Basale (on)gecijferdheid

A. Treffers
Freudenthal instituut

1 inleiding

In augustus 1993 werd in Stuttgart het wereldkampioenschap atletiek gehouden. Daarbij trok vooral de finale van de honderd meter vrouwen de aandacht. Zou Merlene Ottey er voor het eerst in slagen een gouden medaille te halen? Het bleek wéér niet te lukken: Gail Devers won. Maar de uitslag was omstreden (fig. 1):.

STUTTGART - Gail Devers is wereldkampioene op de 100 meter. De IAAF wees het protest van Merlene Ottey af. De Jamaicaanse was ervan overtuigd de nieuwe wereldkampioene te zijn.

Devers kreeg 10,81 seconden achter haar naam, Ottey 10,82. Dat was onmogelijk. Beide vrouwen vlogen gelijktijdig over de streep. De wimpers van Devers (26) misschien wat eerder, maar in dezelfde tijd. De IAAF nam dat protest tegen het verschil in tijd, mee naar vandaag. Dan zal de wereldfederatie uitspraak doen over de raadselachtige marge van eenhonderdste seconde.

WK ATLETIEK
DOOR
RAYMOND SALOMON EN
HENK VAN DER SLUIS

figuur 1: uit Algemeen Dagblad (17.8.1993)

Vrijwel alle dagbladen maakten bezwaar tegen het tijdsverschil van eenhonderdste seconde. Ook tijdens de directe televisierapportage rekende verslaggever Sierd de Vos ons voor dat dit niet kon:

- in 10 seconden wordt ongeveer 100 meter afgelegd;
- in 1 seconde wordt dus 10 meter afgelegd;
- in 0,1 seconde wordt 1 meter afgelegd;
- in 0,01 seconde wordt 0,1 meter oftewel 1 decimeter afgelegd.

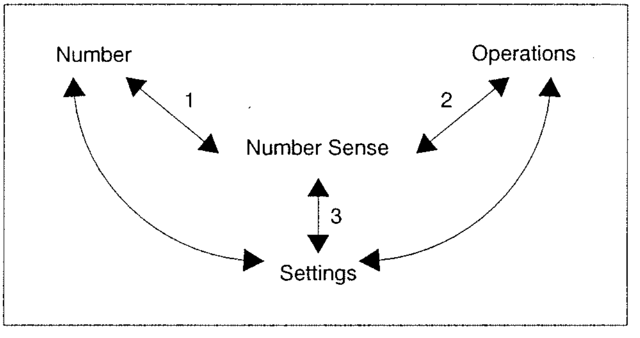
En 1 decimeter verschil is zeker op de finish-foto zichtbaar. Doch daarop

was geen verschil te zien. Dus was die marge van eenhonderdste seconde inderdaad raadselachtig, zou je kunnen zeggen.
Onder massale druk van de media corrigeerde de atletiekfederatie een dag later dan ook Otteys tijd: ze kreeg eveneens 10,81 seconden toegewezen, maar bleef wel als tweede geplaatst. De wereldwijde kritiek verstomde snel ... Maar hadden de critici het wel bij het rechte eind?

Tijdens de televisie-uitzending maakte Theo Reitsma direct bezwaar tegen de rekenwijze van collega De Vos. We zullen hier niet ingaan op de exacte methode waarmee de eindtijden worden vastgesteld - dat deed Reitsma op dat moment ook niet. Hij argumenteerde als volgt: de betreffende tijden kunnen door afkappen of afronden van duizendsten seconden worden bepaald. Stel door afkappen. In theorie kan de tijd van Devers dan 10,819 zijn geweest en die van Ottey 10,820 - een verschil van éénduizendste seconde, oftewel een afstand van 1 centimeter. En die is niet zichtbaar. (Of zelfs: 10,8199 tegenover 10,8200, dus 1 millimeter, enzovoort.) Als de tijden niet door schrappen van duizendsten maar door afronden op honderdsten bepaald worden, zou zich hetzelfde kunnen voordoen met bijvoorbeeld 10,814 versus 10,815 - maar zo ver ging Reitsma's toelichting uiteraard niet ...
In het leven van alledag zijn kommagetallen meestal meetgetallen en geeft het rekenen ermee specifieke moeilijkheden: 10,82 seconden minus 10,81 seconden hoeft dan geen 0,01 seconde op te leveren!

Het voorgaande heeft met gecijferdheid te maken, of nauwkeurig gezegd, met gradaties van gecijferdheid.
In de eerste methode werden meetgetallen weliswaar ten onrechte geïnterpreteerd als pure rekengetallen, maar de redeneerwijze die werd gevolgd is een goed voorbeeld van gecijferdheid, namelijk het globale rekenen met 'ronde' getallen en vervolgens uit de uitkomst daarvan verstandige conclusies trekken. Bij de tweede methode gebeurt hetzelfde, maar wordt de aard van de betreffende meetgetallen ook nog in de beschouwing betrokken, en dat zouden we als een nog hogere vorm van gecijferdheid kunnen aanmerken.
We spreken in dit verband van basale ongecijferdheid indien men 10,81 seconden niet kan interpreteren als zijnde ruim tien seconden of bijna elf seconden, of als men niet in staat is om globaal rekenend de afstand te bepalen die in eentiende en vervolgens eenhonderdste seconde wordt afgelegd. Al dient hier direct aan toegevoegd te worden dat de eerste vaardigheid van het interpreteren uiteraard nog fundamenteler is dan de tweede vaardigheid betreffende het globale rekenen.
Algemeen geldt als criterium voor basale gecijferdheid in een bepaald getalgebied (bijvoorbeeld van de kommagetallen) dat men de betreffende ge-

tallen kan ordenen, kan plaatsen op de getallenlijn en zodoende een idee heeft van de orde van grootte van die getallen. Ook is een belangrijk criterium dat men inzicht heeft in hoe de (basis)operaties met (komma)getallen uitwerken en dat men de relaties tussen de (basis)operaties doorziet. En een derde criterium is dat men de basisbewerkingen op de geëigende problemen kan toepassen, zowel globaal als precies rekenend, waarbij het resultaat op redelijkheid kan worden ingeschat.
McIntosh, Reys en Reys (1992) tekenen bij 'number sense' (of gecijferdheid) een schema (fig.2) waarin deze drie componenten van gecijferdheid zichtbaar zijn ('settings' betreffen contexten van toepassingsproblemen).



figuur 2

En zij geven een gedetailleerde uitwerking van ordenen, globaal rekenen, toepassen en zo meer.
We zullen hier niet zo ver in details treden, maar meer globaal analyseren wat (on)gecijferdheid inhoudt en hoe getalgevoel bevorderd kan worden betreffende:

- het vermenigvuldigen van kommagetallen;
- het optellen en aftrekken tot twintig;
- het aftrekken tot honderd.

Drie voorbeelden van leerstofgebieden waar - zo blijkt uit tal van onderzoek - (on)gecijferdheid zich veelvuldig manifesteert.
Uit de didactische kanttekeningen zal de kern van de realistische onderwijsaanpak zichtbaar worden. Deze wordt in een theoretisch intermezzo beschreven.
Naar mijn mening zal die aanpak ook gevolgd kunnen worden om rekenmoeilijkheden te helpen bestrijden, of misschien ook (ten dele) zelfs te voorkomen. Het meest sprekende voorbeeld is wellicht het leerstofgebied van de kommagetallen.

2 kommagetallen

Op het terrein van de kommagetallen is veel onderzoek verricht. Daaruit komt, wat de drie genoemde componenten van gecijferdheid betreft, naar voren dat:

1 Ongeveer de helft van de twaalfjarigen (internationaal gezien) in staat is kommagetallen correct op de getallenlijn te plaatsen ('Number'-component). (Bokhove en Janssen, 1988.)
2 Ongeveer eenderde deel van de twaalfjarigen weet dat vermenigvuldigen niet altijd groter maakt (en zelfs nog een kleiner part dat delen niet altijd een kleiner getal geeft) ('Operations'-component). (Hiebert, 1992).
3 Ongeveer eenvijfde deel van twaalfjarigen de vermenigvuldigstructuur in contextproblemen met (nul-)kommagetallen onderkent ('Settings'-component). (Greer, 1992.)

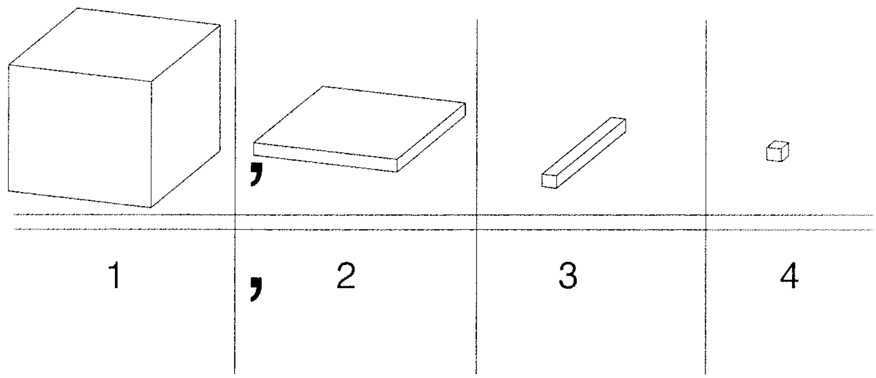
Deze ernstige mate van ongecijferdheid betreffende kommagetallen komt speciaal tot uiting bij het schattend vermenigvuldigen van kommagetallen, waartoe zelfs minder dan eenvijfde deel van de twaalfjarigen in staat is.

Hoe zou het (globaal) rekenen met kommagetallen, in casu het vermenigvuldigen ervan, verbeterd kunnen worden? Wat is de beste methode of didactiek?
De *mechanistische* methodiek mikt op procedurele kennis. In het geval van het vermenigvuldigen van kommagetallen richt deze aanpak zich op het aanleren van de kommaregel:

> 'vermenigvuldig de getallen zonder komma, tel het aantal plaatsen achter de komma van beide factoren samen, en plaats vervolgens de komma in de uitkomst, tellend vanaf het rechtse getal ...'

Bij het toepassen van deze regel doen zich zowel bij het precieze uitrekenen, maar speciaal ook bij het globale schattende rekenen tal van problemen voor. Gelet op de zojuist gepresenteerde onderzoeksgegevens is dat ook niet verwonderlijk: veel kinderen hebben geen idee van de orde van grootte van kommagetallen en weten niet hoe vermenigvuldigen globaal uitpakt, zowel met kale getallen als in toepassingsproblemen met benoemde getallen. En de mechanistische methodiek biedt nauwelijks gelegenheid om die basale kennis en vaardigheden over het positioneren en (globaal) opereren te verwerven.
Sterker: de povere resultaten die zojuist werden gemeld zijn zelfs in hoge mate aan deze procedurele methodiek te wijten, welke bij de kommagetallen zo veelvuldig wordt toegepast.
De verleiding om terug te grijpen op overeenkomstige rekenwijzen met decimale gehele getallen kan kennelijk moeilijk weerstaan worden. In ieder geval worden de rekenmoeilijkheden die daaruit voortkomen duidelijk on-

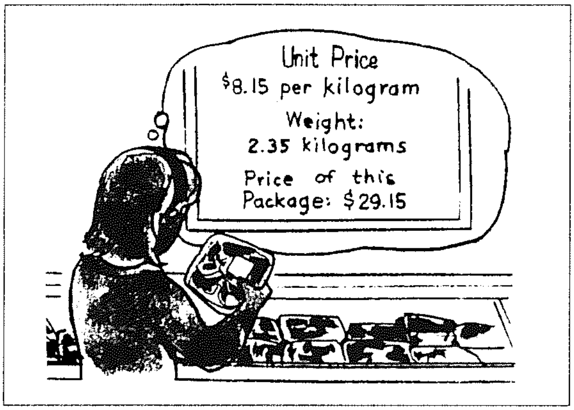
derschat. De gepresenteerde onderzoeksgegevens over kommagetallen zijn dan ook voor velen (onaangenaam) verrassend.
De *structuralistische* methode om kommagetallen te onderwijzen verschilt sterk van de mechanistische. Niet procedurele, maar conceptuele kennis is nu het hoofddoel; het gaat om begrip en inzicht, en niet in de eerste plaats om het leren van blinde rekenregels.
De structuralisten richten zich in hun onderwijsaanpak op de decimale 'ontleding' van de kommagetallen en maken daarbij gebruik van MAB-materiaal (Hiebert, 1992). Zo wordt bijvoorbeeld 1,234 voorgesteld met één kubus (van tien bij tien bij tien blokjes) als eenheid, twee plakken (van tien bij tien blokjes) als tienden, drie staven (van tien blokjes) als honderdsten en vier blokjes als duizendsten. En op een positiekaart getekend ziet 1,234 er als volgt uit (fig.3):



figuur 3

Optellen en aftrekken kunnen met MAB als concrete ondergrond duidelijk worden gematerialiseerd en genoteerd. Vermenigvuldigen met een kommagetal is lastiger. Dat kan pas indien het vermenigvuldigen met tienvouden en het delen door tienvouden is onderzocht en de 'schuifregels' van de komma's zijn ontdekt en begrepen. Zo maakt delen door tien van kuben plakken, van plakken staven, enzovoort, wat op cijferniveau inhoudt dat de cijfers als het ware naar rechts van de komma verschuiven, dus wordt 1,234 dan 0,1234. Nu kan $5{,}6 \times 0{,}1234$ worden uitgerekend via $56 \times 0{,}1234$ en dan delen door tien. Dit is in het kort de structuralistische methode van het leren vermenigvuldigen van kommagetallen. De rekenwijze is inzichtelijk gefundeerd en steunt in laatste instantie op het vermenigvuldigalgoritme van gehele getallen. Maar het gevraagde inzicht is wel van een hoog niveau. Daarnaast kan men gerede twijfel hebben of deze structuralistische aanpak het globale, schattende rekenen helpt bevorderen. Om over het toepassen van het geleerde in contextsituaties met benoemde

kommagetallen (die vaak helemaal niet aan MAB-materiaal doen denken) maar helemaal te zwijgen. Tenslotte is het opmerkelijk dat de structuralisten in het algemeen zo weinig aandacht schenken aan het plaatsen van kommabreuken op de getallenlijn. Kortom, vanuit het oogpunt van gecijferdheid bezien, schiet de structuralistische aanpak op alle genoemde componenten conceptueel tekort: positioneren, (globaal) opereren en toepassen.
De *empiristische* didactiek start de leergang van het vermenigvuldigen niet met kale kommagetallen maar met contextproblemen waarin de kommabreuken zich als meetgetallen manifesteren. Bijvoorbeeld prijs-gewicht bij het inkopen (fig.4).



figuur 4: uit 'Real Math'

Kan dat: $ 8,15 per kilogram, en dan voor 2,35 kilogram $ 29,15 moeten betalen? De basis is hier globaal schattend rekenen (fig.5).

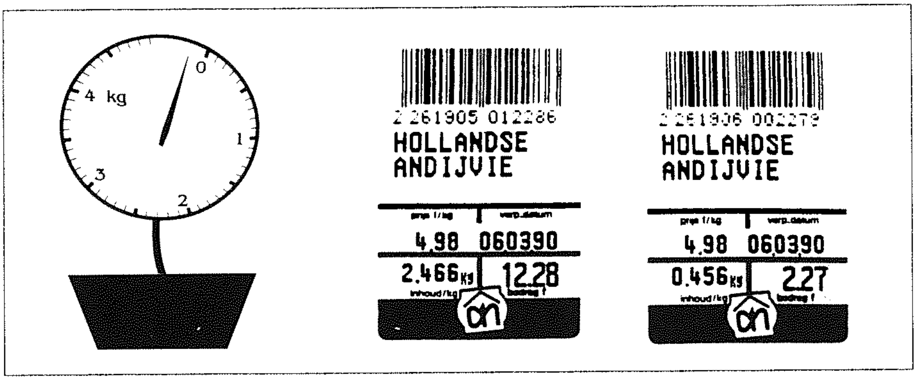
In each case, 1 answer is correct. Decide which one is correct without using a calculator.

1. 4.3 × 6.4 =	a. 2.752	b. 27.52	c. 275.2
2. 2.5 × 15.3 =	a. 38.25	b. 382.5	c. 3825
3. 3.3 × 3.3 =	a. 1.089	b. 10.89	c. 108.9
4. 10.14 × 10.51 =	a. 1.065714	b. 10.65714	c. 106.5714
5. 1.04 × 25.6 =	a. 266.24	b. 26.624	c. 2.6624

figuur 5

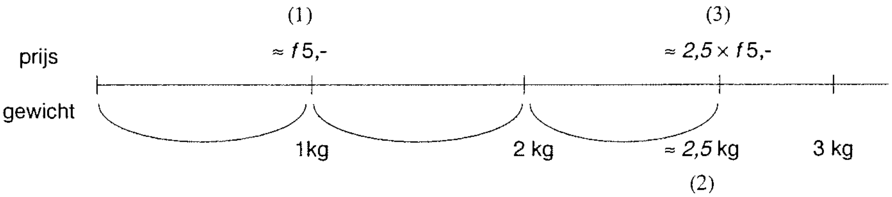
En het rekenen met kale kommagetallen (in de Verenigde Staten zijn dat puntgetallen) volgt daar dan op, globaal schattend rekenen wel te verstaan. De leerlingen hebben nog geen kommaregel gehad, en ook is de decimale structuur van de kommagetallen niet nauwgezet geanalyseerd. Toch wordt van meet af aan volop met benoemde (meet)-kommagetallen gerekend - of eigenlijk niet zozeer gerekend als wel geredeneerd. Het precieze rekenen en de ontdekking van de komma-regels daarbij, volgen pas (veel) later. Voor een belangrijk deel wordt een en ander zelfs uit het genoemde schattende rekenen in contextsituaties afgeleid! Deze globaal-analyserende aanpak vanuit toepassingssituaties staat in schril contrast met de exact-synthetiserende methode via kale kommagetallen die de structuralisten volgen.

De *realistische* didactiek vertoont grote overeenkomsten met de empirische methode, zeker in het eerste deel van de leergang. Alleen op het punt van de modelvorming zijn verschillen te constateren, en wel in die zin dat de realisten daaraan veel meer aandacht besteden (fig.6).



figuur 6

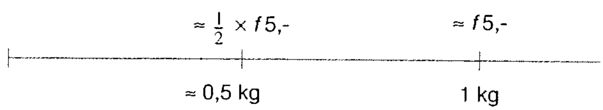
Er wordt nu niet volstaan met een inschatting of het te betalen bedrag dat op de bonnetjes staat wel klopt. Eerst wordt de aandacht op de (weeg) schaallijn geconcentreerd. Hoe staat de wijzer bij een gewicht van 2,466 kg? En hoe bij 0,456 kg? (Keijzer en Van den Heuvel-Panhuizen, 1993). Vervolgens wordt de (dubbele) schaallijn of getallenlijn voor het globale uitrekenen benut (fig.7).



figuur 7

Bij het tweede bonnetje (0,456 kg) gaat Chantal als volgt te werk (Van den Brink, 1991):

> 'Je neemt 0,456 kilo, dat is 456 gram. Een pond is 500 gram. Dan kost het je bijna ƒ2,50.'
> Waarom?
> 'Omdat 1 kilo ƒ4,98 kost, dus bijna ƒ5,-. En 500 gram is een halve kilo en kost dus ƒ2,50. Nou, 459 gram is bijna 500 gram en ƒ2,27 is bijna ƒ2,50. Dus is het goed.' (fig.8)



figuur 8

Stefan gaat niet schatten, maar hij gebruikt de rekenmachine. Maar hoe moet dat?

> 'Als je vermenigvuldigt komt er vast te veel uit. Je moet niet vermenigvuldigen maar delen.'

Vervolgens voert hij wel de goede deling uit van 2,27 : 4,98.
Chantal vermenigvuldigt 0,456 × 4,98 ter controle.
De onzekerheid van Stefan komt voort uit de gedachte dat vermenigvuldigen altijd groter maakt - een veelvoorkomend idee, zoals we eerder zagen. De opgaveserie met de bonnetjes 2,5 keer, 1,5 keer, en tenslotte 0,5 keer, kan hier verhelderend werken. Immers, bij 2,5 keer zet je eerst 2 keer de vereiste stappen en dan nog 0,5 keer. Idem bij 1,5 keer. En tenslotte wordt 0,5 keer of $\frac{1}{2}$ keer op zichzelf beschouwd. Dit alles gevisualiseerd op de dubbele getallenlijn.

3 onderwijstheoretisch intermezzo

We vatten de kern van de realistische didactiek samen.

1 Start met een brede verkenning van het rekenen in een modelcontext die betekenisvol is voor de kinderen.

2 Refereer bij kale rekenopgaven aan deze modelcontext, dus laat de kinderen de betreffende kommagetallen interpreteren als meetgetallen (van prijs en gewicht) uit de winkelsituatie met de bonnetjes. (Op deze wijze gaat de funderende context als model fungeren om berekeningen met pure kommagetallen te helpen oplossen. Denk hierbij aan de overeenkomst met het leren van de staartdeling vanuit de modelcontext van het vervoeren van passagiers met bussen).

3 Gebruik een (dubbelschalige) strook of lijn om getallen en operaties uit de modelcontext te visualiseren. De strook fungeert als model-van-context: de berekeningen worden losgeweekt van de specifieke contextsituatie van het winkelen. Vervolgens kan dit visuele model als hulpmiddel worden gebruikt om andere toepassingsproblemen (en kale opgaven) te helpen oplossen. De (dubbelschalige) strook of getallenlijn doet dan dienst als model-voor-toepassingsopgaven.

De kern van het onderwijstheoretische concept van het didactisch realisme houdt dus in dat op deze wijze het informele, contextgebonden rekenen geleidelijk aan via het context-strook-model zal overgaan in meer formeel, algemeen toepasbaar opereren.

We zetten de hoofdpunten van het voorgaande over de vier verschillende onderwijstheorieën en didactieken in enkele schema's (fig.9).

	→	↑
M	–	–
S	–	+
E	+	–
R	+	+

→ horizontaal mathematiseren

↑ verticaal mathematiseren

M, S, E, R zijn de vier genoemde richtingen

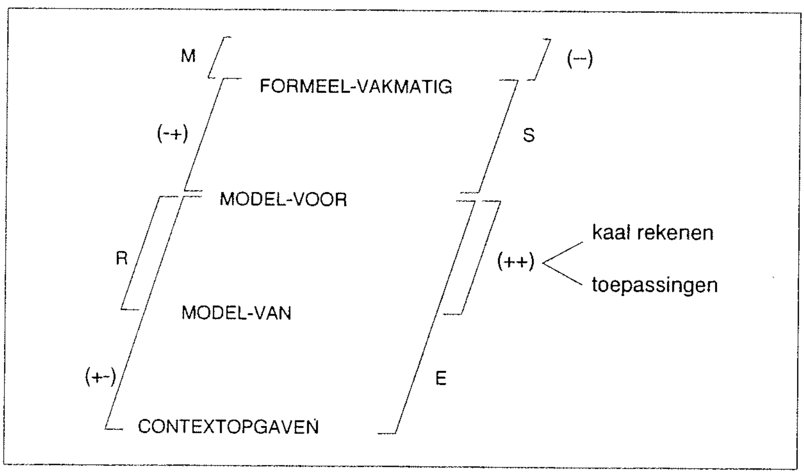
figuur 9

Horizontaal mathematiseren duidt op de 'verwiskundiging' van de realiteit in casu op het oplossen van toepassingsproblemen. Verticaal mathematiseren op de niveauverhoging van het formele opereren binnen het vaksysteem (ook bij de verwerking van toepassingsopgaven).

Toegepast op kommagetallen betekent een en ander voor de mechanistische methodiek dat het onderwijs van meet af aan op een (te hoog) formeel-vakmatig niveau wordt aangepakt en daardoor noopt tot regelgericht rekenen op een niet-inzichtelijke grondslag. Ook is er weinig aandacht voor toepassingen. Noch horizontaal noch verticaal bezien zijn er veel mogelijkheden tot mathematiseren.

De structuralistische aanpak maakt gebruik van modellen-voor (MAB bijvoorbeeld) die direct zijn afgeleid uit het formele, decimale systeem. Het

verticaal mathematiseren houdt hier in dat de leerlingen geleidelijk aan loskomen van het handelen met concreet materiaal bij het formeel leren opereren met kommagetallen. Men gaat er daarbij (ten onrechte) van uit dat de materiële en mentale handelingen isomorf zijn. Toepassingen zijn toepassingen-achteraf van wat eerst op materieel-symbolisch niveau is aangeleerd.
De empiristen starten met contextopgaven die min of meer een modelkarakter hebben, dus als concrete basis voor het opereren met kale getallen en voor toepassingsopgaven kunnen dienen. Er wordt als het ware een directe verbinding tussen het contextniveau en het niveau van het formeel-vakmatige opereren gelegd zonder gebruik te maken van het tussenniveau van visuele modellen en schema's (modellen-van en modellen-voor). Het is echter maar de vraag of de modellering - of schematisering - van de betreffende probleemsituaties zonder meer als model-voor het formele en toegepaste opereren kan dienen.
De realisten menen in ieder geval dat dit voor de meeste leerlingen niet het geval zal zijn, dus dat er een tussen-niveau van visuele modellen en schema's gecreëerd moet worden om de abstractie-kloof tussen het opereren in een context en binnen het formele vaksysteem te helpen overbruggen. In het genoemde voorbeeld van het schattend vermenigvuldigen van kommagetallen is het de (dubbelschalige) getallenlijn (als model-van en als model-voor).
In schema ziet het hiervoor gestelde er als volgt uit (fig.10).



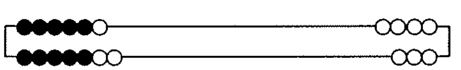
figuur 10

De kritische verbinding is die tussen model-van en model-voor. De struc-

turalisten laten structuur-materiaal als model-voor het opereren op formeel en toegepast niveau fungeren zonder dat dit modelkarakter voor de leerlingen als zodanig wordt ervaren - het zijn opgelegde modellen-voor, afgeleid uit het vaksysteem en derhalve nogal abstract, althans wat de uit te voeren handelingen aangaat.
Bij de empiristen fungeren contextopgaven als model. Maar zij veronderstellen dat deze modellen ook direct als modellen voor het oplossen van andere contextproblemen kunnen dienen en voor kale rekenopgaven. En dat blijkt voor de meeste leerlingen een te grote sprong te zijn.
Zie hier, scherp gesteld, de verschillen tussen de genoemde richtingen. Deze verschillen komen scherp naar voren bij het onderwijzen van kommagetallen. Terug naar de gecijferdheid.

4 rekenen tot twintig: optellen en aftrekken

Een belangrijke voorwaarde van gecijferdheid, in het bijzonder wat betreft het schattend en precies opereren met getallen, is de beschikbaarheid van geautomatiseerde kennis van de basisoperaties oftewel kennis van de tafels. Dat zijn om te beginnen de optel- en aftrektafels, dus de optellingen van de getallen tot tien en de aftrekkingen die daaruit zijn af te leiden.
Om deze optellingen in te slijpen wordt tegenwoordig veelvuldig gebruik gemaakt van materiaal waarin op een of andere wijze een vijfstructuur vervat ligt om getallen tot twintig te structureren. Een voorbeeld daarvan is het *rekenrek*. Een dergelijke aanpak met vijfstructuren is realistisch omdat hij aansluit op informele werkwijzen die kinderen spontaan hanteren. Daarbij wordt ook gebruik gemaakt van dubbelen of bijna-dubbelen (Treffers, 1990).
Een voorbeeld (fig.11).

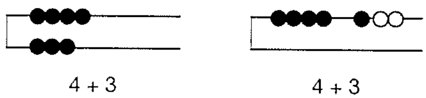


$$\underset{5\ 1}{6} + \underset{5\ 2}{7} = 13$$

figuur 11

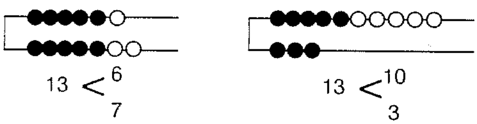
De enige aanwijzing voor het ordelijk werken op het rekenrek bij het optellen is dat de betreffende termen in een vijfstructuur dienen te worden opgezet. In het geval van 6 + 7 houdt deze regel in dat de getallen onder elkaar worden opgezet. Maar in het geval van 4 + 3 is men vrij om de termen

onder elkaar of achter elkaar te zetten (fig.12).
In het eerste geval ligt de nadruk iets meer op het dubbelen en in het tweede geval wat meer op de vijfstructuur: $4 + 3 = 3 + 3 + 1$ of $4 + 3 = 5 + 2$. Terwijl bij $6 + 7$ van beide structuren gebruik gemaakt wordt of kan worden.



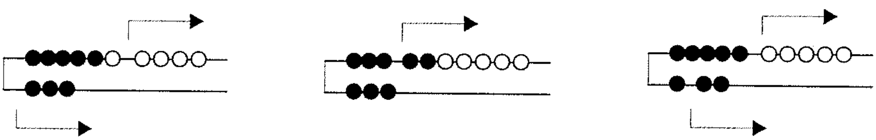
figuur 12

Zowel van de kant van het onderwijzen als van het leren is het gebruik van het rekenrek tamelijk eenvoudig en eenduidig. En vanwege de natuurlijke structureringen volgens vijven en dubbelen kan het rekenrek bij het leren automatiseren van de elementaire optellingen een doelmatig onderwijsmiddel worden genoemd. Maar voor het aftrekken ligt dit minder makkelijk. Neem bijvoorbeeld $13 - 7 = \ldots$
Om te beginnen kan dertien al op enkele manieren met behulp van de vijfstructuur worden opgezet (fig.13).



figuur 13

En het afhalen van zeven kan in de tweede visualisering op verschillende manieren gebeuren (fig.14):



figuur 14

Deze veelheid aan strategieën maakt het voor de onderwijsgevende niet makkelijk om overzicht te houden en ook niet om het leren automatiseren te sturen (Van den Berg en Van Eerde, 1993). En voor de leerlingen is die diversiteit niet erg bevorderlijk om het manipuleren met kralen om te zet-

ten in het mentale handelen met getallen op symbolisch niveau, juist omdat de werkwijzen zozeer kunnen verschillen (al zullen sommige didactici dat juist als een pluspunt voor het flexibel opereren aanmerken!).
De vraag die ik me de afgelopen jaren bij voortduring heb gesteld luidt dan ook: Zouden we ons bij het automatiseren niet tot het optellen kunnen bepalen, en het aftrekken uit het optellen afleiden al werkend op symbolisch niveau? Bijvoorbeeld via splitsen zonder rekenrek (fig.15) .

$$\underset{6\;\;7}{\overset{\wedge}{13}} - 7 = 6$$

figuur 15

Enkele kleine experimenten met een aantal (zwakke) leerlingen leerden dat dit toch niet zo'n inzichtelijke en makkelijke werkwijze was.
Recent echter kreeg ik een ander idee. Namelijk om via een relatieboogje de aftrekopgave in een optelsom om te zetten (fig.16).

$$13 - 7 = .$$

$$13 - 7 = 6, \text{ want } \quad 7 + 6 = 13$$

figuur 16

En dan aanvankelijk indirect om de juistheid van de uitkomst te controleren. Maar vervolgens ook direct door de controle-achteraf als strategie-vooraf te benutten. Een rekenwijze die de leerlingen zo mogelijk zelf zouden moeten ontwikkelen. Daarbij uitgaande van het gegeven dat de leerlingen de relatief makkelijke optelsommen op dat moment al vrijwel volledig geautomatiseerd hebben. Hoe zouden de leerlingen dat relatieboogje benutten? Zouden ze de controle-achteraf zelfstandig in een rekenstrategie-vooraf omzetten, nadat ze een reeks aftrekopgaven op deze manier met een boogje op de juistheid van het antwoord geïnspecteerd hadden?
Korte experimenten met een tiental (zwakke) leerlingen uit groep 4 en groep 5 wezen uit dat de boogjes-methode wonderwel werkte bij leerlingen die de opteltafels wel geautomatiseerd hadden, maar de aftrektafels nog in het geheel niet en die tevens grote moeite hadden met het uitrekenen ervan (via terugtellen)[1]. De controle-achteraf werd meestal al na enkele opgaven omgezet in een rekenstrategie-vooraf.
De strategieën uit figuur 17 werden toegepast.

$$14 - 9 = 5 \qquad 14 - 5 = 9 \qquad 14 - 3 = 11$$

figuur 17

Bij de proeven kwam de kwestie van de (on)gecijferdheid trouwens toch ook weer onverwacht om de hoek kijken. Sanne bijvoorbeeld uit groep 5 loste aftrekopgaven aanvankelijk op via simpele omkeringen van de cijfers rond het minteken (fig.18).

$$14 - 6 = \cancel{12}$$

figuur 18

'6 - 4 = 2, en er staat nog een 1, dus is het antwoord 12'
Controle achteraf met het boogje wijst echter uit dat het antwoord niet goed is. Sanne corrigeert nu direct (fig.19).

$$14 - 6 = 8$$

figuur 19

En de volgende opgaven gaan zo (fig.20).

$$15 - 9 = \cancel{14}\ 6$$

$$17 - 8 = 9$$

figuur 20

En dan volgt een foutloos rijtje.
Een week later vragen we Sanne of de volgende oplossing klopt:

13 - 8 = 15?

Haar antwoord: 'Ja, dat kan wel.'
Bij de opgave:

13 - 6 = 13?

zegt ze echter: 'Nee.'
En vervolgens maakt ze een rijtje aftrekopgaven met boogjes weer foutloos ...

Maar dat wil nog niet zeggen dat Sanne nu ineens op het terrein van het optellen en aftrekken tot twintig gecijferd zou zijn. Het blijkt namelijk dat ze aan enkele basale criteria niet voldoet:
1 Ze heeft nog geen goede voorstelling van de ordening van getallen.
2 Ze heeft geen idee hoe de aftrekoperatie globaal uitpakt op de getallenrij.

Het is dus zaak dat we daaraan eerst eens met Sanne gaan werken, en dan lukt vervolgens het automatiseren van de aftrektafels ook wel, zoals bleek. Want automatiseren op een wankele basis van ongecijferdheid, dus zonder een heldere voorstelling van de getallenrij en de operaties op de getallenlijn, leidt alleen maar tot formalistische kennis. Dus pakken we de kralenketting, tekenen een (lege) getallenlijn en gaan tellen en opereren, uitgaande van contextproblemen. Is Sanne al toe aan kaal rekenen? En zo ja, kan ze bij het kale rekenen de kralenketting en de getallenlijn gebruiken? Ziet ze het verband tussen optellen en aftrekken?
Kortom, we richten onze hulp niet op het 'oppervlakkige' tekort van het automatische aftrekken, maar op diepere manco's van aanvankelijke ongecijferdheid ...

5 rekenen tot honderd: aftrekken

Tenslotte nog enkele opmerkingen over het aftrekken onder de honderd in verband met basale (on)gecijferdheid. Wat de huidige stand van didactische zaken betreft, zoals neergelegd in de nieuwste leerboeken, wordt er voldoende aandacht besteed aan de ordening van getallen op de (lege) getallenlijn en decimale structurering van getallen door middel van positiemateriaal (MAB, geld, abacus), dus aan de 'number-component'.
Ook de 'settings-component' wordt voldoende verzorgd: er is veel aandacht voor uiteenlopende toepassingsopgaven of contextproblemen wat betreft het elementaire aftrekken.
Over de 'operations-component' zou ik wat aftrekken aangaat toch twee aanvullende opmerkingen willen maken. Naar mijn mening zou in de lijn van wat A. Veltman (1993) heeft ontwikkeld en onderzocht, wat uitdruk-

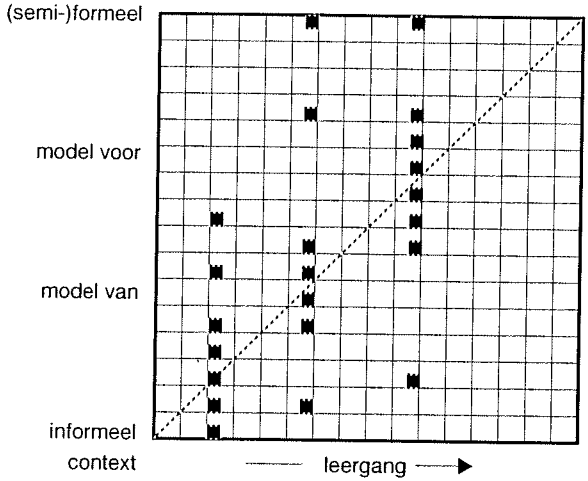
kelijker aandacht aan het tweezijdige aftrekken ('van het begin en van het eind') moeten worden geschonken. Dit zowel wat het kale als het toepassingsgerichte rekenen betreft.
En in verband daarmee en met hetgeen in de vorige paragraaf werd betoogd zou aan de relatie tussen optellen en aftrekken wellicht wat meer zorg besteed kunnen worden via de boogjes-benadering.

$$63 - 59 = .$$

Dit soort aftrekopgaven, waarbij aftrektal en aftrekker dicht bij elkaar liggen maar verschillende tientallen bevatten, behoort tot de moeilijkste categorie: minder dan de helft van de leerlingen eind groep 4 kan zo'n som vlot uit het hoofd uitrekenen (Van der Heijden, 1993). Indien de leerlingen echter tweezijdig kunnen aftrekken en de relatie tussen optellen en aftrekken kunnen doorzien (via een relatieboogje) is zo'n opgave juist betrekkelijk eenvoudig door doortellen op te lossen.

6 differentiatieproblematiek

Schrijvend over (on)gecijferdheid kan de differentiatieproblematiek natuurlijk niet onaangestipt blijven. Zeker niet vanuit de realistische invalshoek bezien. Want de eerder geschetste niveaus van opereren zullen zonder twijfel tot een (grote) differentiatie leiden, zoals het volgende 'Dolk-diagram' laat zien (fig.21).[2]



figuur 21

In het algemeen wordt die differentiatie in oplossingsniveaus als praktisch zeer hinderlijk ervaren. Toch zou ik ook een positieve kant ervan willen noemen, namelijk dat de kinderen in interactief onderwijs elkaar wat kunnen uitleggen en wat van elkaar kunnen leren. Zulk interactief onderwijs maakt het mogelijk dat regelmatig vooruit- en teruggeblikt kan worden in de leergang. Waarbij het terugkijken leerzaam is voor de gevorderden en het vooruitzien voor de beginners. Bezinning op verschillen in oplossingsniveaus kan aanleiding geven tot reflectie op de eigen methode en op de gelijkwaardigheid van verschillende oplossingsmethoden. Interactie noodzaakt tot verbaliseren en formuleren van denkwijzen.
Kortom, gedifferentieerd en interactief onderwijs is waardevol indien de verschillen op didactische wijze worden benut voor het onderwijs-leerproces ... zeker ook om basale ongecijferdheid te helpen voorkomen voor een grote groep van leerlingen.

Om enige indruk te krijgen van wat basale (on)gecijferdheid inhoudt namen wij het terrein van de kommagetallen als voorbeeld. Wat zich daar aan tekorten voordoet bij een grote groep van leerlingen ten aanzien van het schattend vermenigvuldigen, zien we bij een kleinere groep terug bij het rekenen tot honderd en tot twintig.
Zijn dit leerproblemen of zijn deze tekorten voornamelijk het gevolg van onderwijsproblemen, dus van problemen die wij hebben om goede leergangen te ontwerpen?
Ik heb de moeilijkheden voor alle duidelijkheid hier maar eens bij onszelf als onderwijsontwikkelaars en onderzoekers neergelegd, en laten zien hoe we al werkend pogen daar stukje bij beetje verbetering in aan te brengen, vanuit een bepaald onderwijs-theoretisch concept. Of eigenlijk kan ik beter zeggen een onderwijs-praktisch concept. Niets is immers praktischer dan een goede theorie, of wat mij betreft een goede realistische didactiek die mikt op basale gecijferdheid.

noten

1 De experimenten zijn uitgevoerd door K. Vlug, Y. Strootman, W. Matthijsse, A. Treffers en A. Veltman.
2 Het betreffende diagram werd door M. Dolk op een servetje getekend tijdens een informeel gesprek met A. Treffers. Vandaar de naam Dolk-diagram.

literatuur

Berg, W. van den en H.A.A. van Eerde (1993). De veerkracht van het rekenrek. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 12(1), 4-16.

Bokhove, J. en J. Janssen (1988). Periodiek Peilingsonderzoek in het basisonderwijs. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 7(2), 16-35.

Brink, J. van den (1991). *Zakrekenmachines* (deel 2). W12-16 publikatie, experimentele versie. Utrecht: OW&OC.

Greer, B. (1992). Multiplication and Division as Models of Situations. In: D.A. Grouws (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan P.C., 276-296.

Heijden, M.K. van der (1993). *Consistentie van aanpakgedrag. een procesdiagnostisch onderzoek naar acht aspecten van hoofdrekenen*. Lisse: Swets en Zeitlinger (dissertatie).

Hiebert, J. (1992). Mathematical, cognitive and instructional analyses of decimal fractions. In: G. Leinhardt, R. Putnam en R.A. Hattreep (eds.). *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Ass. Publ., 283-323.

Keijzer, R. en M. van den Heuvel-Panhuizen (1993). *More or Less* (MSP-module). Utrecht: Freudenthal instituut (interne publikatie).

McIntosh, A., B.J. Reys en R.E. Reys (1992). A Proposed Framework for Examining Basis Number Sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-9.

Treffers, A. (1990). Beknopte Schets van een Onderwijsprogramma voor het Rekenen tot Twintig met het Rekenrek. *Willem Bartjens*, 10(1), 35-46.

Veltman, A. (1993).Van het 'begin' en van het 'eind'. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 11(4), 7-14.