Paradigma's van het basisonderwijs

F. Barth
CHN, Leeuwarden
W. Oonk
Hogeschool van Amsterdam
C. Schinkel
IPabo, Amsterdam

1 inleiding

Mensen die in het onderwijs werkzaam zijn, hebben meestal wel een aantal verhalen uit hun praktijk paraat. Vaak gaat het dan om de beschrijving van een grappige of anderszins opvallende ervaring met een leerling of collega. Het zijn voor het overgrote deel verhalen zonder enige pretentie. Anders wordt het als die verhalen een boodschap meegeven of oproepen. Zulke verhalen kunnen een grote meerwaarde krijgen.

Theo Thijssen was bijvoorbeeld iemand die prachtige onderwijstaferelen kon neerzetten. Hij was in staat om met een enkele alinea de sfeer in een klas weer te geven; vaak nog meer dan dat! Hierna volgt een citaat uit 'De gelukkige klas' (1926). Hij vertelt over het moment dat hij in zijn vijfde klas de kaart van Europa introduceert.

> De verleiding voor mij was groot - de oude verleiding die telkens terugkomt - om die rare kleinheid van ons landje duidelijk te maken, door te gaan verhandelen over de 'schaal'; maar ik ben verstandig gebleven en heb alle verklaarderij achterwege gelaten, en onnozelweg mee schik gehad; alleen heb ik heel voorzichtig een eerste druppel voorbereiding van het begin van het schaalbegrip toegediend, door m'n klas in vertrouwen mee te delen: 'In de hoogste klas krijgen we een kaart van de wereld - dan lachen jullie je helemaal slap: daar is Nederland zo klein dat er amper plaats is om een stip te zetten voor Amsterdam'.[1]

Deze alinea spreekt boekdelen. Je proeft de sfeer in de groep, de manier waarop Thijssen met de kinderen omgaat en vooral ook de natuurlijke wijze waarop hij het schaalbegrip een eerste vulling geeft.
Nog zo'n prominente, zelfs wereldvermaarde verteller, was professor Hans Freudenthal. Wie kent niet een paar mooie verhalen over zijn kinderen en kleinkinderen? Zoals het volgende verhaal van Bastiaan (Goffree, 1994).[2]

> 'Bastiaan
> We zitten aan tafel; Bastiaan tegenover zijn jongere zusje, de vader tegenover de moeder, de grootmoeder tegenover de grootvader. Ineens, bij het dessert, zegt Bastiaan, met zes aalbessen op zijn lepeltje: "Zoveel zijn wij." Ik vraag: "Waarom?"' Hij: "Ik zie het zo." En dan meteen: "Twee kinderen, twee groten en twee opa en oma." (Mogelijk lagen die aalbessen op het lepeltje in dezelfde dobbelsteenconfiguratie als waarin wij tegenover elkaar aan tafel zaten, maar dat heb ik niet kunnen zien.) Het was trouwens geen toeval. De volgende dag, met vier sneeuwbessen op zijn handpalm, zei hij: "Zoveel wonen wij thuis." Bastiaan was toen nog onzeker in 't gebruik van getallen en hij weigerde hardnekkig te tellen, hetgeen op die leeftijd uitzonderlijk is. In plaats van echt getalbegrip laat hij in dit verhaal iets van meetkundige aard zien, hetgeen misschien voor deze leeftijd normaal is.'

Bastiaan (4;3) telt niet, maar herkent overeenkomsten tussen hoeveelheden aan de meetkundige structuur. Het is een van de vele voorbeelden van de wijze waarop Freudenthal met een mooi verhaal inzichten in leerprocessen van kinderen duidelijk probeert te maken. Wie eenmaal zo'n verhaal heeft gehoord of gelezen vergeet niet licht de geschiedenis zelf noch de strekking ervan. Dat is de kracht van dit soort verhalen; ze zijn theoriegeladen, ze dragen de kern van leertheoretische of didactische noties in zich. En daarmee is nu precies het doel aangegeven dat Freudenthal met deze vertellingen beoogde: observaties van unieke leermomenten beschrijven die inzicht geven in leerprocessen, in het bijzonder in leersprongen of niveauverhogingen.
Zulke kenmerkende 'schoolvoorbeelden' of paradigma's kunnen van grote betekenis zijn voor al diegenen die zich betrokken voelen bij het onderwijs en die willen blijven leren van hun eigen praktijk. Freudenthal (1980) schrijft daarover:

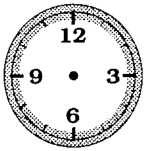
> 'Van één paradigmatisch geval leer je meer dan van honderd niet ter zake doende.(...) Van zo'n buitenkansje moet je profiteren.'

Freudenthal heeft die kans optimaal benut. Vooral waar het gaat om het leggen van relaties tussen theorie en praktijk. En met name die koppeling kan bij uitstek gemaakt worden door kernachtige, theoriegeladen verhalen. Het volgende voorbeeld laat dat nog eens mooi zien. Het is een observatie van een gesprek dat David heeft met z'n leraar.[3]

> David: Vijftien is oneven en een half is even.
> Leraar: Vijftien is oneven en een half is even? Is dat zo?
> David: Ja!
> Leraar: Waarom is een half even?
> David: Omdat ... eh ... eenvierde is oneven en dus moet een half even zijn.
> Leraar: Waarom is eenvierde oneven?
> David: Omdat het maar drie zijn.
> Leraar: Wat is drie?
> David: Eenvierde.

David: Eenvierde.
Leraar: Eenvierde is maar drie?
David: Zo deed ik dat in mijn verdeling(...)

Wie dit gesprek voor het eerst leest zal er waarschijnlijk weinig van begrijpen. Eenmaal op het spoor van modellen voor breuken, kan de gedachte aan 'de klok' als model postvatten (fig. 1).



figuur 1

Dit verhaal van David wordt bij het vak Wiskunde & Didactiek op de Pabo wel gebruikt als een kernvoorbeeld dat aantoont hoe kinderen eigen gedachten kunnen vormen, in dit geval over breuken. Het toont ook hoe kinderen soms op eigen kracht een denkmodel ontwerpen dat hen hulp biedt bij het betekenis geven aan getallen of het oplossen van problemen. Met dergelijke verhalen in zijn theoretische bagage, zal een leraar in toenemende mate breder en meer diepgaand de leerprocessen van leerlingen weten te plaatsen en begeleiden.
In de laatste paragraaf van dit artikel zullen we verder ingaan op de gebruiksmogelijkheden van paradigma's voor de werkers in het (basis)onderwijs. Maar eerst zullen we het repertoire van deze 'schoolvoorbeelden' nog verder uitbreiden.

2 tien voorbeelden van paradigma's

De drie verhalen uit de inleiding vertellen elk hun eigen boodschap. Het citaat van Theo Thijssen staat voor sfeer in de groep en voor een betekenisvolle introductie van een begrip. Het verhaal van Bastiaan representeert de manifestatie van getalbegrip op meetkundig niveau, terwijl David een schoolvoorbeeld is van de wijze waarop kinderen hun eigen gedachten kunnen ondersteunen. Hier beschrijven we tien paradigma's, elk voorzien van de theoretische of didactische noties waarvoor ze naar onze mening model staan.[4]

Steven

Hij had een tekening gemaakt van een meertje met een paar eendjes die achter elkaar zwommen. De leidster zag de tekening en zei: 'Ik zie dat je vijf eendjes in je vijver hebt.' Steven keek verward naar zijn eigen tekening en zei toen: 'Dat is geen vijf, want er is er niet één in het midden.'[5]

Dit verhaal maakt duidelijk dat Stevens (vijf jaar) begrip van de hoeveelheid 'vijf' nog beperkt is tot het beeld van de (meetkundige) dobbelsteenstructuur. Het voorbeeld toont, evenals het verhaal van Bastiaan, een belangrijk aspect van de ontwikkeling van het getalbegrip bij jonge kinderen.

Marian

De volgende opgave komt aan bod in groep 5. Wim werkt in de supermarkt en moet een bestelling van vijftig pakken melk klaar maken voor de zeilschool. Wim haalt vijftig pakken melk en zet ze klaar. Maar de winkelchef zegt: 'Je moet ze nog wel in kratten doen'. Er gaan zes pakken in een krat. 'Willen jullie nu', vraagt meester Piet even uitrekenen hoeveel kratten Wim moet pakken en houdt hij nog losse pakken over?' De groep komt er uit: acht kratten kunnen gevuld worden er blijven twee losse pakken over. De volgende opdracht aan de groep is: hoe zit het nu met 53 pakken melk? De hele klas komt met het antwoord: acht kratten en vijf losse pakken, behalve Marian, zij zegt: 'negen kratten en één pak eruit'.[6]

Deze anekdote illustreert voor welk dilemma je soms komt te staan: de oplossing van Marian is schitterend, maar didactisch gezien wil je eigenlijk de andere kant op. Welke beslissing neem je als leraar in een dergelijke situatie?

Jurriaan

Ik vraag Jurriaan: 'Wat is rekenen?' Jurriaan antwoordt: 'Dat lijkt bijna op tekenen.' Vervolgens heb ik hem op drie momenten, zo ongeveer om de week, gevraagd of hij tot tien kan tellen. De laatste tijd is Jurriaan nogal erg gericht op tellen. De vraag leverde de drie hier volgende antwoorden op
1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12
1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 30, 40, 50, 60, 10
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 30, 40, 50, 60, 10, met als toevoeging:
'Die veertig hoeft er niet bij, maar het mag wel!'[7]

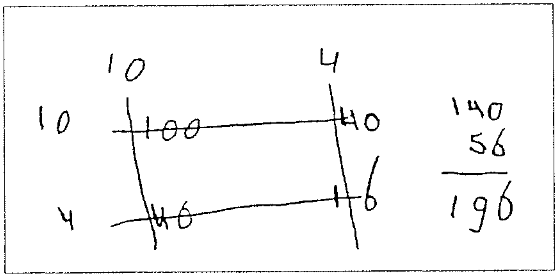
Jurriaan (vier jaar) laat het plezier zien dat jonge kinderen kunnen beleven aan het tellen. Tevens geeft dit verhaal betekenis aan het begrip ontwikkelings(stadium).

Els

Els is een gemiddelde rekenaar, zij kan kale sommen behoorlijk oplossen. Op een dag werd haar de volgende opgave voorgelegd:

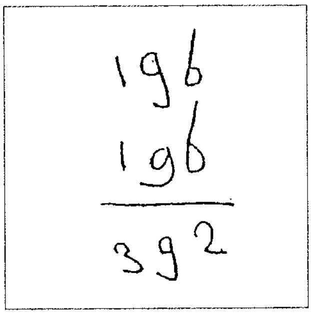
Naast mij woont een familie met vader, moeder en een zoon. De zoon is veertien jaar. Zijn vader is vier keer zo oud. Hoeveel jaar is vader?[8]

Els tekent (fig.2).



figuur 2: 'dat is al twee keer opgeteld'

En dan:



figuur 3: 'dat is dus vier keer'

Het verhaal van Els geeft een beeld van de problemen die modellen soms voor kinderen kunnen veroorzaken, en laat zien hoe een schijnbaar inzichtelijk model voor sommige kinderen veel mechanistischer kan blijken te zijn dan wij zouden verwachten. In dit geval gaat het om het kruispuntenmodel waarbij op de achtergrond het optellen als notie meespeelt.

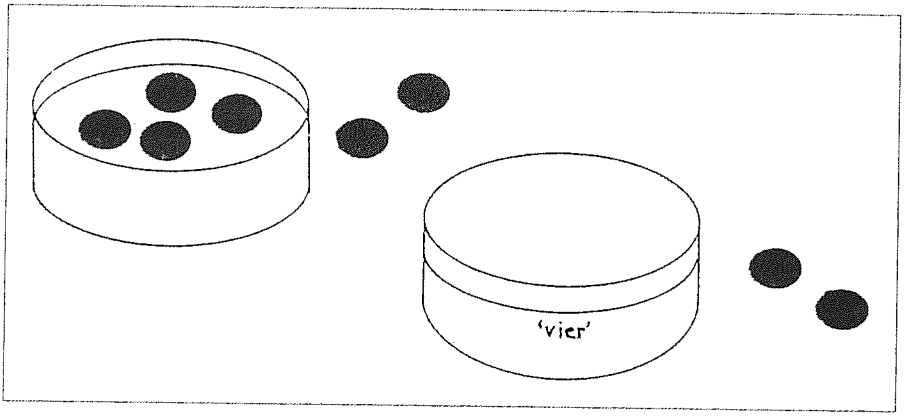
Andy

Andy heeft het vandaag moeilijk met mij gehad. Ten slotte loste hij het vraagstuk op dat ik hem gegeven had. Maar ik vraag mij wel af wat hij geleerd heeft. Niet veel; hij heeft geen inzicht gekregen in de verworvenheden van het vermenigvuldigen. Het enige dat hij voor al zijn tijd in de plaats kreeg, was de herinnering aan een lange en pijnlijke ervaring, vol mislukking, frustratie, angst en spanning. Hij voelde zelfs geen bevrediging, toen hij de som had gemaakt; slechts opluchting omdat hij er niet langer over hoefde te piekeren. Hij is niet dom. Ondanks zijn zenuwachtigheid en angst is hij naar sommige dingen heel benieuwd en hij toont dan een helder verstand, is vol enthousiasme en begripsvermogen en zijn schrijven verraadt veel ideeën. Maar hij is dodelijk bevreesd. Hij kan niet leren rekenen omdat zijn geest zo langzaam van de ene gedachte naar de andere be-

> weegt, dat het verband verloren raakt. Zijn geheugen bewaart niet wat hij leert, vooral omdat hij er niet op wenst te vertrouwen. Elke dag moet hij opnieuw becijferen dat 9 + 7 = 16. Hoe kan hij anders zeker zijn dat die uitkomst niet is veranderd of dat hij niet opnieuw een fout heeft gemaakt in de al eindeloze rij van vergissingen? Hoe kun je ooit op je eigen gedachten vertrouwen als er al zoveel verkeerd bleken te zijn? Ik kan niet inzien hoe hij zo verder kan leven, tenzij hij zich kan losmaken uit de kringloop van falen, ontmoediging en angst waarin hij gevangen zit. En ik ben er niet zeker van dat wij, ouderen, hem willen bevrijden. Het is geen toeval dat deze knaap bang is.[9] (John Holt)

Dit verhaal is een schoolvoorbeeld van de weinig opwekkende situatie waarin achterblijvers op het gebied van rekenen zich bevinden; het ontberen van succeservaringen en de negatieve spiraal waarin dergelijke leerlingen terecht komen. Bij Andy gaat het om een volledig gebrek aan zelfvertrouwen op het gebied van rekenen, en wel in zo'n sterke mate dat hij zelfs de opgaven waarvan hij de uitkomsten paraat heeft, voor de zekerheid toch maar uitrekent.

Eikels in een doosje



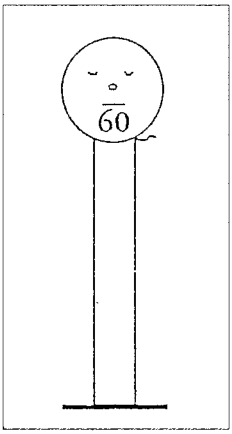
figuur 4

Bovenstaande plaatje (fig.4)[10] staat voor het op een natuurlijke, vanzelfsprekende wijze worden uitgenodigd tot mentaal tellen en tot verkorten. Aanvankelijk ziet het kind een (klein) aantal eikels in het doosje en mag het uitzoeken hoeveel eikels er in totaal zijn: de eikels in het doosje en die ernaast op tafel bij elkaar.

Op een gegeven moment vertelt de leraar hoeveel eikels er in het dichte doosje zitten, de eikels naast het doosje zijn nog wel zichtbaar. Het kind wordt nu als vanzelf tot mentaal tellen of globaalperceptie aangezet. Als dat allemaal lukt, dan kan er bijvoorbeeld worden gevraagd naar het onzichtbare aantal in het doosje als het totale aantal is gegeven. Aanvullend of verkort tellen ligt dan in het verschiet.

Wendy

Wendy zit in groep 7. In haar groep is 'de Kop van Jut' aan de orde (fig.5).[11] Wanneer je zo hard slaat dat je tot boven aan de Jut-lijn komt krijg je zestig punten. Wendy is bezig met een aantal opdrachten rond de Kop van Jut. Ze heeft inmiddels bepaald dat je bij een $\frac{1}{4}$ Jut-lijn vijftien punten krijgt en bij $\frac{3}{4}$ Jutlijn 45 punten. Nu ziet Wendy zich gesteld voor het volgende probleem: 'Barry is tot $\frac{6}{10}$ gekomen. Hoeveel punten heeft Barry behaald?' Wendy geeft aan dat ze hier al direct vastloopt. Ze vraagt om hulp. Dan blijkt dat Wendy wel een idee heeft wat ze moet doen. De Jut-lijn moet in 10 stukken gedeeld worden en een zo'n stukje heet $\frac{1}{10}$. Ik vraag naar de relatie met het aantal te behalen punten: 'Hoeveel punten krijg je als je tot $\frac{1}{10}$ komt?' Wendy blijkt weinig raad te weten met deze vraag. Ze lijkt in de situatie niet direct een deling te herkennen. Ik stel mijn vraag iets sturender: 'Wat gebeurt er met de zestig punten?' Nog lijkt Wendy niet te begrijpen waar ik heen wil. Ik wijs op de inmiddels getekende verdeling in tienen: 'Kijk de zestig moet ook door tien gedeeld worden.' Wendy geeft aan dat ze dit nu wel ziet. Ik kom daarom terug op mijn oorspronkelijke vraag: 'Hoeveel punten bij $\frac{1}{10}$?' En half voorzeggend: 'Hoeveel is 60 : 10?' Wendy hult zich in een veelzeggend stilzwijgen. Ik moedig haar aan iets te zeggen. Wendy probeert als antwoorden tien, vijf en zes. Het laatste antwoord laat ik door Wendy controleren door tien keer zes af te passen langs de Jut-lijn. Het klopt, 60 : 10 = 6. Ik wil terugkomen op het gestelde probleem. Hoeveel punten krijgt Barry, wanneer hij tot $\frac{6}{10}$ komt? Wendy geeft aan dat ze het overzicht nu helemaal kwijt is. Ik laat het erbij. We weten in ieder geval hoeveel punten iemand krijgt die tot $\frac{1}{10}$ is gekomen.[12]



figuur 5

Het verhaal van Wendy (elf jaar) maakt heel wat zichtbaar van de didactiek. Het maakt voor mij zichtbaar wat het belang van breed inzetbare ge-

automatiseerde basiskennis is; je moet in dit soort situaties een deling kunnen herkennen en dit als een getallenfeitje paraat hebben. Wendy, die in andere situaties 60 : 10 wel (vrijwel) direct beschikbaar heeft, gaat nu de mist in omdat deze kennis hier flexibel ingezet moet worden. Het verhaal maakt ook zichtbaar dat het reken-wiskundeprogramma zorgvuldig moet worden opgebouwd en dat voortsnellen in het tempo van de methode afhakers creëert.
De anekdote van Wendy maakt ten slotte duidelijk dat je niet te snel je conclusies moet trekken. Het feit dat Wendy $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$ deel van zestig kan bepalen langs de Jutlijn garandeert niet dat ze $\frac{6}{10}$ deel van zestig weet te vinden.

Nienke

> Nienke laat mij de kerstboom zien en zegt: 'En ik weet hoe je de lampjes uit kunt doen, kijk zo!' en Nienke draait aan een lampje. 'Dat heb ik van mama gezien. Mama draait ook altijd aan dit lampje.' Ik vraag: 'Als ik aan een ander lampje draai, gaan dan de lampjes ook uit?' Nienke: 'nee, dat kan alleen bij deze.' Ik draai aan een ander lampje en Nienke kijkt me verbaasd aan.[13]

Dit verhaal van Nienke (5;8) laat zien dat, wanneer je kinderen instructies geeft zonder nadere uitleg, het kan voorkomen dat ze hun eigen theorie achter de handeling opbouwen.
Overigens is het ons best duidelijk waarom haar moeder haar niet verteld heeft dat dat bij alle lampjes kan.

Daan

> Daan komt op bezoek. Nadat hij een tijdje met blokken heeft gespeeld, gaat hij in de speelgoedla op zoek naar iets anders. Hij komt terug met een rolcentimeter. De voeten van enkele familieleden worden door Daan opgemeten. 'Hoeveel is het?', vraag ik hem. Zonder aarzeling zegt hij de ene keer: 'Groot!' en een andere keer: 'Klein!'[14]

Een kind gaat zich realiseren dat je na gebruik van zo'n instrument iets kunt zeggen over de grootte van een voorwerp. Gedrag van volwassenen wordt nagebootst. Daan (drie jaar) staat aan het begin van een lange leerlijn meten.

Nataschja

> Leraar: Nataschja, hoe doe jij de som 43 + 35?
> N.: Gewoon, 4 + 3 = 7, 3 + 5 = 8, dus 78, makkelijk.
> Leraar: En nu 45 + 32?
> N.: 4 + 5 = 9 en 3 + 2 is 5, dus komt er 95 uit.[15]

De fout van Nataschja (negen jaar) is een voorbeeld hoe foutieve handelingen toch tot een goed antwoord kunnen leiden, met alle mogelijke gevolgen vandien.

3 het nut en de gebruiksmogelijkheden van paradigma's

'Paradigma's zijn voorbeelden die een helder inzicht geven in een bijzonder verschijnsel'[16] , zo begint Goffree zijn uiteenzetting over paradigma's van de kleuter-wiskunde. Een zo'n voorbeeld maakt een karakteristieke wiskundige activiteit duidelijk en vergemakkelijkt het onthouden ervan. Hiermee hebben we een eerste voorbeeld van het nut en de gebruiksmogelijkheden van paradigma's te pakken. Daarnaast ontsluit een paradigma op een korte, kernachtige wijze een gebied of een aanpak binnen (de didactiek van) rekenen-wiskunde. Het kan ook een ontwikkeling typeren zoals die zich bij kinderen voltrekt. Bovendien vergemakkelijkt een paradigma de communicatie over datgene wat het paradigma oproept: we weten onmiddellijk waar we het over hebben. Dit voorkomt spraakverwarring en gesprekken kunnen vlot worden gevoerd. Anders gezegd: op deze manier ontstaat een betekenisvol jargon. Dit laatste punt vraagt dan wel om eenstemmigheid over de toekenning van de kwalificatie paradigma. Wil je van een paradigma spreken dan is eenstemmigheid over de kwalificatie paradigma, die op een situatie, plaatje of verhaal wordt geplakt, een eerste vereiste. Als er overeenstemming is over het modelmatige karakter van een verhaal, situatie of plaatje, dan kun je vervolgens stellen dat een dergelijk paradigma richtinggevend is of kan worden. Dat laatste kan in positieve dan wel negatieve zin. Het voorbeeld van Andy, dat als strekking heeft: zo'n situatie moeten we zoveel mogelijk voor leerlingen zien te voorkomen, is richtinggevend in negatieve zin. Richtinggevend in positieve zin zijn paradigma's die gaan fungeren als ideaaltyperingen ('zo zou ik dat ook willen doen').

Paradigma's kunnen het gesprek met collega's en studenten effectueren en verdiepen, men kan aan een paradigma de eigen ideeën spiegelen, en reflecteren over eigen opvattingen en over je eigen pedagogisch-didactische aanpak. Met behulp van een paradigma kan het gedrag of het ontwikkelingsniveau van een leerling getypeerd worden (David, Jurriaan, Andy) en kunnen didactische essenties of consequenties duidelijk worden (Marian en Wendy).

Het denken in termen van - en het werken met paradigma's is volop in ontwikkeling. Voor ons staat nu al het volgende vast: wie een repertoire van mooie paradigma's bezit, verwerft daarmee houvast en overzicht en kan er de kwaliteit van zijn onderwijs mee verbeteren.

noten

1 Thijssen, T. (1926). *De gelukkige klas.* Utrecht: Prisma-boeken.
2 Zie bijvoorbeeld: Goffree F. (1994). *Wiskunde & Didactiek 1.* Groningen: Wolters-Noordhoff, pag.82.
3 Zie: Goffree F. (1985). *Wiskunde & Didactiek 3.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
4 De auteurs van dit artikel hebben in het kader van de PUIK-groep een verzameling paradigma's aangelegd en kijken hoe deze op de opleiding kunnen functioneren. PUIK publiceert in 1995 het eindrapport van haar werkzaamheden. Eerdere verslagen zijn:
PUIK (1992). *Verhalen van de lerarenopleiding.* Noordwijkerhout: SLO/NVORWO.
PUIK (1993). *Uitlijnen.* Noordwijkerhout: SLO/NVORWO.
PUIK (1994). *Standaards voor Rekenen-wiskunde & Didactiek.* Enschede: SLO.
5 Zie: Goffree F. (1994). *Wiskunde & Didactiek 1.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
6 Mondelinge mededeling C. Schinkel.
7 Goffree, F., e.a. (1993). *Drieluik. Handboek voor opleiders rekenen-wiskunde & didactiek.* Utrecht: Freudenthal instituut.
8 Treffers, A. (ed.), (1979). Cijferend vermenigvuldigen en delen (1). Overzicht en achtergronden. In: *Wiskobasbulletin, 8(6).*
Treffers, A. (1993). Ontwikkelingsonderzoek in eerste aanzet. In: Rob de Jong & Monica Wijers (red.). *Ontwikkelingsonderzoek. theorie en praktijk.* Utrecht: Freudenthal instituut.
9 Goffree F (1994). *Wiskunde & Didactiek 1.* Groningen: Wolters-Noordhoff,
10 Buijs, K. (1992). Het wiskundeonderwijs nogmaals bezien. In: M. Dolk (ed.). *Rekenen onder en boven de tien. Panama Cursusboek 10.* Utrecht: HMN/FEO, Freudenthal instituut.
11 Noteboom, A. (1994). De Kop van Jut. *Willem Bartjens,* 14(2), Tilburg: Zwijsen).
12 Mondelinge mededeling R. Keijzer.
13 Mondelinge mededeling M. Steverink.
14 ibid noot 12.
15 Mondelinge mededeling W. Oonk.
16 Goffree, F. (1993). *Kleuterwiskunde.* Groningen: Wolters-Noordhoff, pag.52.