Kerndoelen cijferen

- voorstel tot nadere uitwerking -

A. Treffers
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

1 inleiding

Globaal gesteld blijkt uit het tweede PPON-onderzoek (Cito) en uit een recent hoofdrekenonderzoek (Inspectie van het Onderwijs), dat er naast een aantal positieve ontwikkelingen ook twee negatieve te signaleren zijn, en wel (1) op het gebied van cijferen, en (2) op het gebied van het meten, in het bijzonder kennis van het metrieke stelsel en van enkele formules (waaronder betreffende omtrek, oppervlak en inhoud).

Over het meten wordt hier niet gesproken. In Proeve IV, waarmee binnenkort een begin wordt gemaakt, zullen uitspraken worden gedaan over welke metrieke kennis kinderen dienen te beschikken. Uiteraard zullen daartoe eerst deskundigen geconsulteerd worden, onder meer via de Panamanajaarsconferentie. Dit zal gebeuren op basis van voorstellen die in het 'Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs' worden gepubliceerd. Duidelijk is wel dat meer helderheid over de interpretatie van de betreffende kerndoelen over meten thans dringend gewenst is.

Dat laatste geldt ook voor het cijferen tegen de achtergrond van hoofdrekenen en schattend rekenen. In 'Proeve II' (1990) hebben we niet precies beschreven welke cijferprocedures kinderen zouden moeten kunnen uitvoeren en in welke mate van verkorting dit dient te gebeuren. In de periode 1985-1990 was het belangrijkste streven om hoofdrekenen en schattend rekenen een zwaarder accent te geven door in groep 5 vrijwel alle onderwijsruimte voor hoofdrekenen en schattend rekenen te reserveren en het cijferen naar groep 6 te verplaatsen.

Welnu, dit is met medewerking van de methodenschrijvers en de onderwijsgevenden gelukt. De resultaten daarvan zijn al enigszins zichtbaar in PPON II: hoofdrekenen en schattend rekenen komen thans aanzienlijk beter uit de bus dan bij PPON I.
Maar gelet op de (negatieve) verschuivingen in de resultaten van het cijferen is het thans de hoogste tijd om met elkaar de einddoelen op dit gebied

wat preciezer in te vullen, want daarover bestaat op dit moment teveel onduidelijkheid. Voorstellen daartoe zullen op de Panama-najaarsconferentie van 1995 aan de deelnemers worden voorgelegd, en de resultaten van deze raadpleging zullen verwerkt worden in Proeve IIIB over de cijferalgoritmen van kommagetallen, en met terugwerkende kracht ook voor gehele getallen.
Toch wil ik u al kort een impressie geven in welke richting de Proeve-auteurs de nadere uitwerking van de cijferdoelstellingen zoeken, mede in relatie tot (gestileerd) hoofdrekenen. En daarna ga ik in op het schattend rekenen, want ook op dat gebied is nu nog niet alles even duidelijk, met name niet over het opereren met afgeronde getallen.

2 cijferen

Allereerst het cijferend optellen volgens het standaardalgoritme:

$$\begin{array}{rl} 257 & \\ 585 & + \\ \hline 842 & \end{array}$$

Kinderen zouden de meest verkorte procedure (met onthouden, al dan niet genoteerd) moeten kunnen uitvoeren.
Maar eerder hebben ze dergelijke opgaven, onder elkaar of naast elkaar genoteerd, via (gestileerd) hoofdrekenen leren oplossen. En wel van links naar rechts rekenend met respectievelijk honderdtallen, tientallen en eenheden.

$$\begin{array}{l} 257 \\ 585 \quad + \\ \hline 700 + 130 + 12 = \\ \qquad 830 + 12 = \\ \qquad\quad 842 \end{array} \qquad \text{of} \qquad \begin{array}{rl} 257 & \\ 585 & + \\ \hline 700 & \\ 130 & \\ 12 & + \\ \hline 842 & \end{array}$$

De overgang van deze werkwijze naar het standaardalgoritme kan worden gemaakt door de kinderen van rechts naar links te laten noteren en rekenen:

$$\begin{array}{rl} 257 & \\ 585 & + \\ \hline 12 & \\ 130 & \\ 700 & + \\ \hline 842 & \end{array}$$

Daarna dient de optelling verkort te worden en tenslotte uit het hoofd te worden berekend via onthouden:

7 + 5 = 12,	2 opschrijven en 1 (tiental) onthouden	••2
5 + 8 = 13,	3 (tienen) plus 1 (tien) samen 4 (tienen) opschrijven en 1 (honderdtal) onthouden	•42
2 + 5 = 7,	7 (honderden) en 1 (honderd) is 8 (honderden)	842
	Uitkomst: 842	

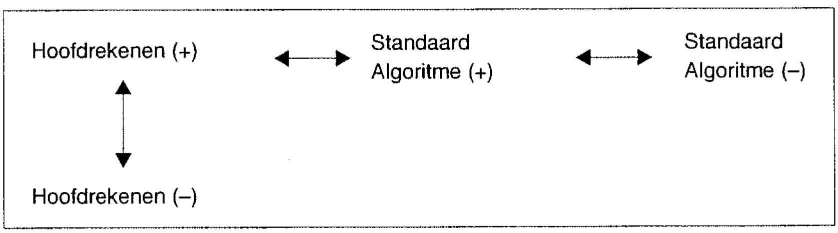
De cijferprocedures van optellen kunnen dus via 'omwerken' (richtingverandering) uit gestileerd hoofdrekenen worden afgeleid.

Bij het aftrekken zou deze omleiding en verbinding in principe ook gevolgd kunnen worden. In 'Proeve II' (1990) is geschetst hoe dat zou kunnen verlopen, namelijk via rekenen met 'tekorten'. Maar dan krijgt men wel een andere cijferprocedure dan het standaardalgoritme dat in Nederland van oudsher gangbaar is. We hebben in de Proeve opengelaten of het wenselijk zou zijn om deze vergaande consequentie te trekken.

Nu zullen we echter een keuze moeten maken. In de tussentijd hebben we van vele kanten de voor- en nadelen van zo'n ingrijpende wijziging met elkaar bekeken en besproken, ondermeer ook met methodenschrijvers.
Welnu, alles overziend blijkt het wellicht beter om het aftrekalgoritme aan het optelalgoritme te koppelen, of beter gezegd, om cijferend aftrekken uit cijferend optellen af te leiden en het 'lenen' als inverse van het 'onthouden' te beschouwen.
Dit wil overigens niet zeggen dat we nu gestileerd hoofdrekenen met tekorten dan maar zouden moeten schrappen – zeker niet. Maar de verbinding met het cijferalgoritme wordt nu niet via hoofdrekenen maar via cijferend optellen gelegd – dat is ons voorstel.

7 1 824 587 – ——— 237	controle via optellen	. . . 585 ——— + 237

Samengevat in een schema (fig. 1).



figuur 1: optellen en aftrekken: hoofdrekenen en cijferen

Aangezien de kinderen het betrekkelijk eenvoudige optel-algoritme op een gegeven moment behoorlijk zullen beheersen, kan de overgang naar de basisvorm van het vermenigvuldig-algoritme van een één cijfergetal met een meer cijfergetal ook betrekkelijk makkelijk worden gemaakt – althans indien de leerlingen de keertafels goed beheersen. Maar ook de relatie met hoofdrekenend vermenigvuldigen kan hier via 'omwerking' worden bewaard.

$$\begin{array}{r} 253 \\ 7\times \\ \hline 1400 \\ 350 \\ 21 \\ \hline 1771 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 253 \\ 7\times \\ \hline 21 \\ 350 \\ 1400 \\ \hline 1771 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle 3\,2} \\ 253 \\ 7\times \\ \hline 1771 \end{array}$$

Hieruit zijn samengestelde vermenigvuldigingen met verschillende werkwijzen af te leiden. Maar het onderscheid tussen dergelijke varianten is niet wezenlijk indien de leerlingen basisvermenigvuldigen, op de meest verkorte wijze beheersen. Daarom hoeven over deze samengestelde produkten geen speciale afspraken te worden gemaakt.
Enkele mogelijke uitwerkingen van:

$$\begin{array}{r} 253 \\ 47\times \\ \hline \cdots\cdots \end{array}$$

$$(1)\quad \begin{array}{r} 253 \\ 7\times \\ \hline 1771 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 253 \\ 40\times \\ \hline 10120 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 1771 \\ 10120+ \\ \hline 11891 \end{array}$$

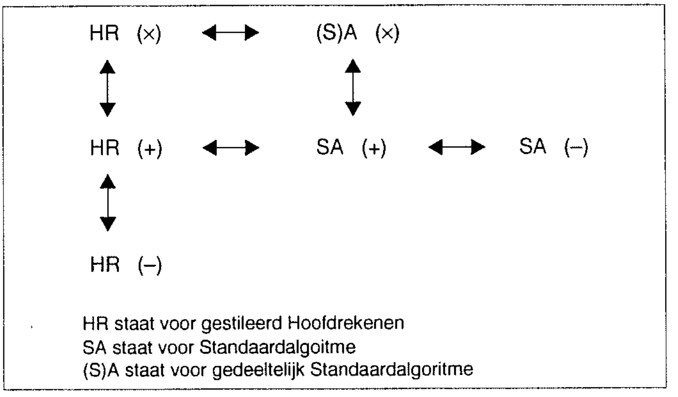
$$(2)\quad \begin{array}{r} 253 \\ 40\times \\ \hline 10120 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 253 \\ 7\times \\ \hline 1771 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 10120 \\ 1771+ \\ \hline 11891 \end{array}$$

Of direct ineengeschoven tot het standaardalgoritme:

$$(3)\quad \begin{array}{r} 253 \\ 47\times \\ \hline 1771 \\ 10120 \\ \hline 11891 \end{array}$$

Niet alleen voor complexe vermenigvuldigingen is het vlot kunnen uitvoeren van 7 × 253 als type van belang, maar evenzeer voor het delen. Als geheel geldt voor vermenigvuldigen dat het standaardalgoritme ten dele wordt gevolgd.

In schema (fig.2).



figuur 2: hoofdrekeken en cijferen: verbanden tussen +, –, en ×

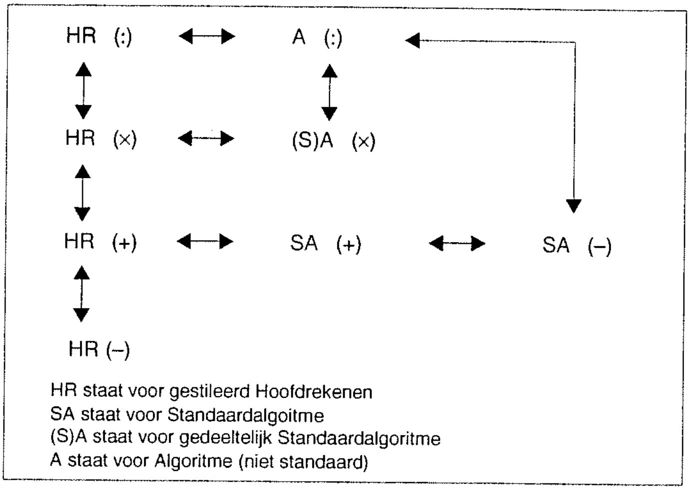
Bij het delen ten slotte blijft de verbinding met hoofdrekenen volledig in tact. Er hoeft vanwege de aard van het standaardalgoritme geen omwerking of richtingverandering in het rekenen te worden aangebracht. Alleen hoeft het standaardalgoritme niet te worden nagestreefd.
Kortom, er verandert eigenlijk niets aan het bestaande. En dat is ook niet nodig, want bij de deeloperaties is er ook geen sprake van achteruitgang.

```
12/323\              of:  12/323\                12/323\26
   120                       240                    240
   ---    10 ×               ---     20 ×           ---
   203                        83                     83
   120                        72                     72
   ---    10 ×               ---      6 ×           ---
    83                        11                     11
    72                              ------
   ---     6 ×                      26 rest 11
    11
         ------
         26 rest 11
```

Er zijn uiteraard nog meer varianten mogelijk. De afschattingen gaan uiteindelijk via hoofdrekenen. Het standaardalgoritme wordt niet nagestreefd, maar wel een verkort algoritme (dus geen SA of (S)A maar A).

Ten slotte alles in één schema (fig.3). In dit schema valt op dat de verbinding tussen hoofdrekenend aftrekken en cijferend aftrekken het langste is, dat is de consequentie van het handhaven van het gangbare algoritme (als inverse van het optelalgoritme). We denken dat we dat op de koop toe moeten nemen.
De grondslag van de verschillende cijferprocedures wordt gevormd door het *gestileerde* hoofdrekenen met positiegetallen (een van de vormen van hoofdrekenen, waarvan het *gevarieerde* hoofdrekenen de andere vorm is).

Over het belang en de invulling van het veelzijdige hoofdrekenen (waarvan de basis vooral in groep 4 en 5 wordt gelegd) bestaat geen onduidelijkheid, dus daarover zal hier verder niets worden gezegd. Voor het schatten echter ligt dit wat anders.



figuur 3: hoofdrekenen en cijferen: verbanden basisoperaties

3 schattend rekenen

Ook over het belang en de invulling van het schattend rekenen met precieze getallen (kaal of in een context) bestaat voldoende duidelijkheid. Dat is echter niet het geval bij het 'omgekeerde', namelijk het precieze rekenen met globale, afgeronde getallen. (Moeten we de leerlingen (en de leraren) ook laten onderzoeken welke valstrikken er op dit terrein verscholen liggen?) Een voorbeeld: de NRC berichtte over de miljoenennota van september 1994 met de volgende kop:

ONVERWACHTE
TEGENVALLER IN
BEGROTING VAN
18 MILJARD

Bij verder lezen blijkt het om een luchtig, niet serieus bedoeld bericht te gaan. De persen die de miljoenennota drukken, moesten worden stilgezet, omdat er een fout in de tekst was geslopen: het financieringstekort was per abuis op 18,6 miljoen gesteld in plaats van 18,6 miljard. Het NRC-bericht tekende daarbij aan:

'Dat is 18.581.400.000 gulden te laag.'

En dat blijkt te kloppen: 18,6 miljard – 18,6 miljoen komt daar inderdaad op uit. Of toch niet?
We hebben hier een (misschien niet serieus bedoeld?) voorbeeld van precies rekenen met globale, ronde getallen waarvan niet duidelijk is of dit ook tot de kerndoelen gerekend zou moeten worden.
Afronden hoort tot het basisschoolprogramma, daarover bestaat geen misverstand. Dus de leerlingen van groep 8 zouden moeten weten welke marge 18,6 miljoen heeft, dus dat dit getal op honderd*duizend* nauwkeurig is afgerond (vijftigduizend boven of onder de 18,6 miljoen), en idem 18,6 miljard op honderd*miljoen* nauwkeurig. Maar zouden ze de consequenties voor bijvoorbeeld het aftrekken met dergelijke getallen ook moeten kunnen doorzien? Dus dat dan 18,6 miljard minus 18,6 miljoen als uitkomst heeft 18,6 miljard! Of wat minder ambitieus geformuleerd: zouden ze de problemen die hierbij rijzen niet eens moeten onderzoeken, bijvoorbeeld aan de hand van een soortgelijke opgave als 18,6 kilometer minus 18,6 meter?
Het voorstel dat we hieromtrent in 'Proeve III B' zullen doen gaat in die richting. We gaan echter niet zover dat we bijvoorbeeld ook het vermenigvuldigen en delen bij ronde getallen (uitgebreid) willen onderzoeken - althans niet voor de leerlingen, maar wellicht wel voor onderwijsgevenden (in opleiding). Ook over deze kwestie zullen we deskundigen raadplegen.

4 slotsom

Kortom, in de nabije toekomst valt er nog heel wat te doen om de kerndoelen nader te specificeren. Dat geldt echter ook op het gebied van meten en meetkunde. Maar dat zal pas over enkele jaren gebeuren, als we daaraan toe zijn met de 'Proeve ...'.
Al met al overheerst op dit moment het positieve gevoel dat we, gelet op de meest recente onderzoeksresultaten van Cito en Inspectie, op de goede weg zijn in Nederland.

Ruim twintig jaar geleden versprak zich hier in Noordwijkerhout een rekendeskundige van Wiskobas. In plaats van te spreken over 'de vernieuwing van het rekenonderwijs' kwam er uit zijn mond 'de verrekening van het vernieuwingsonderwijs'. Toen dacht ik: het mag nooit met Wiskobas gebeuren dat we ons zouden verrekenen en dat het fout zou aflopen met de beoogde vernieuwing. Gelukkig is het ook niet misgegaan. Integendeel.

literatuur

Treffers, A. & E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en cijferen.* Tilburg: Zwijzen.