Breuken: kerndoelen en formaliseren

R. Keijzer
Hogeschool van Amsterdam
A. Lek
Schooladviescentrum Utrecht

1 inleiding

Het onderwijs in breuken is al lange tijd een bron van discussie. De reden voor deze discussie ligt voor de hand. Breuken lijken op het eerste gezicht maatschappelijk weinig relevant. Daar komt nog bij dat breuken als een didactisch 'lastig' onderwerp worden ervaren. In de media worden deel-geheel relaties meestal beschreven in termen van verhoudingen en procenten. Kommagetallen komen in andere situaties, zoals meetsituaties, naar voren. Verder is de relevantie van kommagetallen ingegeven door het voortschrijdende gebruik van de zakrekenmachine. Er zijn echter ook argumenten die pleiten voor onderwijs in breuken op de basisschool. Breuken ontlenen hun betekenis vooral aan het vaksysteem zelf en aan de verbinding met kommagetallen, procenten en verhoudingen (Treffers, Streefland en De Moor, 1994).

In 1992 is er een breukenproject van start gegaan - een samenwerkingsverband van SLO, Freudenthal instituut en Cito. De taak van de onderwijsontwikkelaars binnen dit project[1] is het ontwikkelen van een uitgebalanceerde breukendidactiek. Daarbij kan 'uitgebalanceerd' op (minstens) twee manieren gelezen worden:

1 De te ontwikkelen didactische lijn moet doorzichtig en relatief eenvoudig te begrijpen zijn.
2 De aandacht voor breuken in de basisschool moet gepast zijn: niet te veel en ook niet te weinig.

Al snel na de aanvang van het SLO-Fi-Cito-project werd duidelijk welke nieuwe didactische accenten gelegd zouden worden:

- de didactiek zou gericht worden op elementaire zaken als taalvorming en begripsvorming rond breuken, waarbij de breuk als meetgetal en de strook als model een belangrijke rol spelen;
- het ordenen en positioneren van breuken op de getallenlijn zou binnen de vernieuwde didactiek een belangrijke rol krijgen;

- in het verlengde hiervan zou gezocht gaan worden naar mogelijkheden voor equivalentie van breuken.

In 1993 verschenen de kerndoelen voor het basisonderwijs. De kerndoelen ten aanzien van breuken laten zich beschrijven in vier punten (Treffers, Streefland en De Moor, 1994):

1 De leerlingen weten dat aan een breuk en een decimale breuk op verschillende manieren betekenis kan worden gegeven.
2 De leerlingen kunnen breuken en decimale breuken op een getallenlijn plaatsen.
3 De leerlingen kunnen in eenvoudige toepassingssituaties, met gebruikmaking van modellen, eenvoudige breuken en decimale breuken vergelijken, optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen, en kunnen schattend rekenen door de uitkomst globaal te bepalen.
4 De leerlingen begrijpen het verband tussen verhoudingen, breuken en decimale breuken en kunnen breuken in decimale breuken omzetten, ook met een rekenmachine.

De kerndoelen lijken zich te richten op het betekenis geven aan breuken en het kunnen toepassen van breuken in eenvoudige situaties. Van kinderen wordt verwacht dat zij breuken kunnen ordenen en positioneren op een getallenlijn. Daarnaast is er aandacht voor integratie met verwante onderwerpen als verhoudingen, decimale breuken en procenten. De kerndoelen bieden in feite weinig openingen voor het formeel opereren en redeneren met breuken.
Toch valt er iets voor te zeggen het formeel opereren met breuken voor een deel van de leerlingen in de hoogste groepen van de basisschool mogelijk te maken. We denken daarbij met name aan die leerlingen, die dit relatief eenvoudig weten te bereiken. Wanneer we het ontwikkelwerk ten aanzien van formeel opereren en redeneren met breuken willen plaatsen binnen de kerndoelen, dan kan dit in het verlengde van kerndoel 2.
Het plaatsen van breuken op de getallenlijn biedt mogelijkheden voor het (betekenisvol) formeel opereren en redeneren met breuken, binnen het raamwerk van de door de SLO-Fi-Cito-breukengroep beoogde didactiek,zoals die op dit moment wordt ontwikkeld.[2]
In dit artikel kijken we naar verschillende verschijningsvormen of aspecten van breuken. We gaan kort in op de mogelijkheden die de verschillende aspecten van breuken bieden voor het formeel opereren en redeneren met breuken.
Na, en in het verlengde van deze beschouwing over aspecten van breuken gaan we op zoek naar aangrijpingspunten voor het formeel opereren met breuken binnen de nieuw ontwikkelde breukendidactiek.

2 equivalentie van breuken

aspecten van breuken

In het algemeen onderscheidt men zes elementaire verschijningsvormen of aspecten van breuken:

- een breuk als resultaat van opdelen;
- een breuk als resultaat van eerlijk verdelen of de breuk als deling;
- een breuk als meetresultaat;
- een breuk als verhouding;
- een breuk als operator;
- een breuk als rekengetal.

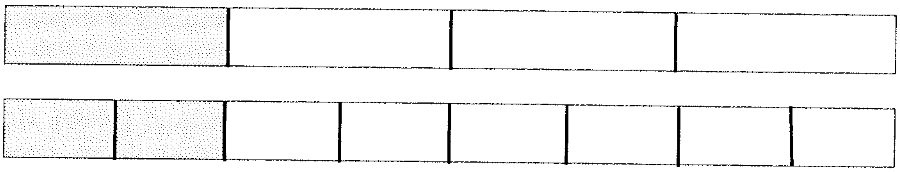
Een breuk als resultaat van opdelen en de breuk als rekengetal zijn (of waren) de twee belangrijkste aspecten van breuken binnen de mechanistische didactiek. Lang geleden werd duidelijk dat deze aanpak te beperkt was en leidde tot betekenisloze regelvolgerij.
De breuk als resultaat van eerlijk verdelen en daaraan gekoppeld de breuk als verhoudingsgetal is uitgebreid uitgewerkt door Streefland (1988). Hij richt zich op het verwerven van een breukentaal door de kinderen, door het resultaat van verdeelsituaties op verschillende manieren te laten benoemen. Bij het formaliseren schetst Streefland een lange weg via gelijkwaardige tafelschikkingen. Van kinderen worden verschillende blikwisselingen gevraagd van eerlijk-verdeel situaties via verhoudingen naar equivalente breuken en terug.
Formeel redeneren en opereren met breuken is altijd verbonden met het bepalen van equivalentie van breuken. Equivalentie van breuken is - in formeel opzicht - het meest centrale kenmerk van breuken. Vanuit alle aspecten van breuken is het mogelijk equivalentie te benaderen.[3]
Binnen de SLO-Fi-Cito-breukengroep kozen we een aanpak in het verlengde van het ordenen en positioneren van de breuk op de getallenlijn. We keken met name naar de mogelijkheden van een breuk als meetgetal.[4]

een staalkaart voor kiemen van equivalentie

We schetsen een aantal momentopnamen uit de leergang zoals die inmiddels door de SLO-Fi-Cito-breukengroep grotendeels in een prototype is geconcretiseerd. We analyseren daarbij de activiteiten voor kinderen op kiemen voor equivalentie; als aangrijpingspunten - vaak in de marge - voor het formeel opereren en redeneren met breuken.
Deze kiemen voor equivalentie kunnen ontkiemen en zo aanleiding geven tot het verwerven van equivalente breuken. Bij een deel van de leerlingen - zij die dit relatief eenvoudig weten te bereiken - komt zo het formeel opereren en redeneren tot bloei.

eerste aanzetten

De kinderen in groep 6 krijgen de opdracht hun tafel te meten met stroken. Omdat de stroken niet precies passen wordt besloten de stroken onder te verdelen. De kinderen vouwen stroken in tweeën, in vieren en in achten. Dan wordt er weer gemeten. Een van de kinderen verwoordt het meetresultaat: 'De tafel is twee hele stroken en één stukje lang'. Een andere leerling heeft een ander meetresultaat: twee stroken en twee stukjes. De situatie geeft aanleiding tot het meer nauwkeurig omschrijven van het meetresultaat. Het ene stukje blijkt één stukje van de in vieren gedeelde strook, de ' 4 -strook'. De twee stukjes zijn stukjes van de in achten verdeelde strook, de ' 8 -strook'. Twee stukjes van de in achten verdeelde strook zijn evenlang als één stukje van de in vieren gedeelde strook; een eerste notie van gelijkwaardigheid (fig. 1).

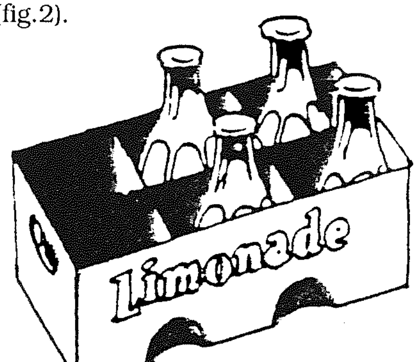


figuur 1

Door het vouwen te reconstrueren ontdekken een aantal kinderen wat er aan de hand is. De in achten gedeelde strook werd gemaakt door de in vieren gedeelde strook nog eens middendoor te vouwen. Zo ontstaan uit ieder stukje van de ' 4 -strook' twee stukjes van de ' 8 -strook'.

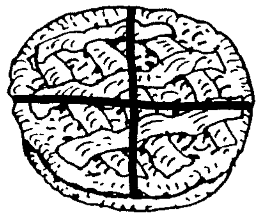
In het verlengde van het maken van meetstroken als informele kennismaking met equivalentie liggen een aantal vergelijkbare ervaringen. Bijvoorbeeld:

- in een krat passen zes flesjes. Er staan er vier in, duidelijk zichtbaar als twee groepjes van twee. De inhoud van de krat wordt door kinderen benoemd als $\frac{2}{3}$, zo ziet het eruit, maar ook als $\frac{4}{6}$, namelijk vier van de zes stukjes (fig. 2).



figuur 2

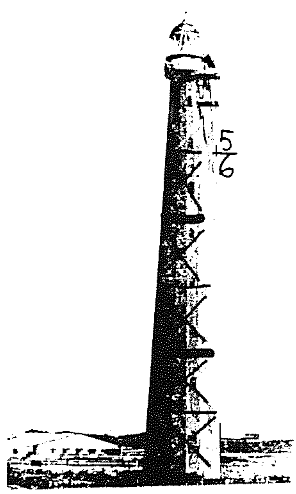
- bij het vouwen van een stuk papier is een keer in de lengte en een keer in de breedte gevouwen. De vlakjes onder elkaar zien er uit als een $\frac{1}{2}$ blaadje, maar zijn ook $\frac{2}{4}$ blaadje;
- een taart is in vier gelijke punten verdeeld. Er zijn nog twee punten over; dat is $\frac{2}{4}$ taart, maar ook een $\frac{1}{2}$ taart (fig.3)



figuur 3

een vuurtoren schilderen

'Een schilder schildert een vuurtoren. Op een bepaald moment is hij tot $\frac{5}{6}$ gekomen. Geef op de vuurtoren aan tot waar de schilder gekomen is.'
Inmiddels is aan de orde geweest, hoe je een strook handig in twee, vier, acht en drie delen deelt. De kinderen weten dat je voor het bepalen van $\frac{5}{6}$ de vuurtoren in zes stukken moet delen. Een van de kinderen doet dit voor op het bord. Hij deelt de toren eerst in drie delen en halveert vervolgens de drie verkregen delen. Zo is de vuurtoren in zessen gedeeld, zie je de leerling bijna denken. Hij telt vijf stukken af, beginnend aan de onderkant van de vuurtoren en maakt $\frac{5}{6}$ vuurtoren met grote kruisen zichtbaar (fig.4).

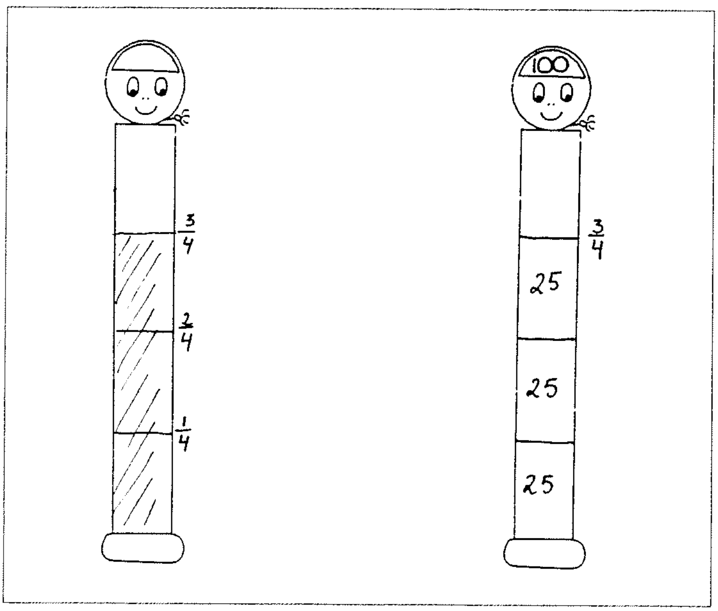


figuur 4

Het verdelen van een strook in zessen is vanuit het handig opdelen, gekoppeld aan het opdelen in drieën. Dit handig opdelen ligt in het verlengde van het meten met meetstroken. Het maken van de meetstroken gaf reeds aanleiding om te bespreken hoe je het vouwen handig aanpakt. Deze vaardigheid blijkt toepasbaar, wanneer andere stroken opgedeeld moeten worden.

de Kop van Jut

De kermisattractie de Kop van Jut wordt aan de kinderen geïntroduceerd.[5] Een groot aantal kinderen blijkt goed te weten wat de bedoeling is. 'Het gaat erom dat je zo hoog mogelijk komt', verwoordt een van hen. Een lid van de ontwikkelgroep, Buijs, grijpt deze opmerking aan om de hoogten langs de Jutlijn, beschreven in termen van breuken, te vergelijken: 'Wanneer kom je hoger: als je tot $\frac{2}{3}$ komt of als je tot $\frac{3}{4}$ komt?'
Hij laat de kinderen verwoorden hoe je de hoogtes $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$ langs de Jutlijn kan aangeven. Dan komt het vergelijken. Veel kinderen zien of weten dat je bij $\frac{3}{4}$ hoger komt, maar verwoorden waarom dat zo is levert flinke problemen op. Buijs gooit het over een andere boeg. 'Delano is tot $\frac{3}{4}$ gekomen. Wie zou er een breuk weten, waarbij je nóg hoger komt?' Ook dit blijkt niet zo eenvoudig te zijn. Na wat aarzelingen komen er enkele antwoorden: $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$, $\frac{8}{8}$. Een aantal kinderen lijkt in de gaten te hebben dat het hoogste punt van de Jutlijn beschreven kan worden met gelijkwaardige breuken als $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$ en $\frac{8}{8}$.



figuur 5

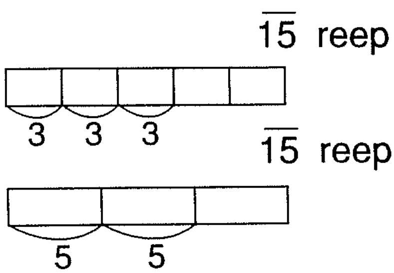
Wanneer we punten toekennen aan de verschillende hoogten langs de Jutlijn worden de breuken in de context van de Kop van Jut van meetgetallen tot operator (fig.5).
In een volgende les stellen we de kinderen voor dat je honderd punten krijgt als je tot bovenaan de Jutlijn komt. Het indelen van de Jutlijn om de hoogte van $\frac{3}{4}$ te bepalen lijkt ook nu bruikbaar: honderd moet door vier gedeeld worden en de uitkomst moet vervolgens met drie vermenigvuldigd worden. Delano kwam tot $\frac{3}{4}$ en behaalde daarmee 75 punten.
De breuk als operator werkend op een (grote) hoeveelheid zal een belangrijke mogelijke ingang worden voor het genereren van equivalente breuken. In de context van het 'repen eten' wordt een volgende stap gezet.

repen eten

Het gebruik van de breuk als operator, zoals dat een rol speelde binnen de context van de Kop van Jut, wordt aangegrepen bij het eten van repen. De situatie is nu echter essentieel anders. Bij de Kop van Jut werd de ondermaat - het aantal te behalen punten - nog gegeven. Het eten van chocolade repen met moeilijk te breken stukjes, nodigt uit zelf een geschikte ondermaat te kiezen.[6] In de situatie die aan de kinderen gepresenteerd wordt, eten twee kinderen een deel van een reep. We vragen wie er meer eet en hoeveel meer dat is.

Karin eet $\frac{2}{3}$ reep
Jos eet $\frac{3}{5}$ reep.
Wie eet er meer?
Hoeveel meer?
Hoeveel eten ze samen?

Hier is vergelijken op het oog niet goed meer mogelijk. De kinderen moeten preciezer te werk gaan. Daarvoor is het nodig de vraag te beantwoorden van welke reep we $\frac{2}{3}$ reep en $\frac{3}{5}$ reep af kunnen halen. De leerlingen kunnen handig proberen welke reep een geschikt aantal blokjes heeft.



figuur 6

Met een '$\overline{5}$ -reep'[7] lukt het niet en met een '$\overline{8}$ -reep' en een '$\overline{10}$ -reep' ook niet. Van een '$\overline{15}$ -reep' kun je $\frac{2}{3}$ reep en $\frac{3}{5}$ reep nemen. De breuken $\frac{2}{3}$ en

$\frac{3}{5}$ opereren op de vijftien stukjes van de reep. $\frac{2}{3}$ Reep is tien stukjes van de '$\overline{15}$ -reep' en $\frac{3}{5}$ reep is negen stukjes van de '$\overline{15}$ -reep' (fig.6).
Kinderen blijken goed in staat een geschikte reep te kiezen. Ze redeneren vervolgens op het niveau van breuken, of redeneren in stukjes en vertalen deze later terug naar breuken. Een aantal kinderen redeneert uitsluitend op het niveau van de stukjes van de reep. Een reflectie op het antwoord, ten aanzien van de keuze van de repen, maakt het noodzakelijk dat de kinderen de gekozen repen specificeren.
De situatie van het reep eten kan ook in twee tabellen geschematiseerd worden. Door verschillende mogelijke repen te kiezen bij $\frac{2}{3}$ reep respectievelijk $\frac{3}{5}$ reep worden de reepdelen in aantallen stukjes van verschillende 'typen' repen vertaald (fig.7).
Nu is direct zichtbaar dat Karin meer reep eet, zij eet immers één stukje meer van de '$\overline{15}$ -reep'. Dat kunnen we ook anders zeggen: Karin eet $\frac{1}{15}$ reep meer dan Jos. En hoeveel Jos en Karin samen eten is ook niet moeilijk te achterhalen: negentien stukjes van de '$\overline{15}$ -reep'. Dat is veel meer dan een hele reep, namelijk $1\frac{4}{15}$ reep.

$\frac{2}{3}$ reep	aantal stukjes	2	4	10
	soort reep	$\overline{3}$-reep	$\overline{6}$-reep	$\overline{15}$-reep

$\frac{3}{5}$ reep	aantal stukjes	3	6	9
	soort reep	$\overline{5}$-reep	$\overline{10}$-reep	$\overline{15}$-reep

figuur 7

De breuken komen in de tabellen naar voren als verhoudingsgetallen. Wanneer een reep twee keer zoveel stukjes heeft, dan is het aantal stukjes van $\frac{3}{5}$ reep ook twee keer zo groot. De kinderen ontdekken dat onder en boven reeksen van vermenigvuldigtafels ontstaan.
Zo op het oog biedt het geheel het aanzicht van een rij equivalente breuken. Echter de tabellen bieden geen stimulans de resultaten van het verschil nemen en samen nemen te verwoorden in breuken. Voor de kinderen worden er reep-stukjes in de tabellen beschreven. Het ligt dus voor de hand de antwoorden te verwoorden in stukjes van de reep. Er lijkt een andere context nodig, die de kinderen op een natuurlijke manier stimuleert de situatie in breuken te beschrijven in breuken.

equivalentie op het niveau van breuken: de breukenbus

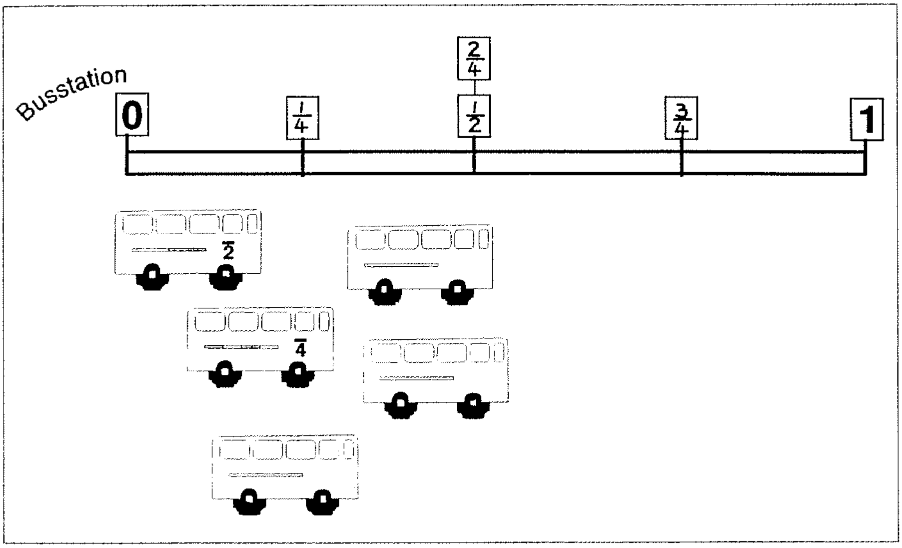
In een aantal experimenten introduceren verschillende leden van de SLO-Fi-CITO-breukengroep een structuurwereldje aan de kinderen. Langs de breukenstraat, van 0 tot 1, rijden bussen (fig.8).

Alle bussen hebben de beginhalte bij 0 en de eindhalte bij 1. Het nummer van de bus bepaalt het aantal haltes van de bus. De '$\overline{2}$-bus' stopt twee keer op gelijke afstanden, en de '$\overline{4}$8-bus' stopt vier keer op gelijke afstanden. De '$\overline{2}$-bus' stopt bij $\frac{1}{2}$ en bij 1 en de '$\overline{4}$-bus' stopt bij $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ en 1. Bushalte $\frac{2}{4}$ is dus de tweede halte van de '$\overline{4}$-bus'.

We introduceren de '$\overline{6}$-bus' en de '$\overline{8}$-bus'.[8] We proberen dit structuurwereldje met kinderen uit. We stellen vragen ten aanzien van het samen reizen en het overstappen:

> Je wilt naar $\frac{1}{2}$, kun je de $\overline{3}$-bus nemen?
> Reizen van $\frac{1}{3}$ naar $\frac{1}{2}$. Welke bus(sen)?
> Welke bussen gaan er allemaal naar 3/4?
> Je staat bij $\frac{1}{3}$ en de '$\overline{8}$-bus' komt eraan ...
> Willeke gaat naar $\frac{2}{3}$ en Günül naar $\frac{4}{5}$. Kunnen ze bij elkaar in de bus zitten? Welke bus?

De kinderen maken aanvullingen. Ze zoeken en vinden bussen, die bij een bepaalde halte stoppen en introduceren meer bussen: De '$\overline{5}$6-bus' stopt bij alle haltes van de '$\overline{7}$-bus' en de '$\overline{8}$-bus'.



figuur 8

We zien equivalente breuken als vanzelf verschijnen bij het overdenken van mogelijke overstaphaltes en bij het introduceren van nieuwe bussen. De tweede halte van de '$\overline{4}$-bus', $\frac{2}{4}$, is de vierde halte van de '$\overline{8}$-bus', $\frac{4}{8}$. Van $\frac{1}{3}$ naar $\frac{1}{2}$ kan ik reizen via 0, met de '2-bus' en de '3-bus', maar het kan ook rechtstreeks met de '$\overline{6}$-bus'. Bij het systematisch onderzoeken van mogelijke bussen die stoppen op $\frac{2}{3}$ en $\frac{4}{5}$ kunnen tabellen, zoals bij het eten van repen, dienst doen (fig.9).

naar $\frac{2}{3}$	aantal haltes	2	4	10
	soort bus	$\overline{3}$-bus	$\overline{6}$-bus	$\overline{15}$-bus

naar $\frac{3}{5}$	aantal haltes	3	6	9
	soort bus	$\overline{5}$-bus	$\overline{10}$-bus	$\overline{15}$-bus

figuur 9

De breukenbus bouwt op deze manier voort op het handig indelen van meetstroken. Daarnaast sluit het zoeken naar een geschikte bus aan bij het zoeken naar een geschikte reep bij het vergelijken en verschil bepalen. De breukenbus koppelt verder - in het verlengde van de breuk als meetgetal - de lengte (de afgelegde afstand), aan een punt op de getallenlijn (de halte). De breukenbus stimuleert de kinderen daarnaast om te redeneren in breuken. Hier is de stukjes-taal onbruikbaar geworden, met name wanneer het om de naam van de halte gaat.

3 reflectie

We zochten voor een deel van de leerlingen, in het verlengde van kerndoel 2: 'De leerlingen kunnen breuken op een getallenlijn plaatsen', naar mogelijkheden voor het formeel opereren met breuken. Tevens gingen we op zoek naar kiemen voor equivalentie door middel van doorkijkjes in de leergang zoals die op dit moment grotendeels in prototype ontwikkeld is. De kiemen voor equivalentie liggen voor het merendeel in het verlengde van de breuk als meetgetal. Aanvankelijk ging het om incidentele kennismakingen met equivalentie, via het handig vouwen, het handig opdelen van een strook of overzien van een situatie.
Het meten, het vouwen en het opdelen leidden tot het gebruiken van de breuk als operator in de context van de Kop van Jut; een hoogte, aangegeven in een breuk, werd weergegeven in een geheel getal, het behaalde aantal punten. Dat maakt het vergelijken van resultaten vaak gemakkelijk.
Op het moment dat de breuk gebruikt wordt als operator lijken de breuken nog voor (nagenoeg) alle leerlingen van belang. De breuk als operator is binnen de basisschool verdedigbaar vanuit het maatschappelijk belang.

Met name in kranten worden (relatief eenvoudige) breuken regelmatig gebruikt in de rol van operator.
Het eten van repen, zoals dit hier is gepresenteerd, volgt natuurlijk op de activiteiten binnen de context van de Kop van Jut. Het eten van repen vraagt van kinderen een belangrijke, maar kleine, blikwisseling. Van welke reep kun je $\frac{3}{4}$ afhalen? Deze vraag is maatschappelijk weinig van belang. Maar dat hoeft ook niet. Binnen deze context krijgen de leerlingen verder greep op breuken en wordt ze de ruimte gelaten dit op hun eigen niveau te doen; door te redeneren, door te proberen, door te tekenen of door globaal te overzien. De vragen aan de leerlingen zijn binnen de gegeven context natuurlijk en herkenbaar. Zo blijkt tenminste uit reacties van kinderen.
Ook het rijden met de breukenbus is voor kinderen herkenbaar en - in bepaald opzicht - natuurlijk. Ze maken dit kunstwereldje tot dat van zichzelf. De leerlingen zoeken en vinden hun eigen (om)weg door de breukenstraat. Want als je niet kunt bedenken hoe je direct kunt reizen van $\frac{2}{3}$ naar $\frac{3}{4}$, kun je altijd nog overstappen bij 1 of 0. Sommige leerlingen krijgen echter door de breukenbus - met name via eigen uitbreidingen - greep op equivalente breuken.

noten

1 Dit zijn K. Buijs, J. Bokhove, A. Lek, A. Noteboom, A. Treffers en R. Keijzer.
2 Zie: Keijzer (1994) voor meer overwegingen die leidden tot de beoogde didactiek.
3 Zie voor een meer nauwkeurige behandeling van de verschillende aspecten van breuken Treffers, Streefland en De Moor (1994), hoofdstuk 2.
4 De breuk als meetgetal is een belangrijk uitgangspunt bij het verwerven van breukentaal in de nieuw ontwikkelde breukendidactiek.
5 Zie A. Noteboom (1994) voor een meer uitgebreide beschrijving van ervaringen met de Kop van Jut als context voor breuken.
6 Dit idee is uitgeprobeerd en uitgewerkt in een doctoraalscriptie onderwijskunde door A. Lek (1992).
7 Merk op dat de benoeming van de repen is gekozen in het verlengde van de benoeming van de meet-stroken. Dit geeft binnen het taalgebruik ten aanzien van breuken een samenhang tussen het werken en redeneren met repen en met meet-stroken.
8 Zie ook Treffers, Streefland en De Moor (1994), hoofdstuk 4.

literatuur

Buijs, K. (1994). De rol van meetsituaties bij het ontwikkelen van de breukentaal. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 12(4), 34-37.
Keijzer, R. (1994). De ontwikkeling van een breukenleergang. Een voorbeeld van ontwikkelingsonderzoek. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 13(*1*), 24-31.
Lek, A., (1992). Met repen begrepen. Ontwikkelingsonderzoek benoemde breuken.

Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 11(2), 9-17.

Noteboom, A. (1994). De Kop van Jut - Een breukenactiviteit in groep 6. *Willem Bartjens*, 14(2), 9-13.

Streefland, L. (1988). *Realistisch breukenonderwijs*. Utrecht: Freudenthal instituut (dissertatie).

Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1994). *Proeve van een nationaal programma voor het reken- wiskundeonderwijs op de basisschool, Deel 3A Breuken*. Tilburg: Zwijsen.