Zwakke rekenaars en de lege getallenlijn

M. Beishuizen, M. Torn & A.S. Klein
vakgroep Onderwijsstudies, RU Leiden

1 onderzoek met de lege getallenlijn

In Leiden wordt in samenwerking met het Freudenthal instituut door NWO gesubsidieerd onderzoek verricht naar de lege getallenlijn bij R100 in groep 4. Er zullen twee verschillende varianten vergeleken worden: (1) een eensporige *Stadia-leerlijn* met nadruk op proceduralisering van aanvullen/leegmaken en de rij- of sprong-methode (G10) als standaardstrategie, en (2) een bréédsporige *Proeve-leerlijn* met nadruk op flexibilisering via gevarieerde rekenstrategieën zoals - naast bovengenoemde G10 - springen met compensatie (G10V) en aanvullen (A10).

Optellen met tientalpassering: 46 + 39		Aftrekken met tientalpassering: 65 - 39	
G10:	46 + 30 = 76; 76 + 4 + 5 = 85	G10:	65 − 30 = 35; 35 − 5 − 4 = 26
G10V:	46 + 40 = 86; 86 − 1 = 85	G10V:	65 − 40 = 25; 25 + 1 = 26
1010:	40 + 30 = 70 6 + 4 + 5 = 15 } 70 + 15 = 85	1010:	60 − 30 = $\cancel{30}$ → 20 5 − 9 =? → 15 − 5 − 4 = 6 } 20 + 6 = 26 dikwijls fout 5 − 9 = 4, antw. 30 + 4 = 34
10t:	40 + 30 = 70; 70 + 6 = 76; 76 + 4 + 5 = 85	10t:	60 − 30 = 30; 30 + 5 = 35; 35 − 5 − 4 = 26
A10:	46 + 4 = 50; 50 + 30 = 80; 80 + 4 = 85	A10:	65 − 5 = 60; 60 − 30 = 30; 30 − 4 = 26

G10 wordt ook wel de rij- of sprongmethode genoemd. Het eerste getal wordt heel gelaten (G) gevolgd door sequentiële 10-sprongen erbij of eraf: in kleine sprongen 10-10-10 (G10sp) of in grote sprongen ineens zoals + of − 30 (G10). Aan het eind de eenheden, of juist aan het begin (eG10).

G10V is een verkorte versie (V) van G10 waarbij aan het eind gecompenseerd wordt voor de te veel erbij getelde of afgetrokken eenheden.

1010 wordt ook wel de splitsmethode genoemd. Beide getallen worden opgesplitst in tientallen en eenheden (1010), en afzonderlijk opgeteld of afgetrokken - zonodig met inwisselen. Tenslotte worden de tussenuitkomsten gecombineerd.

10t is een aanpassing van de 1010-splitsmethode, waarbij de eenheden sequentieel worden afgehandeld. Belangrijk is de tussenstap (t), waarbij door het toevoegen van de eerste eenheid het uitgangsgetalbeeld weer wordt gereconstrueerd.

A10 is een procedure waarbij ook het eerste getal wordt heel gelaten, waarna eerst wordt aangevuld of leeggemaakt tot aan het dichtstbijzijnde tiental (A10). Daarna volgen sequentieel de tientallen en de overgebleven eenheden.

N.B. De 'kolommethode' is in dit overzicht nog niet opgenomen. In de 'Proeve' worden de G10, G10V en A10 als varianten van de 'rijmethode' aangeduid, omdat bij alle drie in de getalrij wordt gesprongen vanaf het eerste, gehéle getal. Dit in tegenstelling tot de splitsmethode-aanpak bij 1010 en 10t (en 'kolommethode').

figuur 1: hoofdrekenstrategieën voor het optellen en aftrekken tot honderd

In figuur 1 worden voorbeelden van deze strategieën gegeven. Daarbij ook de nog niet genoemde 1010- en 10t-varianten, die kinderen vaak als informele strategie hanteren.

De resultaten in deze bijdrage beperken zich tot vijftien *goede* en vijftien *zwakke* rekenaars uit drie groepen 4 in het vooronderzoek met de Stadia-leerlijn (Beishuizen, 1993; Immikhuizen, 1993). Daarnaast waren vergelijkbare resultaten beschikbaar uit scriptie-onderzoek naar de methode 'Rekenen & Wiskunde' (RW) (Knoester & Knoester-Ton, 1993). In beide onderzoeken werden op vier momenten klassikale en individuele toetsen afgenomen: september, december, maart, juni.
In figuur 2 geven wij een korte indruk van de Stadia-leerlijn, waarover nog uitvoeriger zal worden gerapporteerd (vergelijk Beishuizen, 1993; Klein & Beishuizen, 1993). Aanvullen/leegmaken en G10-sprongen worden op een *voorgestructureerde* getallenlijn aangeleerd, later wordt op een *lege* getallenlijn gewerkt.

2 globale vergelijking van resultaten

De Stadia-leerlijn kent in groep 4 een vergelijkbare leerstofopbouw als de methode RW: eerst nadruk op aanvullen/leegmaken met de eenheden tot twintig en vervolgens tot vijftig/honderd, daarna nadruk op tien-sprongen volgens de zogenoemde G10-methode: 26 + 22 via 26 + 10 + 10, idem bij aftrekken (figuur 1). Belangrijk verschil is dat dezelfde strategieën met een verschillend model worden aangeleerd in Stadia-leerlijn en RW-methode: *getallenlijn of honderdveld.* Met deze korte typering moeten we hier volstaan.

We geven nu eerst enkele trends in de resultaten, die *niet* in figuren staan weergegeven. Voor de totale groepen leerlingen lieten de tempotoetsen bij de eenheden (8 + 7, 38 + 7) weinig verschillen zien. Bij de grotere sommen (26 + 22) waren de RW-resultaten bij het optellen iets beter, maar bij het aftrekken slechter dan in de Stadia-leerlijn.
Dit laatste kan in elk geval in termen van *leerstofaanbod* verklaard worden, omdat het aftrekken in RW veel later wordt behandeld dan het optellen waardoor RW-kinderen in groep 4 (te) weinig ervaring opdoen met sommen als 32 - 15 en 74 - 39.
Verschillen in strategiegebruik kwamen naar voren bij de individuele toetsen. In september wordt er door de zwakke rekenaars in beide condities nog veel *geteld.* In december is dit bij de zwakke RW-kinderen bij het aftrekken van sommen als 42 - 7 nog steeds het geval.

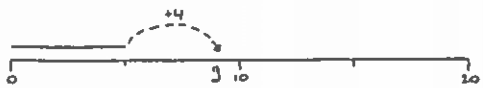
Taak 1

4. Maak het pijlenschema af, en teken de som op de stavenlijn.

Voorbeeld

Je kunt de som met staafjes Leggen ...

Maar wij doen het met sprongen.

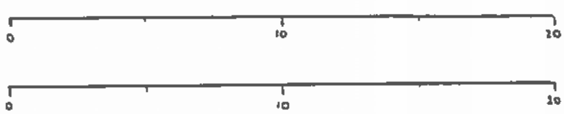


Taak 6

4. Teken de sommen op de getallenlijn, ga eerst tot de tien.

10 - 4

12 - 7



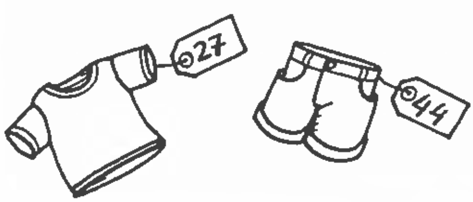
Taak 19

5. Teken de sommen op de lege getallenlijn.

27 + 20

Taak 20

5. Reken met de getallenlijn het verschil in prijs uit!

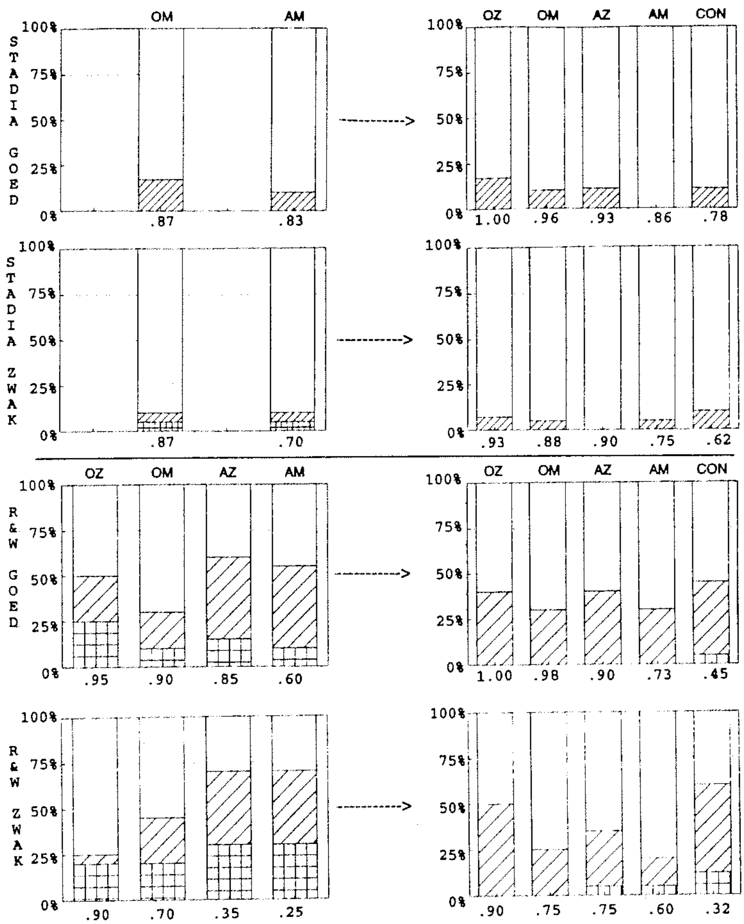


Verschil: .... gulden

figuur 2: voorbeelden van leertaken uit de Stadia-leerlijn

Echter bij de zwakke Stadia-leerlingen is dit tellen dan voor een veel groter deel overgegaan in aanvullen/leegmaken, waarschijnlijk als positief effect van de getallenlijn die reeds bij R20 werd geïntroduceerd.
Wij gaan nu in op de *strategieën* bij de *grotere* sommen, die in figuur 3 in staafdiagrammen staan weergegeven en die we hierna toelichten.

Toetsafname: MAART '93 (R50) ---------> *JUNI '93 (R100)*



Somtypen: OZ = Opt. zonder tp., OM = Opt. met tp., idem AZ en AM (grote sommen, zie fig. 2), CON = Contextopgaven

Strategietype: G10, G10sp, G10V; 10t, 1010, A10; Tellen,Cijferen,Ond.

figuur 3: individuele toetsresultaten van goede en zwakke rekenaars in Stadia-leerlijn en R&W-methode: strategietypen (%) en *p*-waarden

In de Stadia-leerlijn zien we reeds in maart een vrijwel volledige proceduralisering van de G10-methode: 80 procent en méér strategietype G10, G10sp of G10V, bij goede en zwakke rekenaars (linksboven in figuur 3). Bij de toetsafname in juni zet dit beeld zich door, óók bij de contextopgaven (laatste kolom rechtsboven in figuur 3). De scores als *p*-waarden of percentages goede antwoorden van de zwakke rekenaars zijn positief: in juni .75 goede antwoorden bij het moeilijkste somtype zoals 74 – 39 (kolom AM/aftrekken met tientalpassering, rechtsboven in figuur 3).
Bij de RW-kinderen zien we in maart (linksonder in figuur 3) bij optellen wèl veel G10 in meer dan 50 procent van de antwoorden (kolommen OZ en OM). Maar bij aftrekken zien we veel minder G10, en nog veel terugval naar 1010- en 10t-splitsmethoden in 40 tot 50 procent van de antwoorden (kolommen AZ en AM). Deze laatste bevinding wekt geen verbazing, omdat het aftrekken bij grotere sommen met tientallen in de methode RW in maart nog maar weinig aan bod is gekomen. Deze bevinding illustreert echter wèl de aantrekkingskracht van 1010 en 10t als 'gemakkelijke' informele strategie voor kinderen! In het individuele onderzoek bleek echter ook bij het optellen van de RW-kinderen, dat het modelgebruik van het honderdveld en de interiorisatie van de G10-sprongmethode bij veel (zwakke) leerlingen nog lang niet optimaal was. Dit beeld van RW-resultaten *verbetert* sterk in juni (rechtsonder in figuur 3). We zien duidelijk toegenomen G10-strategieën, nu meer dan 50 procent, óók bij aftrekken, resulterend in hogere *p*-waarden óók bij de zwakke RW-rekenaars (.75 en .60 bij de kolommen AZ en AM). Echter bij de contextopgaven zien we bij zowel goede als zwakke RW-kinderen nog veel terugval qua probleemrepresentatie en strategiegebruik (vooral 1010 en 10t), resulterend in lagere *p*-waarden van .45 en .32 (laatste kolom CON, rechtsonder in figuur 3).

3 hoofdrekenen, getallenlijn en pijlenschema bij zwakke rekenaars

Wij concentreren ons nu verder op de zwakke Stadia-leerlingen, waarvan we eerst de klassikale toetsresultaten nader bekijken en daarna, ter toelichting, twee individuele protocollen.
In figuur 4 geven we van deze zwakke rekenaars per toetsmoment (september, december, maart, juni) de *p*-waarden per somtype op drie niveaus van hoofdrekenen onder elkaar: hoofdrekenen uit het hoofd (HR), met de (lege) getallenlijn (GL), en met het pijlenschema (PS).
In het begin zien we aan de lage *p*-waarden rond .55 bij aftrekken R20 in september, dat het inderdaad om matige en zwakke rekenaars gaat (die dan nog overwegend tellen). Zij maken nog fouten bij de eenheden (E) en het splitsen (S), en ook procedurele fouten (P). In september functioneert

de getallenlijn (GL) ook bij het optellen nog niet goed (.57, want pas geïntroduceerd), in tegenstelling tot het pijlenschema (PS=.73, want bekend uit groep 3?)

sept. 1992	optellen		aftrekken:		
HR20:	(8 + 7)	.80 E	(12 – 5)	.55	E, S, P
GL20:	(8 + 7)	.57 E, P	(12 – 5)	.50	E, S, P
PS20:	(8 + 7)	.73 P	(12 – 5)	.60	E, S, P
dec. 1992					
HR20:	(8 + 7)	.95	(12 – 5)	.85	
" 50:	(38 + 7)	.82	(42 – 5)	.55	E, P
GL20:	(8 + 7)	.80	(12 – 5)	.87	
" 50:	(38 + 7)	.80	(42 – 5)	.70	E
PS20:	(8 + 7)	.87	(12 – 5)	.67	E
" 50:	(38 + 7)	.83	(42 – 5)	.67	E, P
maart 1993					
HR50:	(24 + 22)	.88	(46 – 24)	.87	
" ":	(26 + 18)	.70 E	(43 – 27)	.78	E, P
GL50:	(24 + 22)	.93	(46 – 24)	.83	
" ":	(26 + 18)	.75 E, T	(43 – 27)	.83	
PS50:	(24 + 22)	.86	(46 – 24)	.93	
" ":	(26 + 18)	.86	(43 – 27)	.82	
juni 1993					
HR100:	(44 + 43)	.93	(68 – 36)	.77	E
" ":	(57 + 28)	.80	(74 – 39)	.77	E, P
GL100:	(44 + 43)	.86	(68 – 36)	.80	
" ":	(57 + 28)	.89	(74 – 39)	.70	E, T
PS100:	(44 + 43)	.86	(68 – 36)	.73	E
" ":	(57 + 28)	.89	(74 – 39)	.83	

figuur 4: klassikale toetsresultaten zwakke rekenaars in de Stadia-leerlijn: *p*-waarden en foutentypen E, S, T, P

In december zijn de zwakke rekenaars nog steeds 'zwak' bij het aftrekken uit het hoofd (HR50) van sommen als 42 – 5 met veel E- en P-fouten en een nog lage *p*-waarde van .55. Getallenlijn (GL50) en pijlenschema (PS50) bieden dan al duidelijk extra steun, blijkend uit hogere *p*-waarden rond .70 in figuur 4. Echter, vanaf maart lijken de zwakke rekenaars in de Stadia-leerlijn nauwelijks nog 'zwak', want bij de grotere sommen R50 van het

moeilijkste type 43 – 27 scoren zij nu met .78 niet veel lager dan de goede rekenaars bij het hoofdrekenen (HR50).
In juni laten deze zwakke rekenaars dezelfde goede resultaten zien, zoals een *p*-waarde van .77 bij grote sommen als 74 – 39 uit het hoofd (HR100).
In figuur 4 zien we aan de *p*-waarden, dat getallenlijn (GL100) en pijlenschema (PS100) dan weinig extra steun meer bieden bij de standaardsommen. Omdat deze modellen - naar onze indrukken uit het individuele onderzoek - dan sterk zijn geïnterioriseerd tot mentaal model, inclusief de G10-sprongmethode, óók bij de zwakke rekenaars in de Stadia-leerlijn.
Vergelijk in figuur 4 ook het uitblijven van de gebruikelijke grote aantallen P-inzichtfouten bij de moeilijker grote aftreksommen (met name niet bij GL100 en PS100, waar wel E- en T-kennis-fouten blijven voorkomen). Dit positieve resultaat blijkt bij de contextopgaven van ruimere toepassing: zoals eerder te zien was werden deze ook door de zwakke Stadia-leerlingen vrij redelijk opgelost (rechtsboven in figuur 3 de kolom CON: .62). Daarbij maakten zij op hun 'kladblaadje' vaak gebruik van de (lege) getallenlijn of het pijlenschema als extra steun, door hen zèlf spontaan getekend!

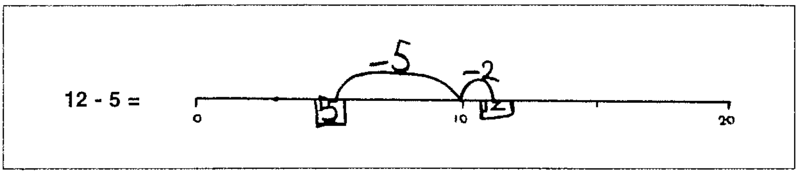
Deze resultaten lijken de visie van Treffers (1992, pag.18) en van Van Mulken (1992, pag.285) te ondersteunen, dat de (lege) *getallenlijn* een 'krachtig' model kan zijn met name voor zwakke rekenaars. Daarmee wordt ook bedoeld dat juist voor zwakke rekenaars de volgorde éérst *ordinaal* rekenen (rij- of sprongmethode) en daarná *kardinaal* (splits- en kolommethode) didactisch beter lijkt dan de omgekeerde volgorde.[1]

4 protocol van Daisy als verbeterde zwakke rekenaar

Na deze beschrijving van het algemene beeld van de zwakke Stadia-leerlingen blijkens hun toetsresultaten in figuur 4, willen wij dit nog verder toelichten aan de hand van twee individuele protocollen.

Het eerste voorbeeld van Daisy is representatief voor veel van de hierboven besproken zwakke rekenaars, die in de tweede helft van de Stadia-leerlijn een sterke verbetering laten zien. In september telt Daisy nog veel, met telfouten.
Op de getallenlijn gaat zij wel over tot stapjes, waarbij zij een typische G-fout laat zien ('verlies getal'), zoals zwakke rekenaars wel meer vertonen.
In het protocolfragment (bij 12 – 5) hieronder zien we dat Daisy goed begint met het opzetten van 12 en een sprong van –2 naar 10. Dan echter volgt een sprong van –5 naar de 5: ze is blijkbaar vergeten dat ze al een sprong van –2 heeft gemaakt. Een veel voorkomende fout in deze aanleerfase, die meestal later verdwijnt (fig.5).

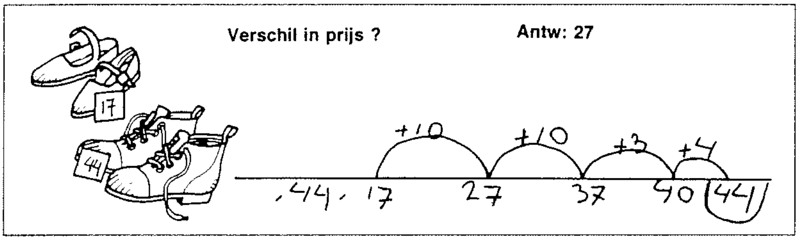
In december laat Daisy nog steeds veel tellen met telfouten zien, vooral bij sommen als 32 – 6 (grotere eenheden eraf met tientalpassering en splitsen).



figuur 5

Ook op de getallenlijn komen nog telfouten voor. Het beeld is vooral bij hoofdrekenen (HR) dus nog steeds 'zwak', zoals van de meeste zwakke rekenaars geldt (zie *p*-waarden in figuur 4).

In maart zien we bij Daisy een sterke verbetering. Zelfs de grotere sommen gaan nu zonder fouten, óók bij aftrekken van het type 41 – 23. Ook de contextopgaven gaan goed, zoals hieronder in het protocolfragment. Daisy gebruikt nu heel consequent de sprongmethode (G10). Maar zowel bij hoofdrekenen als op de getallenlijn nog met niet-verkorte 10-sprongen (G10sp), zoals we hieronder kunnen zien (fig.6).



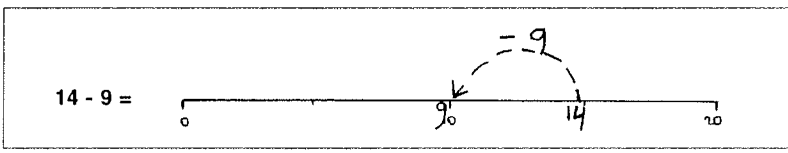
figuur 6

In juni vertoont Daisy wèl verkorte G10-sprongen bij grote sommen als 57 + 29 en 84 – 39, mede als positief effect van een experimentele computertraining in (verkorte) sprongen op de getallenlijn (Mertens & Mohamedradja, 1993). Ook deze grote sommen worden nu foutloos opgelost, evenals de contextopgaven! G10-met-compensatie (G10V) laat Daisy wèl op de getallenlijn zien, maar niét uit het hoofd. Bij de splitssommen blijft zij nog kleine 10-sprongen (G10sp) maken om het 'ontbrekende getal' te benaderen.

Samenvattend laat Daisy als zwakke rekenaar een sterk *verbeterd* maar ook tamelijk éénsporig *procedureel* beeld zien.

5 protocol van Chantal als blijvend zwakke rekenaar

Als tweede voorbeeld enkele protocolfragmenten van Chantal, die duidelijk een blijvend zwakke rekenaar blijkt te zijn, waarvoor ook de (lege) getallenlijn geen voldoende oplossing biedt. Met extra hulp uit het Kwantiwijzer-instrument werd een begin gemaakt.
In september telt Chantal nog veel en maakt voortdurend telfouten. Ook op de getallenlijn blijft zij tellen (met telfouten) en komt zij nog niet tot stapjes. Het protocolfragment hieronder laat een grote sprong zien, maar Chantal is eigenlijk begonnen met tellen, en raakte toen de draad kwijt. Ineens krijgt haar oplossing dan een duidelijke richting naar de negen, maar dat betekent een Getal-fout (zoals bij Daisy in 12 – 5, maar anders) (fig.7).



figuur 7

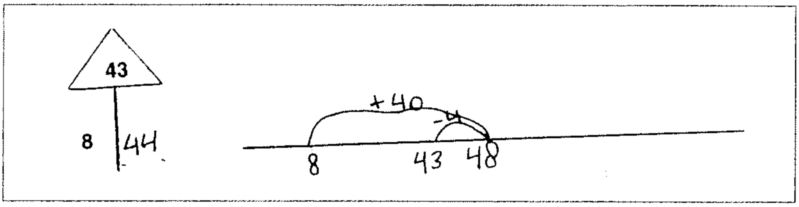
In december is dit beeld weinig verbeterd: Chantal telt nog steeds veel, ook op de getallenlijn. Bij grotere sommen als 25 – 8 zien we terugval op 'vinger-tellen' of 'verlies getal' bij rekenen uit het hoofd, zoals in het protocolfragment hieronder (fig.8). Ook haar kennisbasis van de getalrij is duidelijk nog niet voldoende.

25 – 8 = 25, 24, 23, 21, .. 12, 11, 10, ... ik weet niet

figuur 8

Bij de toetsafname in maart laat Chantal wel vooruitgang zien, want de G10-sprongen gaan nu goed en zelfs verkort! Echter, de eenheden in de grote sommen worden nog steeds geteld, zowel bij het hoofdrekenen als op de getallenlijn. Telfouten blijven dus veel voorkomen, maar weinig procedurele fouten in de standaardsommen. Maar dat beeld is anders bij de splitssommen en de contextopgaven, waar Chantal niet tot een goede of verkeerd uitgewerkte probleemrepresentatie komt. Daarbij is Chantal - zoals méér zwakke 'tellers' - in haar strategiekeuze wèl gevoelig voor handige afleidingen en verkortingen. Dat bleek reeds eerder in september bij R20, en blijkt nu opnieuw bij R100 uit de G10V-sprongen-met-compensatie. Dergelijke 'handige' oplossingen laat Chantal vooral mèt steun van de getallenlijn zien, maar niét bij het rekenen uit het hoofd.

Daarbij zien we echter veel inzichtelijke 'afleiding'- en 'richting'-fouten (ook telfouten). Zie het procolfragment van een splitssom hieronder, waar de probleemrepresentatie op de lege getallenlijn goed begint met acht en een grote sprong naar 48. Ook het terugspringen naar 43 (telfoutje −4) getuigt nog steeds van inzicht. Maar dan gaat helaas de combinatie van haar sprongen verkeerd: +40 en −4 wordt bij Chantal 44 als antwoord (fig.9).



figuur 9

In juni maakt Chantal de grote optelsommen als 57 + 29 via G10-sprongen en tellen uit het hoofd zonder fouten, wat voor haar een hele (procedurele) prestatie is! Maar de aftreksommen blijven vol T- en E-fouten zitten, óók met steun van de getallenlijn. Bij de contextopgaven en splitssommen komt Chantal nu - anders dan in maart - wèl tot een goede probleemrepresentatie, vaak nog met kleine G10-sprongen dus éénsporig procedureel, maar ook hier nog steeds met veel T- en E-fouten.

Samenvattend geeft Chantal het beeld van een zwakke rekenaar, die teveel wordt 'voortgesleurd' door het programma. Zij heeft extra *individuele hulp* ontvangen met de 'Kwantiwijzer' (Torn, 1993), en daarbij bleken basisvaardigheden als aanvullen/leegmaken tot tien nog steeds niet voldoende ontwikkeld. Met eierdozen en staven lukte het wel, maar met sommetjes eigenlijk niet. Ook tientallen en eenheden werden dikwijls nog verwisseld. Kortom, Chantal mist nog steeds *basaal getalinzicht*, waardoor zij niet komt tot het goed benutten van getalrelaties en veel blijft vasthouden aan tellen. Voor haar lijkt de (lege) getallenlijn eigenlijk nog 'een brug te ver' en moet op meer elementaire modellen en hulpmiddelen worden teruggegrepen?

noten

1 Overigens kwam in de discussies tijdens de workshop naar voren, dat het werken met de getallenlijn ook een eenzijdig procedureel accent kan krijgen, zoals in deze eerste versie van de Stadia-leerlijn het geval is (figuur 2). Aanvulling lijkt wenselijk met meer kardinale getalbeelden (bijvoorbeeld 'zegels plakken'), zoals tijdens de Panama conferentie naar voren kwam, terwille van een beter getalbegrip met name voor zwakke rekenaars.

literatuur

Beishuizen, M. (1993). De lege getallenlijn als (sober) mentaal model. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 11(3), 16-19.

Immikhuizen, R. (1993). *Tweede vooronderzoek Stadia-leerlijn: De G(oed voor een) 10-procedure!*. Rijks Universiteit Leiden: vakgroep Onderwijsstudies (doctoraalscriptie).

Klein, A.S. & M. Beishuizen (1993). Conflict and adaptation in the development of addition and subtraction strategies up to one hundred. *Paper EARLI-Conference*, Aix-en-Provence.

Knoester, P.H. & Y.M. Knoester-Ton (1993). *Uitgeteld ... en dan? - Gevarieerd gebruik van oplossingsstrategieën bij het leren rekenen tot 20 in groep 4 volgens de methode Rekenen en Wiskunde.* Rijks Universiteit Leiden: vakgroep Onderwijsstudies (doctoraalscriptie).

Mertens, C. & S. Mohamedradja (1993). *Ontwikkeling en evaluatie van bouwstenen voor een computerrekenprogramma.* Rijks Universiteit Leiden: vakgroep Onderwijsstudies (doctoraalscriptie).

Mulken, F. Van (1992). *Hoofdrekenen en Strategisch Handelen - Het gevarieerd gebruik van twee grondvormen van optellen en aftrekken tot honderd.* Rijks Universiteit Leiden: vakgroep Onderwijsstudies (dissertatie).

Torn, M. (1993). *Verslag hulplessen rekenen.* Rijks Universiteit Leiden: vakgroep Onderwijsstudies (intern verslag).

Treffers, A. (1992). Leerproblemen of onderwijsproblemen? - Over (on)natuurlijk rekenen. In: A.J.J.M. Ruijssenaars & J.H.M. Hamers (red.). *Rekenen als probleem - Praktijk en onderzoek.* Leuven: Acco, 15-26.