Breuken, procenten en kommagetallen in het Middle School Project

M.M. Wijers en F. van Galen
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

1 inleiding

Het Freudenthal instituut ontwikkelt samen met de universiteit van Wisconsin in Madison, een reken-wiskundecurriculum voor de Amerikaanse middle school. De middle school omvat de leerjaren grade 5 tot en met grade 8, dat wil zeggen leerlingen van tien tot veertien jaar.
In Nederland zou dat een combinatie zijn van de laatste twee jaar basisonderwijs en de eerste twee jaar voortgezet onderwijs, een schooltype dat bij ons niet bestaat.
In de Verenigde Staten is er overigens veel variatie in schooltypen: naast echte middle schools met alleen grade 5 tot en met 8 zijn er ook schooldistricten waar bijvoorbeeld grade 5 nog bij de basisschool hoort.
Wij noemen het project bij de werktitel 'Middle School Project' (MSP), onze Amerikaanse collega's gebruiken 'Mathematics in Context' (MiC), de naam waaronder het uiteindelijke materiaal ook op de markt gebracht wordt. Het project duurt vijf jaar, van 1990 tot 1995.

Het Nederlandse team ontwerpt de pakketten. In Madison maakt men Amerikaans van ons Engels, past men de contexten aan, komt men met opmerkingen over inhoud en zorgt men voor het uittesten.
Het uiteindelijke materiaal wordt uitgegeven door 'Encyclopedia Brittanica'. Het geld voor het ontwikkelen van het materiaal komt van de Amerikaanse regering via de 'National Science Foundation' (NSF).

Meer informatie over de opzet van het MiC-project is te vinden in diverse artikelen verschenen in het tijdschrift 'Nieuwe Wiskrant' en in het 'Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs' (Panama-Post).

2 het curriculum

Het raamwerk dat aanwezig was aan het begin van het project werd gevormd door de in 1989 gepubliceerde 'Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics'. Deze Standards zijn een soort eindtermen bedoeld voor een volledig gemoderniseerd reken-wiskundeleerplan. Op basis hiervan is door het MiC-projectteam een schema gemaakt, verdeeld over vier leerjaren en vier leerstoflijnen: rekenen, algebra, meetkunde, statistiek. Hierbinnen hebben veertig pakketjes ('units') een plaats gekregen. Elk van deze pakketjes beslaat circa drie weken onderwijs. Behalve dat in elk pakketje bepaalde leerstof centraal staat, is het ook zoveel mogelijk thematisch een eenheid. Het maken van losse pakketjes was een Amerikaanse keuze: het nieuwe curriculum moest zo min mogelijk lijken op een traditioneel schoolboek. Werken met losse pakketjes is handig bij het ontwikkelen en het uittesten van het materiaal op scholen, maar maakt het lastiger om een doorlopend curriculum te maken.

Wie de pakketjes, zoals ze uiteindelijk worden uitgegeven, globaal doorbladert, zal opmerken dat het materiaal rijk geïllustreerd is. Onze Nederlandse methoden ogen daarmee vergeleken ontzettend schools.
Een van de grote verschillen is dat er nauwelijks kale sommen in staan. Enigszins misleid door onze term 'realistisch' en door de projectnaam 'Mathematics in Context' willen onze Amerikaanse collega's uitsluitend opgaven binnen een context, iets wat vaak tot discussie geleid heeft. Het bij realistisch reken-wiskundeonderwijs horende principe van verticaal mathematiseren komt op deze manier immers niet goed uit de verf.
Het uitgangspunt van de Amerikanen was oorspronkelijk dan ook eerder 'empiristisch' dan 'realistisch' (Treffers,1991). Vanuit onze Nederlandse opvattingen over realistisch reken-wiskundeonderwijs zijn we minder beducht voor kale opgaven. Contexten vormen zowel een uitgangspunt als een toepassingsgebied voor het leren van wiskunde, maar reflectie op wat geleerd en ontdekt is, kan uitstekend plaatsvinden aan de hand van kaal ogende opgaven. Een vraag zou bijvoorbeeld kunnen zijn: 'Bedenk een verhaaltje dat past bij deze som.' Langzamerhand komt er iets meer begrip voor de functie van dergelijke opgaven. 'Mathematics in Context' is echt een produkt van samenwerking, en daardoor soms een compromis.

3 rekenen in het MiC-curriculum

Er zijn voor alle vier de leerjaren aparte rekenpakketjes ontworpen. In grade 5 - dat is bij ons groep 7 - zijn vier van de tien pakketjes gewijd aan rekenen ('number'), in grade 6 zijn het er drie van de tien. Anders gezegd: grofweg veertig procent, respectievelijk dertig procent van de tijd wordt in deze klassen besteed aan wat bij ons rekenen heet. Voor grade 5 en 6 zijn er de volgende pakketjes:

- *Grade 5*

Some of the Parts	(breuken)
Measure for Measure	(kommagetallen)
Per Sense	(procenten)
Grapsing Sizes	(verhoudingen)

- *Grade 6*

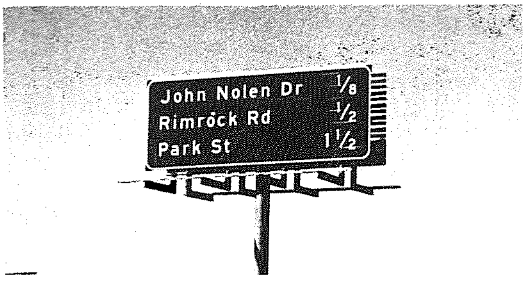
Travail Times	(breuken, procenten, decimale getallen)
More or Less	(breuken, procenten, decimale getallen)
Smooth Operators	(verhoudingen)

In het bovenstaande overzicht is te zien dat in grade 5 in elk van de pakketjes één rekenonderwerp centraal staat: breuken, decimale getallen, procenten, verhoudingen. In grade 6 worden de onderwerpen nadrukkelijker met elkaar in verband gebracht.
Behalve in deze pakketjes komt het rekenen ook aan de orde in de 'Number Tools' en in 'News in Numbers'. Dit zijn losse werkbladen voor alle leerjaren, bedoeld om toch een doorlopende lijn in het rekenen te krijgen. In de 'Number Tools' worden vaardigheden onderhouden, wordt dieper ingegaan op diverse modellen, wordt gestreefd naar verticaal mathematiseren. In 'News in Numbers' wordt met name gewerkt aan schatten en aan getalgevoeligheid (number sense).
Vanzelfsprekend moeten de leerlingen ook rekenen in de andere pakketjes van deze leerjaren, maar dat gebeurt dan toch meer terzijde. Al met al kunnen we concluderen dat er in 'Mathematics in Context' heel wat minder gerekend wordt dan in de Nederlandse reken-wiskundemethoden voor het basisonderwijs. Hier wordt immers zeker tachtig procent van de tijd aan rekenonderwerpen besteed. Door de beperkte tijd voor rekenen zijn er andere keuzen gemaakt dan hier, soms vrij radicale.
Cijferend vermenigvuldigen en delen komt bijvoorbeeld in het MiC-materiaal niet voor. Kunt u zich een Nederlandse methode voorstellen zonder deelsommen in groep 7 en 8? Daar staat tegenover dat er ruimte is voor onderwerpen die bij ons nauwelijks aan bod komen: in grade 5 wordt bijvoorbeeld alvast begonnen met een voorzichtige voorbereiding op de algebra en op negatieve getallen. In grade 7 en 8 wordt het rekenen voortgezet, net als hier nu in de basisvorming. Het accent ligt in deze leerjaren op de integratie van de verschilende rekenonderwerpen en op het ontwikkelen van gecijferdheid.

In dit artikel willen we met name ingaan op de relaties tussen breuken, decimale getallen en procenten. In grade 5 komen verhoudingen, breuken, decimale getallen en procenten nog in afzonderlijke pakketjes aan de orde. Er is echter al wel oog voor de onderlinge relaties tussen deze gebieden. Dit uit zich met name in het feit dat de pakketjes over kommagetallen en procenten erg op het breukbegrip leunen. In grade 6 zijn er drie rekenpakketjes. In twee daarvan staan de relaties tussen breuken, decimale getallen en procenten centraal. Het derde pakketje gaat vooral over verhoudingen.

4 Breuken in relatie tot decimale getallen en procenten

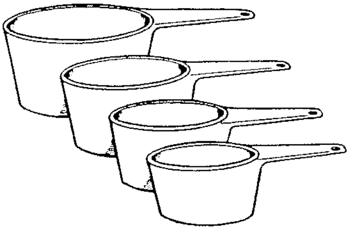
'Halven',' kwarten' en 'derden' gebruiken we vaak, maar andere breuken zijn zeldzaam in het dagelijks leven. Wanneer kom je bijvoorbeeld $\frac{5}{6}$ tegen, of $\frac{12}{29}$? Sommigen trekken hieruit de conclusie dat het breukenonderwijs dus afgeschaft kan worden; we kunnen ons beter beperken tot de decimale getallen. Daar is in het MiC-project niet voor gekozen. In de rekenlijn van Mathematics in Context spelen de breuken juist een centrale rol.
Dat breuken in het dagelijks leven in Amerika meer voorkomen, is daarvan niet de reden, al zijn de verschillen opvallend. Op de borden langs autowegen worden bijvoorbeeld afstanden tot afslagen aangegeven in miles en gedeelten van miles (fig. 1).



figuur 1

In recepten worden benodigde hoeveelheden aangegeven in 'cups' en delen daarvan. Standaardmaten zijn 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{3}$ cup. Er zijn setjes van deze maatcups te koop. Ze komen ook voor in het eerste breukenpakketje 'Some of the Parts' (fig.2).
Dat de breuken in de opbouw van de rekenlijn een centrale plaats hebben gekregen is echter niet vanwege hun praktisch belang, maar vanwege hun rol als denkmodel. Steeds blijkt immers dat goede rekenaars bij procenten

en kommagetallen - bewust of onbewust - heel veel gebruik maken van breuken.



7. These are standard measuring cups for dry ingrtedients. The biggest one is for measuring one cup. What amounts do the other cups measure?

figuur 2

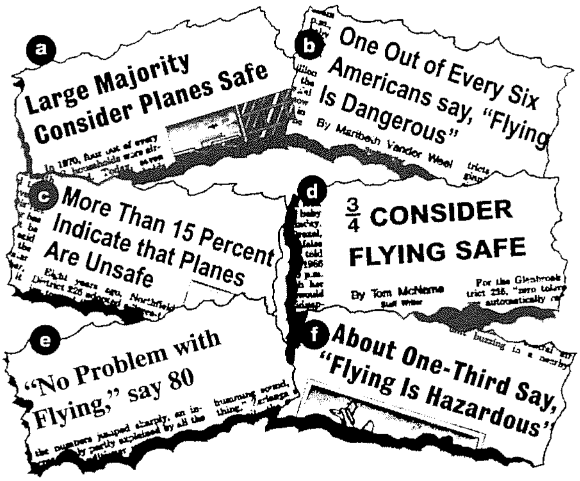
Gaat u maar eens na hoe u zelf bij de volgende opgaven het antwoord schat:

- 424 × 0,76 is ongeveer ...
- Een fooi van vijftien procent bij een rekening van *f* 28,75 is ongeveer ...
- Dertig procent van 106409 is ongeveer...

Het blijkt dat veel mensen eenvoudige breuken gebruiken:

- 0,76 is ongeveer $\frac{3}{4}$ dus $\frac{1}{4}$ van 424 is 106 en $\frac{3}{4}$ is 318
- vijftien procent is $\frac{1}{10}$ deel plus de helft van $\frac{1}{10}$, dus vijftien procent van *f* 28,75 is ongeveer *f* 3 + *f* 1,50
- dertig procent is ongeveer $\frac{1}{3}$, dus ...

In het MiC-materiaal besteden we veel aandacht aan de relaties tussen eenvoudige breuken enerzijds en procenten en kommagetallen anderzijds. Voor de leerlingen heten die eenvoudige breuken 'benchmark fractions'.

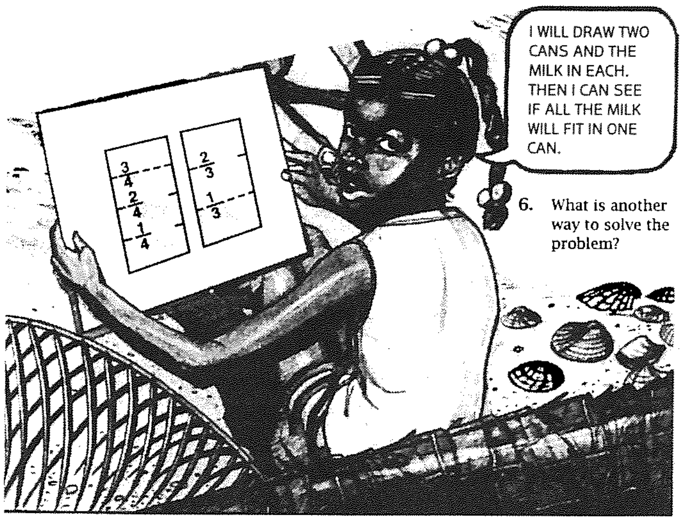


figuur 3

Een typerende opgave - uit 'Travail Times', grade 6 - is te zien in figuur 3. Gevraagd wordt om de verschillende krantekoppen te vergelijken.

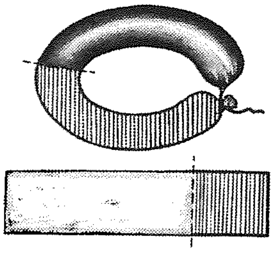
5 Voorbeelden uit de pakketjes

Hoewel enerzijds gezegd kan worden dat de breuken een centrale rol spelen, is hun rol anderzijds juist zeer bescheiden. De breuken komen nauwelijks op zichzelf voor, het enige pakketje waarin dit in beperkte mate gebeurt is 'Some of the Parts' in grade 5. Daarin is aandacht voor ordenen, vergelijken, optellen, aftrekken en in zeer beperkte mate vermenigvuldigen en delen van breuken. Het optellen gebeurt onder andere via meten met blikken die door de leerlingen zelf voorzien zijn van maatstreepjes (fig.4).



figuur 4

De breuken in dit pakketje zijn meestal eenvoudig, de vragen zijn in een context te beantwoorden en er wordt veelvuldig gebruikt gemaakt van concrete modellen, in het bijzonder het strookmodel. Soms blijven de breuken impliciet (fig.5).



a. The whole piece weighs 1,054 grams.

b. The whole piece weighs 872 grams.

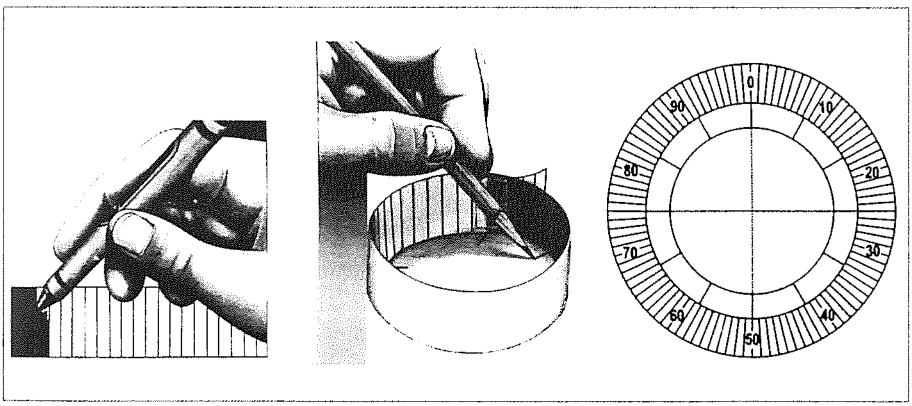
5. On the left you see some more pieces of sausage and cheese from the market. The dotted line indicates where the butcher wants to cut. Estimate how much the cut off piece (the side with the vertical lines) will weigh.

figuur 5

De kommagetallen komen - via het verfijnen van de maateenheid - onder andere aan de orde vanuit het meten (fig.6).

figuur 6

Voor grove metingen volstaan 'halven' en 'kwarten', maar als je preciezer wilt meten is een onderverdeling in 'tienden' en 'honderdsten' handig. Een complicatie is overigens dat de leerlingen niet vertrouwd zijn met de maten van het metriek stelsel, het 'metric system'. In Amerika worden lengten nog steeds hoofdzakelijk aangegeven in inches, feet, yards en miles.
Naast de strook spelen ook breuken- en procentencirkels een belangrijke rol in de pakketjes. De overgang van strook naar cirkel wordt gemaakt via uitknippen en rond maken van ingekleurde stroken (fig.7).



figuur 7

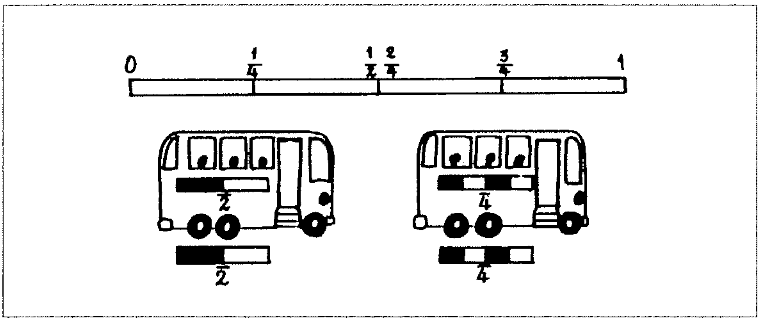
Zo wordt tegelijkertijd een overgang gemaakt van verhoudingen (zeven van de twintig leerlingen in de klas vinden ...) naar breuken ($\frac{7}{20}$, of ongeveer een derde). De relatie breuken en procenten wordt onder andere zichtbaar gemaakt met de zogenaamde 'pie-chart meter', waarmee ingekleurde gedeeltes van een cirkeldiagram kunnen worden afgelezen als breuken (binnenste ring) of procenten (buitenste ring) (fig.7).

6 MiC en de 'Proeve ...'

Onlangs verscheen de 'Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3A. Breuken' (Treffers, Streefland & de Moor, 1994). Voor het werken met breuken worden de volgende ingangen genoemd:
- eerlijk verdelen;
- meten;
- deel-geheel;
- operator aspect;
- verhoudingen.

Al deze aspecten komen in de een of andere vorm ook in de MiC-pakketjes aan de orde.
Het eerlijk verdelen zit in 'Some of the Parts', al zijn het daar geen pizza's of pannekoeken die verdeeld moeten worden, maar 'subs' of 'submarines'; een overvloedig belegd stuk stokbrood, met tenminste drie soorten vlees, plus drie soorten kaas, plus augurken, plus uitjes, plus ketchup. Erg veel tijd wordt er overigens niet aan het eerlijk verdelen besteed. Aanvankelijk was dat meer; er was zelfs een pakketje dat 'Fair Share' heette. Omdat men dit pakketje, bij nader inzien, geschikter voor grade 4 vond is het vervallen.
In 'Some of the Parts' komt ook het meetaspect aan de orde. Er wordt gemeten met blikken die door de leerlingen zelf voorzien zijn van maatstreepjes (fig. 4). Later leidt dit tot het werken met breukstroken, om ook in meer abstracte situaties te 'meten'.
De deel-geheel relatie komt op allerlei verschillende manieren voor, onder andere via het vergelijken van de ingekleurde gedeelten van een strook of cirkeldiagram.
Het operatoraspect zien we bijvoorbeeld in 'een derde deel van de leerlingen ...'. Hier wordt direct een cirkel- of strookmodel bij getoond zodat ook de deel-geheel relatie in beeld is.
Ten slotte de breuk als verhouding. Dit zit met name in grade 6. Via een verdeling op een onderverdeelde strook, vijftien van de zestig, wordt bijvoorbeeld een cirkeldiagram gemaakt (fig. 7).

Het feit dat alle breuk-aspecten uit de 'Proeve ...' ook in het MiC-materiaal terug te vinden zijn, betekent niet dat er geen belangrijke verschillen zijn. Het belangrijkste verschil is dat de opgaven in de Amerikaanse pakketjes steeds heel dicht bij een levensechte context blijven. Zoiets als de breukenstraat uit de 'Proeve ...', waar leerlingen via reizen met de breukenbus onderzoeken waar breuken wonen, is in het MiC-curriculum ondenkbaar (fig.8).



figuur 8

'Breuken wonen in de breukenstraat. Iedere breuk heeft een vast adres. Als we de breuken bezoeken moeten we de breukenbus nemen. Naar het adres $\frac{1}{2}$ kan met de 2 -bus worden gereisd. Maar ook de 4 -bus stopt daar.' (Treffers, Streefland en De Moor, 1994, pag.114)

Vragen die binnen het verhaal over de breukenbus gesteld kunnen worden, zijn bijvoorbeeld:

Met welke bus kun je zowel bij halte $\frac{1}{3}$ als bij halte $\frac{1}{2}$ uitstappen?
Ik ben bij $\frac{1}{3}$ op bezoek geweest en wil nu de bus nemen die rechtstreeks naar halte $\frac{1}{2}$ rijdt. Welke bus moet ik dan hebben?

De 'Proeve ...' noemt het een structuur-context. Het is een vrij kunstmatige context, die echter heel geschikt is om bijvoorbeeld de equivalentie van breuken aan de orde te stellen.
Activiteiten rond een dergelijke breukenbus komen in het Amerikaanse materiaal niet voor, evenmin als een aantal andere, wat meer gekunstelde contexten uit de 'Proeve ...'. Een van de redenen is dat onze Amerikaanse collega's een dergelijke context niet zouden accepteren, want elke context moet volstrekt geloofwaardig zijn. Tegen zo'n standpunt valt genoeg in te brengen. Zij vatten 'realistisch' veel strikter op dan wij, omdat ze bang zijn voor alles wat naar de formele, traditionele wiskundeboeken zweemt. Discussies, in het echt of per e-mail, nemen die verschillen in opvattingen niet zo snel weg als je soms zou willen.
De breukenstraat uit de 'Proeve ...' past echter ook niet bij de keuzen die wij als Nederlandse ontwerpers hebben gemaakt. Ons standpunt is: zover

gaan we niet. Dat heeft alles te maken met de beperkte ruimte die er is voor rekenen in het curriculum; er moest immers veel ruimte zijn voor meetkunde, statistiek en algebra. Daarnaast geldt echter ook dat de breuken vooral in het curriculum zitten om hun bemiddelende rol, en veel minder omdat het breukenwereldje op zich zo belangrijk is. De eenvoudige breuken krijgen in de pakketjes dan ook de meeste nadruk, en breuken als $\frac{12}{29}$ komen maar af en toe voor. Voor de 'Proeve ...' ligt dit anders, omdat deze zich richt op de officiële kerndoelen voor het Nederlandse onderwijs en die geven minder speelruimte dan de Amerikaanse Standards.
Ons laatste argument is dat de stof passend moet zijn voor alle leerlingen. Natuurlijk zijn er heel wat leerlingen voor wie breuken als zodanig iets reëels zijn, die vanuit $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$ moeiteloos over kunnen stappen naar breuken als $\frac{11}{12}$ of $\frac{24}{25}$. Daarentegen moeten we erkennen dat de breuken voor heel wat leerlingen een kunstmatig rekenwereldje vormen waar ze niet echt vertrouwd mee raken, ook niet als er meer onderwijstijd voor beschikbaar zou zijn. Onze keus is geweest om de leerlingen dan in ieder geval vertrouwd te maken met de eenvoudige breuken die ze echt nodig hebben.
In feite betekent dit dat we in het Mathematisch in Context-curriculum weinig aandacht besteden aan het gezamenlijk verkennen van het formele breukensysteem, terwijl dat in het Nederlands onderwijs wel gebruikelijk is. Is dat winst of verlies?
Ongetwijfeld doen we sommige leerlingen hiermee te kort, leerlingen die het formeel redeneren met breuken aankunnen en dat ook leuk zouden vinden. Daar staat tegenover dat uitvoerig aan de orde komt hoe breuken in het dagelijks leven gebruikt worden; meestal als simpele breuken en als er verfijning nodig is, worden ze vervangen door kommagetallen en procenten. Hiermee is in ieder geval gezorgd voor voldoende gecijferdheid en voor een ondergrond waarop later, indien nodig, inzicht in het formele systeem gegrondvest kan worden.

literatuur

Feijs, E., J. de Lange, M. van Reeuwijk & A. Roodhardt (1992). Nederlands wiskundeonderwijs in Amerika. *Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 11(3), 11-14.

Reeuwijk, M. van (1993). Het Middle School Project in kaart gebracht. *Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 13(2), 22-28.

Reeuwijk, M. van (1994). Nieuwe doelen, nieuwe toetsen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 13(2), 32-36.

Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1994). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3A. Breuken.* Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A. (1991). Meeting innumeracy at primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 333-352.