Breuken: begrip en taalontwikkeling

K. Buijs
Bekadidact Baarn, SLO Enschede
A. Noteboom
Cito Arnhem, SLO Enschede

1 inleiding

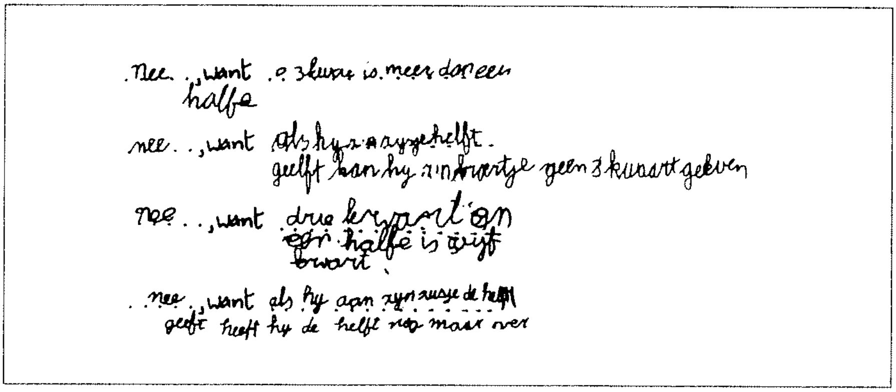
Een van de grote problemen op het gebied van de breuken is gelegen in het feit dat dit begrip zoveel verschillende verschijningsvormen kent. Bijgevolg zijn er nogal wat verschillende manieren om het breukbegrip te introduceren en er een eerste betekenis aan toe te kennen. Daar komt nog eens bij dat de symbolentaal waarmee wij gewend zijn breuken aan te geven, de leerlingen bij de aanvang van het breukenonderwijs zo goed als onbekend is. Dit in tegenstelling tot bijvoorbeeld de taal van de kommagetallen en die van de procenten, waarmee leerlingen vanuit informele situaties vaak al enigszins bekend zijn.
De vraag dient zich daarmee aan hoe de breuken op een zodanige manier geïntroduceerd kunnen worden dat de leerlingen er enerzijds steeds meer betekenis aan kunnen toekennen en anderzijds geleidelijk aan steeds verder ingevoerd raken in het gebruik van de symbolentaal. In deze bijdrage wordt geschetst hoe in het SLO-Fi-Cito- breukenproject[1] een nieuwe aanpak voor deze problematiek is ontwikkeld. Eerst wordt ingegaan op de informele noties van leerlingen en op de manier waarop, voortbouwend op deze noties, de breukentaal geïntroduceerd kan worden via opdeel- en meetsituaties. Vervolgens wordt getoond hoe het toepassingsbereik van deze taal verbreed kan worden via deel-geheel- en operatorsituaties. Ten slotte zal in het kort het perspectief geschetst worden dat deze aanpak biedt op de meer formele aspecten van de breukenwereld.

2 informele noties van leerlingen

Bij de aanvang van het onderwijs in breuken zijn leerlingen veelal niet bekend met de formele breukentaal. Een onderzoek naar de informele kennis en ideeën van leerlingen in groep 6, uitgevoerd in het kader van het SLO-Fi-Cito-project, bracht dit duidelijk aan het licht: termen als een derde, een vierde, twee derde en dergelijke, alsmede de symbolische representatie daarvan, zijn leerlingen zo goed als onbekend. Dit betekent uiteraard niet dat ze in het geheel geen voorstelling hebben van 'gebroken objecten': termen als een kwart, driekwart, anderhalf en dergelijke zijn veelal wel bekend, en leerlingen zijn vaak op een beredeneerde manier in staat antwoord te geven op een vraag als:

> Delroy geeft van zijn reep eerst de helft aan zijn zusje, daarna nog driekwart aan zijn broertje. Kan dat?

In het genoemde onderzoek kwamen leerlingen onder andere met de volgende antwoorden (fig. 1).



figuur 1: leerlingenwerk

Een en ander betekent dat er een kloof gaapt tussen de informele kennis van de leerlingen en de formele breukentaal; een kloof die door het onderwijs op zorgvuldige wijze overbrugd dient te worden. Immers, over termen als $2\frac{2}{3}$ kan heel wat verwarring bestaan als je niet goed weet dat de eerste twee in deze aanduiding een heel andere betekenis heeft dan de tweede twee en dat de drie onder de twee nog weer een andere betekenis heeft. Voor de beginnende leerlingen zijn dergelijke betekenisverschillen, die voor de 'insider' vanzelfsprekend zijn, niet makkelijk te doorgronden.

3 het doorzichtig maken van de breukentaal: koppeling van de symbolen aan 'ontstaanshandelingen'

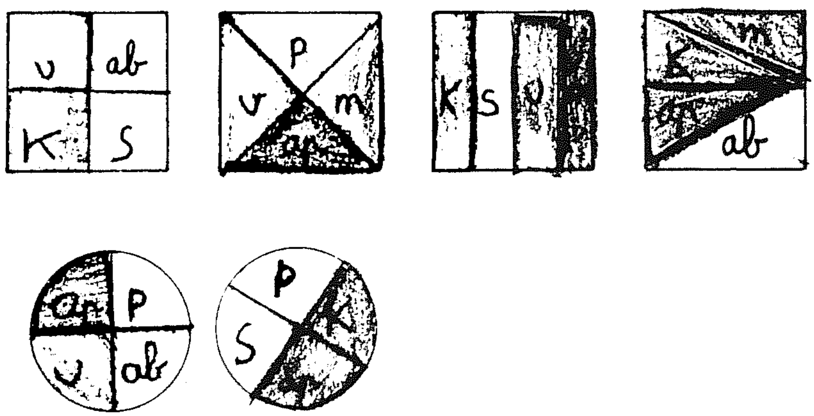
Vanuit realistisch standpunt gezien ligt het voor de hand om breuken te introduceren vanuit situaties waarin de breuken niet op voorhand al aanwezig zijn, maar waarin ze ontstaan; situaties waarin de eenheid verbroken wordt. Leerlingen hebben impliciet met dit soort ontstaanssituaties al de nodige ervaring opgedaan in meetsituaties en (ver)deelsituaties. Gezien de onbekendheid met de formele breukentaal lijkt het gewenst om situaties te kiezen waarin een hechte verbinding tot stand gebracht kan worden tussen de handeling waardoor de breuk ontstaat, en het symbool waarmee je het resultaat van deze handeling (de breuk) beschreven wordt. Twee typen situaties zijn hiervoor bij uitstek geschikt, te weten:

- de situatie waarin één object in gelijke stukken (of onder een aantal personen) wordt gedeeld (de opdeelsituatie);
- de situatie waarin een maateenheid wordt onderverdeeld (de meetsituatie).

Hieronder wordt uiteengezet hoe deze beide situaties benut kunnen worden om tot een zorgvuldige introductie van de breukentaal te komen.

4 opdeelsituaties en stambreukbenoeming

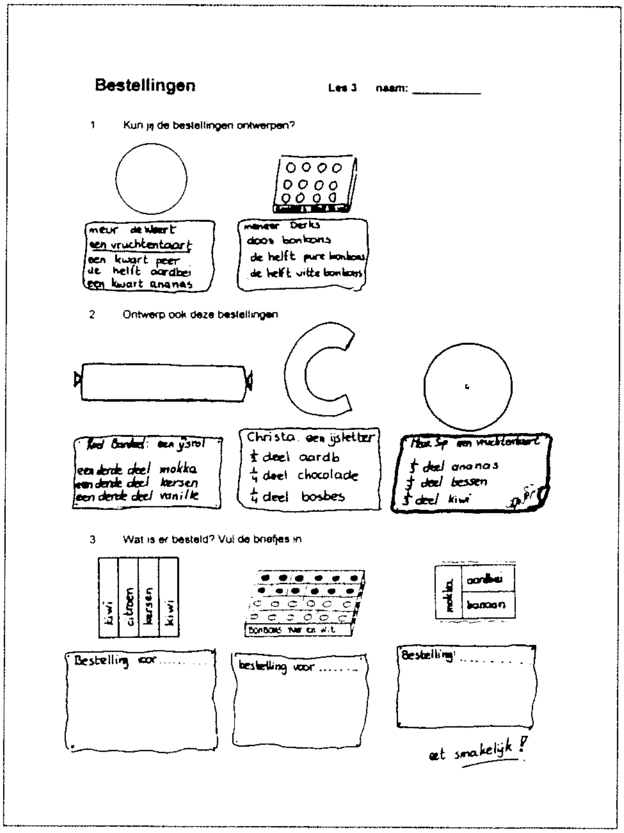
Deel de taart in vier gelijke stukken. Bedenk verschillende manieren.
Hoe noem je één zo'n stuk? (fig.2)



figuur 2: ontwerpen van taarten met vier smaken

Via dergelijke elementaire opgaven ervaren leerlingen nog eens het verbreken van de eenheid, en oriënteren ze zich op handige opdeelstrategieën. Bij een verdeling in vier stukken is dat nog eenvoudig, maar bij een verdeling in drie, zes of acht stukken komt daar aardig wat behendigheid aan te pas. Het benoemen gaat vaak niet vanzelf. Er zijn wel leerlingen die de term 'een vierde' kennen, maar vaak beperkt de kennis zich tot termen als 'een kwart'. Dat je in het geval van een verdeling in vieren de betreffende

delen ook een vierde kunt noemen, wordt echter wel als heel logisch ervaren: je verdeelt tenslotte in vier stukken, en de term 'een vierde' verwijst daar naar. Ook kunnen termen als een derde, een zesde, enzovoort geïntroduceerd worden. Er kunnen zelfs prikkelende vragen gesteld worden in de trant van: 'En als je nu in honderd gelijke stukken verdeelt, hoe zou je dan één zo'n stuk noemen?'
Hiermee doet een eerste, voor de leerlingen doorzichtige maar nog wat primitieve benoemingswijze zijn intrede: de objecten die ontstaan als gevolg van het opdelen, worden benoemd in termen van stambreuken. Is er sprake van meer stukken, dan worden deze benoemd als veelvoud van een stambreuk (fig.3).

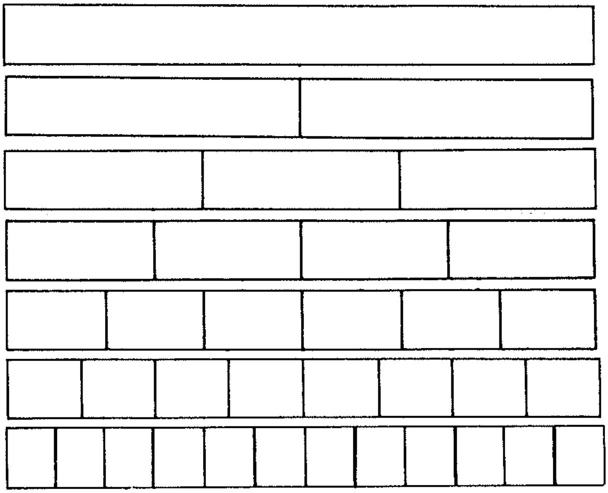


figuur 3: werkblad 'Bestellingen'

Daarmee is de gangbare, korte benoemingswijze echter nog niet in zicht. Voor opdeelsituaties is deze ook niet zo noodzakelijk, en zelfs wat onnatuurlijk.

5 meetsituaties; introductie van de korte benoemingswijze

Voor het introduceren van de korte benoemingswijze leent zich de meetsituatie. In meetsituaties hebben de leerlingen bij herhaling al ervaren dat het nogal eens 'niet mooi uitkomt'. De maateenheid past niet precies een geheel aantal keren op het te meten object, je houdt een stukje over. Dit heeft geleid tot het gebruik van aanduidingen als 'zeven meter en nog een klein stukje', 'bijna twaalf hokjes' en dergelijke.
Natuurlijk hebben de leerlingen ook het principe van de maatverfijning al ervaren: als een maateenheid niet zo mooi uitkomt, en je wilt preciezer meten, dan verdeel je deze eenheid onder (veelal tientallig), en kijkt hoeveel keer de kleinere eenheid nog past op het resterende stukje. In de breukenleergang wordt hierop voortgeborduurd via een serie meetactiviteiten in een historische context waarbij de leerlingen eerst met stroken met een lengte van één Amsterdamse Voet, de lengte van allerlei objecten in de klas meten. Daarbij wordt het niet mooi uitkomen nog eens ervaren. Als oplossing voor dit probleem wordt vervolgens het onderverdelen van de stroken gekozen: in eerste instantie gebeurt dit in twee, vier en acht stukken, zodat een set stroken ontstaat waarmee wat nauwkeuriger metingen uitgevoerd en beschreven kunnen worden.
Later wordt dit uitgebreid naar een arsenaal van stroken met indelingen in bijvoorbeeld twee, drie vier, zes, acht en twaalf stukken (fig.4).



figuur 4: voorbeelden van voorgestructureerde meetstroken

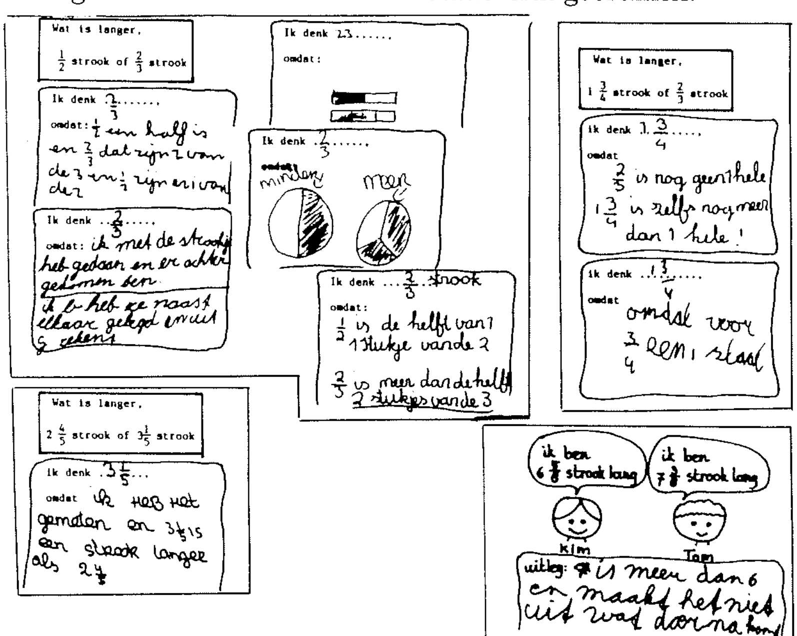
Bij het beschrijven van de meetresultaten kan in eerste instantie gebruik worden gemaakt van de stambreukbenoeming die de leerlingen al kennen.

Dit leidt tot beschrijvingen als: twee hele stroken en nog twee stukjes van $\frac{1}{3}$. Dit is echter een nogal omslachtige manier van beschrijven, en daarom wordt, als een verkorte vorm hiervan, de gangbare breukentaal geïntroduceerd: in plaats van twee hele en nog twee stukjes van $\frac{1}{3}$ kun je net zo goed spreken van twee hele en $\frac{2}{3}$, of zelfs $2\frac{2}{3}$ strook. De relatie met de stambreukbenoeming is nu glashelder: de korte benoemingswijze verwijst naar de lange benoemingswijze. En bovendien is er een duidelijk verband met de wijze waarop de breuken ontstaan zijn: $\frac{2}{3}$ verwijst naar de situatie waarbij je een strook in drie stukken verdeelt, en daarvan twee stukken afpast.

Wat meet je?	Hoe lang is het?
tafeltje (lengte)	2 heel + 4 stukken van $\frac{1}{6}$ K.V
je voet	1 heel K.V
omtrek van je pols	3 stukken van $\frac{1}{5}$ K.V
hoogte kast	3 heel + $\frac{1}{8}$ K.V.
meneer	4 heele + $\frac{1}{2}$ K.V
lenkte tafel vande meneer	4 heel + $\frac{4}{7}$ K.V

figuur 5: oplossingen van Lieke

Aldus ontstaat een hecht verband tussen de 'nieuwe' symbolentaal en de handelingen waaruit deze is voortgekomen. Het is overigens niet nodig dat alle leerlingen nu meteen de verkorte notatievorm gebruiken.



figuur 6: leerlingenwerk

Er blijft voorlopig nog de mogelijkheid om de lange, stambreukbenoeming te gebruiken (fig.5). Nogal wat leerlingen gebruiken in eerste instantie de lange notatievorm, maar schakelen gaandeweg graag over op de korte benoemings- en notatiewijze.

Een voordeel van deze wijze van introduceren is ook dat de breuken in de meetsituatie meteen een lengte krijgen toegekend, waardoor ze tot op zekere hoogte onderling vergelijkbaar worden, en de relatie met de al bekende gehele getallen naar voren komt. In vergelijkingssituaties blijken de leerlingen dan ook vaak tot interessante uitspraken in staat, sommigen op het niveau van tekenen en constateren, anderen meer op het niveau van beredeneren (fig.6).

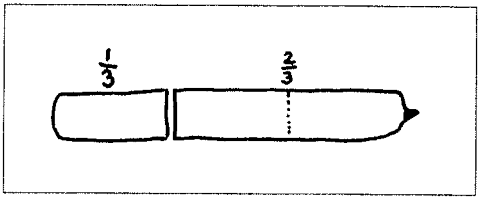
6 toepassing van de korte benoemingswijze in diverse situaties

Via de meetsituatie heeft de breukentaal aldus een eerste, in de 'ontstaanshandelingen' verankerde, betekenis gekregen. Om deze breder toepasbaar te maken, is het uiteraard nodig dat nu uitgebreid wordt naar andere typen situaties. Dit betreft in de eerste plaats deel-geheelsituaties. Een goede mogelijkheid hiervoor bieden situaties rond 'breuken in de keuken': juist bij recepten en dergelijke is nogal eens sprake van breuken (fig.7) en het is dit type situatie dat nu in de leergang aan bod komt.

figuur 7: breuken in kookboeken

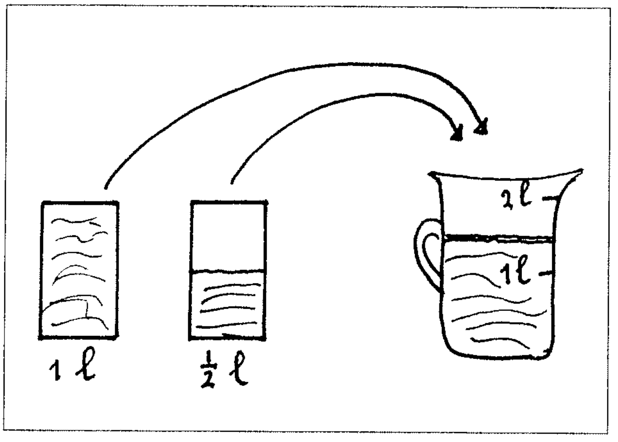
Bijvoorbeeld: 'Je hebt een komkommer en je snijdt er $\frac{1}{3}$ deel vanaf. Hoeveel houd je over?' Eerst kleuren de leerlingen $\frac{1}{3}$ van een getekende komkommer, vervolgens bepalen ze hoe groot het resterende stuk is. De analogie met de meetsituatie ligt voor de hand: je hebt nog twee stukjes van $\frac{1}{3}$ komkommer over, ofwel $\frac{2}{3}$ komkommer (fig.8).

Al snel kan nu uitgebreid worden naar samengestelde getallen ($2\frac{2}{3}$ komkommer, $1\frac{3}{4}$ blikje), en wat later ook naar continue situaties. Tot nu toe immers is de breukentaal nog slechts gebruikt in situaties waarbij de eenheid betrekking heeft op een los, apart object (discrete situaties). Maar in de praktijk heeft de breuk dikwijls betrekking op situaties waarin dat niet het geval is (continue situaties), zoals: een plank van $2\frac{3}{4}$ meter, een fles van $1\frac{1}{2}$ liter.



figuur 8: $\frac{2}{3}$ komkommer

Een uitbreiding in deze richting kan mooi plaatsvinden via de maatbeker. In deze situatie kan zich als het ware de overgang voltrekken van een discrete naar een continue situatie door bijvoorbeeld $1\frac{1}{2}$ literpak melk over te gieten in een maatbeker die twee liter kan bevatten (fig.9).



figuur 9: maatbekers

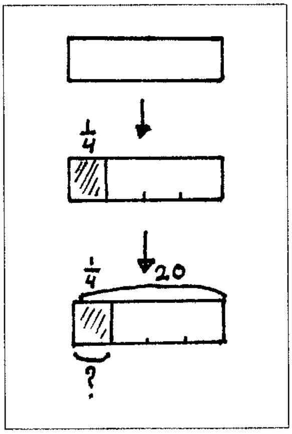
Met behulp van de maatbeker wordt voor de leerlingen de relatie duidelijker tussen de breuk die een deel van een geheel aangeeft (bijvoorbeeld $\frac{3}{4}$ literpak) en de breuk als punt op een (schaal)lijn ($\frac{3}{4}$ liter als hoogte in de maatbeker).
De plaats van de breuken op de getallenlijn komt zo, voorzichtig aan, in beeld. Later wordt hierop teruggekomen.

7 uitbreiding naar de operatorsituatie

In de keukensituatie vindt ook al een eerste verkenning plaats van een type situatie dat tot nu toe grotendeels buiten beschouwing is gelaten: de operatorsituatie. Het gaat dan om situaties als:

> In een blikje vruchten zit 80 gram. Je hebt $1\frac{1}{4}$ blikje nodig.
> Hoeveel gram is dat?

In dergelijke situaties worden de leerlingen reeds op het spoor gezet van het nemen van een deel van een hoeveelheid: je neemt een heel blikje en verdeelt nog een blikje in vieren, dan moet je tachtig gram ook in vieren verdelen. Een systematische verkenning van deze operatorsituatie vindt vervolgens plaats in de context van verpakte objecten als een reep of een pakje koekjes. In dergelijke situaties kan de hoeveelheid (koekjes, blokjes, en dergelijke) ook als geheel (pak, reep, ...) opgevat worden. Daardoor kan bij het bepalen van het aantal blokjes, koekjes, ... gebruik worden gemaakt van inzichten die de leerlingen in de deel-geheel-situatie al hebben opgedaan. In het project wordt dit wel de wikkelbenadering genoemd: de leerlingen geven eerst globaal bijvoorbeeld $\frac{1}{4}$ deel op de wikkel aan (reeds bekend), vervolgens wordt de wikkel eraf gehaald en bepalen ze hoeveel blokjes $\frac{1}{4}$ reep bevat (fig.10).



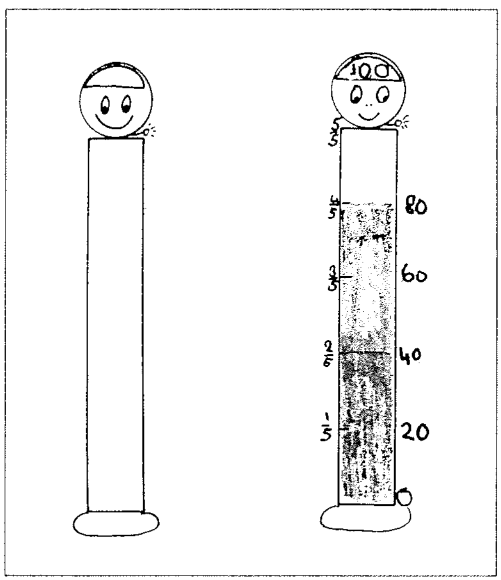
figuur 10: $\frac{1}{4}$ deel van de reep. Hoeveel stukjes?

Hiermee komt een werkwijze in zicht die steeds verder verkend wordt, met de strook als centraal model. Het tekenen in de strook maakt daarbij gaandeweg plaats voor redeneren op basis van de strook. Een verdere uitbreiding en toepassing van de breuk als operator vindt vervolgens plaats binnen de context van de Kop van Jut.

8 consolidatie en reflectie: de Kop van Jut

Binnen de context van de Kop van Jut worden de verschillende aspecten van breuken die in de introductiefase aan de orde zijn geweest, nog eens herhaald:
- de breuk als deel van een geheel;
- de breuk als getal op een schaallijn;
- de breuk als operator;
- het vergelijken en ordenen van breuken.

De Kop van Jut (fig.11) biedt de mogelijkheid om de relatie tussen de breuk als deel van een geheel en als punt op een lijn nogmaals aan de orde te stellen: als je slaat tot $\frac{4}{5}$ dan wordt de staaf (strook) voor $\frac{4}{5}$ deel gekleurd, tegelijkertijd geeft $\frac{4}{5}$ de hoogte aan.

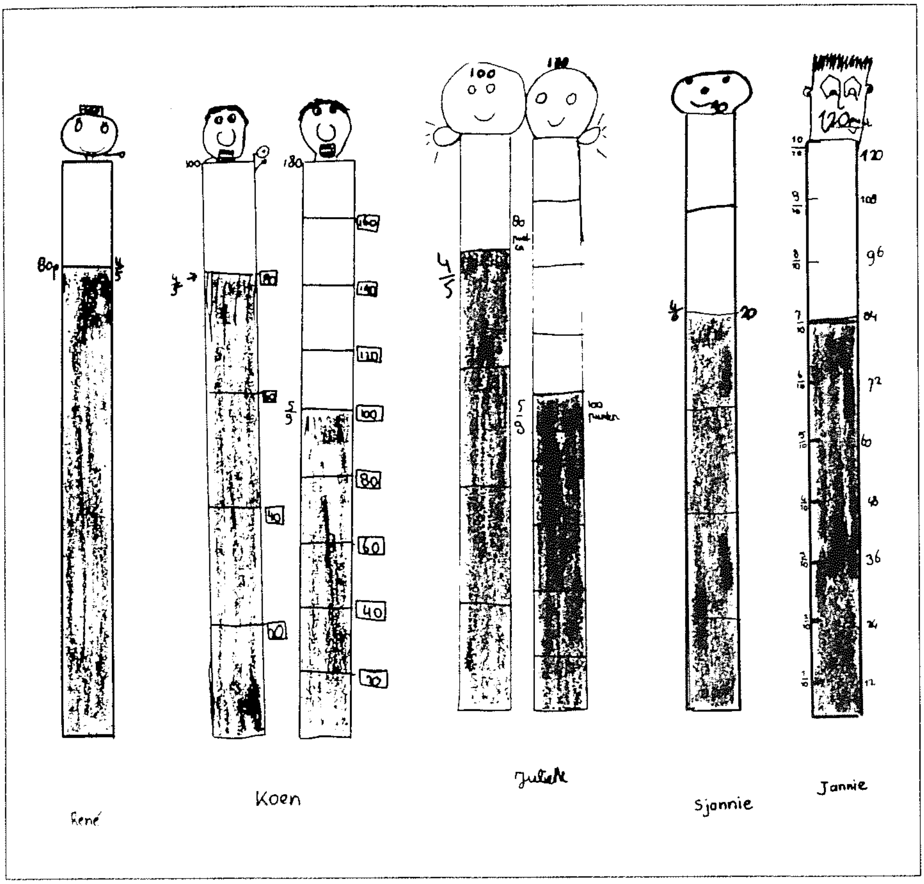


figuur 11: de Kop van Jut

Een deel nemen van een hoeveelheid wordt nog eens herhaald en verder geoefend binnen opdrachten als:

> 'Je slaat tot $\frac{4}{5}$, als je tot bovenaan slaat heb je 100 punten.
> Hoeveel punten heb je gehaald?'

De staaf is een strook, evenals de wikkel bij de reep. De waardepunten die verdiend kunnen worden liggen als het ware gelijkelijk verdeeld onder de strook (zoals de stukjes onder de wikkel). Voor kinderen blijkt dit erg doorzichtig[2] (fig.12).



figuur 12: leerlingenwerk

Tot slot biedt de Kop van Jut mogelijkheden tot het vergelijken en ordenen van breuken: 'Wat is hoger, $\frac{3}{4}$ of $\frac{4}{5}$?' Zowel via het afpassen als via het vergelijken van behaalde punten kunnen de kinderen deze breuken vergelijken. De context laat verschillende oplossingsniveaus toe, van concreet inkleuren en herhaald optellen tot redeneren en formeel rekenen.

9 besluit

De leergang zoals hiervoor beschreven kan een stevige basis leggen voor een goed begrip van breuken. Leerlingen leren breuken interpreteren en er op verschillende manieren betekenissen aan te geven.
Dit is tevens een van de vier onderdelen die in de kerndoelen voor wat be-

treft de breuken genoemd worden. Treffers, Streefland en De Moor beschrijven deze doelen als volgt:[3]

1 De leerlingen weten dat aan een breuk en een decimale breuk op verschillende manieren betekenis kan worden gegeven.
2 De leerlingen kunnen breuken en decimale breuken op een getallenlijn plaatsen.
3 De leerlingen kunnen in eenvoudige toepassingssituaties, met gebruikmaking van modellen, eenvoudige breuken en decimale breuken vergelijken, optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen, en kunnen schattend rekenen door de uitkomst globaal te bepalen.
4 De leerlingen begrijpen het verband tussen verhoudingen, breuken en decimale breuken, en kunnen breuken in decimale breuken omzetten, ook met een rekenmachine.

De geschetste leergang biedt echter ook perspectief voor het bereiken van de andere onderdelen van de kerndoelen. Dit geldt bijvoorbeeld voor het werken met breuken in toepassingssituaties, in het bijzonder wat betreft het gebruik van de breuk als operator. Via de geschetste wikkelbenadering met een uitbouw naar breuken 'in de keuken' en de Kop van Jut wordt hiervoor een gedegen vaardigheid opgebouwd. Maar wellicht geldt het nog sterker voor het kunnen plaatsen van breuken op de getallenlijn.
Door de ervaringen, opgedaan in meetsituaties, met de maatbeker en bij de Kop van Jut, ontwikkelen de leerlingen gaandeweg een steeds beter gevoel voor de orde van grootte van breuken, voor de plaats ervan te midden van de al bekende gehele getallen. Ook leren ze binnen deze contextsituaties breuken te vergelijken. Hierdoor wordt het formeel opereren, zoals dit in het laatste deel van de leergang aan de orde komt, steeds verder toegankelijk gemaakt. A. Lek en R. Keijzer gaan in het artikel 'Breuken; kerndoelen en formaliseren' in deze publikatie nader in op dit formeel opereren.

noten

1 Het SLO-Fi-Cito-project is een samenwerkingsverband tussen SLO, Freudenthal instituut en Cito en heeft als doel een breukendidactiek te ontwikkelen waarin nieuwe ideeën en ontwikkelingen op het gebied van breuken (procenten en kommagetallen) verwerkt worden.
2 Zie voor een uitgebreide beschrijving van mogelijkheden en ervaringen met de Kop van Jut het artikel 'de Kop van Jut'. *Willem Bartjens*, 14(2).
3 Zie Treffers, Streefland en De Moor (1994), pag.9-10.

literatuur

Buijs, K. (1995). Wat doen we met de breuken? *Willem Bartjens*, 14(5).
Keijzer, R. (1994). De ontwikkeling van een breukenleergang. *Tijdschrift voor na-*

scholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 13(*1*), 24- 31.

Lek, A. (1992). Met repen begrepen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 11(2), 9-18.

Noteboom, A. (1994). De Kop van Jut. *Willem Bartjens*, 14(2).

Streefland, L. (1988). *Realistisch Breukenonderwijs*. Utrecht: Freudenthal instituut.

Treffers, A. L. Streefland en E. de Moor (1994). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, Deel 3A, Breuken*. Tilburg: Zwijsen.