Bakens voor een leerlijn procenten

- op de grens van basisschool en basisvorming -

J. Bokhove
Cito, Arnhem
E. de Moor
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

1 enige historie

Procenten hebben van oorsprong alles met centen te maken. Reeds de oude Grieken kenden banken, waar men tegen betaling geld kon lenen. De rente werd per honderd Drachmen vastgesteld. En wij kennen uit de vaderlandse geschiedenis de vijfde en de tiende penning, die 'schandelijke' belasting van Alva. Vanaf de twaalfde eeuw begon het boekhoudkundige rekenen zich te ontwikkelen. De oorsprong hiervan lag in Italië. Hierbij behoorde natuurlijk ook het procentrekenen. Voor het vlot uitvoeren van renteberekeningen werden tabellen gebruikt, zoals nog steeds btw-tabellen in winkels gebruikt worden. De eerste 'Tafelen van Interest' waren van Simon Stevin (1548 - 1620), die overigens niet van procenten sprak, maar van 'zoveel van Honderd'. Tot ver in de negentiende eeuw, vooral door de boeken van Willem Bartjens (1569 - 1638), blijft dit spraakgebruik in zwang. Het woord procent komt ternauwernood voor, laat staan het symbool: %.
Pas veel later zullen percentages ook gebruikt gaan worden als gestandaardiseerde verhoudingsmaten ter vergelijking van 'mengsels'. Wijnen kunnen op sterkte vergeleken worden door middel van het alcoholpercentage. Maar ook komen percentages vandaag de dag meer en meer voor als maten in de sport, de economie en het maatschappelijk leven. Krajicek slaat in een partij 64 procent van zijn eerste services in. Van de Nederlandse bruidjes trouwt 90 procent in het wit. In deze voorbeelden zijn de percentages als het ware zelfstandigheden geworden. Het blijft mogelijk om het oorspronkelijke 'ten honderd' te blijven toepassen. '5%' in plaats van '5 van de 100' levert een papierbesparing van 75 procent voor deze uitdrukking. Het didactische verlies is echter niet in een percentage uit te drukken.
Deze historische ontwikkelingen hadden ook hun effecten op de inhoud van het onderwijs. Vandaar dat procentrekenen zich beperkte tot rente- en winst/verlies-vraagstukken. Dit is tot ver in de jaren zeventig van deze eeuw gebleven.
Ook de historie van de didactiek ten behoeve van het procentrekenen releveren we kort. In feite begint de rekendidactiek in Nederland zich pas vanaf 1870 te ontwikkelen. Daarvoor was het Willem Bartjens die de dienst uitmaakte. We zullen in grote lij-

nen deze didactische ontwikkelingen laten zien aan de hand van het volgende probleem:

> Een pak visitekaartjes kost *f* 15,– inclusief btw van 20%.
> Wat is de nettoprijs?

De 'Willem Bartjens-methodiek' komt neer op het volgende. De getallen 120, 100 en 15 worden als volgt in een blok gezet:

120	100
15	?

Het gezochte getal op de plaats van het vraagteken wordt nu als volgt bepaald:

> Vermenigvuldig 15 met 100.
> Deel deze uitkomst door 120.

Of in een formule:

$$\frac{15 \times 100}{120}$$

Dit is de zogenaamde 'regel van drie' methode. Dit betekent dat van een evenredigheid drie termen gegeven zijn en de vierde berekend moet worden. In casu:

$120 : 15 = 100 : y$

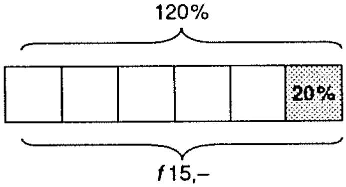
$$y = \frac{15 \times 100}{120}$$

Men kan zich voorstellen dat de Willen Bartjens aanpak snel tot een werktuiglijke, inzichtsloze handeling kan leiden. Een van de eerste pogingen om meer inzichtelijk te werken was de zogenoemde één procent-methodiek. Deze treedt voor het eerst aan het eind van de negentiende eeuw op.

> 120% komt overeen met *f* 15,–.
> 1% komt overeen met ....
> 100% komt overeen met ....

Deze benadering is al een hele vooruitgang ten opzichte van het Willem Bartjens-algoritme. Echter het berekenen van één procent kan technisch lastig zijn. En bovendien wordt een andere, mogelijk flexibelere berekeningswijze in de kiem gesmoord.
Overigens heeft deze aanpak een soort methodiek in Nederland voorgebracht die tot vandaag de dag nog opgeld doet. Opvallend is bijvoorbeeld dat de didactiekboeken uit de jaren 1950-'70 weinig of geen aandacht aan procenten besteden. Vrijwel alle auteurs, waaronder bekende namen als Van Gelder, Reynders en Snijders, Turkstra en Timmer, achtten procenten een eenvoudig onderwerp van het rekenprogramma, waarvoor alleen begrepen hoefde te worden dat percentages breuken waren (sic).
Verder verwezen zij allen naar de bovengenoemde één procent-didactiek. Pas sinds enkele tientallen jaren heeft men de kracht van visuele modellen ontdekt.

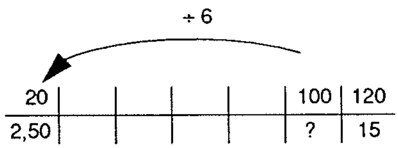
Dit visualiseren van bijvoorbeeld het onderstaande vraagstuk maakt het mogelijk de grootheden als het ware te 'zien'.

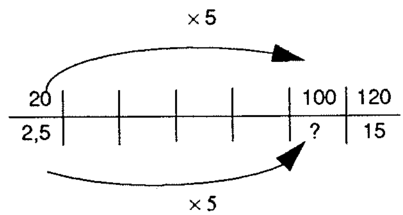


Vooral in gevallen waar de percentages 'prettige' delen zijn van het geheel, zoals in het onderhavige voorbeeld, werkt dit model heel goed.
De laatste jaren is vooral de verhoudingstabel populair geworden:

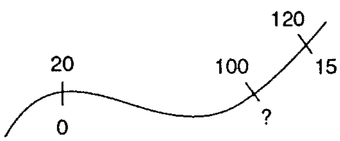
					100	120
					?	15

De aanvangsnotatie lijkt erg op de Willem Bartjens-methode. Maar de tabel biedt de mogelijkheid om telkens van andere makkelijker percentages het overeenkomstige bedrag te vinden. Door handig bij elkaar nemen en/of vermenigvuldigen kan het 100%-bedrag gevonden worden. Bijvoorbeeld:





Ook wordt tegenwoordig regelmatig gebruik gemaakt van de tweeschalige of dubbele getallenlijn:



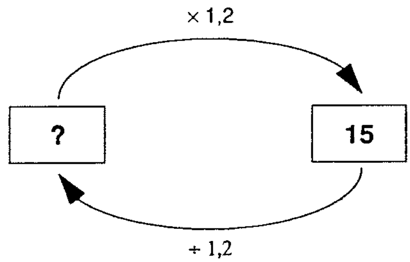
Dit model vertoont in eerste instantie overeenkomst met de verhoudingstabel. Zeker waar het de uitvoering van de berekeningen betreft. Je kunt immers eerst naar bijvoorbeeld 20% (*f* 2,50) etcetera. Het verschil is echter dat de getallen thans als op een liniaal geordend zijn (bij de verhoudingstabel kun je ze door elkaar zetten). Je kunt de getallen om en nabij op de goede plek op de getallenlijn plaatsen. Dit bevorderd het gevoel voor de ordegrootte en het daarmee samenhangende schattende reken.
Ten slotte bespreken we de factormethode. Wanneer we uitgaan van een grondbedrag G dat vermeerderd wordt met 20%, kunnen we dat als volgt noteren:

$$G + 0{,}2\,G$$

En dit betekent dat het eindbedrag E als volgt genoteerd kan worden:

$$E = 1{,}2\,G$$

Hiermee wordt het visitekaartjesprobleem gereduceerd tot het volgende schema. Dan ziet men hoe eenvoudig het gestelde probleem in essentie is. Om van het totaalbedrag naar het brutobedrag te komen moet met 1,2 vermenigvuldigd worden.
Dus geldt voor de omgekeerde weg de inverse bewerking, in casu delen door 1,2. Maar dan zijn we natuurlijk wel op het hoogste niveau van begrip en inzicht.



Wiskundig bezien komen al de oplossingswijzen op hetzelfde neer. En toch is bij de ene methode het achterliggende begrip duidelijker zichtbaar dan bij de andere. Afgezien van de hier gepresenteerde inzichtsloze methode van de regel van drie, bieden alle andere modellen mogelijkheden het bedoelde vraagstuk inzichtelijk uit de doeken te doen. Dit wil zeggen dat begrepen kan worden welke rekenkundige stappen gedaan moeten worden om tot de uiteindelijke oplossing te geraken. Afhankelijk van de soort van het vraagstuk, de aard van de getallen, het niveau van beheersing van technieken om de berekeningen uit te voeren, zou eigenlijk gekozen moeten worden voor een passend model. Bovendien zal voor het onderwijs niet uit het oog verloren moeten worden dat ook het verwerven van een didactisch model de nodige leertijd vraagt.
Voordat we trachten een mogelijke leerlijn te schetsen bespreken we eerst de kerndoelen, de resultaten en de hoofdtypen van vraagstukken zoals die in de leerboeken voorkomen.

2 doelen van het procentonderwijs

Vanouds lagen de doelstellingen van het rekenonderwijs alleen of voornamelijk vast in rekenmethoden en didactiekboeken. Centraal was door de overheid niet meer geregeld dan dat er een aantal uren rekenonderwijs moest worden gegeven. Over de inhoud van dat rekenonderwijs was wettelijk niets vastgelegd. Daar is nu verandering in gekomen. Voor het rekenonderwijs heeft de overheid nu één algemene doelstelling en 23 kerndoelen geformuleerd. Voor procenten geldt één kerndoel:

> De leerlingen kennen het begrip 'procent' en kunnen in eenvoudige situaties praktische procentberekeningen uitvoeren.

Deze enige doelstelling voor procenten is de samenvatting van een uitgebreidere versie zoals die in de Eindtermenspecial van 'Willem Bartjens' voorkomt (jaargang 8 nummer 1). Daar werden voor procenten nog drie kerndoelen genoemd:

- de leerlingen hebben begrip van procent als een gestandaardiseerde verhouding van 'één op honderd' en kunnen deze maat hanteren in de verhoudingstabel;
- de leerlingen kunnen elementaire praktische procentberekeningen maken aan de hand van alledaagse situaties (onder andere met geld);
- de leerlingen kunnen procent als groeifactor hanteren, speciaal in samengestelde groeivormen met behulp van de zakrekenmachine.

Wat is nu de betekenis van die wettelijk vastgestelde kerndoelen? Kan onderwijs richting krijgen door die kerndoelen en kan uitgaande van die kerndoelen bepaald worden of het onderwijs aan zijn verplichtingen voldoet? We denken van niet. De kerndoelen geven alleen in heel algemene zin de globale richting aan. Ze zijn echter zo weinig precies dat hun rechtstreekse invloed op het rekenonderwijs gering zal zijn. In de praktijk van het onderwijs, de methoden, de toetsen zal een nadere invulling en uitwerking van de inhoud en de didactiek moeten groeien die wel bruikbaar is. De kerndoelen geven daarbij alleen in heel algemene zin de richting aan. Met de kerndoelen zijn we er dus niet.

3 resultaten

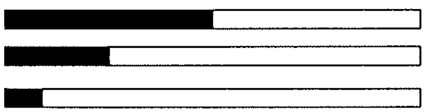
Om aan een uitwerking van kerndoelen en een goede didactiek te kunnen werken is kennis van de resultaten van het huidige procentonderwijs van belang. Niet omdat daaruit de verfijning van de doelen af te leiden is, maar omdat die resultaten een empirische basis verschaffen met betrekking tot de huidige stand van zaken en daardoor in de discussie een rol spelen. Tevens kunnen problemen gesignaleerd worden waar het de huidige opbrengst van het onderwijs betreft. We geven daarom nu eerst een overzicht van de uitkomsten van het PPON-onderzoek voor wat betreft het onderdeel procenten. Dit overzicht is voornamelijk gebaseerd op de uitkomsten van het onderzoek in 1987. Dat kan, omdat een eerste inspectie van de uitkomsten in 1992 geen wezenlijk andere uitkomst te zien geeft. Ter inleiding van die resultaten het volgende.
Bij de PPON-peiling is het belang van basiskennis en begrip benadrukt door een aparte schaal hiervoor te construeren. Het percentage dient te worden begrepen als een verhouding die op honderd is genormeerd (die verhouding wordt ook vaak in een breuk uitgedrukt). De relatie tussen procenten, breuken en verhoudingen wordt als deel van die basiskennis en begrip beschouwd. Verder is in deze schaal ondergebracht hoe een percentage van iets kan worden berekend (de berekening behoeft niet te worden uitgevoerd). Uit het onderzoek bleek dat elementair begrip van percentages bij veel leerlingen ontbrak. Ter illustratie daarvan de volgende opgaven. We geven daarbij twee maten om de beheersing aan te geven:

- het percentage leerlingen dat een opgave goed, matig of onvoldoende beheerste;
- het percentage goede antwoorden.

We spreken van een goede beheersing bij een kans van 80 procent of meer op een goed antwoord; een matige beheersing wanneer de kans op een goed antwoord tussen de 50 en de 80 procent ligt en een onvoldoende beheersing bij een kans van minder dan 50 procent op een goed antwoord. Bij de kansrapportage wordt een uitspraak gedaan over het vaardigheidsniveau. Die wijze van resultaten bekijken is zuiverder en past bij de gehanteerde analysetechnieken. Omdat deze wijze van interpreteren (nog) niet algemeen bekend en gebruikelijk is geven we ook het percentage goede antwoorden. In feite wordt hiermee, onder een zeker voorbehoud, een uitspraak over de moeilijkheid van een item gedaan.

Een probleem bij deze laatste rapportagevorm is dat de percentages zeker bij verkapte of openlijke meerkeuzevragen geflatteerd zijn in verband met de gokkans.

Van welke strook is ongeveer 5% gekleurd?



goed	matig	onvoldoende
20%	67%	13%

percentage goede antwoorden: 67

Al lijkt het percentage antwoorden redelijk, bedacht moet worden dat dit percentage geflatteerd is. Bovendien liggen de alternatieven zover uiteen dat geconcludeerd moet worden dat het resultaat wel erg mager is. Het werken met stroken en/of dubbele getallenlijnen leidt waarschijnlijk tot een betere beheersing van dit soort vraagstukken.

2 op de 5 kinderen hadden een onvoldoende voor het proefwerk.
Hoeveel procent is dat?

goed	matig	onvoldoende
20%	23%	45%

percentage goede antwoorden: 45

Henk won 21 van de 28 damspelen.
Hoeveel procent van de damspelen won hij?

goed	matig	onvoldoende
9%	16%	75%

percentage goede antwoorden: 23

Wordt de verhouding iets complexer en moeten de getallen eerst in een eenvoudig breuk (of verhouding) worden omgezet dan worden de resultaten snel minder, zoals in het volgende voorbeeld goed te zien is aan het percentage leerlingen dat de opgave goed of matig beheerst.

16% van f 42,– is ongeveer 1/... deel van f 42,–

goed	matig	onvoldoende
1%	7%	92%

percentage goede antwoorden: 23

Het bij benadering vervangen van een percentage door een breuk blijkt zeer moeilijk. Toch is deze vaardigheid zeer belangrijk omdat hiermee greep wordt verkregen op een veel voorkomend gebruik van procenten. Vaak behoeft er niets uitgerekend te worden, maar volstaat een idee van de relatieve grootte (bijvoorbeeld 16 procent van de Nederlanders reist regelmatig met de trein).
Een tweede procentschaal had betrekking op het handig procentrekenen. We achten dit van groot belang, omdat het handig procentrekenen uitnodigt tot het gebruik maken van breuken en verhoudingen en daarmee een bijdrage levert aan inzicht in verhoudingen en de relaties met breuken en verhoudingen.
Leerlingen blijken redelijk overweg te kunnen met percentages als 50 procent en 25 procent (percentage goede antwoorden rond de 80 procent).
Percentages als een $\frac{1}{2}$ procent en 300 procent leveren aanzienlijke problemen op. 300 procent van *f* 40,– levert 49 procent goede antwoorden op.

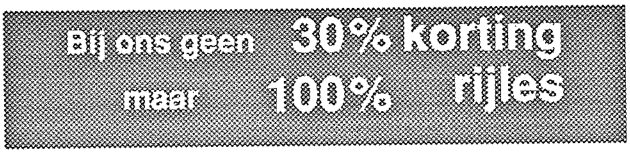
Hiemden heeft ruim 50 000 inwoners.	**goed**	**matig**	**onvoldoende**
Een $\frac{1}{2}$ % van die inwoners is ouder dan	15%	20%	65%
80 jaar.	percentage goede antwoorden: 37		

35 procent van de leerlingen geeft als antwoord 25.000. Er is kennelijk verwarring, de breuk roept 50 procent op en je kunt dus gewoon de helft nemen. 3 procent van de leerlingen stelt gewoon een $\frac{1}{2}$ procent = 50 dus 50.000 delen door 50.
We merken verder op dat het antwoord kennelijk bij veel leerlingen geen verbazing opwekt. De berekende uitkomst wordt zonder verder nadenken opgeschreven. Deze opgave zou in open vorm een fraai uitgangspunt voor een gesprek kunnen zijn. Leerlingen zouden zelf een percentage moeten aangeven voor het aantal mensen dat volgens hen ouder is dan tachtig jaar. Na zo'n eigen beredeneerde keus komen zin en onzin van antwoorden veel beter naar voren.

Koptelefoons van *f* 60,– nu met 30% korting	**goed**	**matig**	**onvoldoende**
Hoeveel moet je nu voor een koptelefoon	16%	26%	58%
betalen?	percentage goede antwoorden: 44		

Eén op de drie leerlingen bepaalt hier de korting door 30 × 0,60 uit te rekenen. Nog geen 7 procent van de leerlingen neemt als tussenberekening 10 procent van 60. Het cijferend rekenen bij procenten kan hardnekkig zijn ook al ligt een andere benadering voor de hand.
Een derde schaal betrof toepassingen bij procenten. We geven daarbij verder geen voorbeelden, maar constateren dat het interpreteren van de probleemsituatie in diverse contexten een apart, maar te verwachten probleem vormde.
Overzien we het geheel van de uitkomsten dan constateren we dat ondanks de invoering van nieuwe methoden de problemen nog niet opgelost zijn, ook niet bij het procentbegrip. Meer aandacht voor een begripsmatige inbedding van procenten door uit

te gaan van informele kennis, visualiseringen met behulp van strook en dubbele getallenlijn, aandacht voor het taalaspect en explicitering van de structuur van procentvraagstukken, meer accent op schatten en hoofdrekenen, en het beschouwen van het cijferen via de één procent-methode als sluitstuk voor het basisonderwijs lijken gewenst. Analyse van fouten en het bekijken van oplossingsmethoden bij vraagstukjes maken duidelijk dat ter voorkoming van fouten verheldering nodig is van wat op honderd genormeerd is (wat honderd procent is). Dat laatste is van belang omdat in heel veel gevallen impliciet is wat op honderd procent gesteld wordt.
Heel fraai is in dit verband de advertentie van de rijsschoolhouder die stelde:



4 twee hoofdtypen

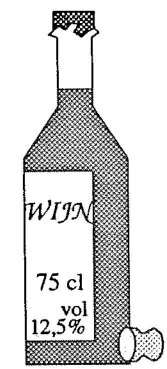
Bij procent-sommen gaat het in grote lijnen om twee *hoofdtypen:*

a deel ten opzichte van geheel

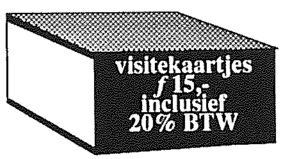
Een fles wijn heeft een inhoud van 75 cl.
Het alcohol percentage is 12,5%.
Hoeveel cl alcohol bevat de fles?

b geheel plus of min deel

100 visitekaartjes inclusief 20 % BTW kosten f 15,-.
Wat is de kale prijs?



deel/geheel



geheel plus **deel**

Voorbeelden van deel/geheel
- mengsels;
- verkiezingen/opiniepeilingen;
- goedscores bij toetsen;
- bevolkingssamenstelling;
- gezinsuitgaven;
- kansen.

Voorbeelden van geheel plus of min deel
- prijsverhoging;
- prijsverlaging;
- bevolkingsgroei;
- bevolkingsafname;
- rente.

De *deel/geheel*-problemen betreffen altijd percentages die kleiner dan honderd zijn. Ze 'beschrijven' de samenstelling van een geheel dat uit twee of meer delen bestaat. Bij het tweede hoofdtype zouden we eigenlijk *geheel* plus *deel* en *geheel* min *deel* moeten onderscheiden. Bij de plus-sommen kunnen percentages die groter dan honderd zijn optreden, terwijl dat bij de min-sommen beperkt blijft tot percentages onder de honderd.

Type a: deel ten opzichte van geheel

Soms wordt in de *deel/geheel*-vraagstukjes (*a*) alleen naar de verhoudingen van de samenstellende delen verwezen of dienen de fracties alleen om een indruk van de samenstelling te geven. Zoals bijvoorbeeld:

Deze sokken bestaan voor 40 % uit katoen en voor 60 % uit kunstvezel.

Maar ook kan gevraagd worden naar de absolute hoeveelheden of aantallen. In het voorbeeld van de wijn kan als volgt geredeneerd worden. $12\frac{1}{2}$ procent komt overeen met $\frac{1}{8}$ deel van het geheel. (*N.B.*: 25 procent komt overeen met $\frac{1}{4}$ deel). We berekenen dus $\frac{1}{8} \times 75$, dat is ruim 9 cl alcohol. Bij percentageberekeningen komen in eerste instantie drie grootheden voor. We onderscheiden:

G: het grondbedrag (geheel).
p: het percentage (zoveelste deel van).
P: het percentagebedrag (deel).

Als twee van deze drie grootheden gegeven zijn is de derde te berekenen. We vatten deze drie typen vraagstukken samen met enkele voorbeelden in de volgende tabel.

Voorbeeld	*G*	*p*	*P*
a) Hoeveel is 4 % van *f* 200,-?	200	4	?
b) 75 eieren van 1500 zijn gebroken. Hoeveel procent?	1500	?	75
c) Iemand geeft 5 % van zijn loon uit aan clubs. Dat is *f* 80,-. Hoeveel verdient hij?	?	5	80

Type b: geheel plus of min deel

In feite gaat het hierbij om al die problemen waarbij van groei of afname (negatieve groei) sprake is.
We bepalen ons hier alleen tot de prijsstijgingen. Maar al hetgeen volgt geldt ook voor prijsdalingen.

De prijs van het tijdschrift 'Rekenschap' is *f* 15,-.
Deze prijs wordt met 10% verhoogd.
Wat is de nieuwe prijs?

De standaard aanpak voor dit soort sommen is als volgt:

Grondbedrag: *G*	**Percentagebedrag:** *P*	**Eindbedrag:** *E*
G	$P = \frac{p}{100} \times G$	$E = G + P$

Formeel wordt de samenhang tussen grondbedrag G, percentage p en eindbedrag E als volgt vastgelegd:

$$E = G + \frac{p}{100} \times G$$

Dit type vraagstuk is ook weer onder te verdelen in drie soorten, al naar gelang het onbekend zijn van één van de drie variabelen (E, p of G). We zetten de drie soorten bij elkaar in onderstaande tabel.

Voorbeeld	*G*	*p*	*E*
a) Een tijdschrift van *f* 15,- wordt in prijs verhoogd met 10 %.	*f* 15,-	10 %	?
b) Een strippenkaart van *f* 10,25 kost nu *f* 10,75	*f* 10,25	?	*f* 10,75
c) Een pakje visitekaartjes kost *f* 15,- inclusief 20 % btw.	?	20 %	*f* 15,-

5 bakens

Het opstellen van een ideale leerlijn voor procenten is niet eenvoudig. Dit komt voort uit het feit dat procenten een sterke samenhang hebben met verhoudingen, breuken en kommagetallen. Dit wat de reken-wiskundige kant betreft. Tevens bestaan er verschillende typen vraagstukken (waarvan de hoofdtypen al besproken zijn), die ook weer door context, structuur, taal en aard van de getalgegevens in moeilijkheid uiteenlopen.

En ten slotte staan zoals we zagen verschillende didactische modellen ter beschikking. Gaat men uit van verhoudingen dan ligt het gebruik van de verhoudingstabel het meest voor de hand, maar wie met de breuken start zal wellicht meer steun van de dubbele getallenlijn ondervinden.
Kortom, procenten vormen - in tegenstelling met wat de oude rekendidactiek hierover opmerkte - een complex gebied. Het is dan ook niet verwonderlijk dat tot op het hoogste niveau (in wetenschap, in kranten en de media) veel fouten met procenten gemaakt worden.
Wij kunnen ons daarom wel vinden in hetgeen Streefland c.s. (1991) stellen:

> 'Vanwege deze complexiteit is een éénduidige (beste) lineaire leergang niet te ontwikkelen. Voor dit onderwerp dient veeleer naar een onderwijs-leerstructuur gezocht te worden.'

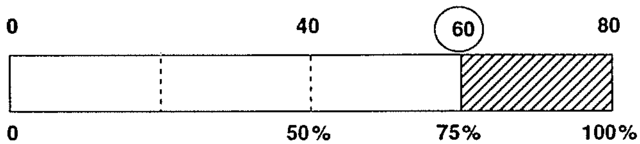
En zoals gezegd, zo'n onderwijsleerstructuur hangt weer samen met de nadruk die het leerboek op de aard van procenten legt: verhoudingen of breuken. De hierna volgende suggesties voor een 'leergang' kunnen derhalve slechts als bakens opgevat worden.

baken 1: informele kennis

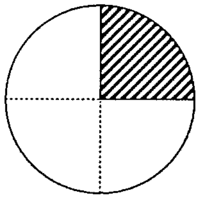
Uit recent onderzoek is naar voren gekomen dat kinderen, die via de methode nog niet in aanraking waren gekomen met procenten, wel degelijk reeds enige notie hebben van het procentbegrip. Zij zijn in staat om kortingen van 25 procent en 50 procent te interpreteren als $\frac{1}{4}$ deel c.q. $\frac{1}{2}$ deel eraf. Ook kunnen de meeste leerlingen met 10 procent als $\frac{1}{10}$ deel manipuleren of zelfs met veelvouden daarvan.
Enkelen doorzien reeds het relatieve karakter van procenten: 40 procent korting op een artikel hangt af van de vraagprijs. Het ligt dus alleszins voor de hand om het startpunt van een leergang te leggen bij deze informele kennis.
Dit betekent dat het percentagebegrip als 'deel/geheel' een belangrijke plaats krijgt. Meteen kan verhelderd worden dat 25 procent korting betekent '25 gulden van elke 100 gulden'.

baken 2: visualiseren

Direct hieraan kan de *procentenstrook* als visualisering gekoppeld worden. Als op een paar sportschoenen van *f* 80,– 25 procent korting gegeven wordt, zal dat het volgende plaatje oproepen:



Daarnaast kan voor deze eenvoudige percentages ook het *cirkeldiagram* gebruikt worden: elke gulden wordt met 1 kwartje verminderd.



baken 3: schatten

Het schattend rekenen met procenten wordt in het onderwijs weinig beoefend. Het zou echter de basis van de leergang dienen te zijn. Niet alleen vanwege de praktische bruikbaarheid, maar ook omdat het de leerlingen bewust houdt van de betekenis van het begrip. Het is dus niet iets dat eenmalig aan de orde gesteld zou moeten worden, maar juist bij voortduring in de aandacht dient te blijven. Voor dit schatten moet men kunnen en durven afronden en vooral uit het hoofd kunnen rekenen. Het begrip 'ongeveer' is het kernwoord van dit soort rekenen.

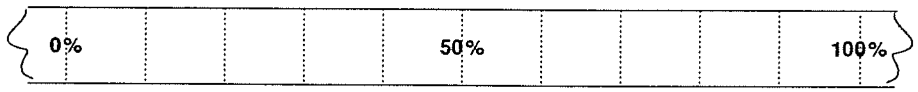
> 'Een reparatie kost *f* 150,–. De btw is $17\frac{1}{2}$ %.'
> Er komt ongeveer 20% bij, $\frac{1}{5}$ deel, dus de uitkomst is wat minder dan *f* 180,–.
>
> Een artikel kost *f* 208,–. Je krijgt een korting van 30%.
> Er gaat dus ongeveer $\frac{1}{3}$ deel (*f* 70,–) af; of 10% van *f* 210,– is *f* 21,–, enzovoort.

Op dit soort vraagstukken zijn talloze variaties te bedenken. Ze liggen voor het oprapen in de reclamepagina's van de kranten. Op den duur komen natuurlijk ook vraagstukken aan de orde waarbij het percentage geschat moet worden.

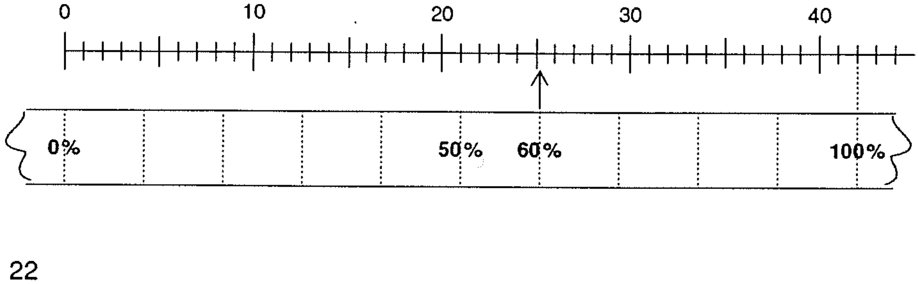
> De prijs gaat van *f* 124,– naar *f* 152,–.
> Hoeveel procent verhoging is dat ongeveer?

baken 4: strookmodellen

Bij het schatten kan gebruik gemaakt worden van een *elastieken procentenmeter*.



Op een trui van *f* 42,– krijg je 40 procent korting.



De uitgerekte procentenmeter geeft bij 60 procent een indicatie van het te betalen bedrag. Deze elastieken procentenmeter is ook bruikbaar voor deel-geheel vraagstukken en voor 'geheel plus deel' als hij uitgebreid wordt tot boven de 100 procent. In feite is het een voorloper op de eerder besproken procentenstrook. De strook kan weer leiden tot de eveneens genoemde *dubbele getallenlijn.* Het cirkeldiagram voor de deel-geheel relaties noemden we ook reeds.
In feite kunnen alle vraagstukken met een van de drie strookmodellen (elastieken procentenmeter, strook of dubbele getallenlijn) opgelost worden. De nadruk van de leergang ligt, zoals gezegd op het breukaspect van procenten.

baken 5: verhoudingstabel

In verband met de bewustmaking van procenten als gestandaardiseerde maat ter vergelijking van 'mengsels' zal op enig moment de *verhoudingstabel* zijn dienst kunnen gaan bewijzen. Via dit model kan uiteindelijk ook aangesloten worden op de 1 procent-methode, Maar vooral kan de verhoudingstabel de relatie tussen procenten, breuken en kommagetallen verhelderen.

Een tennisser slaat 48 van 72 services in.

48		2	$66\frac{2}{3}$
72		3	100

48	2	$\frac{2}{3}$	$66\frac{2}{3}$
72	3	1	100

De verhoudingstabel laat de fractie $\frac{2}{3}$ zien, deze fractie is uit te delen tot 0,6666...., hetgeen overeenkomt met $\frac{67}{100} = 0{,}67$. Zelfs kan doorgerekend worden naar $\frac{2}{3}$ van 1 en 66 $\frac{2}{3}$ van 100. Zowel het strookmodel als de verhoudingstabel dienen hun plaats in de leerlijn te hebben. Beide kunnen tot in het voortgezet onderwijs hun diensten bewijzen.

baken 6: nadere begripsvorming

Reeds in het vorige baken kwam de belangrijke samenhang tussen procenten, breuken en kommagetallen naar voren. Van belang is te leren onderscheiden dat procenten kunnen optreden als *fractie* en als *operator.* Bij de fracties ligt het eindpunt in het kunnen omzetten van een breuk in een percentage en omgekeerd. Vooral bij het eerste kan de zakrekenmachine zinvolle diensten bewijzen. Het operatoraspect kan vooral aan de hand van kortings- en winstvraagstukken verhelderd worden. Aan de hand van eenvoudige vraagstukjes kan het algoritme van een 'percentage nemen' opgebouwd worden. Daarbij wordt gebruik gemaakt van formele breukrekening, bijvoorbeeld:

$$6\% \text{ van } f\,123,\!- \rightarrow 1\% \text{ van } f\,123,\!- = \frac{1}{100} \times f\,123,\!- \rightarrow 6 \times \frac{1}{100} \times f\,123,\!- = 0{,}06 \times f\,123,\!-$$

(het laatste met behulp van een rekenmachine).

Zeer belangrijk is de argumentatie van 'er bij' en 'er af': 50 procent er bij betekent niet 50 procent er af om weer op het beginbedrag uit te komen. Hierbij kan met eenvoudige paradigma's gewerkt worden. Tevens dienst voordurend het taalaspect in het oog gehouden te worden. 100 procent duurder komt overeen met twee maal zoveel. Iets kan niet meer dan 100 procent goedkoper worden en meer van dergelijke kwesties.

baken 7: voortzetten en toepassen

Een batterij van specifieke procentvraagstukken zou het eindpunt van de basisschool kunnen zijn. De nadruk zou op het toepassen moeten liggen. Vraagstukjes uit de krant zijn hiervoor zeer geschikt. Tevens zou de drieslag steeds moeten zijn: (1) Wat moet ik doen (ontdek de structuur, in het bijzonder 'waarvan' is het percentage)? (2) Maak eerst een schatting. (3) Reken (eventueel) precies uit met een rekenmachine.

baken 8: formalisering

De uiteindelijke formalisering kan in het voortgezet onderwijs plaatsvinden. We doelen op de eerdergenoemde factoraanpak. Een grondbedrag A groeit met 20 procent. Dit levert een eindbedrag $E = 1{,}2\,A$ op. De drie typen vraagstukken worden tot hun essentie herleid:

G	p	E
A	20	?
A	?	E
?	20	E

$$A \xrightarrow{\times 1{,}2} E$$

$$A \xrightarrow{?} E \quad \longrightarrow \quad \frac{E}{A} = 1 + p$$

$$A \xleftarrow{\div 1{,}2} E$$

Tevens kunnen tot slot groei op groei en de verdubbelingsformule ($\frac{70}{p}$) aan de orde komen, maar dan zijn we aan het eind van de basisvorming.

literatuur

Bokhove, J. en J. Janssen (1991). Periodiek peilingsonderzoek in het basisonderwijs (6). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 8(2), 3-32.

Bokhove, J., J. Janssen en J.M. Kraemer (1991). PPON-onderzoek naar oplossingswijzen (6). *Willem Bartjens*, 10(*4*).

Wijnstra, J. (1988). *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool. Uitkomsten van de eerste rekenpeiling medio en einde basisonderwijs*. Arnhem: Cito.

Moor, E. de, L. Streefland en A. Treffers (1991). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs (13). Procenten, analyse van het gebied. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 9(*4*), 25-41.

Streefland, L., E. de Moor en A. Treffers (1991). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs (14). Procenten, didactische notities. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 10(*1*), 29-38.

Streefland, L. en M. van den Heuvel-Panhuizen (1992). Informele kennis over procenten: wat verhaaltjes kunnen vertellen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 11(2), 45-47.