
Procesdiagnostisch onderzoek van handig en flexibel hoofdrekenen met LDRT

M.K. van der Heijden
Vakgroep Onderwijsstudies, RU Leiden

1 de Leidse Diagnostische Rekenaanpak Test (LDRT)

doel en opbouw

De Leidse Diagnostische Rekenaanpak Test (LDRT) is een procesdiagnostisch instrument waarmee de volgende acht aspecten van het uit het hoofd optellen en aftrekken tot honderd in kaart kunnen worden gebracht:

- 1 Aandacht.
- 2 Handig rekenen (oriëntering).
- 3 Oplossingsprocedures.
- 4 Automatisering.
- 5 Flexibiliteit.
- 6 Inzichtelijkheid.
- 7 Bewustheid.
- 8 Controle.

De operationalisatie van deze aanpakaspecten is gebaseerd op de handlingspsychologie (Van Parreren & Carpay, 1972). Daarnaast levert de LDRT twee prestatievariabelen op: een goed-foutscore en een reactietijd-score.

De LDRT¹ is bedoeld voor:

- procesdiagnostische voortgangscntrole van leerlingen in basis- en speciaal onderwijs;
- evaluatie van reken-wiskundeonderwijs.

De test bestaat uit twee deeltests: deel 1 bevat dertig twee-termenopgaven en deel 2 bevat achttien opgaven met drie termen (optellen en aftrekken, met en zonder tentalpassering). Er zijn acht verschillende typen handig-rekenopgaven opgenomen. De LDRT wordt individueel afgenomen, waarbij gebruik wordt gemaakt van observatie en retrospectie om het aanpakgedrag van de leerling te achterhalen.

Het testmateriaal bestaat uit:

- een leerlingblad, bestemd voor de leerling, met daarop de opgaven;
- een protocolformulier dat uit twee gedeelten bestaat: (1) een gedeelte

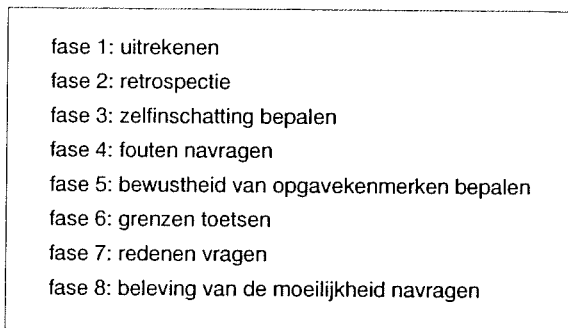
- waarop de onderzoeker tijdens het onderzoek het protocol maakt, en (2) een gedeelte dat bestemd is voor de scoring van het gemaakte protocol, na afloop van het onderzoek;
- een scoreformulier waarop de onderzoeker tijdens het onderzoek aantekent welke opgaven de leerling fout maakt (in verband met het fouten navragen in fase 4) en welke opgaven de leerling handig aanpakt (in verband met het grenzen toetsen in fase 6);
 - een map met doorvraag-algoritmen voor het grenzen toetsen.

De handleiding van de LDRT bevat:

- algemene aanwijzingen voor de testafname en het doorvragen;
- de testinstructies;
- afbreekregels;
- richtlijnen voor het maken van het protocol;
- gedetailleerde scoringsvoorschriften.

de acht fasen van de LDRT-afname

Het interactieve karakter van de procesdiagnostiek is bij de LDRT verwezenlijkt door middel van *een gefaseerde afname*. De LDRT-afname kent acht fasen (fig.1). Op basis van de handelingen die zich voordoen tijdens deze acht fasen van de testafname worden de aanpakaspecten bepaald. Van der Heijden (1993) bevat een uitgebreide beschrijving van zowel de fasegewijze afname als de manier waarop de hierbovengenoemde acht aanpakaspecten worden vastgesteld.



figuur 1: de acht fasen van de LDRT-afname

voor- en nadelen

De LDRT kan zowel gestandaardiseerd (bij evaluatieonderzoek) als niet-gestandaardiseerd (bij individuele diagnostiek) worden afgenomen. De LDRT bestrijkt een beperkt (maar wel essentieel) onderdeel uit het reken-wiskundecurriculum. De mogelijkheid van gestandaardiseerde afname kan een voordeel zijn, bijvoorbeeld bij de nascholing van leraren. De gestan-

daardiseerde afname vereist namelijk niet dat de diagnosticus op basis van zijn theoretische kennis beslissingen neemt tijdens de afname van de test. Door de LDRT volgens de handleiding af te nemen wordt degene die de test afneemt op een praktische manier ingeleid in een aantal theoretische procesbegrippen.

Ons inziens zouden leraren vaker aan leerlingen de vraag moeten stellen: 'Hoe heb je deze som uitgerekend? Hoe heb je het gedaan?' In fase 2 van de LDRT-afname wordt deze vraag gesteld en de test kan leraren behulpzaam zijn omdat erin wordt aangegeven waarop men allemaal moet letten als leerlingen een antwoord geven op deze vraag.

2 empirisch onderzoek met de LDRT bij 174 basisschoolleerlingen

We verrichtten een onderzoek met de LDRT bij 174 basisschoolleerlingen. Naast de LDRT werd in het onderzoek (Van der Heijden, 1993) individueel nog een *Voorwaardentest bij de LDRT* afgenomen om in kaart te brengen in hoeverre leerlingen beschikken over (1) de algemene voorkennis voor het hoofdrekenen en (2) een aantal specifieke handelingsvoorwaarden voor handig rekenen. Daarnaast werden gegevens verzameld over een aantal *leerlingenmerken* zoals de rekenvaardigheid en de intelligentie en over een aantal *achtergrondvariabelen*.

Het onderzoek werd uitgevoerd bij een groep van 174 basisschoolleerlingen (eind groep 4) met een gemiddelde leeftijd van acht jaar en drie maanden. De belangrijkste resultaten van het onderzoek kunnen als volgt worden samengevat.

centrale aspecten: bewustheid controle automatisering

Uit de analyses die werden verricht over de samenhangen tussen de verschillende aspecten van het aanpakgedrag onderling trekken we de volgende conclusie:

- Bewustheid, controle en de mate van automatisering van deelhandelingen blijken de centrale aspecten van het rekenaanpakgedrag te vormen.

Met name het belang van de mate van bewustheid en controle (meta-cognitie) bij het hoofdrekenen met formuleopgaven waarmee leerlingen relatief veel ervaring hebben opgedaan, is opmerkelijk te noemen; in wetenschappelijk onderzoek over uit het hoofd optellen en aftrekken wordt aan deze aspecten van het aanpakgedrag in het algemeen weinig aandacht besteed. Ook in het onderwijs zou er meer aandacht aan besteed kunnen worden, met name aan de bewustheid en de controle.

De bewustheid van het handelingsverloop kan bijvoorbeeld verhoogd worden door er met de leerlingen over te praten hoe ze sommen aanpakken. Ook over het hoe en waarom van de fouten die leerlingen maken kan met ze gepraat worden. Wat dit betreft gaf het onderzoek grote verschillen tussen leerlingen te zien, zoals uit de volgende protocollen blijkt.

Opg.: $35 - 17 = ?$

Onderz.: Hoe heb je het gedaan?

Ilse: $30 - 10 = 20$; $7 - 5 = 2$; $20 + 2 = 22$.

De onderzoeker vraagt Ilse om de som nog eens uit te rekenen. Nu komt er achttien uit. Op de vraag van de onderzoeker hoe dat kan, is het antwoord van Ilse: 'Dit is een moeilijke som. Ik weet niet hoe ik het gedaan heb. Net was het ook al fout.'

Opg.: $35 - 17 = ?$

Onderz.: Hoe heb je het gedaan?

Peter: $30 - 10 = 20$; $7 - 5 = 2$; $20 + 2 = 22$.

De onderzoeker vraagt Peter om de som nog eens uit te rekenen. Nu komt er achttien uit. Op de vraag van de onderzoeker hoe dat kan, is zijn antwoord: 'Ik had de eenheden omgedraaid, maar dat mag niet want dan wordt het te veel. Bij erbij-sommen mag het geloof ik wel.'

Leraren zouden leerlingen de gewoonte moeten aanleren om hun eigen werk zelf te controleren. Uit ons onderzoek blijkt dat leerlingen door een tekort aan controle hun eigen mogelijkheden niet optimaal benutten: 25 procent van de gemaakte fouten wordt spontaan verbeterd (dat wil zeggen tijdens de fasen 1 tot en met 3 van de testafname), en nog eens 25 procent van de dan nog resterende fouten verbeteren de leerlingen als ze door de onderzoeker gevraagd wordt de foute sommen nog eens uit te rekenen (in fase 4). Door leerlingen controle te leren wordt overigens ook de aandacht en de concentratie bevorderd (Van Parreren en Carpay, 1972).

consistentie en flexibiliteit van oplossingsprocedures

Bij het proceduregebruik werd een hoge mate van consistentie gevonden (Cronbachs α berekend over tien opgaven ligt boven de .90). Dit impliceert overigens niet dat leerlingen altijd dezelfde oplossingsprocedure gebruiken: volledige consistentie komt slechts bij ongeveer 20 procent van de leerlingen voor. In deze zin is er naast een hoge mate van consistentie tevens sprake van inconsistentie in het proceduregebruik. Om de vraag te beantwoorden in hoeverre een hoge mate van consistentie in het proceduregebruik als adequaat of als inadequaar moet worden beschouwd, werden correlaties berekend tussen de mate van consistentie van het proceduregebruik enerzijds en de externe rekenvaardigheidsmaten en de LDRT-prestatievariabelen anderzijds. Uit deze analyses blijkt dat een hoge mate van consistentie bij het proceduregebruik samengaat met zwakke rekenprestaties. Zowel bij de leerlingen die zeer consistent (dat wil zeggen bij 70

procent of meer van de opgaven) de 1010-procedure (of splitsmethode)² toepassen, als bij de leerlingen die zeer consistent de 10t-procedure³ gebruiken, maar ook bij de leerlingen die zeer consistent gebruik maken van de G10-procedure (of rijgmethode)⁴, correleert de mate van consistentie waarmee de desbetreffende procedures worden ingezet, negatief met de rekenvaardigheid. Op grond van deze resultaten kan het zeer consistente handelen van de leerlingen geïnterpreteerd worden als *inflexibel*: leerlingen gebruiken meestal dezelfde oplossingswijzen ongeacht het type opgave dat ze voor zich hebben.

Van flexibiliteit met betrekking tot optellen en aftrekken (dat wil zeggen opgaven als $41 - 39 = ?$ niet oplossen via een standaardaanpak) is slechts sprake bij 7 procent van de desbetreffende opgaven. En bij nog geen 30 procent van de leerlingen is er sprake van een zekere mate van flexibiliteit wat betreft het proceduregebruik: deze leerlingen gebruiken bij optelopgaven (meestal) de splitsmethode (1010-procedure) maar passen bij aftrekopgaven (in zekere mate) de rijgmethode (G10-procedure) toe. Deze laatste twee vormen van een flexibele rekenaanpak correleren positief met de rekenvaardigheid.

Op grond van het voorgaande kan een tweeledige conclusie worden getrokken over de consistentie en de flexibiliteit van het proceduregebruik:

- de hoge mate van consistentie in het gebruik van oplossingsprocedures is in het algemeen gesproken, ongeacht de procedure waar het om gaat, inadequaat: het duidt op inflexibiliteit van het uitvoerende rekenhandelen;
- er is sprake van een adequaat proceduregebruik wanneer leerlingen door zich te oriënteren de procedures die ze gebruiken flexibel aanpassen aan de (typen) opgaven die ze moeten oplossen. Een dergelijke flexibiliteit impliceert een zekere mate van inconsistentie.

In verreweg de meeste Nederlandse rekenmethoden wordt de G10-procedure (rijgmethode) aangeleerd als universele aanpak bij het optellen en aftrekken tot honderd. Desondanks blijken leerlingen bij ruim 30 procent van de opgaven de 1010-procedure (splitsmethode) te gebruiken.

Wat betreft de hierbovengenoemde flexibiliteit laat het onderwijs de leerlingen echter in de kou staan. In plaats van het onderwijs te richten op één oplossingswijze zou de leerlingen geleerd moeten worden wat de voor- en nadelen zijn van respectievelijk de G10- en de 1010-procedure bij verschillende typen opgaven. Hierdoor kan een foutieve aanpak als in het onderstaande protocol van Wim worden voorkomen:

Opg.: $35 - 17 = ?$

Onderz.: Hoe heb je dat gedaan?

Wim: $30 - 10 = 20$; $5 - 7 \dots$ gaat niet... dus daarom doe ik $7 - 5 = 2$;
 $20 - 2 = 18$.

handig rekenen, oriëntering en het functioneren van kennis

Wat betreft het handig rekenen levert het onderzoek de volgende resultaten op:

- handig-rekenopgaven worden door leerlingen gemiddeld genomen (slechts) in 30 procent van de gevallen handig aangepakt; bij 70 procent van de opgaven volgen de leerlingen een standaardaanpak, ondanks het feit dat meer dan 85 procent van de leerlingen achteraf aangeeft de handige aanpak makkelijker te vinden;
- het handig aanpakken van opgaven betekent een aanzienlijke verhoging van de efficiëntie van het hoofdrekenen. Als opgaven handig worden aangepakt komen de leerlingen tot (gemiddeld elf seconden) snellere en tot betere prestaties (gemiddeld 18 procent meer sommen goed);
- uit het onderzoek blijkt dat er, afhankelijk van de complexiteit van de te actualiseren vakspecifieke kennis, verschillende vormen van handig rekenen kunnen worden onderscheiden;
- het feit dat leerlingen handig-rekenopgaven slechts in 30 procent van de gevallen handig aanpakken kan voor een deel verklaard worden doordat de leerlingen (1) in onvoldoende mate beschikken over geautomatiseerde voorkennis (basisautomatismen tot twintig) en (2) in onvoldoende mate beschikken over de specifieke voorwaarden voor een handige aanpak;
- eventuele tekorten in deze vakspecifieke kennis kunnen echter niet als een voldoende verklaring worden aangevoerd voor het geconstateerde tekort aan oriënterend handelen;
- de discrepantie die we in onze resultaten vinden tussen (1) de (geringe) mate waarin opgaven handig worden aangepakt en (2) de (hoge) mate waarin leerlingen over de vakspecifieke voorwaarden voor een handige aanpak beschikken, kan alleen verklaard worden als wordt aangenomen dat er een relatief grote groep leerlingen is waarbij de genoemde kennis wel aanwezig is maar niet functioneert.

De conclusie die kan worden getrokken, moet helaas luiden dat het onderwijs bij de leerlingen niet heeft geleid tot de gewoonte om eerst een opgave te analyseren, alvorens met uitvoerend rekenhandelen te beginnen: er is bij de leerlingen geen sprake van een 'probleemanalyserende instelling', persoonlijke hoofdrekenhouding' of 'wiskundige attitude'.

Het heuristisch aanpakken van opgaven in het algemeen, en het handig en flexibel hoofdrekenen in het bijzonder, wordt door verschillende auteurs in verband gebracht met *kritisch en zelfstandig denken* (Wertheimer, 1959; De Moor, 1987; Resnick, 1987; Ennis, 1989; Huitema, 1991). Vanuit dit gezichtspunt bezien zijn de resultaten van dit onderzoek nogal teleurstellend. De overwegend gevonden rekenaanpak is *inflexibel* en *niet han-*

dig. Bij het uit het hoofd optellen en aftrekken tot honderd volgen verreweg de meeste leerlingen een slaafse, onkritische aanpak in plaats van zelf efficiënte oplossingswegen te bedenken. Voor iemand die één keer een leerling een opgave als $17 + 18 = ?$ één voor één tellend op de vingers op een standaardmanier heeft zien oplossen, is de vraag of leerlingen wel of geen handige aanpak moet worden geleerd, een zeer academische.

Aan verschillende handige oplossingswijzen zou in het onderwijs veel meer aandacht besteed kunnen worden. Zelfs in moderne methoden blijft handig rekenen vaak beperkt tot af en toe een rijtje speciale sommen waar dan nota bene nog boven staat: reken handig uit! (hier hoeven de leerlingen dus niet zelf na te denken omdat de methode dit al voor ze gedaan heeft).

Uit het volgende protocol blijkt dat het handig aanpakken van opgaven ook samenhangt met affectief-motivationale persoonlijkheidsfactoren:

Opg.: $18 + 17 + 2 = ?$

Onderz.: Hoe heb je dat gedaan?

Johan: $18 + 10 = 28$; $28 + 7 = 35$; $35 + 2 = 37$.

Onderz.: Kun je deze som ook handiger aanpakken?

Johan: Ja eerst de 2 bij de 18.

Onderz.: Welke manier vind je makkelijker?

Johan: Eerst de 2 bij de 18.

Onderz.: Waarom deed ja dat zo pas dan niet?

Johan: Die manier vind ik niet zo leuk; ze hebben deze sommen juist moeilijk gemaakt zodat je ervan kan leren en dat je kan laten zien hoe goed je het kan.

voorkennis voor het optellen en aftrekken tot honderd

Uit het onderzoek blijkt het volgende:

- ruim 20 procent van de onderzochte leerlingen bezit onvoldoende voorkennis van de plaatswaarde der getallen (positiestelsel);
- ruim 20 procent van de leerlingen bezit in onvoldoende mate voorkennis van de commutatieve en associatieve eigenschap.

Aan deze zaken zou in het onderwijs dus meer aandacht besteed kunnen worden.

verschillen tussen jongens en meisjes

Het onderzoek levert de volgende resultaten op over geslachtsverschillen in de door ons onderzochte groep achtjarige basisschoolleerlingen:

- de meisjes leveren zwakkere hoofdprestaties dan de jongens;
- de meisjes vertonen een *lager niveau van automatisering van deelhandelingen* (meisjes tellen bijvoorbeeld meer op hun vingers dan de jongens);
- de meisjes vertonen bij het hoofdrekenen een lagere mate van bewustheid dan de jongens;

- de meisjes *oriënteren* zich bij opgaven met drie termen (bijvoorbeeld $18 + 5 + 5 = ?$ en $13 + 15 - 13 = ?$) *minder* dan de jongens (dat wil zeggen meisjes pakken dergelijke opgaven vaker volgens standaardmethoden aan).
- de tussen de jongens en de meisjes gevonden prestatieverschillen kunnen verklaard worden door de verschillen die er bestaan in het aanpakgedrag van beide geslachten.

Deze onderzoeksresultaten roepen enerzijds vragen op over de (emotionele-motivationale?) oorzaken van de gevonden aanpakverschillen en bieden anderzijds ook aanknopingspunten om de prestatieverschillen tussen de geslachten te verminderen door middel van het onderwijzen van een meer adequaat aanpakgedrag. Met name doen we momenteel vervolgonderzoek naar de oorzaken van de verschillen in automatisering. Er zijn aanwijzingen dat deze verschillen samenhangen met onzekerheid en een gebrek aan zelfvertrouwen bij de meisjes: echt zeker weten dat drie en vier samen zeven is kun je alleen door het na te tellen. Indien dit zo is dan zou het onderwijzen van de basisautomatismen 'meisjesvriendelijker' moeten worden ingericht, bijvoorbeeld door het inbouwen van meer directe feedback en controle mogelijkheden.

Op grond van de gevonden resultaten kunnen we, vrij naar Schouten-Van Parreren (1985), de volgende algemene *implicatie voor het onderwijs* formuleren: de hoofdrekentprestaties van leerlingen kunnen aanzienlijk verhoogd worden door onderwijs dat gericht is op de optimalisering van aspecten van het rekenaanpakgedrag zoals: *oriënteren* (en niet meteen beginnen met uitrekenen), *controleren* van de gegeven antwoorden (voordat het rekenwerk door de leraar wordt nagekeken), *analyseren van fouten* (daarna) en *reflecteren* op oplossingswijzen en op gavekenmerken.

noten

1 LDRT wordt bij Swets & Zeitlinger uitgegeven.

2 **splitsmethode of 1010-procedure:**

$15 + 13 = ?$; $10 + 10 = 20$; $5 + 3 = 8$; $20 + 8 = 28$.

Bij *afrekepgaven met tientalpassering* kan de splitsmethode tot de volgende fout leiden:

$41 - 39 = ?$; $40 - 30 = 10$; $9 - 1 = 8$; $10 + 8 = 18$

3 **10t-procedure:**

$15 + 13 = ?$; $10 + 10 = 20$; $20 + 5 = 25$; $25 + 3 = 28$.

4 **rijgmethode of G10-procedure:**

$15 + 13 = ?$; $15 + 10 = 25$; $25 + 3 = 28$.

literatuur

- Ennis, R.H. (1989). Critical thinking and subject specificity: clarification and needed research. *Educational Researcher*, 18, 4-10.
- Moor, E. de (1987). Hoofdrekenen helpt. In: E. Feijs en E. de Moor (eds). *Innovatie realistisch reken-wiskundeonderwijs. Panama cursusboek 5*. Utrecht: SOL/OW & OC.
- Huitema, S. (1991). Meer hoofdrekenen en minder cijferen. *Willem Bartjens* 11, 4-9.
- Resnick, L.B. (1987). Instruction and the cultivation of thinking. In E. de Corte, H. Lodewijks, R. Parmentier & P. Spano (red.). *Learning and instruction European research in an international context*. Vol.1. Leuven/Oxford: Leuven University Press/Pergamon, 415-442.
- Schouten-van Parreren, M.C. (1985). *Woorden leren in het vreemde-talenonderwijs*. Amsterdam: Vrije Universiteit (dissertatie).
- Heijden, M.K. van de (1993). *Consistentie van aanpakgedrag. Een procesdiagnostisch onderzoek naar acht aspecten van hoofdrekenen*. Lisse: Swets & Zeitlinger (dissertatie).
- Parreren, C.F. van & J.A.M. Carpay (1972). *Sovjetpsychologen aan het woord*. Groningen: Wolters-Noordhoff. (Herziene druk 1980: *Sovjetpsychologen over onderwijs en cognitieve ontwikkeling*.)
- Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking*. New York: Harper & Brothers.