
Rekenen op de rand van de krant

- hoofdrekenen en schattend rekenen -

W. Faes

Hogeschool West Brabant

W. Uittenbogaard

Hogeschool Alkmaar/Panama

M. Dolk

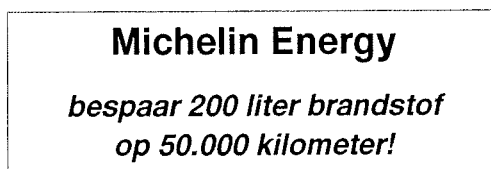
Hogeschool van Utrecht/Panama

1 Inleiding

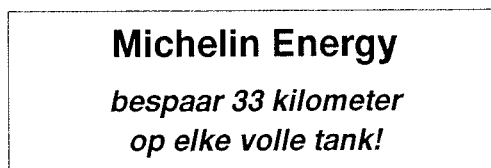
Rekenen op de rand van de krant betekent vaak rekenen aan de hand van een krantartikel, of het opsporen van fouten en de achtergronden daarvan. Wij pleiten ervoor om het idee veel ruimer op te vatten. Allerlei situaties in je omgeving geven aanleiding tot 'even' narekenen op een kladje of op de rand van een krant. Om maar met een voorbeeld te beginnen, beschrijven we het rekenwerk naar aanleiding van twee reclameborden langs de snelweg.

Benzinebesparing door goede banden

In juli en oktober 1994 stonden langs de autosnelwegen enkele grote billboards met reclame voor autobanden (fig. 1a en 1b). De advertentie van juli was in oktober aangepast.



figuur 1a: billboard juli 1994



figuur 1b: billboard oktober 1994

Zo'n aanpassing is interessant. Bij ons komen direct twee vragen naar boven. Waarom hebben de ontwerpers de tekst veranderd, en, welke aannamen hebben zij bij deze verandering gehanteerd? De eerste vraag is snel beantwoord, 33 kilometer op een volle tank is voorstelbaar. Zes liter op 50.000 kilometer zegt de mensen weinig. Wij vinden het interessant om de rekenkundige aannamen te achterhalen die aan de verandering ten grondslag zullen liggen. Daar zullen we hier een begin mee maken. Op grond van de beperkte gegevens uit beide reclames is het moeilijk de reden van de verandering achterhalen, wel is het mogelijk om te onderzoeken welke uitgangspunten de ontwerper vermoedelijk heeft gehanteerd. We beginnen daarom met enkele aannamen en zullen deze al werkend gaan aanpakken. Als een auto 1 : 12,5 rijdt, dan verbruikt de auto vierduizend liter over die 50.000 kilometer. Volgens het reclamebord van juli wordt op die vierduizend liter tweehonderd liter bespaard, dat is een besparing van vijf liter op de honderd liter, oftewel een besparing van 5 procent.

Hoeveel zal de besparing volgens het tweede billboard zijn? Op een volle tank is 33 kilometer waarschijnlijk 33 kilometer op zestig liter, oftewel 33 kilometer op 750 kilometer. Dat is iets minder dan een besparing van een kilometer op de 20 kilometer, dus ook vijf procent. Als we het nauwkeuriger uitrekenen 66 kilometer op 1500 kilometer, oftewel 22 kilometer op 500 kilometer, dus 4,4 kilometer op 100 kilometer. Dat betekent een besparing van 4,4 procent.

Maar stemmen die billboards nu eigenlijk wel overeen? Sommige mensen menen van niet, het verschil tussen 5 procent en 4,4 procent is immers erg groot. Kunnen we trouwens 4,4 procent besparing op de kilometers vergelijken met 5 procent besparing op de benzine? Of is dat het vergelijken van appels met peren? Anderen zeggen dat het verschil niet zo groot is, zeker niet gezien de aannamen die gemaakt zijn. We hebben immers aangenomen dat een auto 1 op 12,5 rijdt en dat een tank zestig liter bevat. We weten dat sommige auto's zuiniger rijden en ook dat er auto's zijn met een kleinere en auto's met een grotere tankinhoud. Veranderen we de aannamen een klein beetje dan verandert ook het verschil tussen de percentages. Die twee billboards zullen dus wel overeenkomen. Als we nu aannemen dat die billboards op dezelfde situatie slaan, dan kunnen we narekenen welke aannamen die ontwerper waarschijnlijk in gedachten had. Er zijn natuurlijk ook andere reclamekreten mogelijk: 'Meer dan drie liter besparing bij een verbruik van vijftig liter' of 'Meer dan vijf procent besparing.'

hoofdrekenen en schattend rekenen vergeleken

Hoofd- en schattend rekenen zijn niet hetzelfde, maar hebben wel veel met elkaar te maken.

'Schattend rekenen is niet hetzelfde als hoofdrekenen, hoewel er grote overeenkomsten zijn. Bij schattend rekenen heb je de vrijheid om de rekengetallen naar je hand te zetten. Daardoor kun je hoofdrekenen gemakkelijker maken. Maar tijdens het 'stroomlijnen', het afronden en afbreken van getallen, is er de noodzaak om de gemaakte afwijking (fout) binnen de perken te houden. Dit wordt nog nijpender als men met de gestroomlijnde getallen gaat rekenen.' (Goffree, 1992)

Hoofdrekenen doet vaak denken aan rekenen zonder pen en papier. Vroeger werd bij hoofdrekenen aan kinderen gevraagd allerlei sommen in het hoofd uit te rekenen. Nu denken we bij hoofdrekenen aan rekenen-met-het-hoofd, dat betekent dat er best papier gebruikt kan worden, bijvoorbeeld om een tussenresultaat op te schrijven of om een aanname te noteren. Cijfermatig een som aanpakken, of dat nu op papier of in-het-hoofd gebeurt, hoort er niet toe.

Treffers (1991) onderscheidt vier vormen van hoofdrekenen; zelf zouden we de 'nulde' vorm nog niet met hoofdrekenen willen aanduiden. Deze vier vormen beschrijven wij met:

Hoofdrekenen 0:

Hoofdcijferen, de getallen worden meteen (in gedachte) onder elkaar geplaatst en er wordt gecijferd. Dat men veel deeltkomsten niet opschrijft maar onthoudt, doet niets af aan het feit dat men toch eigenlijk cijfert, alhoewel het op papier lijkt dat men gebruik heeft gemaakt van eigenschappen.

Hoofdrekenen 1:

Men werkt op een standaardmanier met getallen. Bijvoorbeeld 7×24 , dat doe je zo: $7 \times 20 + 7 \times 4$.

Dit gestileerde hoofdrekenen is van oudsher de meest beoefende vorm van hoofdrekenen in het basisonderwijs en sterk verwant aan het cijferen, daar het ook immers volgens één standaardprocedure wordt uitgevoerd.

Hoofdrekenen 2:

Dit is een gevarieerde vorm van hoofdrekenen.

$7 \times 24 = 7 \times 20 + 7 \times 4$ dat kan, maar je kunt ook aan zeven kwartjes denken, dat is f1,75 en dan zeven cent eraf.

Hoofdrekenen 3:

Het gaat om getalgevoeligheid. Bijvoorbeeld iemand beweert: 'Ik werk wel 220 uur per week! Kan dat?'

Je gaat benaderend rekenen: zeven dagen van 24 uur, zeg 25 uur, dat is $7 \times 25 = 175$ uur (denk aan kwartjes) dus die 220 uur kan nooit!

Of $220 \text{ uur} : 7 = \dots 8 \times 25 = 200$ dus er komt meer dan 25 uit \dots . En dat kan nooit, een dag heeft maar 24 uur.

Je kunt ook zeggen: het zijn type opgaven waarbij de oplosser zelf gegevens moet aandragen en daarmee gaat rekenen om het probleem te kunnen oplossen. Zogenaemde open problemen met kranteknipsels spelen daarbij een essentiële rol.

Het rekenen bij de twee reclameborden is dus een vorm van hoofdrekenen
3. We moesten allerlei aannamen maken om er aan te kunnen rekenen, en

we moesten zelfs onze eigen vragen stellen en daarbij ook overwegen of we tevreden waren met ons eigen antwoord. Hoofdrekenen 3 impliceert dus ook het reflecteren op het gemaakte rekenwerk.

Hoe onderwijs je hoofdrekenen en schattend rekenen?

'Schattend rekenen is moeilijker te onderwijzen dan hoofdrekenen. Daarvoor zijn twee omstandigheden verantwoordelijk.

In de eerste plaats blijken de kinderen in het algemeen de zekerheid van de precieze berekening te verkiezen boven het onzekere van de schatting. Het komt nogal eens voor dat ze, gevraagd naar een globale schatting, eerst het antwoord precies berekenen en dat antwoord vervolgens een beetje afronden.

In de tweede plaats is het antwoord op de vraag of een bepaalde schatting 'goed' is, niet steeds bevredigend te geven. Een aardig voorbeeld hiervan is de volgende PPON-opgave: 'In de prijzenpot zit f 6327,75. Er zijn 8 winnaars die dit met elkaar moeten delen. Hoeveel geld moet ieder dan krijgen? Rond af op honderd gulden.' Wat blijkt volgens de onderzoekers? 28% van de leerlingen rondt af op 6400 en deelt door 8: 'ieder krijgt ongeveer f 800,-. Dat vinden ze goed. Er is evenwel 5,3% dat naar beneden afrondt, op 5600. Ieder krijgt ongeveer f 700,-. Dat wordt fout gerekend, natuurlijk omdat 700 veel verder van het precieze bedrag af zit dan 800. Maar wat vind je van kinderen die als volgt redeneerden: 'Je moet de prijswinnaars niet een groter bedrag voorspiegelen dan ze in werkelijkheid gewonnen hebben. Dus ga aan de lage kant zitten. In de opgave staat dat er op honderd gulden moet worden afgerond, dus moet het maar 700 worden.' Wanneer is de schatting 'goed'? Eigenlijk maakt de leraar dat niet uit, maar de context waarin de schatting plaatsvindt. Bedenk dus dat schattend rekenen eigenlijk alleen in concrete situaties en in herkenbare contexten echt beoefend kan worden. Werkwijze en antwoord dienen contextafhankelijk te zijn en als zodanig ook door de rekenaar zelf beoordeeld te worden. Schatten kun je alleen leren door het veel te doen. Maar zelfs dat kan onvoldoende zijn. Je moet als je wilt leren van je eigen schatten, de reflectie niet vergeten. Je moet terugkijken naar je eigen gedachtengang en bedenken hoe het allemaal nog 'beter' had gekund.' (Goffree, 1992)

Problemen bij hoofdrekenen zijn vooral mooi als ze direct uit de realiteit komen, als kinderen ze bij wijze van spreken gisteren in de krant of op de televisie hadden gezien. Dat betekent dat hoofdrekenproblemen zoeken, neerkomt op het selecteren van actuele problemen.

Zou het waar kunnen zijn: gemiddeld eet een inwoner van Nederland 58 kilo brood per jaar? Een Nederlands gezin besteedt voor 173 gulden per week in een supermarkt?

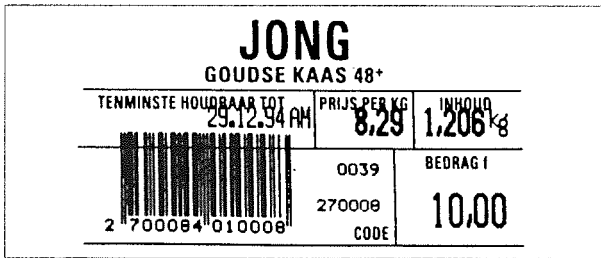
In een nieuwe bibliotheek komen 50.000 boeken. Hoeveel vierkante meter vloeroppervlakte moet voor die bibliotheek worden uitgetrokken?

Falko Zandstra viel op 12 februari 1995 bij het wereldkampioenschap schaatsen tijdens de 1500 meter over zijn eigen armband. Tijdens een interview later die dag merkte hij op een goede kans te hebben gehad als hij niet gevallen zou zijn. Zou Falko Zandstra inderdaad een kans hebben gemaakt op het wereldkampioenschap schaatsen, of was hij aan het opscheppen?' (fig.2)

WK schaatsen allround in Baselga di Piné (Ita)					
	puntentotaal	500	5000	1500	10.000
1 Ritsma (Ned)	160.992	38,42 (3)	7.03,08 (5)	1.53,31 (1)	14.09,89 (1)
2 Shirahata (Jap)	161.864	39,12 (13)	7.02,40 (4)	1.53,39 (2)	14.14,16 (2)
26 Zandstra	123.445	38,66 (7)	7.06,95 (15)	2.06,27 (35)	

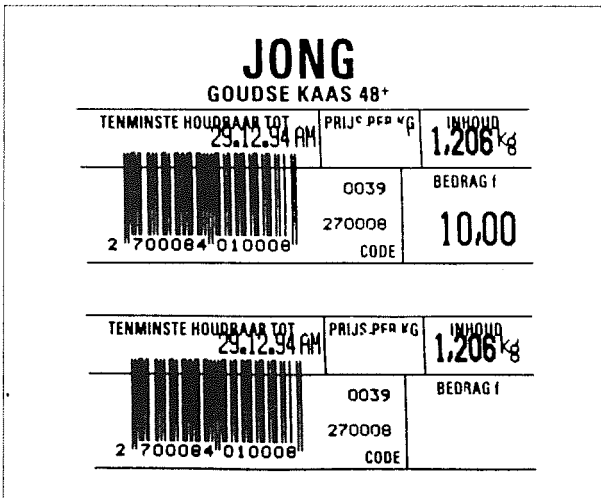
figuur 2: NRC, 13.2.1995

Maar ook uw boodschappen geven aanleiding tot veel rekenen en daarbij is de realiteit ook een handje te helpen. Neem bijvoorbeeld dit etiket (fig.3).



figuur 3

Lak enkele gegevens op het etiket weg en je hebt meteen een probleem dat schattend rekenen uitlokt (fig.4).



figuur 4

Voorgaande problemen zijn niet in enkele minuten opgelost, besproken en door alle kinderen op eigen niveau begrepen. Leerlingen hebben bij zulke problemen tijd nodig om er samen en om er alleen aan te werken en om daarna met elkaar in een klassegelsgesprek op het probleem en de oplossingen terug te komen. Als scholen hoofdrekenen en schattend rekenen serieus willen nemen, zullen lessen waarin zulke problemen aan de orde komen naast de inoefenlessen moeten worden ingeroosterd.

hoofdrekenen en schattend rekenen langs doorgaande lijnen

Hoofdrekenen start in de huidige methoden niet in groep 6 of groep 7 maar veel eerder. Het zit vanaf het begin al in de methoden en de didactiek. Bij elk onderwerp wordt steeds gestart vanuit de begripsvormende fase, waarin het hele gebied vanuit voorstelbare situaties verkend wordt. Aansluitend krijgen modellen en formules een belangrijkere rol, maar wordt nog steeds teruggekoppeld naar situaties. Hierbij sturen de situatie, modellen en materialen niet naar een vaste oplossingswijze, maar geven steeds aanleiding tot verschillende manieren van oplossen. Anders gezegd: leerlingen kunnen in veel verschillende situaties een model of formule maken van die situatie en worden heel geleidelijk aan uitgedaagd, die ontworpen modellen en formules ook in andere situaties te gebruiken. Het is daarbij vaak de leraar die de leerlingen in staat kan stellen zelf te kiezen tussen hoofdrekenen, schattend rekenen of het gebruik van de zakrekenmachine. De discussie over deze keuze zal dus zo nu en dan ook in het klassegelsgesprek terug moeten komen.

Hoofdrekenen, schattend rekenen en het gebruik van verschillende aanpakken daarbij is op heel veel plaatsen in de methode terug te vinden. Kenmerkend is dat de leerling een voortdurende progressie in strategieën meemaakt. Daarbij breidt de leerling zijn arsenaal aan ankerpunten en ankersommen verder uit en gebruikt voor hem handige strategieën. Wie hiervoor een ingang in de methode zoekt, kan onder meer op de volgende plaatsen kijken:

Tellen: van één voor één aanwijzend of aanrakend tellen tot een structuur zien en in sprongen tellen.

Rekenen onder de tien: van alles tellen tot $3 + 4$ afleiden via $3 + 3 = 6$, $3 + 4 = 7$

Aanleren tafels: van het kennen van de betekenis van 6×3 tot handig uitrekenen van 6×12 .

Aanleren cijferend delen: van één voor één aftrekken via aftrekken van grotere groepen tot rekenen met nullen.

hoofdrekenen en schattend rekenen in de basisvorming

De wiskundeboeken voor klas 1 en 2 van het voortgezet onderwijs bevatten elementen van voortgezet rekenen. Op sommige plaatsen is daarbij ook

aandacht voor het hoofdrekenen en schattend rekenen. Daarmee kunnen we nu gelukkig stellen dat hoofdrekenen en schattend rekenen op de basisschool begint, maar in de basisvorming wordt voortgezet. We willen hierbij aantekenen dat er ook enkele kritiekpunten bij het voortgezet rekenen zijn, zeker bekeken vanuit hoofd- en schattend rekenen. We zullen hier twee bezwaren noemen.

Ten eerste ligt bij het voortgezet rekenen in de basisvorming de nadruk vooral op verhoudingen, kommagetallen, breuken en de zakrekenmachine. Het hoofdrekenen dat voorkomt, is niet auditief en er is weinig integratie met de zakrekenmachine. Als hoofdrekeneneigenschappen gebruikt worden, wordt niet altijd aan de leerling overgelaten welke strategie hij mag gebruiken, maar worden twee manieren aangeboden waaruit de leerling kan kiezen.

Ten tweede worden bij het voortgezet rekenen en bij de introductie van nieuwe onderwerpen als negatieve getallen alleen maar kleine getallen gebruikt. Bij de introductie van negatieve getallen worden vooral opgaven als -2×-5 bekeken, en wordt niet gevraagd een schatting te maken van de vermenigvuldiging -352×-199 .

een hoofdrekenles

Hoofdrekenen en schattend rekenen leer je niet uit een boekje. Het rekenboek kan wel aanzetten geven, maar het uitwisselen van strategieën en redeneringen tussen leerlingen onderling en met de leraar is van het grootste belang.

Het hoofdrekenen zal niet door ieder probleem gestimuleerd worden. De leraar zal alert moeten zijn op actuele problemen die de leerlingen spontaan tot hoofdrekenen zullen aanzetten.

Een mooie opbouw van een les kan zijn:

– *introductie van een probleem*

Hebben jullie naar schaatsen gekeken? Was het goed? Wie heeft gewonnen? He, ik dacht dat Zandstra zou gaan winnen? Ja, maar ik zag het begin van de 1500 meter en toe ging hij wel heel hard. Waarom won hij dan niet? Oh gevallen. Zou hij zonder die val eigenlijk hebben kunnen winnen?

– *aan de slag*

‘Zou Zandstra nog kampioen hebben kunnen worden, als hij niet gevallen was?’ De leraar loopt rond terwijl de leerlingen in groepjes aan de slag gaan. Hier en daar geeft hij wat inlichtingen of een aanwijzing, maar hij luistert vooral naar mooie, onverwachte ideeën, invallen en aanpakken. Hij luistert ook naar ideeën die in een groepje niet uitgewerkt kunnen worden en die een ander groepje de sleutel tot een oplossing zijn. Hij kijkt naar cruciale momenten in het werk. Bijvoorbeeld

- welke tekening of welke formule uiteindelijk tot een oplossing leidt;
- eventueel wordt tussendoor een kort gesprek gehouden om te zorgen dat de leerlingen met het probleem verder kunnen. Delen van een oplossing of van verschillende aanpakken kunnen daarbij op het bord verschijnen;
 - *gesprek met de klas*
Enkele redeneringen verschijnen op het bord. De leraar kiest wie mag beginnen op grond van hetgeen hij tijdens het rondlopen heeft gehoord. Als eerste komt een groepje dat een oplossing heeft dicht bij de context. Daarna komen groepen die abstractere en formelere oplossingen hebben. De tijden van Ritsma en Zandstra verschijnen op het bord. Ook de puntentelling komt er bij. En de manier om gereden tijden per afstand om te zetten in punten.

2 ten slotte

Als je zo met een probleem bezig bent, dan zul je na afloop verzuchten: 'We hebben maar één probleem opgelost vandaag, maar wat zijn we intensief bezig geweest.' Kinderen moeten hier ook aan wennen. Toen een leraar voor het eerst met dit soort lessen begon, zei een meisje na afloop tegen haar moeder: 'We hebben vandaag maar één probleem gemaakt, als meener zo doorgaat, komt het boek nooit uit.' Toch zijn we juist met zulke problemen en zulke werkvormen op weg naar goed hoofdreken- en schatonderwijs.

noot

- 1 Tegenwoordig vermelden televisieverslaggevers alle resultaten, vergelijkingen en dergelijke, gevoed door een overvloed aan computergegevens. Zelf rekenen is daardoor bij deze sport niet meer noodzakelijk. De uitspraak van Zandstra wordt echter niet direct door die computergegevens onderbouwd, maar door rekenen opeens weer wel belangrijk wordt.

literatuur

- Goffree, F. (1992). *Wiskunde & Didactiek 2*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Treffers, A. (1991). Hoofdrekenen toen en nu. In: M. Dolk & E. Feijs. *Deskundigheid. Panamacursusboek 9*. Utrecht: HMN/FEO, OW & OC.
- Gribling, S., R. Keijzer, W. Vermeulen & W. Faes (1994). *De Schatkamer*. Apeldoorn: Van Walrave.