Kommagetallen

A. Treffers
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

1 historisch-didactische inleiding

Tot omstreeks 1875 werden in de rekenboeken van Hemkes, Boeser, Closse en anderen de tiendelige breuken voor de gewone breuken behandeld. Als argumenten voor het primaat van de decimale breuken werden aangevoerd:

1 de bewerkingen met de decimale breuken zijn vanwege de overeenkomst met de decimale gehele getallen makkelijker aan te leren dan die van de gewone breuken;
2 de decimale breuken kunnen in relatie met het metrieke stelsel worden gebracht en zijn derhalve van zo'n grote praktische waarde dat ze zo vroeg mogelijk geleerd moeten worden;
3 de praktische waarde van gewone breuken is beperkt.

Vooral het laatstgenoemde punt gaf aanleiding tot heftige discussies.
Zo schrijft Bok in het 'Schoolblad' (1873) in reactie op de standpunten van de gezaghebbende wiskundige Vorsterman van Oijen en de invloedrijke onderwijzer Rijkens, die beiden gewone breuken van weinig praktische waarde achten, dat juist de tiendelige breuken weinig nuttig zijn:

1 omdat ze bij annonceringen van maten en gewichten niet voorkomen;
2 omdat men ze bij het berekenen van minderdeelen van maten en gewichten niet gebruikt;
3 omdat men ze zelfs bij geldswaarden niet als zoodanig wil aangemerkt hebben.

In het laatste geval doelt Bok op percentages en geldwaarden die met halven, vierden, achtsten, zestienden, enzovoort worden aangeduid: $\frac{1}{16}$ procent, $f\,39\frac{3}{8}$, $f\,11{,}77\frac{1}{2}$. Voorts wijst hij op het veelvuldige gebruik van gewone breuken bij niet-metrieke lengte-, vlakte- en inhoudsmaten, gewichten, alsmede maten voor droge en natte waren: $1\frac{1}{2}$ el, $\frac{3}{4}$ bunder, $\frac{1}{4}$ mud, $\frac{1}{8}$ lood en zo meer.
Volgens Bok zouden gewone breuken meer gewicht in het onderwijs moeten krijgen en voorafgaand aan de decimale breuken behandeld dienen te worden.
In die tijd komt de belangrijke rekendidacticus Versluys (1845-1920) eveneens tot de vaststelling dat gewone breuken de grondslag van de tien-

delige breuken zouden moeten vormen. Maar zijn argumenten zijn meer van onderwijskundig-didactische dan van maatschappelijk-praktische aard, waarover direct meer.

In de genoemde discussie worden de belangrijkste toegangen van het onderwijs naar het gebied van de kommagetallen al geopend, te weten *via breuken* en *via gehele getallen*. Betrekken we bij het laatstgenoemde ook nog de twee fundamentele aspecten van rekengetal en meetgetal die aan kommagetallen onderscheiden worden, dan krijgen we drie mogelijke toegangswegen:
(1) via breuken;
(2) via plaatswaarde;
(3) via meetcontexten.
Deze blijken alle benut te zijn.

In het volgende zullen de drie aanpakken, die soms ook gecombineerd voorkomen, apart worden besproken; het gebruik van hulpmiddelen, materialen, schema's en (context)modellen daarbij inbegrepen. We illustreren een en ander met voorbeelden en citaten uit handleidingen, leerboeken en didactiekboeken. Daarbij staan de didactische thema's in casu de genoemde wegen van breuken, plaatswaarde en meetcontexten, voorop. De historische ontwikkelingsgang is hier dus van afgeleide betekenis. Het gaat er allereerst om wat we uit de geschiedenis van de didactiek en speciaal de methoden-ontwikkeling kunnen leren voor het onderwijs van vandaag en voor de toekomst.
Dat de historische beschrijving rond 1875 begint, verdient een korte verklaring. In dat jaar verscheen namelijk de eerste volledige leerboekenserie voor de lagere school in Nederland, en wel van de hand van Versluys. Deze methode heeft een geweldige invloed uitgeoefend op vrijwel alle leerboeken die daarna op de markt kwamen, tot in de eerste decennia van de twintigste eeuw toe, en wat het onderwijs over kommagetallen betreft zelfs nog langer.
Vóór de periode Versluys waren er ook al wel boeken beschikbaar, doch deze hadden louter betrekking op toepassingsopgaven in de vorm van redactiesommen voor de hogere leerjaren. De bijbehorende uitleg werd volledig aan de onderwijzer overgelaten. In 1857 werd de opleiding wettelijk geregeld. Vanaf die tijd kregen de onderwijzers steeds meer behoefte aan een sluitende vakmethodiek. Versluys bood hen de leerboeken voor de verstandelijke, rekenkundige vorming van de leerlingen die toen zo nadrukkelijk werd nagestreefd.
Daarom begint onze kleine historische excursie bij deze methodische gigant.

2 methode I: via breuken

Ruim honderd jaar geleden formuleerde Versluys de verhouding tussen gewone breuken en decimale breuken als volgt: tiendelige breuken zijn bijzondere gewone breuken en kunnen daarom tegelijk met de gewone breuken worden behandeld. Echter:

> 'De eisch der aanschouwelijkheid gebiedt dus om met halven, derden, kwarten, enzovoort, te beginnen.
> En wat geldt voor het begrip breuk in 't algemeen, geldt ook voor de bewerkingen met breuken.' (Versluys, 1889, pag.54).

> 'Op die wijze heeft men tevens het voordeel, dat twee zaken, die niet wezenlijk verschillen, zooals de vermenigvuldiging van de gewone breuken en de vermenigvuldiging van decimale getallen, ook niet als zodanig behandeld worden. De bewerking met decimale getallen volgt nu terstond op hetgeen er de aanschouwelijke grondslag van vormt.' (Versluys, 1889, pag.56).

Deze onderwijslijn *via gewone breuken* is sindsdien door vele methodenschrijvers en vakdidactici gevolgd. Zo schrijft Zernike, de auteur van de methode 'Ons Rekenonderwijs' in de handleiding:

> 'De vermenigvuldiging met een decimaal getal wordt geheel verklaard als de vermenigvuldiging met een gewone breuk ...' (Zernike, 1915, p. 205).

En een andere vooraanstaande auteur uit die tijd noteert bondig: $0{,}8 \times 0{,}07$ wordt berekend als $\frac{8}{10} \times \frac{7}{100} = \frac{56}{1000} = 0{,}056$ (Scholte, 1913, pag.65).
Ook de bekende rekenmethode van Bouman en Van Zelm, die de onderwijsmarkt in de periode 1920-1940 domineerde, kiest de gewone breuken als fundering voor de decimale getallen. Veelgebruikte leerboeken uit de periode 1960-1985 'Naar Zelfstandig Rekenen' (Zandvoort e.a.) en 'Niveau Cursus Rekenen' (Vossen e.a.) doen dat ook.
Een voorbeeld van aftrekken uit de laatstgenoemde methode (fig.1).

$$\begin{array}{rlrr} 3{,}7 & \rightarrow 3\frac{7}{10} = & 3\frac{70}{100} = & 3{,}70 \\ -\ 2{,}18 & \rightarrow & -\ 2\frac{18}{100} = & -\ 2{,}18 \\ \hline 1{,}52 & & 1\frac{52}{100} = & 1{,}52 \end{array} \qquad \begin{array}{rll} 3{,}07 & \rightarrow 3\frac{7}{100} = & 3\frac{70}{1000} \\ -\ 2{,}612 & \rightarrow & -\ 2\frac{612}{1000} \\ \hline 0{,}458 & & 1 - \frac{542}{1000} = \frac{458}{1000} = 0{,}458 \end{array}$$

4,6 – 2,26 =	3,5 – 2,39 =	4,08 – 2,518 =	5,07 – 2,417 =
5,7 – 3,34 =	8,8 – 7,45 =	5,09 – 3,329 =	6,13 – 4,328 =
3,8 – 1,56 =	9,7 – 1,54 =	3,07 – 2,645 =	8,24 – 6,271 =
2,9 – 1,65 =	7,6 – 4,36 =	2,06 – 1,546 =	9,36 – 3,172 =
6,5 – 4,27 =	6,4 – 3,18 =	6,04 – 4,246 =	4,72 – 1,721 =

figuur 1: Vossen (red.), z.j., deel 5B, pag.41

Ook in verschillende didactiekboeken die vanaf de jaren vijftig zijn verschenen, wordt het gebied van de gewone breuken als toegang gebruikt.

In 'Grondslagen van de Rekendidactiek' (Van Gelder, 1959) lezen we:

> 'De tiendelige breuken worden behandeld als breuken, waarvan de noemer 10, 100, 1000, enzovoorts, is.'
>
> ... 'De verdere behandeling van de tiendelige breuken loopt parallel met de gewone breuken.' (pag.83)

En vervolgens wijdt Van Gelder geen woord meer aan kommagetallen. Het leerplan 'Rekenen' van het Nutsséminarium zegt over vermenigvuldigen (fig.2).

Vermenigvuldigen

We sluiten aan bij het vorige punt (4): de herleiding van gewone breuken naar tiendelige en omgekeerd. We geven eerst de volgende soort oefeningen:

Naast de vorm van gewone breuken moeten de leerlingen die van de tiendelige breuken schrijven.

$\frac{1}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{1000}$	$0{,}1 \times 0{,}01 = 0{,}001$
$\frac{7}{10} \times \frac{3}{100} = \frac{21}{1000}$	$0{,}7 \times 0{,}03 = 0{,}021$
$\frac{4}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{12}{100}$	$0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$
$2\frac{7}{10} \times 3\frac{3}{10} = \frac{27}{10} \times \frac{33}{10} = \frac{891}{100} = 8\frac{91}{100}$	$2{,}7 \times 3{,}3 = 8{,}91$

figuur 2: Nutsseminarium, 1967, pag.130

Delen wordt in dit leerplan *via omgekeerd vermenigvuldigen* en met de staartdeling aangeleerd. Daarnaast functioneert ook de breukenaanpak (fig.3).

Dezelfde oefening in omgekeerde volgorde (goed controlemiddel)

$0{,}5 : 0{,}05 = 10$	$\frac{5}{10} : \frac{5}{100} = \frac{\cancel{100}^{10}}{\cancel{5}_1} \times \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{10}_1} = 10$
$0{,}27 : 0{,}3 = 0{,}9$	$\frac{27}{100} : \frac{3}{10} = \frac{\cancel{10}^1}{\cancel{3}_1} \times \frac{\cancel{27}^9}{\cancel{100}_{10}} = \frac{9}{10}$

figuur 3: Nutsseminarium, 1967, pag.131

In het algemeen leidt de aanpak *via breuken* tot het snel aanleren van rekenregels voor het hanteren van de komma's bij de verschillende basisbewerkingen; in ieder geval worden daartoe vaak aanbevelingen gedaan. Zo staat in het Nuts-leerplan direct onder de reeks keersommen:

> 'Hieruit leiden we de regel af dat in het antwoord evenveel cijfers achter de komma komen als de som van het aantal cijfers achter de komma is in vermenigvuldigtal en vermenigvuldiger.' (pag.130)

Het delen wordt nog directiever behandeld:

> 'Een eenvoudige algemene regel voor de komma is niet te geven. De leerlingen moet geleerd worden de komma in het antwoord te plaatsen, zo gauw ze de eenheden al of niet hebben kunnen gebruiken en de tienden aangehaald moeten worden. In de deler mag geen komma staan.' (pag.131)

Veel vroeger maanden de handleidingen bij de methode *via breuken* vaak tot enige voorzichtigheid:

> 'Na genoegzame oefening wordt die redenering achterwege gelaten en berekenen de leerlingen alleen na afloop der vermenigvuldiging, uit welke delen het gevonden product bestaat. Het kan ook niet te moeilijk geacht worden, hun te doen opmerken, dat het aantal af te schrappen cijfers in het product gelijk is aan de som van het aantal decimalen in den vermenigvuldiger en het vermenigvuldigtal. Men vergete echter niet, dat deze regel als elke andere, achteraan moet komen en niet voorop mag geplaatst worden.' (Zernike, 1915, pag.205-206).

Uit de nuchtere onderwijspraktijk klinken ook andere geluiden dan deze sterk 'verstandelijke' aanpak, zoals bijvoorbeeld die van de auteur van de veelgebruikte methode 'Geef Acht' uit de jaren veertig en vijftig:

> 'Er zijn sinds Pestalozzi en Overberg, dus meer dan een eeuw lang, allerlei verklaringen beproefd, maar alwie zich heeft afgebeuld om deze operaties voor lagere-schoolleerlingen begrijpelijk te maken, heeft het ten slotte moeten opgeven met de verzuchting: het gáát niet!
> Daarom zeggen ook wij: Leer ze in Gods naam maar het kunstje! Dat betekent voor de vermenigvuldiging: doe maar of het hele getallen waren, en streep in de uitkomst zoveel cijfers af, als in vermenigvuldigtal en vermenigvuldiger samen zijn afgestreept.' (Rombouts, 1959, pag.124).

En zo is het in de onderwijspraktijk volgens deze methode *via breuken* vaak gegaan (fig.4).

1 $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1 \times 1}{10 \times 10} = \frac{1}{100}$ $\quad \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$

1			
1	$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$	**0,1 × 0,1 = 0,01**	**0,4 × 0,6 = 0,24**
	$\frac{2}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{6}{100}$	0,2 × 0,3 = 0,06	0,8 × 0,3 =
	$\frac{1}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{100}$	0,1 × 0,4 = 0,04	0,7 × 0,6 =
	$\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{..}{..}$	0,3 × 0,3 = 0,..	0,9 × 0,4 =
	$\frac{4}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{..}{..}$	0,4 × 0,3 =	0,6 × 0,3 =

3

0,2	←	1 cijfer achter de komma
0,3 ×	←	1 cijfer achter de komma
0,06	←	samen 2 cijfers achter de komma
0,07	←	2 cijfers achter de komma
0,4 ×	←	1 cijfer achter de komma
0,028	←	samen 3 cijfers achter de komma

3

0,1	0,2	0,4	0,7	0,9	0,8
0,1 ×	0,3 ×	0,9 ×	0,6 ×	0,8 ×	0,7 ×
0,01	0,07	0,09	0,36	0,24	0,37
0,1 ×	0,6 ×	0,3 ×	0,4 ×	0,3 ×	0,9 ×

figuur 4: Zandvoort (red.) 1970, deel 10, pag.94

Ten slotte nog dit: wat opvalt is dat de vroeger veelgebruikte methode *via breuken* vrijwel niet meer voorkomt in de leerboeken die na 1975 zijn ontwikkeld toen de Wiskobas-denkbeelden over het zogenoemde realistische reken-wiskundeonderwijs een grote vlucht namen.

3 methode II: via plaatswaarde

De introductie van kommagetallen en de bewerkingen ermee kunnen ook betrekkelijk los van gewone breuken worden behandeld, namelijk via de uitbreiding van het plaatswaardesysteem van de gehele getallen.
Een voorbeeld daarvan treft men aan in de methode van Van Pelt 'De Nieuwe Rekencursus' die aan het einde van de negentiende en het begin van de twintigste eeuw grote opgang maakte.
Van Pelt maakt gebruik van een 'rangenfiguur', thans positiekaart genoemd. Daarop staan de eenheden, tientallen, honderdtallen, enzovoort, in rangorde.

h	t	e
2	8	3

Het getal 283 bijvoorbeeld wordt door de positiestrepen uiteengelegd in 2 honderdtallen, 8 tientallen en 3 eenheden.

> 'Door het verschuiven van een cijfer van rang op rang wordt een helder zicht op het talstelsel gegeven ...' (Van Pelt, 1903, pag.29).

De invoering van de tiendelige breuken gebeurt op de volgende wijze (fig.5).

CC. De Tiendeelige breuken.
I. In de rangenfiguur is herhaaldelijk een cijfer van rechts naar links, en omgekeerd, verschoven.
We zetten nu een 1 in den rang der duizendtallen en verschuiven die naar rechts. Juist, tienmaal zoo klein is nu de waarde. Weer een plaats verder naar rechts. Enz., tot de 1 in den rang der *eenen* staat. Maar nu wil ik de 1 nog één plaats naar rechts verschuiven. Enkelen: „*Dat kan niet: er is geen rang meer!*" O, dat is geen bezwaar. Achter de eenen trek ik een zeer dikke streep en verder nog 3 strepen, zoodat er nu nog 3 rangen achter de eenen zijn.
We plaatsen nu de 1 in den eersten rang achter de eenen. Ze is nu tienmaal zoo weinig waard. Hoeveel is $^1/_{10}$ van 1. Juist: *één tiende.* De 1 staat nu in *den rang der tiende deelen.*
Zoo voortgaande komt de 1 in den rang der *honderdste deelen*, ten slotte in dien der *duizendste.*

figuur 5: Van Pelt, 1903, pag.65-66

Later wordt de dikke streep achter de eenheden vervangen door een komma. Getallen worden op verschillende manieren uitgesproken. Bijvoorbeeld 2,83 als:
2 geheelen + 8 tienden + 3 honderdsten.
2 geheelen + 83 honderdsten.
283 honderdsten, te noteren als 283 h°.
Vermenigvuldigen gaat als volgt (fig.6).

20,987	20987 d°
35 .	35
	104935
	62961
	734545 d° = 734,545.

figuur 6: Van Pelt, 1903, pag.67

Indien zowel het vermenigvuldigtal als de vermenigvuldiger kommagetallen zijn, en dat is leerstof voor het zesde leerjaar (groep 8), kiest Van Pelt een redactiesom als startprobleem om de rekenstrategie duidelijk te maken: 3,6 kg thee à *f* 2,46.

> 'We zullen de komma in den vermenigvuldiger doen verdwijnen door te houden, dat de kooper tienmaal zooveel koopt. We boeken dus 36 × *f* 2,46. Het antwoord moet tienmaal zoo klein gemaakt worden. Hoe dat geschiedt, weten de leerlingen reeds.' (Van Pelt, 1903, p. 74).

Delen gebeurt via deel-van nemen met behulp van de staartdeling. De opgave 725,64 : 12 verloopt zo (fig.7).

```
1/12 van 725,64 / 60,47
         72
           56
           48
            84
```

$^1/_{12}$ van 725 geh. = 60 geh. en 5 tot rest. Er blijft van het deeltal over 5,64 of 56 t° en 4 h° $^1/_{12}$ van 56 t° = 4 t°; rest 8 t°.

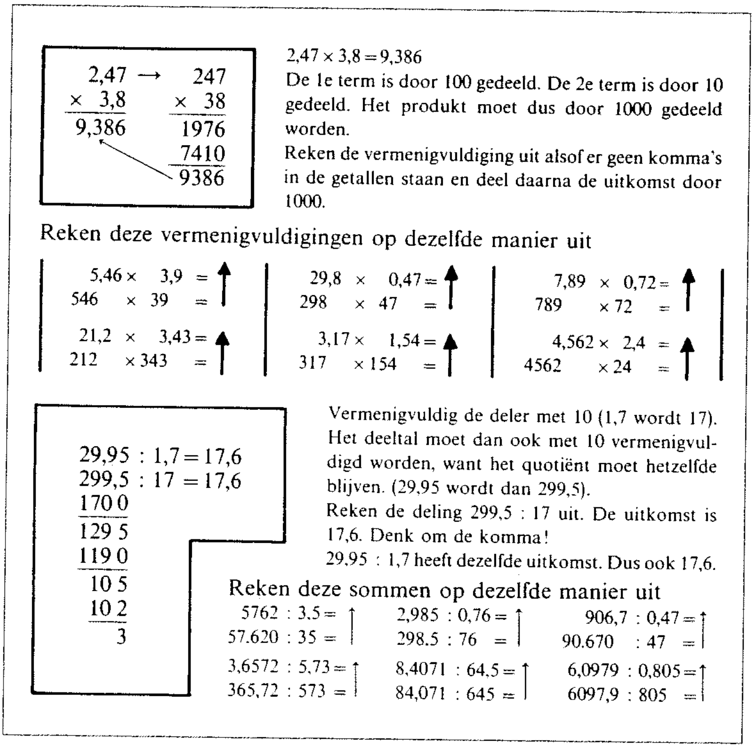
Nog moet bepaald worden $^1/_{12}$ van 8 t° en 4 h° of van 84 h° = 7 h°.

figuur 7: Van Pelt, 1903, pag.67

De deling 5,64 : 1,2 wordt eerst veranderd in 56,4 : 12 en vervolgens op de zojuist genoemde wijze berekend. Ook deze omzetting wordt gemotiveerd en geïllustreerd met een redactiesom:

'1,2 kg thee kost *f* 5,64. Wat kost 1 kg?
Dan kost 12 kg *f* 56,40, dus 1 kg *f* 56,40 : 12.'

(In geval de deling als verhouding geïnterpreteerd moet worden, kiest Van Pelt een andere rekenstrategie, maar daar gaan we nu niet verder op in.)
Bij de moeilijkste vermenigvuldig- en deelopgaven spelen zowel het omzetten in verschillende rangen als het vermenigvuldigen met machten van tien en het delen door machten van tien een cruciale rol.
De inleidende oefeningen met deze specifieke operaties in de rangenfiguur zijn om die reden van fundamenteel belang. Beheersing van de cijferprocedures voor de basisoperaties is daarnaast ook een voorwaarde voor het kunnen rekenen met kommagetallen. In een enkel geval staat de uitleg van de door Van Pelt geschetste rekenprocedures, of van kleine variaties daarop, zelfs uitdrukkelijk in de tekst van het leerlingenboek vermeld (fig.8).



2,47 → 247
× 3,8   × 38
9,386   1976
7410
9386

2,47 × 3,8 = 9,386
De 1e term is door 100 gedeeld. De 2e term is door 10 gedeeld. Het produkt moet dus door 1000 gedeeld worden.
Reken de vermenigvuldiging uit alsof er geen komma's in de getallen staan en deel daarna de uitkomst door 1000.

Reken deze vermenigvuldigingen op dezelfde manier uit

5,46 × 3,9 =	29,8 × 0,47 =	7,89 × 0,72 =
546 × 39 =	298 × 47 =	789 × 72 =
21,2 × 3,43 =	3,17 × 1,54 =	4,562 × 2,4 =
212 × 343 =	317 × 154 =	4562 × 24 =

29,95 : 1,7 = 17,6
299,5 : 17 = 17,6
1700
129 5
119 0
10 5
10 2
3

Vermenigvuldig de deler met 10 (1,7 wordt 17). Het deeltal moet dan ook met 10 vermenigvuldigd worden, want het quotiënt moet hetzelfde blijven. (29,95 wordt dan 299,5).
Reken de deling 299,5 : 17 uit. De uitkomst is 17,6. Denk om de komma!
29,95 : 1,7 heeft dezelfde uitkomst. Dus ook 17,6.

Reken deze sommen op dezelfde manier uit

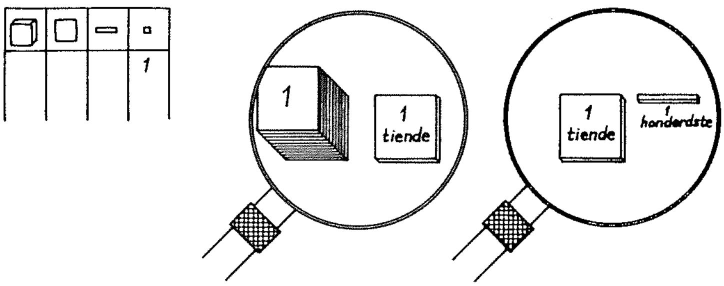
5762 : 3,5 =	2,985 : 0,76 =	906,7 : 0,47 =
57.620 : 35 =	298,5 : 76 =	90.670 : 47 =
3,6572 : 5,73 =	8,4071 : 64,5 =	6,0979 : 0,805 =
365,72 : 573 =	84,071 : 645 =	6097,9 : 805 =

figuur 8: Van Gerven, 1970, deel II, pag.51 en 71

In de nieuwe reken-wiskundemethoden die vanaf 1975 op de onderwijsmarkt verschijnen, wordt de 'rangenfiguur' van Van Pelt concreet gestoffeerd met positie-materiaal, waaronder plaatswaardeblokken en abacus.

De fundamentele operaties van 10 ×, 100 × en : 10, : 100 worden via deze leermiddelen in tekening gezet. Enkele illustraties (fig.9a, b, c).

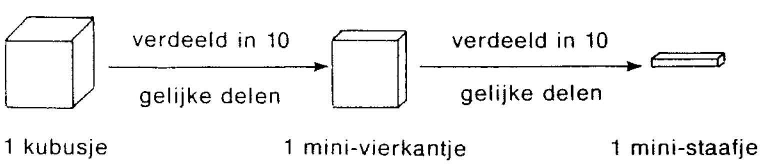
1 Het verdelen gaat door.

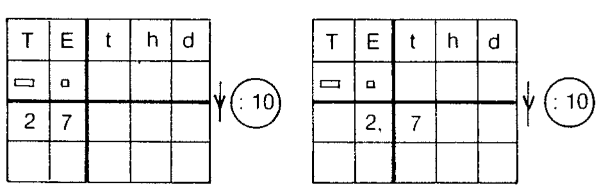


a Schrijf met een komma:
drie tienden
achtentwintig honderdsten
vijftig honderdsten
vijf tienden
vijf honderdsten
twintig en twee tienden
honderd en zestien honderdsten

b Wisselen.
4 tienden is . . . honderdsten.
70 honderdsten is . . . tienden.
3 tienden en 5 honderdsten is . . . honderdsten.
1 hele is . . . tienden.
1 hele is . . . honderdsten.
2 helen en 8 tienden is . . . tienden.
3 helen en 8 honderdsten is . . . honderdsten.

figuur 9a: Van de Molengraaf (red.), z.j., deel 4B, pag.14



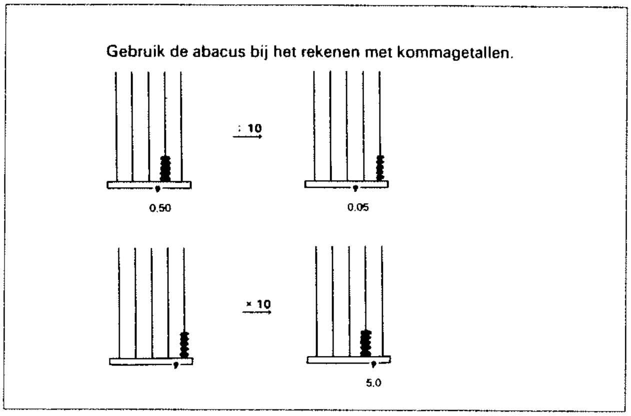


27 : 10 =

___ : ___ =

Heb je de komma op de goede plaats gezet?

figuur 9b: 'Getal in Beeld' (5), Brinkman (red.), 1975, pag.81



figuur 9c: 'Rekenwerk' (deel 7b), Nelissen (red.), 1989, pag.14)

Ook geld werd vroeger en wordt nu als positiemateriaal benut.
Maar meestal volstond men met een korte verwijzing naar geld of metrieke maten via het noteren van de betreffende benoemde getallen.
De opgaven zijn dan weliswaar niet zo formeel gesteld als bij Van Pelt, die in eerste instantie met onbenoemde getallen werkte, maar toch zijn ze tamelijk kaal. We kiezen een voorbeeld van dergelijke opgaven met benoemde getallen uit 'De Grondslag', een veelgebruikte methode in de jaren vijftig en zestig (fig.10).

f 16,59 : 7	8 × *f* 14,86
f 38,80 : 8	9 × *f* 12,92
f 2,45 : 7	7 × *f* 16,14
f 2,76 : 6	5 × *f* 12,75

figuur 10: Haack en Lieffering, z.j., deel 8, pag.21

Het commentaar in de handleiding voor de onderwijzer luidt daarbij:

> Wanneer de guldens gedeeld zijn wordt onmiddellijk de komma achter de guldens in de uitkomst gezet. Daarna komen de dubbeltjes en de centen aan de beurt.
> Deze werkwijze is een voorbereiding op het werken met decimale getallen en is te verkiezen boven de werkwijze: eerst in centen en later 't antwoord opschrijven in guldens.
> Op het bord ook enkele delingen, waarbij in de uitkomst geen guldens komen. (f 0,75 : 5).

De rekenkundige bewerkingen met deze benoemde getallen uit de sfeer

van geldwaarden en het metrieke stelsel verlopen hetzelfde als bij de aanpak van Van Pelt die bij de moeilijkste gevallen van vermenigvuldigen en delen tenslotte ook overstapt op benoemde getallen in tekst-opgaven. Maar hiermee willen we niet zeggen dat na 1935, dus na de periode van Versluys, Van Pelt, Zernike, en Bouman en Van Zelm, de leerboeken in het algemeen net zo gericht waren op het inzichtelijke rekenen (in dit geval met kommagetallen) als in het tijdvak daarvoor. Want dat is beslist niet het geval.
In navolging van de eerder geciteerde Rombouts geven vele leerboeken, die in aanzet de methode *via plaatswaarde* volgen bij optellen, aftrekken en ook in de moeilijke gevallen van vermenigvuldigen en delen, direct de passende rekenregels.

Overigens vindt men in Nederland de methode *via plaatswaarde* na de leerboeken van Douma en Van Pelt uit de negentiende eeuw, niet meer in zuivere vorm terug. Vaak komt die namelijk voor in combinatie met de methode *via breuken*. De traditionele methoden uit de twintigste eeuw volgden meestal de aanpak *via breuken* of de combinatieaanpak *via plaatswaarde en breuken* (in deze volgorde).

4 intermezzo: precies rekenen en schattend rekenen

Bij de beschrijving van de methode *via breuken* en de methode *via plaatswaarde* ging het steeds over precies uitrekenen via voornamelijk cijferen. Tot 1975 lag daarop in Nederland vrijwel uitsluitend de nadruk, enkele uitzonderingen daargelaten.
De eerste rekenmethode waarin het schattend rekenen een prominente positie krijgt toegewezen is 'Fundamenteel Rekenen' van Diels en Nauta, dat in de jaren dertig grote opgang maakte.
Een voorbeeld van een opgave met schatten in verband met kommagetallen voor begin klas 5 (groep 7) (fig.11).

Eerst de uitkomst schatten:

4500,15 : 9,5 =	651,75 : 165 =	26,54 × 3,75 =
683,35 : 79 =	419,25 : 32,5 =	4,85 × 36,09 =
499,68 : 0,72 =	474,35 : 2,65 =	15,7 × 25,46 =
845,93 : 2,9 =	367,04 : 0,248 =	1,425 × 385,8 =

figuur 11: Diels en Nauta, 1944 (6e druk), deel 9, pag.10)

Enkele kanttekeningen daarbij:
- het kunnen schatten is hier een doel op zich;
- tevens dient het als controlemiddel voor het cijferend rekenen en speciaal voor de juiste plaatsing van de komma bij delen en vermenigvuldigen;
- het heeft betrekking op kale sommen; schatten bij tekstopgaven, die toch al schaars zijn, komt nauwelijks voor.

Opmerkelijk is dat het schattend rekenen in die tijd niet als middel wordt gebruikt om de komma te leren plaatsen en de kommaregel bij het vermenigvuldigen te ontdekken. Zo schrijft Rombouts in de handleiding van zijn methode *Geef Acht* op de ene pagina dat die regel toch niet begrijpelijk is te maken en dat men de kinderen het kunstje maar moet aanbieden, terwijl hij op de volgende pagina stelt:

> 'Het moet bijvoorbeeld niet mogelijk zijn, dat een leerling als uitkomst van 4,5 × 6,75 presenteert: 303,75 in de veronderstelling dat dit juist zou kunnen zijn. Al vóór hij met vermenigvuldigen begon, moest hij gezien hebben, dat er òm de 30 moet uitkomen, want 5 × 6 = 30.' (Rombouts, 1959 (4e druk), p. 125).

In tegenstelling tot 'Fundamenteel Rekenen' treft men in 'Geef Acht' echter geen opgaven over schatten aan, doch alleen maar cijfersommen en (relatief veel) redactie-opgaven.

Vanaf omstreeks 1960 treedt er echter een verandering op en gaat het schattend rekenen ook een functie vervullen bij het cijferen in casu het plaatsen van de komma in de cijfermatig berekende uitkomst (fig.12).

Vermenigvuldig:

7,6	9,4	8,7	9,2	6,4
3,8	5,2	5,9	4,1	3,7
7,26	9,27	6,38	5,14	4,02
8,36	7,48	8,59	9,68	9,87

figuur 12

In het onderwijzersboek van 'Functioneel Rekenen' staat bij deze opgave:

> 'Klassikale voorbereiding dezer opgave is noodzakelijk. Men kan die als volgt laten verlopen:
> Het antwoord van 3,8 × 7,6 ligt tussen 21 (= 3 × 7) en 32 (= 4 × 8). Na vermenigvuldiging alsof het gehele getallen zijn, krijgt men als uitkomst 2888. Volgens de voorafgaande begrenzing van het goede antwoord moet de komma zó geplaatst worden: 28,88.
> Door een bespreking van enkele voorbeelden van vermenigvuldigen van twee decimale getallen met een zeer klein aantal gehelen (met het oog op

Enkele kanttekeningen daarbij:
- het kunnen schatten is hier een doel op zich;
- tevens dient het als controlemiddel voor het cijferend rekenen en speciaal voor de juiste plaatsing van de komma bij delen en vermenigvuldigen;
- het heeft betrekking op kale sommen; schatten bij tekstopgaven, die toch al schaars zijn, komt nauwelijks voor.

Opmerkelijk is dat het schattend rekenen in die tijd niet als middel wordt gebruikt om de komma te leren plaatsen en de kommaregel bij het vermenigvuldigen te ontdekken. Zo schrijft Rombouts in de handleiding van zijn methode *Geef Acht* op de ene pagina dat die regel toch niet begrijpelijk is te maken en dat men de kinderen het kunstje maar moet aanbieden, terwijl hij op de volgende pagina stelt:

> 'Het moet bijvoorbeeld niet mogelijk zijn, dat een leerling als uitkomst van $4{,}5 \times 6{,}75$ presenteert: 303,75 in de veronderstelling dat dit juist zou kunnen zijn. Al vóór hij met vermenigvuldigen begon, moest hij gezien hebben, dat er òm de 30 moet uitkomen, want $5 \times 6 = 30$.' (Rombouts, 1959 (4e druk), p. 125).

In tegenstelling tot 'Fundamenteel Rekenen' treft men in 'Geef Acht' echter geen opgaven over schatten aan, doch alleen maar cijfersommen en (relatief veel) redactie-opgaven.
Vanaf omstreeks 1960 treedt er echter een verandering op en gaat het schattend rekenen ook een functie vervullen bij het cijferen in casu het plaatsen van de komma in de cijfermatig berekende uitkomst (fig.12).

Vermenigvuldig:

7,6	9,4	8,7	9,2	6,4
3,8	5,2	5,9	4,1	3,7
7,26	9,27	6,38	5,14	4,02
8,36	7,48	8,59	9,68	9,87

figuur 12

In het onderwijzersboek van 'Functioneel Rekenen' staat bij deze opgave:

> 'Klassikale voorbereiding dezer opgave is noodzakelijk. Men kan die als volgt laten verlopen:
> Het antwoord van $3{,}8 \times 7{,}6$ ligt tussen 21 (= 3×7) en 32 (= 4×8). Na vermenigvuldiging alsof het gehele getallen zijn, krijgt men als uitkomst 2888. Volgens de voorafgaande begrenzing van het goede antwoord moet de komma zó geplaatst worden: 28,88.
> Door een bespreking van enkele voorbeelden van vermenigvuldigen van twee decimale getallen met een zeer klein aantal gehelen (met het oog op het uit het hoofd begrenzen der uitkomst) en waarbij het er niet toe doet hoeveel cijfers er achter de komma staan, zal men de kinderen kunnen laten **ontdekken**, dat er altijd in de uitkomst zoveel cijfers achter de komma moeten komen (nullen meegerekend), als er in vermenigvuldiger en vermenigvuldigtal **samen** achter de komma staat.'
> (Reijnders en Snijders, 1966 (5e druk), deel 8, pag.50)

In 'Nieuw Rekenen' staat zelfs in de leerlingentekst uitdrukkelijk vermeld welke schatstrategie gevolgd moet worden (fig.13).

Eérst schatten!

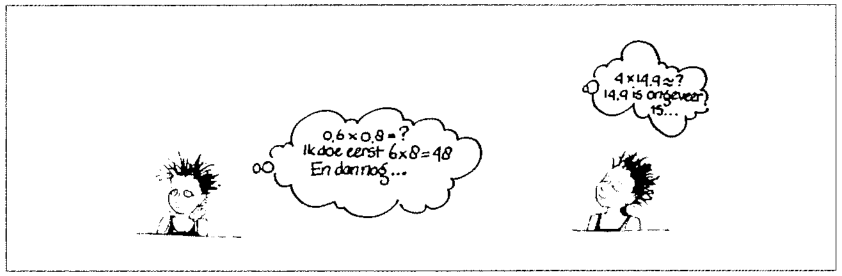
1. *Hoe kan dat?*
   7,4 × 7,4 Uit deze vermenigvuldiging komt *méér* dan 49, maar *minder* dan 64.

   $$\begin{array}{r} 7{,}4 \\ 7{,}4\times \\ \hline 296 \\ 5180 \\ \hline 54{,}76 \end{array}$$

2. a. Tussen welke twee getallen ligt de uitkomst? (bijv.: tussen 9 en 12).
   3,6 × 3,6 = 8,4 × 9,3 = 10,5 × 10,5 = 12,4 × 12,4 =
   8,5 × 8,5 = 5,6 × 12,4 = 17,4 × 20,3 = 72,4 × 9,3 =
   b. Reken de sommen van 2a uit. Zie het voorbeeld achter som 1. Vergelijk je antwoord steeds met 2a.

figuur 13: Bruinsma (red.), 1969, deel 5b, pag.51

In tegenstelling tot de methode van Diels en Nauta wordt in de laatstgenoemde methode niet eerst de kommaregel aangeleerd via de methode *via breuken* of *via plaatswaarde*, maar dient het schatten als didactisch middel om de kommaregel te vinden. Er wordt direct met tamelijk moeilijke opgaven van gemengde getallen gestart; in tegenstelling tot de stap-voor-stap opbouw naar toenemende complexiteit die zo kenmerkend is voor de eerder besproken aanpakken *via breuken* en *via plaatswaarde* waarbij uitsluitend precies cijferend wordt gerekend. Kortom, de leergang van vermenigvuldigen en delen van kommagetallen verandert op onderdelen als het schatten er op deze wijze bij wordt betrokken.



figuur 14

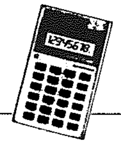
In de nieuwe reken-wiskundemethoden die vanaf 1975 op de onderwijsmarkt komen, functioneert schatten niet alleen als doel op zich, maar ook

in dienst van de kommaplaatsing. In verschillende teksten verschijnen daarbij gedachtenwolkjes, zoals bijvoorbeeld in de volgende uit 'Rekenen en Wiskunde' (fig. 14).
De zakrekenmachine wordt soms bij het schatten ingezet om het antwoord globaal te controleren (fig. 15).

i Schattend rekenen

5 x 9,8 ≈	2,8 x 3,2 ≈	4,01 x 5,01 ≈
5 x 0,98 ≈	9,1 x 2,05 ≈	8,01 x 5,01 ≈
3 x 33,4 ≈	9 x 11,2 ≈	4 x 2,49 ≈
7 x 14,3 ≈	0,9 x 11,2 ≈	8 x 2,19 ≈
7 x 1,43 ≈	10,1 x 0,5 ≈	7,9 x 12,1 ≈

Controleer je antwoorden met het rekenmachientje.
Het moet ongeveer kloppen.



figuur 15: Gravemeijer (red.), 1988, deel 6B, pag.6

We treffen ook nog andere oefenvormen aan (fig. 16):

Hans heeft de sommen hieronder al uitgerekend, maar hij is overal de komma vergeten. Zet de komma waar hij hoort.

4,2 x 3,6 = 1512	4,62 x 2,84 = 131208
2,32 x 4,56 = 105792	2,9 x 3,3 = 957
3,24 x 2,4 = 7776	3,65 x 6,214 = 226811
1,3 x 2,91 = 3783	1,3 x 9,398 = 122174
3,5 x 6 = 21	6,498 x 12 = 77976

figuur 16: Gravemeijer (red.), 1988, deel 6A, pag.25

Tevens worden nu ook elementaire contextopgaven in het schatten betrokken. Maar het moet wel gezegd, dat dit in de realistische rekenmethoden die in de jaren tachtig zijn ontwikkeld slechts spaarzaam gebeurt (fig. 17).

Oude kleren verkopen.

OUDE KLEREN
KOPEN WIJ OP
PER KILO F 4,50

Meneer Schaap brengt 8 kilo oude kleren weg.
Hoeveel krijgt hij daarvoor?

Lisette Hayman heeft 2,4 kilo oude kleding.
Hoeveel geld krijgt zij daarvoor?

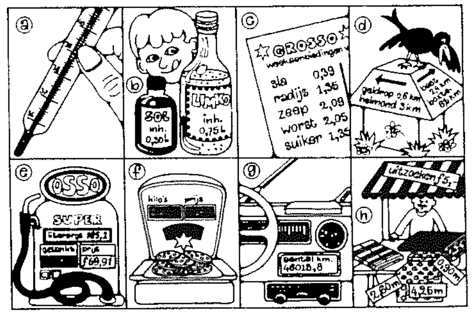
figuur 17: Gravemeijer (red.), 1988, deel 6A, pag.17

Dit brengt ons bij de derde methode, die uitgaat van meetcontexten, waarbij uiteraard ook geld en gewichten en dergelijke tot meetgetallen worden gerekend.

5 methode III: via meetcontexten

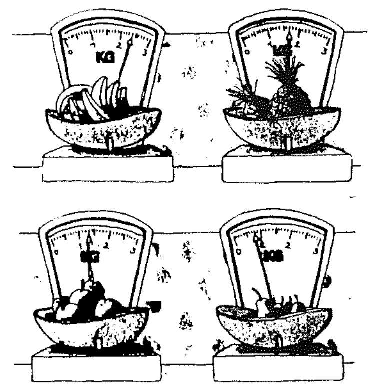
Kinderen komen kommagetallen veelvuldig tegen in de vorm van meetgetallen. Enkele voorbeelden uit het leven van alledag (fig. 18 en fig. 19).

1 Kommagetallen zie je overal



figuur 18: Van de Molengraaf (red.), z.j., deel 4B, pag.10

Hoe interpreteren ze deze getallen? Hoe stellen ze zich deze getallen op een schaallijn voor die past bij de onderscheiden contexten?



Wat weegt het zwaarst en wat het lichtst?
Hoeveel wegen de bananen en ananas samen?
Hoeveel wegen de appel meer dan de peren?
Hoeveel weegt al dit fruit samen?

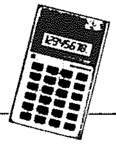
figuur 19: Nelissen (red.), 1988, deel 7a, pag.55

in dienst van de kommaplaatsing. In verschillende teksten verschijnen daarbij gedachtenwolkjes, zoals bijvoorbeeld in de volgende uit 'Rekenen en Wiskunde' (fig.14).
De zakrekenmachine wordt soms bij het schatten ingezet om het antwoord globaal te controleren (fig.15).

I Schattend rekenen

5 x 9,8 ≈	2,8 x 3,2 ≈	4,01 x 5,01 ≈
5 x 0,98 ≈	9,1 x 2,05 ≈	8,01 x 5,01 ≈
3 x 33,4 ≈	9 x 11,2 ≈	4 x 2,49 ≈
7 x 14,3 ≈	0,9 x 11,2 ≈	8 x 2,19 ≈
7 x 1,43 ≈	10,1 x 0,5 ≈	7,9 x 12,1 ≈

Controleer je antwoorden met het rekenmachientje.
Het moet ongeveer kloppen.



figuur 15: Gravemeijer (red.), 1988, deel 6B, pag.6

We treffen ook nog andere oefenvormen aan (fig.16):

Hans heeft de sommen hieronder al uitgerekend, maar hij is overal de komma vergeten. Zet de komma waar hij hoort.

4,2 x 3,6 = 1512	4,62 x 2,84 = 131208
2,32 x 4,56 = 105792	2,9 x 3,3 = 957
3,24 x 2,4 = 7776	3,65 x 6,214 = 226811
1,3 x 2,91 = 3783	1,3 x 9,398 = 122174
3,5 x 6 = 21	6,498 x 12 = 77976

figuur 16: Gravemeijer (red.), 1988, deel 6A, pag.25

Tevens worden nu ook elementaire contextopgaven in het schatten betrokken. Maar het moet wel gezegd, dat dit in de realistische rekenmethoden die in de jaren tachtig zijn ontwikkeld slechts spaarzaam gebeurt (fig.17).

Oude kleren verkopen.

OUDE KLEREN KOPEN WIJ OP PER KILO F 4,50

Meneer Schaap brengt 8 kilo oude kleren weg.
Hoeveel krijgt hij daarvoor?

Lisette Hayman heeft 2,4 kilo oude kleding.
Hoeveel geld krijgt zij daarvoor?

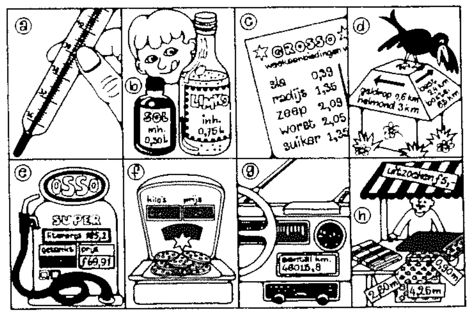
figuur 17: Gravemeijer (red.), 1988, deel 6A, pag.17

Dit brengt ons bij de derde methode, die uitgaat van meetcontexten, waarbij uiteraard ook geld en gewichten en dergelijke tot meetgetallen worden gerekend.

5 methode III: via meetcontexten

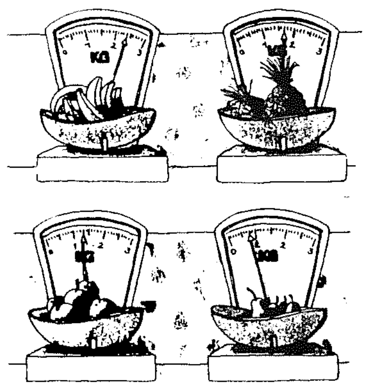
Kinderen komen kommagetallen veelvuldig tegen in de vorm van meetgetallen. Enkele voorbeelden uit het leven van alledag (fig.18 en fig.19).

1 Kommagetallen zie je overal



figuur 18: Van de Molengraaf (red.), z.j., deel 4B, pag.10

Hoe interpreteren ze deze getallen? Hoe stellen ze zich deze getallen op een schaallijn voor die past bij de onderscheiden contexten?

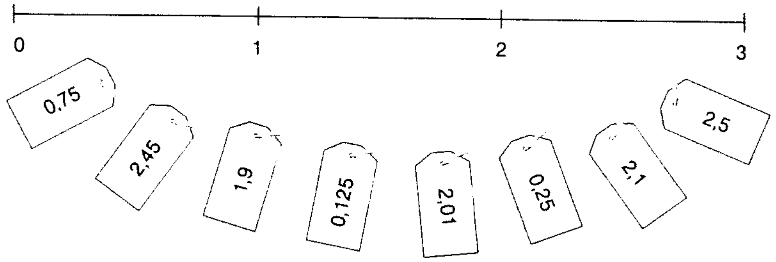


Wat weegt het zwaarst en wat het lichtst?
Hoeveel wegen de bananen en ananas samen?
Hoeveel wegen de appel meer dan de peren?
Hoeveel weegt al dit fruit samen?

figuur 19: Nelissen (red.), 1988, deel 7a, pag.55

Bij deze informele kennis ligt het startpunt voor het onderwijs met kommagetallen in de nieuwste reken-wiskundemethoden. De voorstelling van de getallenlijn, meetlijn of schaallijn komt men daarin veelvuldig tegen. De meetgetallen of kale getallen moeten geplaatst worden op de getallenlijn, en met getallen moet van meet af aan worden gerekend.
Zou het helpen als bij de volgende opdracht achter de kale getallen de grootheid gewicht gedacht wordt: 0,75 kg; 2,45 kg, enzovoort? (fig.20).

1. Neem de getallenlijn over in je schrift en zet de kommagetallen ongeveer op de juiste plaats.



figuur 20: Gravemeijer (red.), 1988, deel 6B, pag.16

Duidelijk wordt in de moderne methoden een verbinding met meten gelegd: het kommagetal is gegeven en de passende maat moet worden gezocht (fig.21).

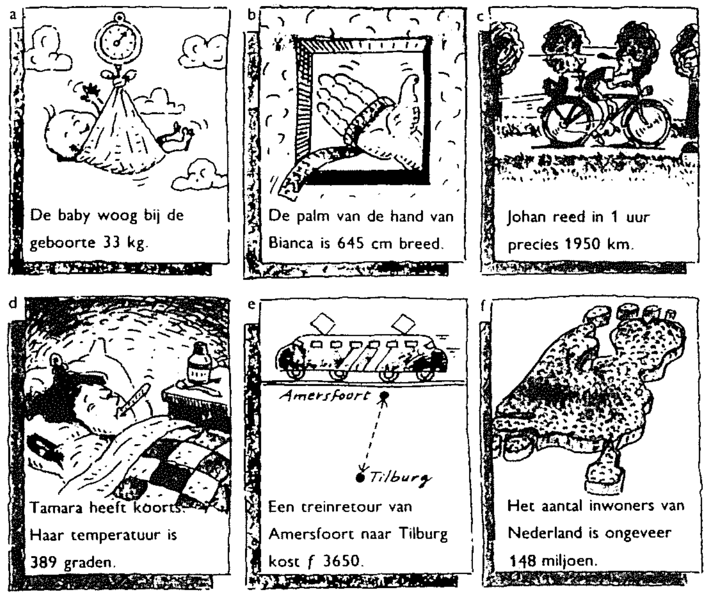
1 Kies de goede maat.

- **a** De tafel is 0,8 . . . hoog (dm, m², m).
- **b** Een wandelaar loopt 4500 . . . per uur (m, km, ha).
- **c** Een blad papier is 0,06 . . . dik (m, dm², mm).
- **d** Een fles limonade weegt ongeveer 1300 . . . (dl, gram, kg).
- **e** Een brood weegt ongeveer 0,8 . . . (kg, gram, dl).

figuur 21: Van de Molengraaf (red.), z.j., deel 5B, pag.132

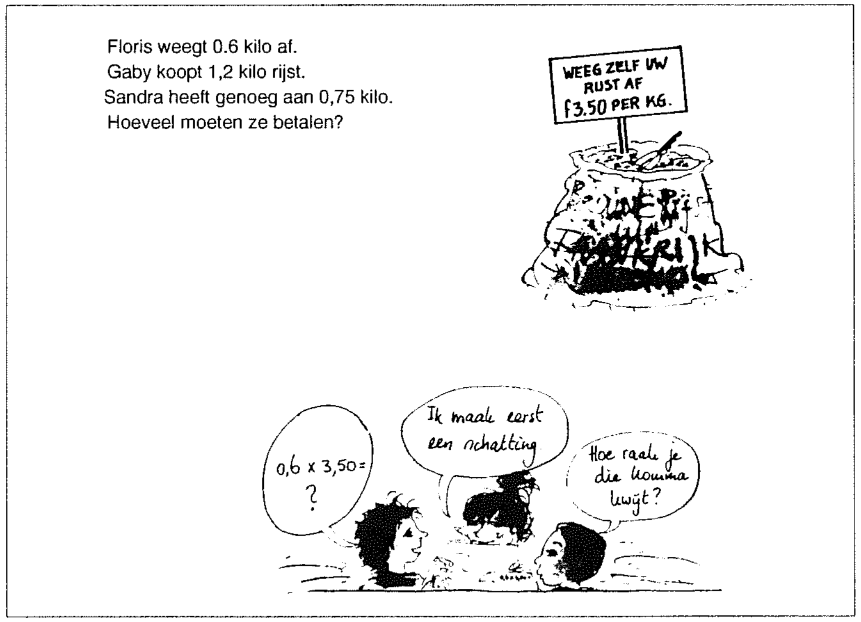
Of de maateenheid is gegeven en de komma moet gezet worden, zoals in de volgende opgave uit 'Operatoir Rekenen' (nieuwe versie) (fig.22).
Alle onderstaande kommagetallen kunnen vervolgens weer op getallenlijnen worden afgebeeld.
Indien nu de leerlingen na uitgebreide oefening weten waar kommagetallen (globaal) op de getallenlijnen wonen, hoe kunnen ze vandaaruit dan leren rekenen met kommagetallen, bijvoorbeeld vermenigvuldigen?

In alle getallen is de komma vergeten. Schrijf het goede getal in je schrift.



figuur 22: Sweers (red.), 1994, deel F

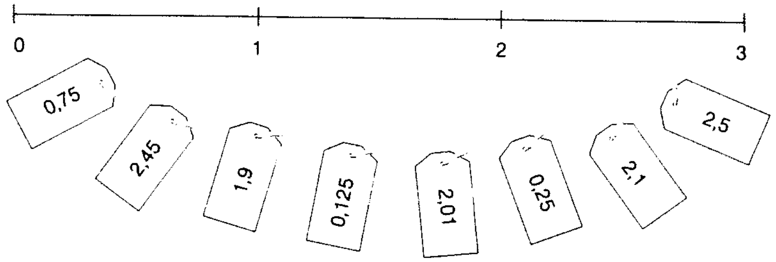
Daartoe kan bijvoorbeeld de volgende meetcontext-opgave dienen (fig.). :



figuur 23: Gravemeijer (red.), 1988, deel 6A, pag.78

Bij deze informele kennis ligt het startpunt voor het onderwijs met kommagetallen in de nieuwste reken-wiskundemethoden. De voorstelling van de getallenlijn, meetlijn of schaallijn komt men daarin veelvuldig tegen. De meetgetallen of kale getallen moeten geplaatst worden op de getallenlijn, en met getallen moet van meet af aan worden gerekend.
Zou het helpen als bij de volgende opdracht achter de kale getallen de grootheid gewicht gedacht wordt: 0,75 kg; 2,45 kg, enzovoort? (fig.20).

1. Neem de getallenlijn over in je schrift en zet de kommagetallen ongeveer op de juiste plaats.



figuur 20: Gravemeijer (red.), 1988, deel 6B, pag.16

Duidelijk wordt in de moderne methoden een verbinding met meten gelegd: het kommagetal is gegeven en de passende maat moet worden gezocht (fig.21).

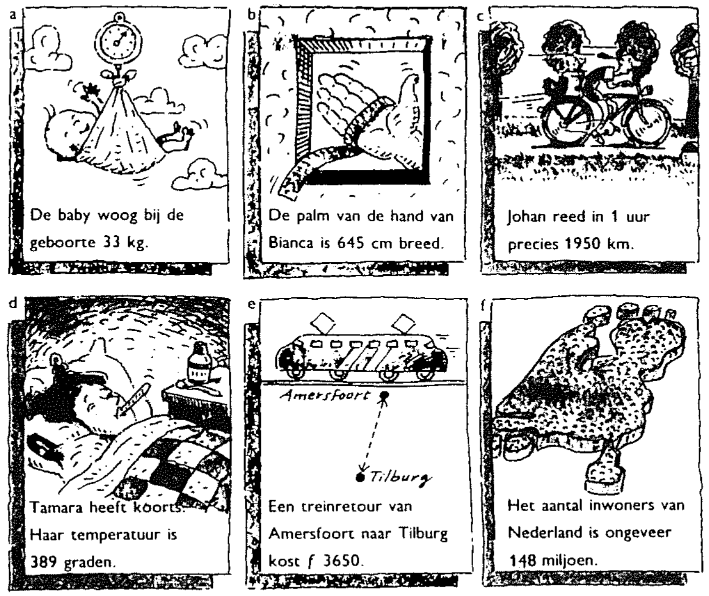
1 Kies de goede maat.

a De tafel is 0,8 . . . hoog (dm, m², m).
b Een wandelaar loopt 4500 . . . per uur (m, km, ha).
c Een blad papier is 0,06 . . . dik (m, dm², mm).
d Een fles limonade weegt ongeveer 1300 . . . (dl, gram, kg).
e Een brood weegt ongeveer 0,8 . . . (kg, gram, dl).

figuur 21: Van de Molengraaf (red.), z.j., deel 5B, pag.132

Of de maateenheid is gegeven en de komma moet gezet worden, zoals in de volgende opgave uit 'Operatoir Rekenen' (nieuwe versie) (fig.22).
Alle onderstaande kommagetallen kunnen vervolgens weer op getallenlijnen worden afgebeeld.
Indien nu de leerlingen na uitgebreide oefening weten waar kommagetallen (globaal) op de getallenlijnen wonen, hoe kunnen ze vandaaruit dan leren rekenen met kommagetallen, bijvoorbeeld vermenigvuldigen?

In alle getallen is de komma vergeten. Schrijf het goede getal in je schrift.



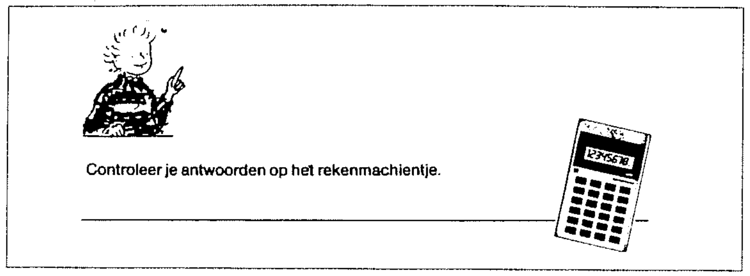
figuur 22: Sweers (red.), 1994, deel F

Daartoe kan bijvoorbeeld de volgende meetcontext-opgave dienen (fig.). :

Floris weegt 0.6 kilo af.
Gaby koopt 1,2 kilo rijst.
Sandra heeft genoeg aan 0,75 kilo.
Hoeveel moeten ze betalen?

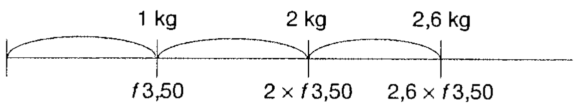
figuur 23: Gravemeijer (red.), 1988, deel 6A, pag.78

De rekenmachine kan nu worden ingezet om de berekening te controleren (fig.24).



figuur 24

Uit onderzoek is gebleken dat het schatten de leerlingen goed afgaat. Maar bij het precies uitrekenen met behulp van de rekenmachine gaat het vaak mis, althans bij de gevallen van Floris en Sandra. Veel leerlingen redeneren hierbij als volgt: deze prijzen zijn kleiner dan *f*3,50; dus moet ik *f*3,50 delen door respectievelijk 0,6 en 0,75 want delen maakt kleiner (dus niet vermenigvuldigen, want dat werkt vergrotend)! Maar vervolgens blijkt dan het antwoord in de verste verte niet overeen te komen met wat men eerst schatte. Hoe kan dat? Er ontstaat een conflictsituatie.
De onderwijsgevende kan bij een en ander de dubbele getallenlijn als hulpmiddel inzetten en eerst maar eens vragen hoeveel bijvoorbeeld 2,6 kilo rijst kost. De kinderen lossen dit via 2,6 × 3,50 op (fig.25).



figuur 25

Eerst '2 keer' en dan nog '0,6 keer'.
Via '1,6 keer' volgt ten slotte '0,6 keer'. Vermenigvuldigen met 0,5 keer of 0,6 keer of 0,75 keer, enzovoort, 'maakt' dus niet groter maar kleiner ...
Ziehier hoe schatten binnen een contextsituatie ook nog een regulerende en begripsverrijkende functie kan vervullen in verband met de vermenigvuldigoperatie, mede in wisselwerking met het precieze uitrekenen met behulp van de rekenmachine. Zonder meetcontext zou het schatten deze fundamentele rol nauwelijks kunnen vervullen. Overigens moet ook nu weer worden gezegd dat de geschetste werkwijze in de realistische methoden tot nu toe nog nauwelijks z'n beslag heeft gekregen.

De grondslag van de methode *via meetcontexten* wordt gevormd door de volgende didactische basisprincipes:

- globaal schattend rekenen gaat vooraf aan precies cijferend rekenen en kan als didactisch middel fungeren voor steeds exacter rekenen;
- het rekenen met meetgetallen in elementaire context-situaties vormt mede de basis voor het rekenen met kale, onbenoemde getallen in cijferopgaven;
- het globaal kunnen plaatsen van kommagetallen op de (meet-)getallenlijn en het redenerend ordenen van kommagetallen daarop is een basisvoorwaarde voor zowel het inzichtelijk, schattend rekenen als het precieze rekenen met kommagetallen;
- het vermenigvuldigen van kommagetallen met machten van tien, en het delen door machten van tien, geleerd via de decimale plaatswaarden van de cijfers in de kommagetallen, vormt in z'n algemeenheid de grondslag voor deze operaties met kommagetallen.

Daarnaast verleent de verandering in doelstellingen, meer nadruk op hoofdrekenen en schatten en minder op de cijferalgoritmen, de didactiek *via meten* meer gewicht.

Vier leergang-variabelen zijn te onderscheiden:
1 Drie basismethoden (I breuken, II plaatswaarde, III meetcontexten) en combinaties daarvan.
2 Een regelgeleide dan wel inzichtelijke aanpak daarbinnen.
3 Een al dan niet toepassingsgerichte werkwijze, waarbij vooral begripsverdieping van de operaties vermenigvuldigen en delen wordt nagestreefd.
4 En de variabele functie die het schattend rekenen als doel en als didactisch middel in de leergang kan vervullen.

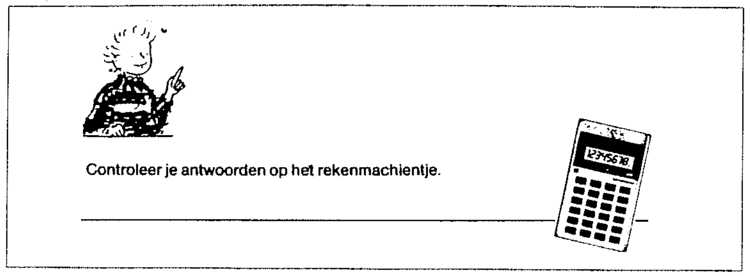
De realistische didactiek volgt:
1 De methoden-trits III, II, I.
2 De weg van inzichtelijke kennisverwerving.
3 De gerichtheid op toepassingen en toepasbaarheid van de basisoperaties.
4 En reserveert een cruciale rol voor het schattend rekenen als didactisch middel.

Bij een en ander krijgt het context-getallenlijnmodel een belangrijke modelfunctie toebedeeld.

literatuur

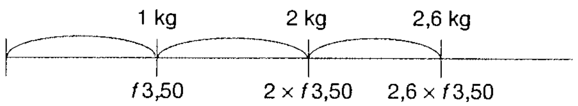
Bok, K. (1873). Iets over het decimaalteken en de passende waarde der tiendelige breuken. In: *Weekblad voor het lager, middelbaar en gymnasiaal onderwijs*, 12(49).
Bouman, P.J. en J.C. van Zelm (z.j.). *Onderwijzersboekje VIII. Tiendelige Breuken*, Amsterdam: Versluys.
Brinkman, T. e.a. (1975). *Getal in Beeld*. 's-Hertogenbosch: Malmberg.
Bruinsma, B. (red.) (1969). *Nieuw Rekenen*. Baarn: Bosch en Keuning.

De rekenmachine kan nu worden ingezet om de berekening te controleren (fig.24).



figuur 24

Uit onderzoek is gebleken dat het schatten de leerlingen goed afgaat. Maar bij het precies uitrekenen met behulp van de rekenmachine gaat het vaak mis, althans bij de gevallen van Floris en Sandra. Veel leerlingen redeneren hierbij als volgt: deze prijzen zijn kleiner dan *ƒ*3,50; dus moet ik *ƒ*3,50 delen door respectievelijk 0,6 en 0,75 want delen maakt kleiner (dus niet vermenigvuldigen, want dat werkt vergrotend)! Maar vervolgens blijkt dan het antwoord in de verste verte niet overeen te komen met wat men eerst schatte. Hoe kan dat? Er ontstaat een conflictsituatie.
De onderwijsgevende kan bij een en ander de dubbele getallenlijn als hulpmiddel inzetten en eerst maar eens vragen hoeveel bijvoorbeeld 2,6 kilo rijst kost. De kinderen lossen dit via 2,6 × 3,50 op (fig.25).



figuur 25

Eerst '2 keer' en dan nog '0,6 keer'.
Via '1,6 keer' volgt ten slotte '0,6 keer'. Vermenigvuldigen met 0,5 keer of 0,6 keer of 0,75 keer, enzovoort, 'maakt' dus niet groter maar kleiner ...
Ziehier hoe schatten binnen een contextsituatie ook nog een regulerende en begripsverrijkende functie kan vervullen in verband met de vermenigvuldigoperatie, mede in wisselwerking met het precieze uitrekenen met behulp van de rekenmachine. Zonder meetcontext zou het schatten deze fundamentele rol nauwelijks kunnen vervullen. Overigens moet ook nu weer worden gezegd dat de geschetste werkwijze in de realistische methoden tot nu toe nog nauwelijks z'n beslag heeft gekregen.

De grondslag van de methode *via meetcontexten* wordt gevormd door de volgende didactische basisprincipes:

- globaal schattend rekenen gaat vooraf aan precies cijferend rekenen en kan als didactisch middel fungeren voor steeds exacter rekenen;
- het rekenen met meetgetallen in elementaire context-situaties vormt mede de basis voor het rekenen met kale, onbenoemde getallen in cijferopgaven;
- het globaal kunnen plaatsen van kommagetallen op de (meet-)getallenlijn en het redenerend ordenen van kommagetallen daarop is een basisvoorwaarde voor zowel het inzichtelijk, schattend rekenen als het precieze rekenen met kommagetallen;
- het vermenigvuldigen van kommagetallen met machten van tien, en het delen door machten van tien, geleerd via de decimale plaatswaarden van de cijfers in de kommagetallen, vormt in z'n algemeenheid de grondslag voor deze operaties met kommagetallen.

Daarnaast verleent de verandering in doelstellingen, meer nadruk op hoofdrekenen en schatten en minder op de cijferalgoritmen, de didactiek *via meten* meer gewicht.

Vier leergang-variabelen zijn te onderscheiden:
1 Drie basismethoden (I breuken, II plaatswaarde, III meetcontexten) en combinaties daarvan.
2 Een regelgeleide dan wel inzichtelijke aanpak daarbinnen.
3 Een al dan niet toepassingsgerichte werkwijze, waarbij vooral begripsverdieping van de operaties vermenigvuldigen en delen wordt nagestreefd.
4 En de variabele functie die het schattend rekenen als doel en als didactisch middel in de leergang kan vervullen.

De realistische didactiek volgt:
1 De methoden-trits III, II, I.
2 De weg van inzichtelijke kennisverwerving.
3 De gerichtheid op toepassingen en toepasbaarheid van de basisoperaties.
4 En reserveert een cruciale rol voor het schattend rekenen als didactisch middel.

Bij een en ander krijgt het context-getallenlijnmodel een belangrijke modelfunctie toebedeeld.

literatuur

Bok, K. (1873). Iets over het decimaalteken en de passende waarde der tiendelige breuken. In: *Weekblad voor het lager, middelbaar en gymnasiaal onderwijs*, 12(49).
Bouman, P.J. en J.C. van Zelm (z.j.). *Onderwijzersboekje VIII. Tiendelige Breuken*, Amsterdam: Versluys.
Brinkman, T. e.a. (1975). *Getal in Beeld*. 's-Hertogenbosch: Malmberg.
Bruinsma, B. (red.) (1969). *Nieuw Rekenen*. Baarn: Bosch en Keuning.

Diels, P.A. en J. Nauta (1944). *Fundamenteel Rekenen.* Groningen, Wolters (6e druk).
Douma, H. (1893). *Rekencursus.* Purmerend: Muusses (2e stuk).
Gelder, L. van (1964). *Grondslagen van de Rekendidactiek.* Groningen: Wolters (3e druk).
Gerven, J.C. van (1970). *Rekenen voor de basisschool.* 's-Hertogenbosch: Malmberg.
Gravemeijer, K. (red.) (1988). *Rekenen en Wiskunde.* Baarn: Bekadidact
Haack, J. en L. Lieffering (z.j.). *De Grondslag.* Zeist: Dijkstra.
Molengraaf, G.W.J. van de (red.) (z.j.) *De Wereld in Getallen.* 's-Hertogenbosch: Malmberg.
Nelissen, J. (red.) (1988). *Rekenwerk.* Gorinchem: De Ruiter.
Nutsseminarium (1967). *Proeve van een leerplan voor het basisonderwijs (B). Rekenen.* Groningen: Wolters.
Pelt, D. van (1912). *Overzicht der methode.* Tiel: Mijs (4e druk).
Reijnders, J.M. en J. Snijders (1966). *Functioneel Rekenen.* Amsterdam: Versluys, (6e druk).
Rombouts, S. (1959). *Geef Acht. Handleiding voor derde en volgende leerjaren.* Tilburg: Zwijsen (4e druk).
Scholte, H. (1913). *Overzicht van de rekenmethode 'Hoeveel en Waarom?'.* Groningen: Wolters.
Sweers, W. (red.) (1994). *Operatoir Rekenen.* Rekenboek F1, Tilburg: Zwijsen.
Versluys, J. (1889). *De methodiek van het rekenen.* Amsterdam: Versluys.
Vossen, H.M.M. (red) (z.j.). *Niveaucursus Rekenen.* 's-Hertogenbosch: Malmberg.
Zandvoort, R.H. (red.) (1970). *Naar Zelfstandig Rekenen,* Groningen: Wolters Noordhoff (93e druk).
Zernike, C.F.A. (1915). *Ons Rekenonderwijs. Handleiding.* Bussum: Akkeringa (4e druk).

Breuken: begrip en taalontwikkeling

K. Buijs
Bekadidact Baarn, SLO Enschede
A. Noteboom
Cito Arnhem, SLO Enschede

1 inleiding

Een van de grote problemen op het gebied van de breuken is gelegen in het feit dat dit begrip zoveel verschillende verschijningsvormen kent. Bijgevolg zijn er nogal wat verschillende manieren om het breukbegrip te introduceren en er een eerste betekenis aan toe te kennen. Daar komt nog eens bij dat de symbolentaal waarmee wij gewend zijn breuken aan te geven, de leerlingen bij de aanvang van het breukenonderwijs zo goed als onbekend is. Dit in tegenstelling tot bijvoorbeeld de taal van de kommagetallen en die van de procenten, waarmee leerlingen vanuit informele situaties vaak al enigszins bekend zijn.
De vraag dient zich daarmee aan hoe de breuken op een zodanige manier geïntroduceerd kunnen worden dat de leerlingen er enerzijds steeds meer betekenis aan kunnen toekennen en anderzijds geleidelijk aan steeds verder ingevoerd raken in het gebruik van de symbolentaal. In deze bijdrage wordt geschetst hoe in het SLO-Fi-Cito- breukenproject[1] een nieuwe aanpak voor deze problematiek is ontwikkeld. Eerst wordt ingegaan op de informele noties van leerlingen en op de manier waarop, voortbouwend op deze noties, de breukentaal geïntroduceerd kan worden via opdeel- en meetsituaties. Vervolgens wordt getoond hoe het toepassingsbereik van deze taal verbreed kan worden via deel-geheel- en operatorsituaties. Ten slotte zal in het kort het perspectief geschetst worden dat deze aanpak biedt op de meer formele aspecten van de breukenwereld.

2 informele noties van leerlingen

Bij de aanvang van het onderwijs in breuken zijn leerlingen veelal niet bekend met de formele breukentaal. Een onderzoek naar de informele kennis en ideeën van leerlingen in groep 6, uitgevoerd in het kader van het SLO-Fi-Cito-project, bracht dit duidelijk aan het licht: termen als een derde,