# Speciaal rekenhulpprogramma vermenigvuldigen en verdelen: werkwijze en resultaten

H. van Luit
Vakgroep Pedagogiek, Universiteit Utrecht

## 1 inleiding

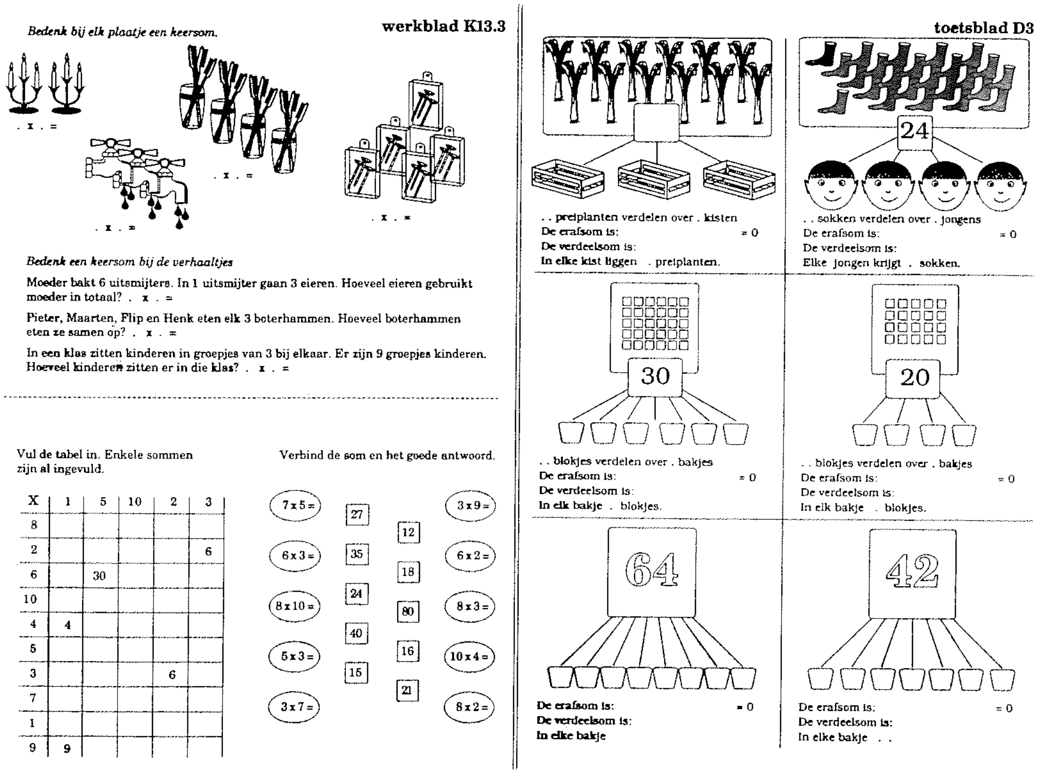
Het speciaal rekenhulpprogramma vermenigvuldigen en verdelen (Van Luit, Kaskens en Van der Krol, 1993) is ontstaan op basis van behoefte van leraren en remedial teachers die onderwijs verzorgen aan zwakke rekenaars. Aan de hand van de beschikbare literatuur en bestaande programma's zijn we vanaf 1986 vermenigvuldig- en verdeelactiviteiten gaan ontwikkelen en uitproberen bij leerlingen uit met name het speciaal onderwijs. In de afgelopen zeven jaar zijn diverse experimentele versies op werkbaarheid en effectiviteit onderzocht, waardoor bijstellingen en verfijningen konden worden aangebracht (zie onder andere Kaskens en Van Luit, 1990; Van Luit, 1987; Van Luit en Kaskens, 1990). Naar aanleiding van de verschillende (deel)versies is het programma, zoals het nu in definitieve vorm beschikbaar is, samengesteld.
Het programma kan worden gebruikt als een deelleergang voor zwakke rekenaars in het speciaal onderwijs. Ook kan het gebruikt worden voor leerlingen in de basisschool, die in het kader van zorgverbreding volgens hun lera(a)r(en) behoefte hebben aan een specifiek programma en gerichte instructie om het vermenigvuldigen en verdelen onder de knie te kunnen krijgen. Het programma kan de methode met betrekking tot dit onderdeel tijdelijk vervangen of het kan naast de methode worden gebruikt.
In het korte bestek van dit artikel gaan we in op hoofdpunten en worden de eerste kleinschalige onderzoeksgegevens gepresenteerd.

## 2 uitgangspunten van het programma

Bij de samenstelling van het programma hebben we de meest kenmerkende eigenschappen van zwakke rekenaars zoals we die steeds weer ervaren hebben als achtergrondvariabel gebruikt. Het jarenlang uitproberen van experimentele versies van het programma bij leerlingen uit het lom, mlk en basisonderwijs hebben geleid tot dit op empirie gebaseerde hulpprogramma. Het biedt een manier om deze kinderen te leren vermenigvuldigen en verdelen. De kinderen die we bedoelen hebben een inadequate kennisstructuur van de relaties binnen en tussen rekenvaardigheden. Deze kinderen leggen zelf geen verbindingen tussen beschikbare informatie en gevraagde informatie. Bij een taak als 'Op elke plank in de kelder staan zes blikken. Op vijf planken staan dus dertig blikken. Hoeveel blikken staan er dan op zes planken?', gaan vele van deze kinderen als volgt of vergelijkbaar te werk: 'Eerst één plank dat is zes, dan nog een plank dat is zes en zes is twaalf, dan nog één is achttien, dan nog één dat is uh... achttien en zes is uh... vierentwintig, dan de vijfde plank dat is dertig en dan nog één plank erbij dat is dertig en zes is zesendertig'. *Binnen* de vaardigheid vermenigvuldigen wordt de relatie tussen bijvoorbeeld 5 × 6 en 6 × 6 niet gelegd. Ook *tussen* verschillende vaardigheden zien de meeste zwakke rekenaars geen verbanden: het verband tussen bijvoorbeeld 'drie kinderen hebben elk twee snoepjes' en 'zes snoepjes eerlijk verdelen over drie kinderen' zien ze niet. Hierdoor begrijpen ze bijvoorbeeld ook niet dat de deelhandeling 6 : 3 = 2 gecontroleerd kan worden door de vermenigvuldiging 2 × 3 = 6 hieraan te koppelen. In het programma wordt gepoogd juist aan deze lacunes tegemoet te komen door middel van het (aan)leren van mogelijke verbanden tussen opgaven en bij het oplossen van opgaven leren gebruik te maken van reeds aanwezige kennis.

In het programma wordt een aantal leerdoelen nagestreefd die passen binnen de door Treffers, De Moor en Feijs (1989) geformuleerde eindtermen voor het basisonderwijs. Het betreft hier het vermenigvuldigen en delen met als bereik de bewerkingen tot honderd. In het programma zijn de volgende leerdoelen geformuleerd:
- inzicht in het vermenigvuldigen als herhaald optellen;
- inzicht in de relatie tussen getallen (onder andere omkeerbaarheidsprincipe);
- beheersing van de tafels van vermenigvuldiging (1 tot en met 10);
- inzicht in het verdelen als herhaald aftrekken;
- inzicht in de relatie tussen vermenigvuldigen en verdelen;
- beheersing van de deeltafels (met als bereik 100 : 10)
- kunnen toepassen van vermenigvuldig- en verdeelbewerkingen in voorstelbare en reële situaties.

Het programma bestaat uit een aantal, afhankelijk van het reeds door een leerling beheerste niveau, apart aan te bieden onderdelen waarin verschillende strategieën worden aangeboden. Voor het vermenigvuldigen zijn dat de basisstrategieën: lange erbijsom (met getallenlijn), tafel opzeggen, draai om de som (omkeerbaarheid), splits bij vijf en splits bij tien, en de aanvullende strategieën: buurtsom (houdt zowel de één meer-één minder strategie als de optel- en aftrekassociaties in) en verdubbelen. Voor het verdelen zijn dat de basisstrategieën: het maken van sprongen terug (herhaald aftrekken), één voor één verdelen, met meer tegelijk verdelen en associaties (gebruik maken van keersommen met één keer, vijf keer en tien keer om voor het kind moeilijke verdeelsommen op te kunnen lossen).




| X | 1 | 5 | 10 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | | | | |
| 2 | | | | | 6 |
| 6 | | 30 | | | |
| 10 | | | | | |
| 4 | 4 | | | | |
| 5 | | | | | |
| 3 | | | | 6 | |
| 7 | | | | | |
| 1 | | | | | |
| 9 | 9 | | | | |

figuur 1: voorbeeld van een werkblad en een toetsblad

Bij het aanleren van een nieuwe leerstap (bijvoorbeeld een nog niet gekende tafelrij) zijn in het programma een aantal fasen onderscheiden die gebruikt kunnen worden om de instructie en verwerking vorm te geven.
Steeds wordt begonnen met een oriënterende fase, vervolgens de uitvoering op concreet handelingsniveau, de koppeling aan het meer formele handelingsniveau, de controlefase en tenslotte de fase van beheersing - verkorting - automatisering - generalisatie.
Om dit te bereiken wordt gebruik gemaakt van een structuurverlenende aanpak en stapsgewijze aanbieding daar waar een leerling laat merken dat

dat nodig is. Het concreet handelen wordt ondersteund met behulp van een rekendoos waarop de handeling, die van toepassing is, uitgevoerd kan worden met behulp van afbeeldingen van materialen die aan de orde zijn. Er wordt gebruik gemaakt van modellen (getallenlijn) en beslissingsschema's. Die schema's zijn bedoeld om de afwegingen die een leerling tijdens het oplossingsproces kan maken te ondersteunen. Toepassingen zijn zowel in de aanleerfase als in de verwerkingsfase aan de orde. De instructies en werk- en toetsbladen zijn, waar mogelijk, afgestemd op de belevingswereld van het kind. In figuur 1 is ter illustratie hiervan een werkblad en in figuur 2 een toetsblad weergegeven.

Het programma bestaat uit 23 lessen betreffende vermenigvuldigen en negentien lessen betreffende het verdelen. Het onderdeel vermenigvuldigen bestaat uit drie lessenseries (acht lessen voorbereiding op de tafels, elf lessen tafels van vermenigvuldigen en vier lessen vermenigvuldigen over het tiental) en het onderdeel verdelen uit vier lessenseries (zeven lessen inzicht in het principe van het verdelen, zes lessen verdelen zonder rest, vijf lessen verdelen met rest en één les met de verdeler groter dan tien), die afhankelijk van het niveau van kennis van de leerlingen onafhankelijk van elkaar aangeboden kunnen worden.

## 3 resultaten

De effectiviteit van het rekenhulpprogramma is in een kleinschalig $N = 1$-onderzoek nagegaan door Welschen (1993). Ten behoeve van de selectie van vijf proefpersonen zijn bij alle veertien leerlingen van de hoogste niveaugroep rekenen van een mlk-school in Utrecht instaptoetsen afgenomen. Twee leerlingen beheersten het vermenigvuldigen nog niet, de overige kinderen wel. Beide leerlingen (we noemen ze Anton en Bianca) waren op dat moment ruim zes maanden bezig met het aanvankelijk vermenigvuldigen met behulp van de mlk-methode 'Zo reken ik ook'. Drie van de overige leerlingen (we noemen ze Ciska, Daria en Eddy) presteerden bij het verdelen op de instaptoetsen op een zo laag niveau dat ze voor een training in aanmerking kwamen. Op dat moment hadden ze al ruim vier maanden specifiek onderwijs op het gebied van het delen gehad.
De gemiddelde leeftijd van de vijf leerlingen was bij de start van de training ruim twaalf jaar. Er is in totaal vijftien à twintig lessen van elk drie kwartier met het programma gewerkt.
De resultaten van de toetsen die zijn afgenomen voor aanvang en na afloop van de training zijn vermeld in figuur 2.
Uit deze figuur blijkt dat alle vijf leerlingen de rekenstof die tijdens de

training is aangeboden aan het einde van die periode beheersen.

| leerling | Gemiddelde scores (%) Voormetingen (per leerling vijf à zeven toetsen voorafgaande aan de training) | Nametingen (per leerling vier à zes toetsen na afloop van de training) |
|---|---|---|
| Anton | 44.0 | 97.5 |
| Bianca | 37.1 | 94.4 |
| Ciska | 20.0 | 97.1 |
| Daria | 34.3 | 90.0 |
| Eddy | 20.0 | 96.9 |

figuur 2: gemiddelde scores voor de voor- en nametingen per leerling

Met behulp van een 'interrupted time series design', waarbij ook de tijdens de training afgenomen metingen zijn betrokken, is nagegaan of er sprake is van significante trends in de resultaten die kunnen wijzen op de effectiviteit van het programma. Deze resultaten staan in samengevatte vorm in figuur 3.

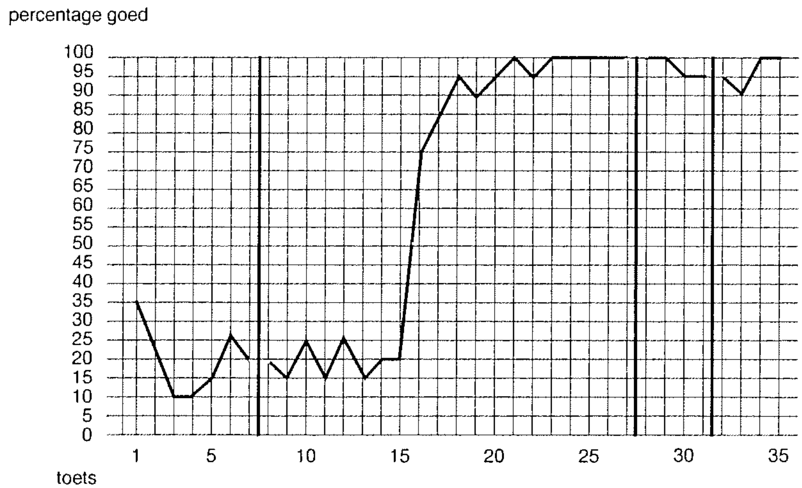
| leerling | *Z*-scores voormetingen (%) | interventiemetingen (%) | nametingen (%) |
|---|---|---|---|
| Anton | .30 | 2.05* | 0 |
| Bianca | .32 | 3.25** | .32 |
| Ciska | .71 | 3.41** | .18 |
| Daria | -1.27 | 1.93* | .54 |
| Eddy | 1.63 | 4.40** | .73 |

* significant bij $\alpha < .05$
** significant bij $\alpha < .005$

figuur 3: *Z*-scores voor de voor, interventie en nametingen per leerling

De *Z*-scores zijn bedoeld om mogelijke significante trends na te gaan. Voorafgaand aan de training dient er sprake te zijn van een 'stabiele basislijn'. Dit betekent dat de metingen geen positieve trend mogen laten zien, anders wijst dit op voldoende positief effect van het reguliere onderwijs. Het toetsverloop gedurende de training (interventiemetingen) zou, bij een positief trainingsresultaat, wel een significante trend moeten laten zien. In veel effectiviteitsonderzoek blijken behaalde resultaten tijdens en training na afloop van die training weer (gedeeltelijk) te verdwijnen. Om dit te na te gaan zijn ook na afloop van de training toetsen (nametingen) afgenomen. Indien de *Z*-scores niet significant zijn, dan wil dit zeggen dat het trainingseffect ook na afloop van de trainingsperiode nog onverminderd aanwezig is.

Op basis van de in figuur 3 weergegeven resultaten blijkt bij alle vijf leerlingen in de interventieperiode sprake van een significante trend. Bovendien presteren alle vijf leerlingen na afloop van de training onveranderd op een zeer hoog niveau (gemiddelde goedscore van 95 procent). Ook blijkt uit een kwalitatieve analyse dat de kinderen van een tellende oplossingsstrategie voornamelijk over zijn gegaan op splitsstrategieën. Drie maanden na afloop van de training (met daarin een zomervakantie) blijven alle vijf kinderen op een onveranderd hoog niveau presteren (gemiddelde goedscore van 94 procent). Wel valt één leerling (Bianca) terug op de telstrategie. De overige vier leerlingen blijven een adequate strategie hanteren en zijn tot geautomatiseerde kennis van de in de training aangeboden rekenstof gekomen. We kunnen het niet nalaten om het toetsprofiel van één van de leerlingen (Eddy) hier te presenteren (fig.4).



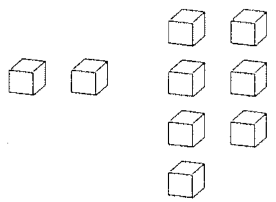

figuur 4: resultaten van Eddy op de produkttoetsen verdelen

Hij heeft in vergelijking met de andere vier leerlingen namelijk een bijzonder profiel. Uit de gegevens van de zestiende, zeventiende en achttiende toets (dit is vanaf de negende interventiemeting; in de vijfde week van de training) blijkt een plotselinge doorbraak in het begrip van het verdelen. Hij snapt 'plotseling' de relatie tussen vermenigvuldigen en verdelen, door-dat hij de strategie van het opsplitsen van de som en daarbij een optel- of aftrekhandeling uitvoeren goed en inzichtelijk gebruikt.

Niet alleen statistisch en visueel zijn resultaten te tonen, ook kwalitatief zijn duidelijke veranderingen in de oplossingen van de kinderen te constateren. Als voorbeeld volgt hierna een korte beschrijving van Anton. Tijdens de eerste procesmeting kan hij sommen van de tafels van twee, vijf en tien redelijk vlot uit het hoofd oplossen. Materialiseren van een vermenigvuldigopgave lukt evenwel niet goed (fig.5).

***Voorbeeld***

| | |
|---|---|
| | *Som $2 \times 7 =$* |
| *Pl* | *'Kun je deze som uitrekenen?'* |
| *A* | *'Ja, dat is ... eh ... 14.'* |
| *Pl* | *'Hoe heb je dat gedaan?'* |
| *A* | *'Nou, gewoon $2 \times 7 = 14$.'* |
| *Pl* | *'Kun je dat met blokjes laten zien?'* |
| *A* | *'Eh ... hoe bedoelt u?'* |
| *Pl* | *'Kun je de som ook met blokjes leggen?'* |
| *A* | *Anton legt één groep van twee blokjes en één groep van zeven blokjes.* |



| | |
|---|---|
| *A* | *En zegt: 'Twee keer zeven is veertien', hij lacht hier zacht bij. 'Dat klopt niet.'* |
| *Pl* | *'Hoe moet het dan?'* |
| *A* | *'Dat weet ik niet.'* |

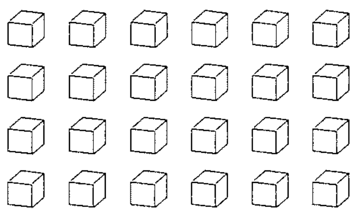
figuur 5: voorbeeld oplossing van Anton op een procestoets vermenigvuldigen (aanvang training)

De keersommen die Anton niet weet, probeert hij wel uit zijn hoofd uit te rekenen. Hij doet dat door de tafel voor zichzelf op te zeggen totdat hij bij de gevraagde som komt. Als dat niet lukt telt hij innerlijk. Vaak komt hij er niet uit en begint dan op dezelfde wijze nog een keer. Hij is goed in staat een gevraagde bewerking uit een contextopgave te halen, maar komt niet tot een juiste oplossing.
Anton werkt goed mee tijdens de training. Hij breidt zijn kennis langzaam uit met geautomatiseerde kennis en met steeds meer strategieën die hij op

de juiste momenten weet toe te passen. Aan het eind van de training van twintig lessen kent Anton de sommen van de tafels van één tot en met vijf en tien op gememoriseerd niveau (sommen door elkaar direct uit het hoofd). Bij de meeste sommen uit de tafels van zes tot en met negen gebruikt hij nog regelmatig een mentale tussenstap (fig.6).

***Voorbeeld***

| | |
|---|---|
| *Pl* | *'Kun je de som 4 × 6 uitrekenen?'* |
| *A* | *'Ja, dat is ... 24.'* |
| *Pl* | *'Hoe heb je dat uitgerekend?'* |
| *A* | *'Nou, eerst 5 × 6 = 30 en daar dan 1 × 6 = 6 aftrekken is 24.'* |
| *Pl* | *'Kun je de som met blokjes laten zien?'* |
| *A* | *'Ja, hoor.'* |



| | |
|---|---|
| *Pl* | *'Goed, zo.'* |

figuur 6: voorbeeld oplossing van Anton op een procestoets vermenigvuldigen (einde training)

Hij maakt bij de oplossing van een nog niet gememoriseerde opgave gebruik van wisselende strategieën zoals de één meer-één minder strategie, de associatiestrategie, en de opsplitsstrategie met vijf maal en tien maal als steunpunt.
Het is opvallend dat hij bijna alle aangeboden strategieën adequaat kan toepassen. Alleen de omkeerstrategie gebruikt hij niet, terwijl deze bij een opgave als 4 × 6 (fig.4) goed toegepast had kunnen worden, omdat Anton 6 × 4 direct uit zijn hoofd kent.

## 4 afsluiting

Er valt over het hier kort beschreven programma en wat zwakke rekenaars ervan kunnen leren nog veel meer te zeggen. In deze bijdrage hebben we ons moeten beperken tot een globale schets. Zowel het uitproberen tijdens de ontwikkelfase als ook de eerste resultaten van onderzoek bij zwakke rekenaars hebben ons hoopvol gestemd over de werkbaarheid en effectiviteit van het programma. We zijn ons ervan bewust dat het gebruik van een programma als dit een aanzienlijk beroep doet op de kennis en kunde van de leraar of remedial teacher. Daarom hebben we er ook voor gekozen de meeste instructies en interactiemogelijkheden uitgebreid in het programma te beschrijven.

## literatuur

Kaskens, J. en J.E.H. van Luit (1990). Leren vermenigvuldigen en verdelen in het (voortgezet) speciaal onderwijs. *Speciaal Onderwijs, 62*, 286-293.

Treffers, A., E. de Moor en E. Feijs (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool; deel 1*. Tilburg: Zwijsen.

Van Luit, J.E.H. (1987). Vermenigvuldigen en delen. *Speciaal Onderwijs, 60*, 6-10.

Van Luit, J.E.H. & J. Kaskens (1990). Leren vermenigvuldigen en verdelen aan kinderen met rekenproblemen. In: M. Boekaerts en E. De Corte (red.). *Onderwijsleerprocessen*. Nijmegen: ITS, 47-65.

Van Luit, J.E.H., J. Kaskens & R. van der Krol (1993). *Speciaal rekenhulpprogramma vermenigvuldigen en verdelen*. Doetinchem: Graviant.

Welschen, M. (1993). *Onderzoek naar de effectiviteit van het rekenhulpprogramma leren vermenigvuldigen en verdelen bij vijf leerlingen in het mlk-onderwijs*. Utrecht: vakgroep Pedagogiek, Universiteit Utrecht (doctoraalscriptie).