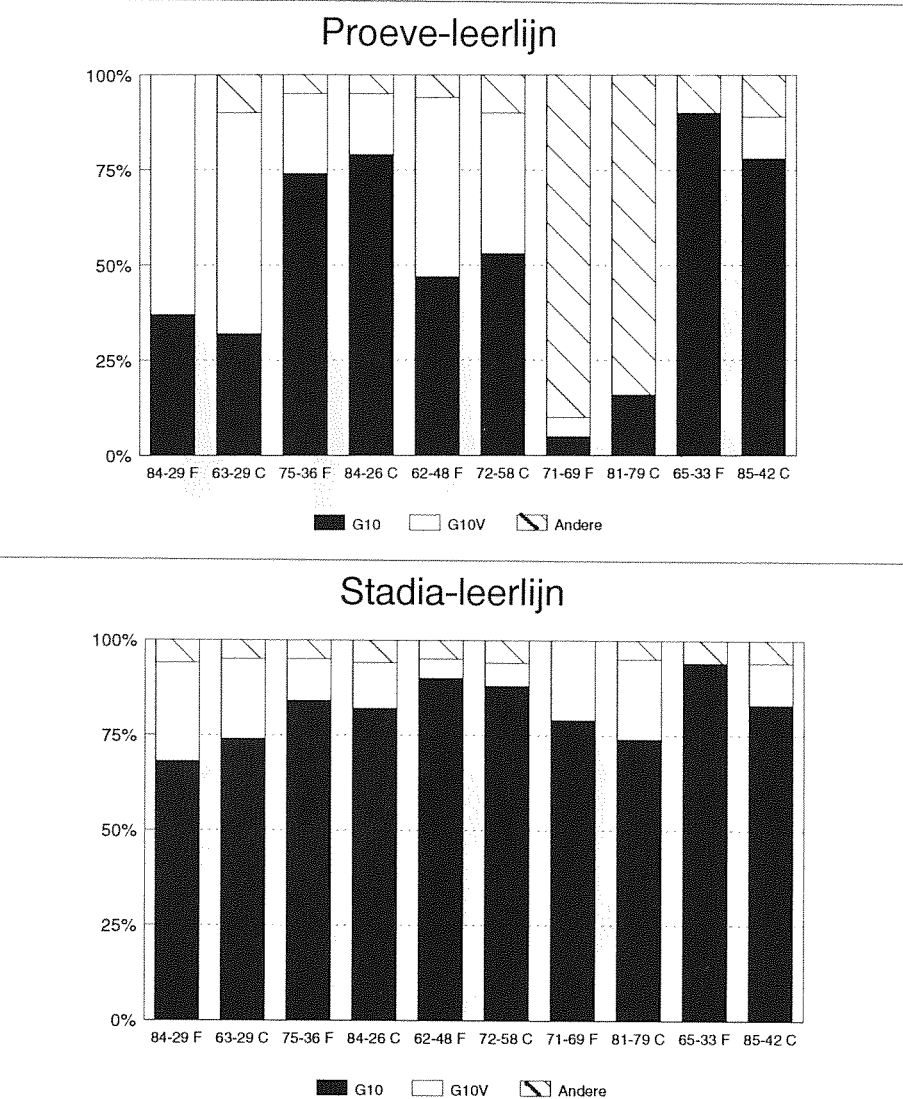


Stadia-leerlijn



figuur 5: percentages goed-gemaakte sommen door goede en zwakke rekenaars binnen Stadia-leerlijn (N = 40) en Proeve-leerlijn (N = 40) op de toets 'Flexibel Rekenen' in juni

We beperken ons weer even tot het onderdeel aftrekken 'kale sommen en contextopgaven' omdat deze representatief is voor de andere onderdelen (fig.6).



figuur 6: gebruikte oplossingsprocedures voor aftrekken kale sommen en contextopgaven door zwakke rekenaars binnen Stadia-leerlijn (N = 20) en Proeve-leerlijn (N = 20) op de toets 'Flexibel Rekenen' in juni

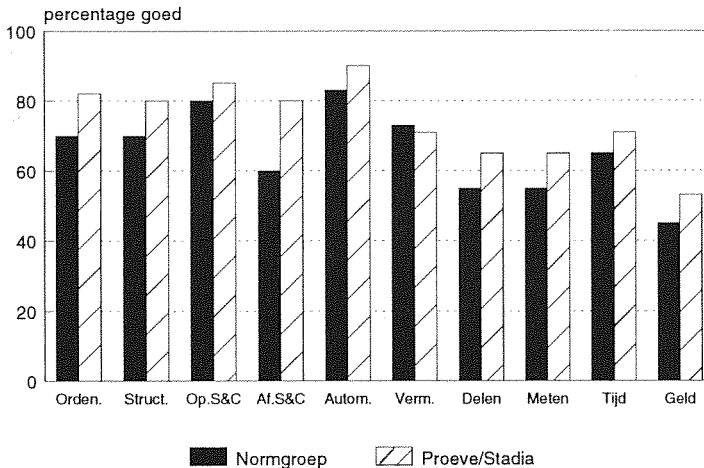
We zien hier dat ook de rekenzwakke Proeve-leerlingen een meer gevarieerd oplossingsgedrag laten zien dan de rekenzwakke Stadia-leerlingen.

De Stadia-leerlingen gebruiken overwegend de G10-procedure (en maken daarbij meer fouten) terwijl de Proeve-leerlingen naast G10 ook veelvuldig G10V en het boogje gebruiken (waarbij ze minder fouten maken).

getallenlijn versus honderdveld

Ten slotte vergelijken we in figuur 7 de leerlingen die met de getallenlijn hebben gewerkt (Proeve- en Stadia-leerlingen samen) met leerlingen van een normgroep die overwegend met het honderdveld hebben gewerkt. Hiertoe worden de prestaties van beide groepen leerlingen op de verschillende onderdelen van de E4-toets van het Cito LeerlingVolgSysteem met elkaar vergeleken.

Uit deze vergelijking blijkt dat leerlingen die met de getallenlijn hebben gewerkt, met name bij het onderdeel 'Aftrekken Som & Context' (verschil 20 procent) en in mindere mate bij de onderdelen 'Ordenen' (verschil 15 procent) en 'Structureren' (verschil 11 procent) hoger scores dan de leerlingen van de normgroep die overwegend met het honderdveld hebben gewerkt. Deze verschillen waren op de E3-toets voor 'Aftrekken Som & Context' 7 procent, voor 'Ordenen' 6 procent en voor 'Structureren' 4 procent. De verschillen tussen beide groepen zijn dus gedurende groep 4 duidelijk toegenomen.



figuur 7: percentages goed-gemaakte sommen door Proeve- en Stadia-leerlingen (N = 214) en normgroep (N = 262) voor de verschillen de onderdelen van Cito LeerlingVolgSysteem eind groep 4 (E4)

6 conclusies

verschillen Stadia- en Proeve-leerlijn: hele groep

Aan het einde van het schooljaar vonden we geen verschillen tussen beide leerlijnen in beheersingspercentages voor de verschillende onderdelen van de toets 'Flexibel Rekenen'. Beide groepen leerlingen maakten de verschillen het minst goed. Misschien dat het begrip 'verschil' voor een deel van de leerlingen een wat abstract begrip is waarbij ze zich moeilijk kunnen voorstellen wat ze moeten uitrekenen. Wanneer we echter de beheersingspercentages van aftrekken met tientalpassering vergelijken met de gegevens van de PPO- peiling uit 1987 dan valt ons op dat het aftrekken met tientalpassering nu veel beter wordt beheerst dan daarvoor (.80 versus .55). Wanneer we naar de gebruikte oplossingsprocedures kijken dan zien we dat de Proeve-leerlingen veel gevarieerder gebruik maken van oplossingsmanieren dan de Stadia-leerlingen, wat niet ten koste gaat van het beheersingsniveau. De meeste Proeve-leerlingen kiezen, afhankelijk van de opgave, de meest efficiënte oplossingsprocedure. Stadia-leerlingen gebruiken daarentegen standaard de G10-procedure. Wellicht dat de introductie van verschillende oplossingsmanieren binnen de Stadia-leerlijn 'te laat' heeft plaatsgevonden. De leerlingen beschikten al over een oplossingsprocedure (G10) waarmee ze alle sommen konden oplossen en waren niet bereid deze oplossingsmanier op te geven voor een andere procedure. Ook uit redenen van 'cognitive economy' (Baroody & Ginsburg, 1986) is het voorstelbaar dat, zonder nadenken, alles op één manier uitrekenen ook bepaalde voordelen heeft. Wil je leerlingen dus flexibel leren rekenen dan wordt het realistisch uitgangspunt bevestigd dat je daar vroegtijdig aandacht aan moeten besteden. Realistische contextopgaven kunnen daarbij een belangrijke rol spelen (Verschaffel, De Corte & Lasure, 1995).

verschillen tussen Stadia- en Proeve-leerlijn: goede en zwakke rekenaars

De verwachting dat rekenzwakke leerlingen meer profijt hebben van een voorgestructureerde leerlijn wordt in dit onderzoek niet bevestigd. De verschillen tussen goede en zwakke rekenaars zijn binnen de voorgestructureerde Stadia-leerlijn groter dan binnen de realistische Proeve-leerlijn. Daarbij maken de rekenzwakke Proeve-leerlingen veel meer gebruik van verschillende en efficiëntere oplossingsprocedures dan de Stadia-leerlingen. Ruijssenaars (1994) noemt als kenmerken van kinderen met ernstige leerproblemen onder meer overbelasting van het werkgeheugen en:

'... de zwakte in het vlot kunnen decoderen van informatie, ook te benoemen als het moeilijk kunnen identificeren of onderkennen van het moment waarop beschikbare voorkennis kan worden toegepast.' (pag.32)

Juist deze twee kenmerken zouden echter ook een verklaring kunnen vormen voor het feit dat de rekenzwakke Proeve-leerlingen gebruik maken van verschillende oplossingsprocedures. Het is immers veel minder geheugenbelastend om bijvoorbeeld een som als $81 - 79$ door middel van aanvullen uit te rekenen ($81 - 79 = 2$, want $79 + 2 = 81$) dan 79 van 81 af te trekken. Rekenzwakke leerlingen hebben bij grote getallen de 10-sprongen vaak nog niet geautomatiseerd waardoor 70 in zeven sprongen van 10 moet worden afgetrokken. Hierbij bestaat er een grote kans dat door overbelasting van het werkgeheugen een 10-sprong wordt vergeten.

De getallenlijn blijkt bij het uitvoeren van deze procedures, maar ook bij het herkennen van het moment wanneer een bepaalde procedure kan worden toegepast, een natuurlijk en duidelijk hulpmiddel te zijn. Door het noteren van de 10-sprongen op de getallenlijn wordt het werkgeheugen ontlast. Daarnaast 'zien' de leerlingen wanneer de som $81 - 79$ moet worden uitgerekend, dat hier aanvullen voor de hand ligt. Wanneer ze immers 81 en 79 op de getallenlijn zetten dan zien ze dat de getallen dicht bij elkaar liggen.

getallenlijn versus honderdveld

De getallenlijn blijkt voor veel leerlingen een zeer natuurlijk en transparant model te zijn, veel duidelijker dan bijvoorbeeld het honderdveld. Dit blijkt met name uit de prestaties van de Stadia- en Proeve-leerlingen op de subschaal 'Aftrekken Som & Context' die door 80 procent van de Proeve/Stadia-leerlingen beheerst wordt en landelijk door 60 procent van de leerlingen uit de normgroep.

Wij denken dat een van de verklaringen voor het succes van de getallenlijn binnen de Proeve-leerlijn ligt in het feit dat deze zo vroeg in groep 4 werd geïntroduceerd. Hierdoor zijn de leerlingen al vertrouwd met het model wanneer zij met de moeilijker somtypen beginnen, in tegenstelling tot bijvoorbeeld het honderdveld dat veelal gelijktijdig met deze moeilijke somtypen wordt geïntroduceerd. Aanvankelijk fungeert de getallenlijn als een model van het optellen en aftrekken tot 100 maar later wordt het veel meer een denkmodel voor het oplossen van allerlei rekenproblemen (Gravemeijer, 1994).

Daarbij is het wel belangrijk dat leerlingen eerst goed de telrij tot 20 en later tot 100 leren verkennen bijvoorbeeld door spelletjes als 'Raad mijn getal' en aan 'Springen op de getallenlijn'. Ook binnen de Stadia- en de Proeve-leerlijn is hier veel aandacht aan besteed wat onder andere tot uiting komt door de goede scores op de onderdelen 'Ordenen' en 'Structureren' van de E4-toets (hogere scores dan de normgroep). Wanneer leerlingen goed thuis zijn in het getallengebied 0-100 dan biedt de getallenlijn ook hulp bij het uitvoeren van gevarieerde oplossingsmanieren.

Door de 'natuurlijke' structuur van de getallenlijn wordt het voor leerlingen duidelijk of ze vooruit of terug moeten springen wanneer ze bijvoorbeeld de G10V-procedure gebruiken. Een ander belangrijk aspect is dat de leerlingen de uitgevoerde bewerking zelf op de lege getallenlijn moeten weergeven. Daarbij moeten ze ook zelf bepalen in welk getallengebied ze gaan werken. Dit leidt allemaal tot een grote mentale activering die bij andere hulpmateriaal nog wel eens achterwege blijft (bijvoorbeeld bij een ingevuld honderdveld of staafjes waarbij het antwoord kan worden 'afgelezen').

Aan de andere kant zijn er ook punten van kritiek te noemen bij de opbouw van de Proeve-leerlijn. Zo wordt er vanaf het begin vrijwel alleen gebruik gemaakt van de getallenlijn als model, wat door sommige mensen als te eenzijdig wordt gezien. Daarnaast wordt vrij lang doorgedaan met het rekenen op de getallenlijn en maken niet alle zwakke rekenaars de overstap naar meer abstracte notatiewijzen.

Aan de andere kant hebben zwakke rekenaars naar onze mening met de getallenlijn een hulpmiddel in handen waarmee ze vele rekenproblemen zelfstandig kunnen oplossen waardoor ze meer zelfvertrouwen en plezier in rekenen krijgen. Ze zijn daarbij zelfs in staat om op een efficiënte en correcte wijze verschillende oplossingsmanieren te gebruiken en onderscheiden zich daarbij niet wezenlijk van goede rekenaars.

noten

- 1 Dit onderzoeksproject is dankzij een subsidie van de Nederlandse organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (projectnr 575-90-607) uitgevoerd aan de Rijksuniversiteit Leiden (Vakgroep Onderwijsstudies) in samenwerking met het Freudenthal instituut. Wij willen hierbij de leerlingen en leerkrachten uit groep 4 van de volgende onderzoeksscholen hartelijk bedanken voor hun medewerking: 'De Zwaluw' en 'Stevenshofschool' uit Leiden, 'De Tjalk' en 'De Spelevaert' uit Zoetermeer, 'St Josepschool' uit Heerhugowaard, 'Mariaschool' uit Den Hoorn, 'Marnixschool' uit Katwijk, 'De Dolfijn' en 'De Kring' uit Hellevoetsluis, 'Woonstede' uit Den Haag, 'Schepershoeke' uit Breukelen, 'Drie Koningen' uit De Meern en 'Delfshaven' uit Rotterdam. Alle scholen werken ook na het onderzoek nog steeds met de experimentele werkbladen.
- 2 Wij hebben om verschillende redenen gekozen voor de methode 'Rekenen & Wiskunde'. Een van de redenen was dat de indeling in tweewekelijkse blokken van zowel de leerlingboekjes als de handleiding voor de leerkrachten erg overzichtelijk is. Hierdoor was het voor ons betrekkelijk eenvoudig om de leerstof voor groep 4 te herschrijven. Overigens is dit alleen gebeurd voor het optellen en aftrekken tot 100: onderwerpen als vermenigvuldigen, klokkijken, standpuntbepaling en dergelijke zijn gewoon overgenomen uit genoemde methode. De resultaten zoals die hier beschreven worden, zijn natuurlijk ook toepasbaar voor scholen die met een andere methode werken.
- 3 Op de Panama najaarsconferentie van 1995 zijn de eerste resultaten gepresenteerd met betrekking tot het effect van beide leerlijnen op prestaties van goede

en zwakke rekenaars. Deze resultaten zijn in dit artikel afgedrukt. Daarnaast is het de bedoeling dat begin 1997 het proefschrift van de eerste auteur verschijnt waarin de resultaten van het hele onderzoeksproject beschreven worden.

- 4 Het Cito gebruikt letters om het niveau van een leerling aan te geven. Die niveau-aanduiding ziet er als volgt uit: niveau A (± 25 procent net boven landelijk gemiddelde scorende leerlingen), B (± 25 procent net boven landelijk gemiddelde scorende leerlingen) C (± 25 procent net onder landelijk gemiddelde scorende leerlingen), D (± 15 procent ruim onder het landelijk gemiddelde scorende leerlingen), E (± 10 procent laagst scorende leerlingen).
- 5 Het Cito-LeerlingVolgSysteem kent toetsen in het midden van het jaar (M3, M4, ...) en aan het eind van het schooljaar (E3, E4, ...).

literatuur

- Baroody, A. & H.P. Ginsburg (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.). *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 75-112.
- Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(4), 294-323.
- Bokhove, J. & J. Janssen (1988). Periodiek Peilingsonderzoek in het basisonderwijs (4). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 7(2), 16-34.
- Felix, E.J.H.M. (1992). *Learner-based versus expert-based tutoring of arithmetic skills*. Amsterdam: Vrije Universiteit (dissertatie).
- Glaser, R. & M. Bassok (1989). Learning theory and the study of instruction. *Annual Review of Psychology*, 40, 631-666.
- Gravemeijer, K., M. M. van den Heuvel-Panhuizen, G. van Donselaar, N. Ruesink, L. Streefland, W. Vermeulen, E. te Woerd & D. van der Ploeg (1993). *Methoden in het Reken-Wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek*. Utrecht: CD- β Press.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD- β Press (dissertatie).
- Mulken, F. van (1992). *Hoofdrekenen en Strategisch Handelen*. Leiden: Rijks Universiteit (dissertatie).
- Ruijsenaars, A.J.J.M. (1994). Speciaal rekenen. In: M. Dolk, H. van Luit, & E. te Woerd (Red.). *Speciaal rekenen*. Utrecht: Freudenthal instituut, 29-42.
- Treffers, A. & E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool - deel 2: Basisvaardigheden en Cijferen*. Tilburg: Zwijzen.
- Treffers, A. & A. Veltman (1994). Relatie-boog als brug tussen bewerkingen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 12(3), 11-14.
- Verschaffel, L., E. de Corte & S. Lasure (1995). (On)realistisch interpreteren en oplossen van schoolvraagstukken. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 13(4), 3-12.
- Wijnstra, J.M. (red.) (1988). *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool*. PPOON Reeks nr. 1. Arnhem: Instituut voor Toetsontwikkeling.