

---

# Het wiskundeonderwijs nogmaals bezien<sup>1</sup>

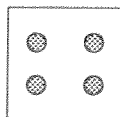
---

K. Buys

Bekadidact, Baarn

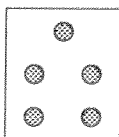
## voorbeeld één: pilletjes tellen

Jorie, een peuter van drie en een half, zit aan tafel om te gaan eten. Voor ze met eten begint krijgt ze altijd vijf kalktabletjes, die naast haar bord gelegd worden. Meestal controleert ze of het er inderdaad vijf zijn. Zo ook vandaag. Vandaag zijn het er echter per ongeluk vier. Hé, is haar reactie, alsof ze wil zeggen: klopt dat wel? Dan ordent ze de pilletjes grofweg in een vierkant en constateert: 'Nee hoor, dit is geen vijf, het is niet goed!' (fig.1).



figuur 1

Als haar vervolgens nog een pilletje wordt gegeven, legt ze dit midden boven het geordende viertal en stelt vast: 'Ja, nu is het vijf ...' (fig.2).



figuur 2

Jorie telt haar pilletjes op een speciale manier: ze legt ze neer in een meetkundig patroon dat haar kennelijk bekend is, en stelt zo vast of het er vijf zijn. Heeft ze eenmaal dat patroon aangebracht, dan is er voor haar kennelijk geen twijfel meer dat er sprake is van vijf. Het is voor haar een soort zekerheid, in zekere zin wiskundige zekerheid. Natuurlijk wiskundig niet in de meer formele zin, maar meer in de zin van iets waar je op basis van gezond verstand bent achtergekomen, iets dat op grond van gezond-verstandervaringen een zekere mate van 'vaststaandheid', van vanzelfsprekendheid heeft gekregen, wiskundige zekerheid geworteld in het gezond verstand, zou je kunnen zeggen.

## wiskunde als een gezond-verstandactiviteit

Wiskunde als een gezond-verstandactiviteit: het is een van de centrale thema's uit het laatste boek van prof. Freudenthal, dat onlangs verschenen is.<sup>2</sup> Misschien is het ook wel het meest aansprekende thema. Zoals Freudenthal in het voorwoord zelf aangeeft, gaat het in dit boek immers niet zozeer om het naar voren brengen van allerlei nieuwe denkbeelden, maar meer om het heroverwegen, het selecteren en het stroomlijnen van veel van de zaken die hij al eerder te berde heeft gebracht. Daarbij speelt het idee van wiskunde als gezond verstand een voornamelijk rol: het verschaft hem de mogelijkheid om de al eerder geuite denkbeelden in een nieuw perspectief te plaatsen en er een nieuwe, verrassende samenhang aan te geven.

Wat behelst dan dit idee van wiskunde als gezond verstand? De lezers van de Panama-

Post hebben er enige tijd geleden al kennis van kunnen nemen: wiskunde, aldus Freudenthal, is te beschouwen als een activiteit die op een bepaalde manier zekerheid nastreeft en geeft. En gezond verstand is in zekere zin de primaire, meest weelderige en meest betrouwbare bron van deze zekerheid. In het voorbeeld van Jorie was iets te zien van die gezond-verstandbron: zij had voor zichzelf op basis van gezond verstand uitgevonden dat als je de pilletjes als een soort huisje kon leggen, het er vijf waren. Gaandeweg was ze deze wetenschap kennelijk als iets vaststaands, als iets vanzelfsprekends gaan ervaren, en was deze als het ware deel gaan uitmaken van haar gezond verstand. Daarmee had zich dit gezond verstand een stapje verder ontwikkeld tot nóg gezonder verstand, tot een 'hoger orde van gezond verstand'.

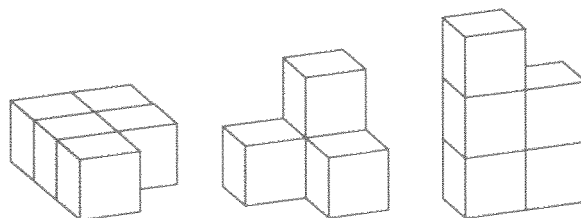
In de woorden van Freudenthal: ervaringen van het gezond verstand stollen, om zo te zeggen, tot regels en deze regels worden van hun kant gezond verstand, zeg van hoger orde, als basis voor wiskunde van nog hoger orde.

Nu zou het een misverstand zijn te denken dat het bij dit stollingsproces (om het beeld van Freudenthal aan te houden) louter gaat om intuïtieve, spontaan verlopende processen. Kenmerkend voor de wiskundige activiteit, aldus Freudenthal, is juist dat wat op een zeker moment als vanzelfsprekend wordt ervaren, naderhand, op grond van nieuwe ervaringen, weer in twijfel getrokken wordt, nader onderzocht wordt, op zoek naar wat essentieel is, wat de kern is van een begrip, een handeling, een structuur. Het is juist hierdoor dat wezenlijke aspecten van zo'n handeling of begrip in toenemende mate onderkend en doorzien worden. Pas dan, naarmate dergelijke inzichten beter gaan doorbreken, is het dat deze kennis deel gaat uitmaken van het gezond verstand, dat daarmee dan de status van nóg gezonder verstand, van een hoger orde van gezond verstand verwerft.

Wat moet men zich nu bij een dergelijk proces van steeds gezonder verstand voorstellen? Hoe worden hogere ordes van gezond verstand door de lerende bereikt? Freudenthal gaat er in zijn boek uitgebreid op in, daarbij de voornaamste van de didactische principes die hij kenmerkend voor dit proces acht, heroverwegend en in een nieuw perspectief plaatsend. In deze bijdrage licht ik enkele van deze didactische principes eruit. Ik ga daarbij steeds uit van een voorbeeld; een voorbeeld van een onderwijsleersituatie waarin iets van de essentie van wiskunde leren als een gezond-verstandactiviteit is terug te vinden, en waaraan tevens iets van de genoemde didactische principes is te illustreren. Het volgende voorbeeld speelt zich af in de kleutergroep.

### voorbeeld twee: blokjes tellen in de kleutergroep

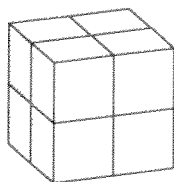
Midden in de kring staan enkele blokkenbouwsels opgesteld, bestaande uit kubusvormige houten blokjes (fig.3). De kinderen tellen uit hoeveel blokjes ('kamertjes') de bouwsels bestaan.



figuur 3

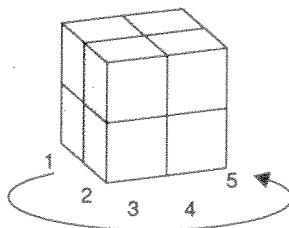
Voor enkele kleinere bouwsels levert dat weinig problemen op maar voor het volgende bouwsel, bestaande uit acht blokjes, ligt de zaak anders (fig.4). Eerst mogen de kinderen voor zichzelf van afstand proberen te tellen hoeveel kamertjes het zijn. De antwoorden

worden geïnventariseerd. Daarna mogen enkele kinderen bij het bouwspel demonstreren hoe ze geteld hebben. Het blijkt dat er nogal wat uiteenlopende antwoorden zijn gevonden: vijf, zeven, acht, twaalf, vijftien en zelfs zestien en zeventien.



figuur 4

Fiona, die het eerst mag laten zien hoe ze het aanpakt, laat zien hoe ze tot haar antwoord van zeventien is gekomen. Zij begint onderaan en telt alle zijvlakjes (fig.5).

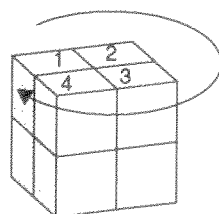


figuur 5

Maar veel kinderen zijn het niet met haar uitkomst eens:

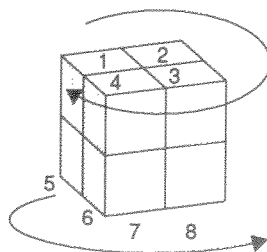
- 'Het is veel weiniger.'
- 'Ze telt dubbel.'
- 'Zo moet je niet tellen.'

Dan mag Rico naar voren komen en een poging doen. Hij begint bovenaan en telt de blokjes aanvankelijk van bovenaf (fig.6).



figuur 6

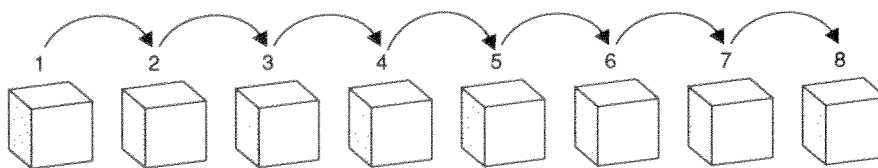
Maar dan wordt het moeilijker en gaat hij ertoe over van de resterende blokjes de zijvlakken te tellen (fig.7).



figuur 7

Naarmate hij daarbij vordert klinkt er echter steeds meer twijfel in z'n stem door en als hij klaar is voegt hij er onmiddellijk aan toe: 'Hé, da's ook gek ... ik heb van m'n moeder

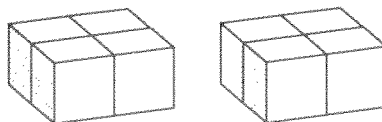
geleerd dat vier en vier acht is, en nou zijn het er twaalf!' Tja, dat is een probleem: is het nu acht of twaalf? Of misschien nog iets anders? Was Rico's manier van tellen nu goed? De leerkracht legt de kinderen deze kwestie voor. Voor sommige, vooral jongere kinderen, is het helemaal geen probleem: dat heb je wel meer met tellen, het is een soort spel waarbij je de ene keer op vijf en de andere keer op acht uitkomt, en dat maakt niks uit, zo lijken ze te redeneren. Maar voor de meeste kinderen is er wel degelijk een probleem: er kan maar één getal uitkomen. De leerkracht kijkt de kring rond en ziet een aantal kinderen met de vinger omhoog. Robert krijgt de beurt. Hij komt met een vraag die niet door iedereen meteen begrepen wordt: 'Mag je ze ook apart leggen?' Leerkracht: 'Hoe bedoel je?' 'Nou kijk zo', is het antwoord, 'dan kan je ze makkelijk tellen.' De daad bij het woord voegend breekt hij het bouwsel af, en telt de afzonderlijke blokjes één voor één, terwijl steeds meer kinderen met hem mee tellen (fig.8).



figuur 8

Iedereen lijkt nu overtuigd: het zijn er toch acht. Als het huisje weer wordt opgebouwd, heeft de leerkracht nog een vraag: 'Hoe zag jij nu die vier en vier, Rico?' Nogmaals komt Rico nu bij het huisje, en demonstreert: 'Nou, dit is vier' (wijst de bovenste vier aan) 'en dit ook' (wijst naar de onderste vier).

Tot slot worden boven- en onderverdieping nog even van elkaar afgehaald en wordt alles nog een keer geteld. Inderdaad, het zijn er acht (fig.9).



figuur 9

### wiskunde leren als een proces van geleid heruitvinden

Wat was er in de bovenstaande situatie nu precies gaande? Waar waren de kinderen mee bezig? Ze waren bezig om het aantal kamertjes van een aantal huisjes te bepalen, dat in ieder geval.

Maar dat was niet het enige. Ze waren ook bezig om verschillende manieren van tellen te demonstreren zoals die naar eigen inzicht het beste gebruikt leken te kunnen worden. En in feite was er nog een andere, onderliggende bedoeling: ze gingen, daartoe uitgelokt door Rico, ertoe over om de verschillende manieren van tellen te vergelijken, en uit te zoeken wat in de gegeven situatie nu een goede manier van tellen is. En passant werd daarbij onderzocht wat wel en niet essentieel is voor het goed tellen van een hoeveelheid.

Ziehier een voorbeeld van wiskunde als een gezond-verstandactiviteit: kinderen krijgen de gelegenheid om in de gegeven situatie te tonen hoe naar hun idee het tellen uitgevoerd kan worden, aldus demonstrerend wat zij in dat opzicht als gezond verstand ervaren. Maar daarmee is de kous niet af. De verschillende manieren van tellen blijken min of meer met elkaar in tegenspraak te zijn en dit noopt tot nadere overdenking van de gedemonstreerde handelwijzen. Een en ander leidt tot een nadere bewustwording van wat es-

sentieel is voor wat wij resultatief tellen noemen, met name voor wat betreft het aspect van de één-één-verbinding en het aspect van het handig organiseren van het tellen. Kennis van deze aspecten van het tellen gaan al doende steeds meer deel uitmaken van het gezond verstand en het is op deze wijze dat dit uit kan groeien tot een steeds hogere orde van gezond verstand, van gezond-wiskunde-verstand.

Uitvinden hoe het tellen in z'n werk gaat, dat is dus waar de kinderen mee bezig zijn. Of liever: heruitvinden. Dat is althans de term die Freudenthal daarvoor in het verleden introduceerde; geleid heruitvinden wel te verstaan, waarbij de lerenden onder leiding van de onderwijsgevende wiskundige begrippen, handelingen en dergelijke als het ware opnieuw uitvinden. Ook in zijn laatste boek kent hij aan dit idee als didactisch principe een prominente plaats toe. In het licht van wiskunde als gezond-verstandactiviteit krijgt dit principe er een nieuwe, scherpere uitwerking door: met name het uitgaan van wat de lerende als gezond verstand ervaart en de gerichtheid om deze eigen, informele kennis nader te onderzoeken, te spiegelen aan die van anderen en op een hoger plan te brengen, geven er een extra dimensie aan. Iets van die extra dimensie was in het voorbeeld van de kabouterhuisjes zichtbaar. Van de wijze waarop het leiden (begeleiden) van het proces van het heruitvinden kan plaatsvinden, is in het voorbeeld eveneens iets zichtbaar. De leerkracht creëert een probleemsituatie, laat de kinderen dit probleem aanpakken en stelt zich, als blijkt dat ze daarbij bepaalde moeilijkheden ondervinden, in een heel terughoudende, 'meedenkende', mee-onderzoekende rol op.

Vanuit deze opstelling poogt zij de kinderen samen de moeilijkheden onder ogen te laten zien, om ze samen tot een oplossing en tot een nadere overdenking van deze oplossing te laten komen. Aldus weet zij de kinderen een stapje in de richting van een nadere bewustwording van de genoemde essentiële aspecten van het tellen te leiden. De terughoudendheid waarmee zij daarbij te werk gaat, is typerend voor het onderwijs aan jonge kinderen: het gaat vooral om het creëren van gelegenheden tot nadere doordenking, bewustwording en dergelijke en kinderen die daar min of meer aan toe zijn, komen zo een stapje verder. Voor de overigen is het niet meer dan een interessante gebeurtenis waarvan de portee hen nog ontgaat. Nu is het maar de vraag in hoeverre een dergelijke terughoudende opstelling in het onderwijs aan oudere kinderen nog haalbaar is. Daar gaat het er immers om dat alle kinderen op een gegeven moment een stapje verder komen. Is het proces van heruitvinden op basis van gezond verstand daar nog haalbaar? Op welke wijze moet het leiden van dat proces daar vorm krijgen? Laten we nog eens een voorbeeld bekijken, een voorbeeld van een onderwijsleersituatie in groep drie.

### **voorbeeld drie: een informele aftreksituatie in groep drie**

Het is oktober in groep drie. In de afgelopen periode is het resultatief tellen volop onder de aandacht geweest. Alle leerlingen beheersen dit nu tot op zekere hoogte en langzamerhand wordt de overstap gemaakt van telsituaties naar optel- en aftreksituaties. De activiteit die vandaag plaatsvindt, is tekenend voor deze overgang. Op het bord staan een acht appels getekend (fig. 10).



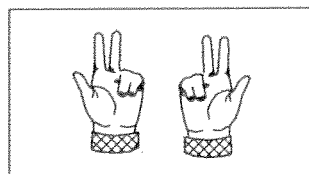
figuur 10

Naar aanleiding van een begeleidend verhaaltje over enkele kinderen die in de tuin van hun oma appels mochten plukken, worden de appels geteld. Dat gaat vlot. Iedereen weet inmiddels het tellen wel zo te organiseren dat je niet gauw in de war raakt over wat al wel en niet geteld is. En er blijken heel wat kinderen te zijn die een verkorte telstrategie volgen. Bijvoorbeeld door met sprongen van twee te tellen, of door subgroepjes van drie en drie en twee te onderscheiden, of van vier en vier.

Dan komt de leerkracht met een nieuwe vraag: 'Stel nu eens dat ik één appel opeet; hoeveel zouden er dan nog over zijn?' Het antwoord op deze vraag blijkt geen probleem te zijn. Bijna iedereen weet bijna meteen dat er dan nog zeven over zijn. Het is vooral het in gedachten teruggaan in de telrij (c.q. het terugtellen), dat als strategie gebruikt wordt. Zoals één van de kinderen het verwoordt: 'Dan doe je één, twee, drie, vier, vijf, zes, zeven, acht, en doe je die acht weg. Dan heb je zeven.'

Dan volgt een nieuwe vraag: 'Stel nu eens dat ik er twee opeet, hoeveel zouden er dan nog over zijn?' Dit is een wat lastigere vraag. Sommige kinderen lijken in gedachten twee terug te gaan in de telrij, maar dat gaat nog niet zo makkelijk. Andere kinderen proberen in gedachten als het ware een scheiding aan te brengen tussen de appels die opgegeten worden (bijvoorbeeld door een potlood zodanig in de lucht te houden dat er juist twee appels apart gehouden worden) en de resterende appels, en deze dan te tellen. Als de antwoorden en de aanpakken kort besproken zijn, wordt het echt moeilijk. Leerkracht: 'Iedereen weet nu wel dat het er acht zijn; ik klap het bord nu even dicht. Stel nu eens dat je vijf appels zou opeten ..., hoeveel zijn er dan nog over?' Je merkt dat de kinderen nu echt op de proef gesteld worden. Hoewel dergelijke verkennende opgaven al enkele keren eerder aan de orde zijn geweest, lijkt het niet mee te vallen om tot een geschikte aanpak te komen. Na enige tijd laat de leerkracht de kinderen hun antwoord naar voren brengen. Deze variëren van één, drie, zes tot 'ik weet het niet'.

Sommige kinderen lijken vooral schattend tot een antwoord gekomen te zijn; een aardige strategie natuurlijk, maar niet altijd doeltreffend. En er zijn ook kinderen die geprobeerd hebben terug te tellen en daarbij dan te onthouden hoeveel ze terugtelden. Sommigen zijn daar aardig uitgekomen, maar lang niet allemaal. En dan is er ook nog een kind dat het op een andere manier heeft geprobeerd, namelijk met de vingers. Dat is Marleen, die op een zeker moment mag demonstreren hoe ze te werk is gegaan. Aanvankelijk lukt dit haar echter niet zo. Ze steekt eerst van beide handen drie vingers op (fig. 11). Dan probeert ze er vier van te maken door de beide ringvingers ook op te steken.



figuur 11

Vervolgens probeert ze één voor één vijf vingers weg te halen. En dan ineens gaat er bij Marleen een licht op: ze verandert het beeld van de opgestoken vingers, steekt van de ene hand alle vingers op en van de andere nog drie. In een beweging haalt ze de volle hand nu weg en constateert triomfantelijk: drie over!

'Hé, zien jullie dat?', is de reactie van de leerkracht. 'Wie kan dat nog meer zo, acht vingers opsteken?' Dat blijkt weinig problemen te geven, zij het dat sommigen het dubbel-vier-beeld opzetten, en anderen het vijf-en-drie-beeld. 'Haal er nu eens vijf af?' Bij sommige kinderen gaat dat heel aarzelend, vinger voor vinger. Maar bij anderen gaat het net zo vlot als bij Marleen. Je ziet zo dat er nog drie overblijven.

## banden met de realiteit

Wat speelt zich hier nu precies af? Natuurlijk, de kinderen zijn bezig om een oplossing te bedenken voor het gestelde probleem: er zijn acht appels en daarvan worden er vijf opgegeten. Maar dat is niet het enige. Net als in het geval van het probleem van de kabouterhuisjes zijn ze ook nog met iets anders bezig. Waarmee? Ze zijn bezig om enig vat te krijgen op een nieuw soort handeling; een handeling waar ze al wel vaag een idee van hebben, maar die toch nog niet echt als zodanig onderscheiden en beproefd is: het in gedachten eraf halen van een gedeelte van een hoeveelheid, zonder dat je die hoeveelheid nog kunt zien (en dus kunt tellen). Kortom: met aftrekken, dat is waar ze mee bezig zijn, dat is de nieuwe, wiskundige operatie waar ze greep op proberen te krijgen.

Daarbij wordt een hoge mate van vindingrijkheid tentoongespreid: strategieën als het in gedachten afscheiden van het betreffende deel van de hoeveelheid, het teruggaan langs een denkbeeldige telrij, het 'mikken' en ook de strategie die Marleen demonstreert. Zij gaat ertoe over om zich de situatie als het ware symbolisch voor te stellen en aan deze voorstelling die handelingen te voltrekken die zij in gedachten had willen uitvoeren om tot een oplossing te komen. Sterker nog: heeft zij de stap naar het symboliseren van de situatie met de vingers eenmaal gezet, dan ontdekt zij tot haar eigen verrassing een 'handige' werkwijze: die van het structuurmatig opereren met de vingers.

Via het beproeven van dergelijke intuïtieve strategieën en via het onderling uitwisselen en het gezamenlijk overdenken daarvan ontwikkelt zich bij de kinderen het begin van een oriënteringsbasis ten aanzien van deze nieuwe operatie van het aftrekken. Al doende zullen zij meer vertrouwd raken met deze operatie, er verschillende werkwijzen voor ontwikkelen, en gaandeweg zal deze kennis deel uit gaan maken van het gezonde wiskunde-verstand, dat aldus wederom tot een hoger orde kan uitgroeien.

Ziehier een derde voorbeeld van wiskunde als een gezond-verstandactiviteit. Evenals in de kleutergroep is er sprake van een probleemsituatie die niet zo eenvoudig is. Er is als het ware een drempel ingebouwd waardoor in hoge mate een beroep wordt gedaan op de vindingrijkheid van de kinderen. Ieder probeert die drempel op zijn eigen manier te overwinnen en slaagt daar tot op zekere hoogte in. Daarbij komt in het handelen van Marleen een nogal effectieve manier voren: zij neemt afstand van de situatie en vormt zich er een symbolische voorstelling, een afspiegeling van. Aan deze afspiegeling voltrekt zij vervolgens de handelingen die haar niet alleen tot de oplossing van het probleem voeren, maar tevens tot een werkwijze die perspectief biedt; die in een veelheid aan situaties toepasbaar zal blijken te zijn. De gecreëerde afspiegeling wordt daarmee tevens vóór-afspiegeling van een werkwijze die de kinderen zich de komende periode in toenemende mate eigen kunnen maken: het gebruik maken van de vijfstructuur om in optel en aftreksituaties op een verkorte manier tot een oplossing te komen. Het is op deze wijze, dat de weg naar een hoger niveau van gezond-wiskunde-verstand gebaad wordt.

Hiermee zijn we tevens aangekomen bij een tweede centraal didactisch principe van Freudenthal: de verbondenheid van het proces van heruitvinden met de realiteit. Of, zoals Freudenthal het zelf formuleert: de banden met de realiteit. Immers, het is de realiteit die een cruciale rol speelt bij dat proces van heruitvinden. Het is door het 'verwiskundigen', het mathematiseren, van de realiteit van het appelprobleem en van de eigen, intuïtieve handelwijze daarbij, dat zich een eerste besef van de operatie aftrekken vormt. De wiskunde ontspruit aan die realiteit en het is de mathematiserende activiteit van de lereende die voor dit ontspruiten zorgt. Aanvankelijk zal die wiskunde nog nauw verbonden zijn met die oorspronkelijke realiteit waaruit zij is voortgekomen. Later, naarmate het af-

trekken meer de status van een formele handeling krijgt, wordt de band met die oorspronkelijke realiteit losser en groeit de wiskundige kennis uit tot een meer op zichzelf staand geheel, dat op haar beurt deel gaat uitmaken van het gezond verstand, zij het dan een hoger orde van gezond verstand. Het zal duidelijk zijn dat het begrip realiteit zich in de visie van Freudenthal niet beperkt tot de uiterlijke realiteit van het opeten van appels en dergelijke. De innerlijke, mentale realiteit van de eigen intuïtieve of meer geraffineerde denkbeelden en werkwijzen behoort er evenzeer toe. In de woorden van Freudenthal: realiteit omvat datgene dat het gezond verstand in een zeker stadium als reëel ondervindt; het is niet aan de tijd-ruimte-wereld verpand, maar sluit mentale objecten en activiteiten in.

### **intermezzo: de kwestie van de sturing van het leerproces**

Bij dit alles dient een kanttekening geplaatst te worden. Hoewel in deze bijdrage voor wat betreft de grondideeën van Freudenthal zo dicht mogelijk wordt aangesloten bij wat hij daarover zelf te berde heeft gebracht, is de keuze van de voorbeelden en de wijze waarop deze voorbeelden geanalyseerd worden, meer een persoonlijke, subjectieve keuze waarvan moeilijk met zekerheid valt te zeggen of Freudenthal zich er in zou kunnen vinden.

Met de leerprocessen die hier aan de orde zijn, heeft hij zich veelal slechts in globale zin bezig gehouden. De voorbeelden in deze bijdrage hebben dan ook een dubbele functie: enerzijds zijn zij bedoeld om iets van de inhoud van enkele centrale ideeën (wiskunde als gezond verstand, geleide heruitvinding, banden met de realiteit, ...) van Freudenthal te verduidelijken, maar anderzijds dienen zij ook om iets van de implicaties van die ideeën aan te geven voor de leerprocessen die hier aan de orde zijn. Het is met name één implicatie die (zoals in het voorgaande al aangegeven) de aandacht in het bijzonder vraagt: de kwestie van de sturing van het leerproces. In het voorbeeld van de kleutergroep was er wat dit betreft nog niet zo'n probleem: de leerkracht beperkt zich tot het naar voren laten komen van enkele essentiële aspecten van het tellen, en van mogelijkheden om het tellen goed te doen verlopen.

Er wordt niet naar gestreefd dat alle kinderen deze mogelijkheden oppikken. Maar in het voorbeeld van het appelprobleem in groep drie tekent het probleem zich al enigszins af: men wil als onderwijsgevende dat alle kinderen zich op een gegeven moment bepaalde manieren van oplossen eigen maken. En waar sommige kinderen een werkwijze grotendeels op eigen kracht heruitvinden, moeten anderen meer bij de hand genomen en in de goede richting geleid worden. Het laat zich raden dat daarbij nogal eens lastige keuzen gemaakt moeten worden.

Zo ging de leerkracht in de groep van Marleen ertoe over om alle kinderen haar werkwijze te laten uitproberen. Dit met de bedoeling om alle kinderen zich te laten oriënteren op deze werkwijze, die immers naderhand een belangrijke rol in het beoogde onderwijs zal gaan spelen. Op zich kan zo'n oriëntatie geen kwaad natuurlijk. Het is een middel om de kinderen deze werkwijze bewuster onder ogen te laten zien, om een verband te laten leggen met de eigen werkwijze en om ze het doelmatige van deze werkwijze te laten inzien. Daarmee kan de weg gebaad worden naar het zelf leren hanteren ervan. Maar wat als sommige kinderen de beoogde werkwijze niet blijken op te pikken? Wat als ze zich liever blijven vasthouden aan een minder gewenste strategie, zoals die van het één voor één terugtellen? Op welke wijze kan men ervoor zorgen dat dergelijk aanpakgedrag tijdig omgebogen wordt in de richting van het meer gewenste gedrag, zonder dat daarbij het eigen gezonde wiskunde-verstand buiten spel komt te staan? Het is vooral als het on-

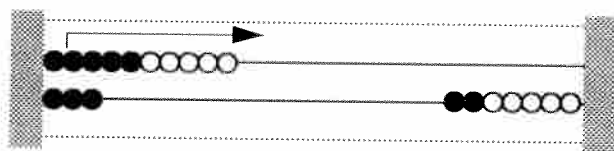


derwijs in de fase komt van het inoefenen van vaardigheden, het automatiseren van kennis, dat deze problematiek gaat spelen. Laten we, om deze kwestie nader onder de loep te nemen, nog eens een voorbeeld bekijken; een voorbeeld uit groep vier.

### voorbeeld vier: verkorte aftrekstrategieën bij rekenen over de tien

Het voorbeeld heeft betrekking op een onderwijsleersituatie waarin een groepje van drie kinderen zich oriënteert op het gebruik van verkorte rekenstrategieën bij het aftrekken over de tien.<sup>3</sup>

In het voorafgaande onderwijs hebben de kinderen het rekenrek verkend. De getalbeelden van de getallen tot twintig zijn ingeoeffend, en men is nu doende om geschikte strategieën voor de sommen over de tien te ontwikkelen. Op dit moment gaat het om het aftrekken, in het bijzonder om opgaven waarbij de aftrekker nogal groot is:  $13 - 9$ ,  $16 - 8$ ,  $12 - 7$  en dergelijke. Het al genoemde tellend rekenen vormt daarbij voor nogal wat kinderen een hinderpaal om tot automatisering te komen. Het rekenrek biedt de mogelijkheid om een andere weg te bewandelen:



figuur 12:  $13 - 9 = (10 + 3) - 9 = 1 + 3 = 4$

De vraag is: hoe krijgt men kinderen op het spoor van deze verkorte strategie? En wat te doen om het gebruik van minder gewenste strategieën bij te sturen op een manier die recht doet aan het eigen gezonde wiskundeverstand?

- Lk: Nu gaan we nog wat aftreksommen doen. Zet maar eens op twaalf; haal er maar vijf af. (Alle drie de kinderen zetten twaalf standaard op - tien boven, twee onder - en schuiven er eerst twee onder en daarna nog drie boven weg.)
- Samantha: Zeven. Ik deed gewoon twee en drie eraf, en dan houd je zeven over. Je kan ook deze vijf eraf halen (wijst naar de rechter vijf op de bovenste staaf), maar dan zie ik het niet zo goed.
- Lk: Kan ook, hè? Twee maniertjes dus. De volgende: zet op vijftien, en haal er acht af. (Alle drie zetten ze vijftien weer standaard op. Samantha en Heleen halen eerst de onderste vijf eraf, en dan drie boven. Peter haalt er eerst vijf boven af, en daarna nog drie onder.)
- Peter: Zeven. Kijk, ik doe eerst deze vijf (schuift vijf van de bovenste staaf terug) en dan nog drie. Dan houd ik vijf en twee over; zeven.
- Lk: Ja, dat kan. Zet op veertien, en haal er negen af. (Peter haalt nu (na het opzetten van veertien) in één keer negen van de bovenste staaf af en constateert dat er vier (onder) en één (boven) over zijn, dus vijf. Samantha en Heleen halen er, onderaan beginnend, één voor één negen af.)
- Lk: Goed zo, iedereen heeft vijf over. Maar nu moet je toch nog een hoop tellen, hè? Als je zo één voor één alles eraf haalt (demonstreert dit nog eens). Kun je die negen er ook in een keer afhaken?
- Peter: Ja hoor, kijk maar (demonstreert). Hier zitten er tien, negen eraf (schuift in één beweging negen naar links).
- Lk: Zie je dat? Dat is ook handig, hè? (demonstreert nog eens). Veertien kralen, negen eraf, vier en één is vijf over.

Na dit instructiemoment volgen nog twee opgaven:  $15 - 10$  en  $17 - 9$ . Alle drie halen ze nu het tweede getal in één keer van de bovenste staaf af. Zowel Samantha als Heleen lijken overtuigd te zijn van het handige van deze verkorte werkwijze.

## leerprocessen

Kan er in de voorgaande situatie nog gesproken worden van een proces van heruitvinden op basis van eigen gezond-verstandmanieren? Oppervlakkig gezien lijkt het erop of Samantha en Heleen inderdaad een meer gestroomlijnde aanpak verkiezen boven de eigen, wat omslachtigere werkwijze en dat ze deze keuze op verstandige gronden doen; ze lijken de gelijkwaardigheid van de beide werkwijzen te doorzien, en mede op grond daarvan voor de verkorte werkwijze te kiezen.

Het kan echter ook zijn dat het grotendeels een vorm van toegeeflijkheid is, teweeggebracht door het aandringen van leerkracht en medeleerling en dat ze naderhand spoedig weer terugvallen op de oude vertrouwde methode van het terugtellen. Hoe dit ook zij, het lijkt in ieder geval aan te raden om de leerlingen nauwlettend te volgen in hun leergedrag en zo nodig sturend op te treden. Waar moet je als onderwijsgevende daarbij op letten? Wat is wezenlijk voor dit soort sturing?

Laten we nog een keer te rade gaan bij de ideeën van Freudenthal. De geschetste problematiek komt in zijn laatste boek meer in z'n algemeenheid uitgebreid aan bod in het kader van het derde didactische principe dat hij aan de orde stelt. Leerprocessen, is de naam die hij aan dit principe heeft gegeven.

Kenmerkend voor leerprocessen, aldus Freudenthal, is dat ze in niveaus verlopen. De term niveau verwijst daarbij niet zozeer naar de leerstof, naar niveaus van beheersing en dergelijke, maar meer naar niveaus van begrijpen, van greep hebben op een begrip, een handeling, een structuur.

Bijvoorbeeld: het in gedachten teruggaan in de telrij als een informele, primitieve vorm van aftrekken, geeft iets aan van een niveau van begrijpen van deze operatie. En het hanteren van getalstructuren, zoals de vijfstructuur, en het redeneren daarbij in termen van getalrelaties, geeft iets aan van een hoger, meer formeel niveau van begrijpen. Belangrijk aan deze niveaus, aldus Freudenthal, is vooral de wijze waarop de overgang van het ene naar het andere niveau tot stand komt.

Deze overgang heeft het karakter van een sprong; een sprong waarbij in het denken een verandering van perspectief optreedt, en bijvoorbeeld gerichtheid op het oplossen van een bepaald probleem plaatsmaakt voor gerichtheid op het overdenken van de gevolgde oplossingswijze en het onderkennen daarin van een onderliggende structuur.

In de woorden van Freudenthal: de organiserende, structurende activiteit van het lagere niveau wordt object van het denken op het hogere niveau. Het is deze verandering van perspectief, deze wisseling van blikrichting, die essentieel is voor de overgang van het ene niveau naar het andere.

Reflecteren is de term die Freudenthal gebruikt voor deze wisseling van blikrichting; reflecteren in de zin van: het eigen denken overdenken alsof men het in een spiegel waarneemt. Iets van deze reflecterende activiteit was in de hiervoor gegeven voorbeelden zichtbaar.

Zo stelde Rico zich tijdens z'n pogingen om de blokjes te tellen opeens op een ander standpunt door het bouwsel als het ware in gedachten in twee verdiepingen in te delen, en de blokjes van dit gedachte bouwsel te tellen.

Evenzo nam Marleen bij het appelprobleem een ander standpunt in door als het ware van buitenaf naar de situatie te kijken en zich er een symbolische afspiegeling van te vormen. Was er ook in de situatie van Samantha en Heleen sprake van een vorm van reflectie? Dat is moeilijk te zeggen. Weliswaar waren ze op aandrang van leerkracht en medeleerling bereid om over te stappen op de beoogde verkorte werkwijze, maar in hoeverre zij

deze werkwijze begrepen, in hoeverre zij greep hadden op het structuurmatige daarin, is nog maar de vraag. Het is juist het inzicht in dit structuurmatige, dat de sprong naar het hogere niveau teweeg kan brengen. Probeer dus te achterhalen, zo zou het devies in de geest van Freudenthal kunnen luiden, in hoeverre dit inzicht leeft bij leerlingen, observeer bij volgende opgaven hoe zij te werk gaan, laat ze nogmaals stilstaan bij de gevolgde werkwijze; laat ze zich nader vergewissen van het voordelige van deze werkwijze en aldus het zicht op het structuurmatige daarvan verdiepen.

Op deze wijze sturend kan men als leerkracht wellicht bewerkstelligen dat enerzijds recht wordt gedaan aan wat de leerling zelf als gezond verstand ervaart, terwijl anderzijds het perspectief op het hogere niveau van handelen, en daarmee op een hogere orde van gezond verstand, zich steeds verder opent. Het hoeft geen betoog dat het heel wat 'stuurmanskunst' vergt om het leerproces in dergelijke situaties in goede banen te leiden en ervoor te zorgen dat de wiskunde inderdaad een kwestie van gezond verstand blijft.

## besluit

In het voorgaande is een poging gedaan een beeld te geven van enkele van de meest essentiële denkbeelden zoals Freudenthal die in zijn laatste boek de revue laat passeren. Dat beeld is uiteraard verre van volledig geweest. Diverse zaken zijn onbesproken gebleven, terwijl andere zaken slechts in het voorbijgaan zijn aangestipt.

Het zal duidelijk zijn dat ik me niet beperkt heb tot het geven van een indruk van deze ideeën. Dat zou ook niet goed zijn, dat zou strijdig zijn met de geest waarin het boek geschreven is: het gaat niet zozeer om de ideeën op zich, maar meer om de eigen doordienking daarvan en om de implicaties ervan voor theorie en praktijk van het reken-wiskundeonderwijs. Eén van deze implicaties heb ik getracht nader uit te werken: de kwestie van de sturing van het leerproces.

Dat er bij het sturend optreden tijdens leerprocessen zorgvuldige keuzen gemaakt dienen te worden, moge uit het voorafgaande duidelijk zijn geworden. Het zal eveneens duidelijk zijn dat het boek geenszins als een soort onderwijshandleiding, als een soort onderwijskundig algoritme is op te vatten.

De titel van deze bijdrage is dan ook niet louter bedoeld als een verwijzing naar de titel van het boek. De term 'bezien' kan immers evenzeer opgevat worden als iets uit het verleden, als een voltooid deelwoord, als iets uit het heden, als iets dat nog grotendeels z'n beslag dient te krijgen.

Zij is dan ook evenzeer bedoeld als een uitnodiging; een uitnodiging om zelf kennis te nemen van de inhoud van het boek en zelf de ideeën verder te onderzoeken die erin ontvouwd worden. Als het zover komt dan kunt u er, zoals A. Bishop in het voorwoord van het boek opmerkt, van overtuigd zijn dat u naderhand niet precies meer dezelfde persoon zult zijn.

## noten

- 1 Met dank aan F. Goffree en A. Treffers voor hun commentaren op eerdere versies van dit artikel.
- 2 Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- 3 Deze situatie is afkomstig uit de Speerpuntmodule *Tellen en Rekenen tot 20*.