

---

# Socio-constructivisme en realistisch reken-wiskundeonderwijs

---

K. Gravemeijer

Freudenthal instituut, RU Utrecht

## inleiding

Opvattingen over onderwijs en onderzoek zijn aan mode onderhevig. In Nederland is dat bijvoorbeeld te zien aan de tanende populariteit van de Sovjet psychologie die zo'n tien, vijftien jaar geleden nog toonaangevend was. In de Verenigde Staten voerde de taakanalyse tot voor kort de boventoon. Die plaats wordt zo langzamerhand ingenomen door het constructivisme. Deze plotselinge populariteit maakt dat het constructivisme door sommigen met wat argwaan benaderd wordt. Feit is dat het mode is geworden om je constructivist te noemen, met als gevolg dat de betekenis van de aanduiding constructivisme verwaterd is. Men probeert zich daar weer aan te ontworstelen door de eigen opvatting met een voorvoegsel bij 'constructivisme' te verduidelijken.

In deze bijdrage bespreek ik het socio-constructivisme van P. Cobb. Deze keuze is niet willekeurig. In de eerste plaats behoort Cobb met Steffe en Von Glasersfeld tot de constructivisten van het eerste uur. In de tweede plaats richten zij zich op het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. En niet in de laatste plaats lijkt deze benadering de meeste betekenis te hebben voor de realistische stroming.

Meer concreet zijn er drie punten die ik in het volgende aan de orde wil stellen.

- Het socio-constructivisme biedt een theoretische basis voor de realistische onderwijstheorie.
- Het socio-constructivisme levert aangrijpingspunten voor een doordenking van de realistische onderwijspraktijk.
- Het socio-constructivisme geeft een verklaring voor het 'natuurlijke karakter' van structuralisme en mechanisme.

## taal en betekenis

De kennismaking met het socio-constructivisme wordt enigszins bemoeilijkt door een taalbarrière. Verhandelingen met termen als 'negotiation', 'acculturation' en 'social norms' lijken in eerste instantie weinig van doen te hebben met een realistische onderwijspraktijk. Niets is echter minder waar.

In feite is er een aantal (ver-)taalproblemen:

1. Het letterlijk vertalen.
2. De vervreemding die door de vreemde taal gecreëerd wordt.
3. Het verschil in cultuur.
4. De eigen betekenissen die socio-constructivisten aan bepaalde termen geven.

### *ad 1*

Allereerst is er de Engelse taal op zich. Bij het directe vertalen kunnen fouten gemaakt worden. Met name 'faux amis' - woorden die in beide talen hetzelfde zijn maar verschillende betekenissen hebben - kunnen misverstanden opleveren.

### *ad 2*

Maar ook vertrouwde uitdrukkingen klinken anders als je ze in een vreemde taal hoort. Toen ik op het vliegveld van Chicago vijf uur op mijn vliegtuig moest wachten zei ie-

mand van het personeel: 'You have some time to kill!' Ik vond dat aardig gevonden, tot ik mij realiseerde dat het letterlijk hetzelfde is, wat wij in Nederland zeggen: 'De tijd doden.'

Zo komt de vraag: 'Do you want to share that with us?', wat vreemd over als er naar een oplossing voor een probleem gevraagd wordt. Maar als je denkt aan het 'delen' in 'mee-delen' is het zo vreemd niet meer.

Ook 'Nice to meet you', is niet wezenlijk anders dan: 'Aangenaam kennis te maken', al wordt het met 'So nice to meet you!' natuurlijk wel anders gezegd!

*ad 3*

Dat is het derde vertaalprobleem, een probleem dat is geworteld in het verschil in cultuur. Amerikanen zijn veel voorkomender. Wij zijn in hun ogen waarschijnlijk heel direct, of misschien zelfs wel bot. In een discussie zullen ze niet snel zeggen dat je wartaal uitslaat, ze zeggen: 'I am confused'.

Zo hoorde ik de ene student tegen de andere zeggen: 'Thank you for talking to me', en ik had echt niet de indruk dat het meer dan een oppervlakkig gesprekje geweest was.

*ad 4*

Het vierde probleem wordt gevormd door de eigen betekenissen die de socio-constructivisten aan alledaagse woorden geven. Zo gaat het bijvoorbeeld bij 'negotiation' niet om onderhandelingen zoals die tussen werknemers en werkgevers, maar om een subtieler proces. Namelijk het proces waarbij twee partijen hun woordkeuze en interpretatie aanpassen op basis van de reacties van de ander.

Hoe overwin je al deze taalbarrières? Door 'negotiation'!

Bijvoorbeeld door samen te werken.<sup>1</sup> In gesprekken ontdek je hoe mensen met elkaar omgaan, en uit gesprekssituaties leidt je af wat bepaalde woorden voor de groep betekenen. Omgekeerd merken ook je gesprekspartners dat bepaalde uitdrukkingen verkeerd overkomen, waardoor ze hun woordgebruik gaan toelichten en nuanceren. Dat doe je zelf natuurlijk ook en zo stem je je taal op elkaar af in een proces dat inderdaad iets van onderhandelen weg heeft.

In onderzoeksverslagen wordt de term negotiation vooral gebruikt om de interactie tussen leerkracht en leerlingen te beschrijven. Dat blijkt een proces te zijn waar veel op een indirecte manier geleerd wordt. Dit geldt met name voor zaken als, waar het in de rekenles om gaat, wat er van je verwacht wordt, en hoe 'vaktermen' geïnterpreteerd moeten worden. Het is overigens een proces waarin veel mis kan gaan.

Cobb e.a. (in druk) lichten dit toe met een observatie:

Een leerkracht zet 45 streepjes op het bord en vraagt:

'Hoeveel streepjes staan hier?'

'Probeer eens te schatten.'

'Niet tellen.'

Voordat de leerlingen antwoord kunnen geven, vertelt de leerkracht dat ze zal laten zien hoe je handig uit kunt vinden hoeveel het er precies zijn - door het maken van groepjes van tien. Dat is een oplossing waar de leerlingen niet om gevraagd hebben en die voor hen op dat moment ook niet relevant is. Voor hen is tellen het gemakkelijkste! De leerkracht vervolgt met:

'Hoeveel groepen van tien, hoeveel over?'

De leerlingen antwoorden zonder veel begrip.

'Welk getal Stephanie?'

'...?'

'Vier tien, vijf enen, welk getal?'

Stephanie: 'Negen?'

De leerkracht neemt dit antwoord voor kennisgeving aan, vraagt geen toelichting, maar vervolgt met:

'Hoeveel hier, vier...?'

Inmiddels zijn er enkele leerlingen die het antwoord voorzeggen: 'vijfenveertig.'  
De leerkracht lijkt dit niet te horen en gaat door met,  
'... en vijf enen, vier tien en vijf enen, dan hebben we ... vijfenveertig!'  
Dit wordt door de klas herhaald.

...  
Wanneer Stephanie later in de les blijkt dat nog steeds blijkt op te tellen, 'helpt' de leerkracht:  
'Goed opschrijven, .... het is negenenzestig, OK?'

We zien dat de leerkracht geen aanleiding ziet om uitleg te geven. Haar gaat het blijkbaar alleen om de procedure. Voor de leerlingen is de impliciete boodschap: De wiskundige interpretatie van de situatie hoeft niet gerechtvaardigd te worden. Op een impliciete manier leren de leerlingen zo iets over wiskunde. Maar ook de wiskunde waar het om gaat wordt op een impliciete manier overgedragen.

Hoe getallen precies in elkaar zitten en wat de relatie is met de positionele schrijfwijze moeten de leerlingen zelf uit zien te vinden. Of ze op de goede weg zijn, leiden de leerlingen af uit de positieve en negatieve reacties van de leerkracht.

Het voor de constructivisten essentiële punt is nu dat de leerkracht zijn kennis niet zomaar op de leerlingen kan overdragen. Wat er feitelijk geleerd wordt, wordt bepaald door de interpretaties van de leerlingen. Interpretaties die wel door de leerkracht beïnvloed kunnen worden, maar die nooit volledig door hem of haar bepaald worden. Daarom vinden de socio-constructivisten negotiation zo belangrijk, het geeft houvast bij het analyseren en begrijpen van onderwijsleerprocessen.

In dit verband moet opgemerkt worden dat (socio-)constructivistische onderzoekers en realistische onderwijsontwikkelaars verschillende doelstellingen hebben. Het constructivisme richt zich niet op het construeren, maar op het analyseren van onderwijs. Het richt zich op het begrijpen en verklaren van de interactie tussen leerkracht en leerlingen. Omgekeerd geeft de aanduiding realisme misverstanden bij constructivisten die het verbinden met een filosofische stroming waar ze zich juist tegen afzetten.

### **theoretische basis**

Het constructivisme is eigenlijk een filosofische kentheorie, het kernpunt van de theorie is dat alle kennis zelf geconstrueerd is. Onze kennis is in feite een zelfgemaakt model van de werkelijkheid gebaseerd op ervaringen. Doorredenerend op de gedachte dat elke waarnemingen theorie-geladen is komen zij tot de conclusie, dat je de 'objectieve werkelijkheid' - de werkelijkheid buiten onszelf - niet kunt kennen. Sterker nog, volgens de radicaal-constructivisten (de grondleggers van het constructivisme waar Cobb oorspronkelijk ook bij hoorde) kun je zelfs nooit met zekerheid vaststellen of er wel een werkelijkheid 'out there' is! Daarin onderscheidt men zich van het 'metafysisch realisme', dat juist de objectieve werkelijkheid als toetssteen voor alle kennis beschouwt.

De constructivisten zien zich door een aantal onderzoeken gesterkt in hun visie:

- wetenschapstheoretische analyses van de natuurwetenschappen laten zien dat bij wetenschappelijke theorievorming in het algemeen niet de objectieve empirische toetsing de doorslag geeft maar de interne consistentie;
- etnografisch studies laten zien dat wiskunde cultuurgebonden is; Braziliaanse snoepverkopertjes ontwikkelen bijvoorbeeld een ander soort rekenkennis dan die op school wordt onderwezen (zie ook Ter Heege, 1992);
- constructivistische studies brachten misconcepties aan het licht die goed vanuit het idee van het zelf construeren van een model van de werkelijkheid verklaard kunnen worden.

De bekendste misconcepties zijn die uit de natuurkunde.

Misconcepties vinden we ook in het rekenen van jonge kinderen: de fouten die ze maken kunnen worden verklaard met een logisch consistente manier van redeneren. Al snel realiseerden de constructivisten zich dat het niet consequent is de concepten van anderen misconcepties te noemen. Sindsdien spreekt men liever van alternatieve concepties. Het (radicaal) constructivisme stond centraal op de PME-conferentie (Psychology for Mathematics Education) van 1987 in Montréal. De radicale opvattingen vormde de aanleiding voor grappen als:

Chinese monniken zaten in een klooster aan de oever van de Gele rivier te delibereren over de vraag of er wel een objectieve werkelijkheid was, toen ze door een overstroming werden weggevaagd.

Een algemeen punt van kritiek was de geringe betekenis van het constructivisme voor het onderwijs. De constructivisten brachten daar tegenin dat hun doel was het analyseren en begrijpen van wat zich in het onderwijs afspeelt en dat ze nog niet aan aanwijzingen voor de praktijk toe waren. Deze conferentie was mogelijk beeldbepalend voor Freudenthal, die op conferentie aanwezig was. Uit die tijd stamt waarschijnlijk ook de kritiek van Freudenthal (1991). Hoewel hij het constructivisme niet absoluut verwerpt, hij ziet alleen de meerwaarde niet zo.

'If I were to accept the term 'constructivism', I would mean a program having a philosophy that grants learners freedom of their own activity. Then it does not matter whether this activity is called construction or whatever, as long as such words do not prejudice anything that concerns the learners freedom.'

(Freudenthal, 1991)

Toch lijken het constructivisme en de realistische onderwijstheorie juist zeer verwant. Net als bij het constructivisme staan de constructies van de leerlingen centraal. Niet voor niets geldt het adagium: 'Elke leerling bouwt zijn eigen wiskunde op.' Wel is het 'realisme' meer normatief geïnspireerd en het constructivisme meer theoretisch gericht. In die zin kan het constructivisme gezien worden als een theoretische fundering voor de realistische onderwijstheorie. Het realistische reken-wiskundeonderwijs is gebaseerd op de gedachte dat de leerling zijn eigen kennis zelf op zou moeten bouwen, het constructivisme stelt dat het niet anders kan. De leerlingen bouwen altijd hun eigen kennis op, zelfs als het onderwijs daar geen rekening mee houdt.

Een probleem waar de (radicaal) constructivisten in 1987 nog mee worstelden, was de sturing in het onderwijs. Het radicaal constructivisme bevond zich hier in een moeilijke positie, omdat met het accepteren van de 'alternatieve concepties' alle grond aan sturing was weggevallen. Waar kon je argumenten aan ontleen om te bepalen in welke richting kinderen zich zouden moeten ontwikkelen?

Het socio-constructivisme brengt de zaak weer in evenwicht. Naar analogie met de uitkomsten uit de wetenschapstheorie, gaat men uit van een geaccepteerd kennisbestand:

'the taken-as-shared mathematical interpretations, meanings, and practices institutionalized by wider society.'

(Cobb, Yackel & Wood, 1992 pag.16)

Door 'geaccepteerde kennis' als criterium te nemen, wordt het al dan niet bestaan van een objectieve werkelijkheid niet meer zo relevant:

'My commitment to 'realism' is exhibited by the fact that I live the way that I do, that I drive my car, drink my beer, write my articles, give my lectures, and ski my mountains ... there isn't a further 'hypothesis' that the real world exists.'

(Searle, geciteerd in Cobb, Yackel & Wood, 1992).

Zo bezien is er een duidelijke overeenstemming met Freudenthals idee van 'common sense' in de wiskunde: reëel is datgene waar je niet over nadenkt, wat je zonder probleem als reëel of concreet aanvaardt (Freudenthal, 1991).

De socio-constructivisten erkennen dat de algemeen aanvaarde wiskundige interpretaties, betekenissen en praktijken wel degelijk uitgangspunt van het onderwijs kunnen zijn. Het probleem dat je wiskundige kennis niet aan een objectieve werkelijkheid kunt toetsen, wordt door de socio-constructivisten opgelost door de algemeen aanvaarde wiskundige theorieën en praktijken boven de individuele alternatieve theorieën te stellen.

Deze keuze wordt gerechtvaardigd door te verwijzen naar intersubjectiviteit. In de zogeheten correspondentie-theorieën wordt naar objectiviteit gestreefd door te zoeken naar de correspondentie tussen de theorie en een 'objectieve werkelijkheid' buiten ons. Het socio-constructivisme stelt daar objectiviteit als een vorm van intersubjectiviteit tegenover.

Wel wordt benadrukt dat de wiskunde een menselijke constructie is. De aard en de inhoud van de wiskunde is historisch, sociaal en cultureel bepaald. De intersubjectiviteit beperkt zich immers tot de overeenstemming binnen de gemeenschap van wiskundigen. Ook in een andere zin kent de intersubjectiviteit grenzen, want je kunt nooit bereiken dat iedereen precies dezelfde betekenissen geeft aan dezelfde labels. Er blijven altijd ideosyncratische verschillen bestaan.

In de praktijk is dat geen probleem zo lang de individuele opvattingen 'compatible' zijn. Dan zul je in het algemeen ook niet merken dat er verschillen zijn, je handelt gewoon vanuit de verwachting dat je gesprekspartners begrijpen wat je bedoelt. Dit als vanzelfsprekend veronderstellen van gelijke betekenissen en interpretaties wordt door socio-constructivisten aangeduid met de term 'taken-as-shared'.

In het algemeen gaat het echter om meer dan de betekenis van bepaalde woorden, het is vaak ook nodig om te beschikken over een gemeenschappelijk referentiekader. Een 'taken-as-shared basis for communication', een geheel van betekenissen, interpretaties en manieren van doen, waarvan aangenomen wordt dat ze door de groep gedeeld worden. Mochten er toch discrepanties aan het licht komen dan zullen die meestal via een im- of expliciet proces van negotiation opgelost worden.

Het interactieve karakter van communicatie en het belang van een gemeenschappelijke basis bepaalt de socio-constructivistische kijk op wiskundeonderwijs:

*'These investigations would treat people in general and mathematics teachers and students in particular as active constructors of their ways of knowing and as participants in social practices rather than as mirrors of a world independent of experience, history, and culture. Knowing would then be seen as a matter of being able to participate in mathematical practices in the course of which one can appropriately explain and justify one's actions.'*  
(Cobb, Yackel & Wood 1992, pag.15)

Het doel van het wiskundeonderwijs is, het kunnen participeren in de praktijk van het bedrijven van wiskunde. Het proces dat daartoe leidt wordt - onder verwijzing naar het cultuur-historische karakter van de wiskunde - aangeduid als 'acculturation'. Acculturation geeft aan dat we niet te maken hebben met een waarde vrij proces van kennisoverdracht, maar dat de leerling zich de cultuur van de wiskunde moet eigen maken.

Ook deze koppeling van wiskunde aan wiskunde als een manier van doen, bevestigt nog eens de verwantschap tussen constructivisme en realisme. (Al wordt er in constructivistische kring vooral gedacht aan de praktijk van wiskundigen en minder aan de praktijk van de wiskunde in het leven van alledag.)

### **onderwijspraktijk**

Door wiskunde en wiskundeonderwijs zo te definiëren wordt de rol van de leerkracht ook duidelijker. In de radicaal-constructivistische opvatting stond de leerkracht buiten spel, die kon hoogstens het proces begeleiden en stimuleren. In de socio-constructivisti-

sche optiek dient de leerkracht richting te geven aan het leerproces. De leerkracht is de autoriteit, alleen de leerkracht is bekend met de algemeen aanvaarde wiskundige theorieën en praktijken. Op basis daarvan wordt richting gegeven aan het leerproces door het:

- beoordelen van de potentiële vruchtbaarheid van de inbreng van de leerlingen;
- inschatten van wat op een gegeven moment als ‘taken-as-shared’ beschouwd kan worden;
- kiezen of ontwerpen van onderwijsactiviteiten;
- initiëren en leiden van discussies;
- herhalen en herformuleren en daarmee legitimeren van daarvoor in aanmerking komende uitlatingen van de leerlingen;
- aan de orde stellen van conflicterende interpretaties en oplossingen om zo te zorgen voor een expliciet proces van ‘negotiation’.

Cobb, Yackel en Wood (1992 pag.11) stellen:

‘More generally it is by capitalizing on students’ mathematical activity that the teacher initiates and guides the classroom community’s development of taken-as-shared ways of mathematical knowing that are compatible with those of the wider community.’

Hoewel men hier wat gemakkelijk voorbij gaat aan de rol van didactische kennis past deze schets van de rol van de leerkracht ook goed bij realistisch reken-wiskundeonderwijs. Ook Cobb signaleert dat wanneer hij auteurs uit realistische kring aanhaalt. Hij wijst er echter op dat een realistisch probleem in de klas nooit hetzelfde kan zijn als het bedoelde probleem in de alledaagse werkelijkheid. In de realiteit is het probleem het probleem van degene die daarvoor gesteld wordt, in de klas moet de leerling een probleem van een ander tot zijn/haar probleem maken. De leerling komt daarmee direct voor de vraag te staan in hoeverre de realiteit in de oplossing moet worden betrokken. Impliciet verwachten we toch van de leerlingen dat ze een contextprobleem in de rekenles door een rekenbril bekijken.

---

Marco vraagt of zijn vriendje Pim mag blijven eten.  
Moeder vindt het goed, maar dan is er wel één kaassoufflé te weinig.  
Hoe verdeel je vijf kaassoufflés over zes personen?







Marco's zusje, Nicolette, vindt het niet leuk dat Pim blijft eten. Zij is namelijk dol op kaassoufflés. „Nu krijg ik maar  $\frac{1}{2}$  deel van een kaassoufflé,” zegt ze. Klopt dat wel?  
Ja/Nee, want

---

figuur 1: kaassoufflés verdelen

Dit wordt onder meer duidelijk wanneer je contextopgaven met deskundigen bespreekt. Dan wordt vaak meer recht gedaan aan de realiteit dan in de klas. Zo geeft de opgave van figuur 1 nog wel eens aanleiding tot discussie.<sup>2</sup> Niet geheel ten onrechte stelt men dan dat als je realistisch wilt zijn, dat je dan ook oplossingen moet accepteren als:

- 'Ik ga er wel even eentje bijkopen.'
- 'Marco moet maar met zijn vriendje delen.'
- 'Vader en moeder krijgen natuurlijk meer.'
- 'Vader en moeder delen er één; de kinderen moeten er nog van groeien.'

Naar mijn indruk worden dit soort reacties in de schoolklas veel minder gehoord. In de klas heeft namelijk al een geruisloze afstemming plaatsgevonden: de leerlingen weten wat er van hen verwacht wordt. De wijze waarop de leerlingen zo'n probleem in de rekenles benaderen is het gevolg van een proces van 'negotiation of conventions of interpretation'. Met als resultaat, wat Elbers (1992) een didactisch contract noemt.

Voor ons is de wiskundige interpretatie van contextproblemen vaak zo vanzelfsprekend, dat we ons dergelijke impliciete afspraken niet eens realiseren. Dit kwam duidelijk naar voren toen we leao-mavo-leerlingen de volgende opgave (fig.2) voorlegden.<sup>3</sup>

**Er is een klasseavond georganiseerd. De leerlingen hebben chips en cola gekocht. Er zijn 18 flessen cola voor 24 leerlingen. De flessen moeten over de tafels verdeeld worden. Maar er zitten niet aan elke tafel evenveel leerlingen.**

- Er is een groep van 12 leerlingen bij elkaar gaan zitten.  
Hoeveel flessen moeten zij krijgen?
- Aan een andere tafel zitten 4 leerlingen.  
Hoeveel flessen worden dat?
- En een groepje van 7 leerlingen?
- Bij welk aantal kun je het goed verdelen?

figuur 2: chips & cola

De opgave was bedoeld om de leerlingen gelijkwaardige verhoudingen te laten genereren. Een aantal leerlingen was echter niet bereid de opgave op deze manier te interpreteren. Het eerlijk verdelen van de cola over de leerlingen vonden ze misplaatst:

- 'Sommige kinderen drinken geen cola.'
- 'En niet iedereen drinkt evenveel.'

Vaak zijn we geneigd te denken dat contextproblemen voor zichzelf spreken. Maar ook bij realistisch reken-wiskundeonderwijs is er ruimte voor interpretatie en bedoeld of onbedoeld zal er in de klas een didactisch contract ontstaan waarin vastligt hoe contextopgaven geïnterpreteerd moeten worden. Anders gezegd, er ontstaan impliciete afspraken over 'what counts as a problem' en 'what counts as a solution'.

In het verlengde van deze constatering ligt het idee van Cobb en collega's om ook de verwachtingen in het onderwijs expliciet te maken. Zo propageren zij dat er systematisch aandacht besteed wordt aan 'social norms'. De leerlingen wordt duidelijk gemaakt wat er van hen in de wiskundeles verwacht wordt. Het gaat niet om de snelle, goede antwoorden of om het nadoen van de leerkracht, je zit er om wiskunde te leren.

De normen die Cobb c.s. introduceren zijn sterk gericht op de communicatie: de leerlingen worden geacht de eigen oplossingen uit te leggen en te rechtvaardigen en zich in de oplossingen van anderen te verdiepen en dan ook om uitleg en argumentatie te vragen. In de wiskundeles dient een ander interactiepatroon te ontstaan dan het gebruikelijke 'elicitation pattern': de leerkracht stelt een vraag, de leerling geeft een antwoord en de leer-

kracht beoordeelt het antwoord vervolgens. Dit is een heel ander patroon dan wat je bijvoorbeeld in het dagelijks leven tegenkomt. Daar is het ook hoogst ongebruikelijk om een vraag te stellen waar je het antwoord al op weet. Je zou ook raar kijken als iemand die gevraagd heeft, hoe je in de Julianastraat kunt komen, gaat vertellen of je antwoord goed was. Het 'elicitation pattern' brengt met zich mee dat de leerling voor de beoordeling van de juistheid van zijn antwoord afhankelijk is van de leerkracht. Mede via de 'social norms' wil men daar een ander didactisch contract tegenoverstellen, waar de leerling zich zelf verantwoordelijk voelt voor de correctheid van zijn antwoorden.

### structuralisme en mechanisme

De socio-constructivistische theorie kan ook gebruikt worden om structuralistisch en mechanistisch reken-wiskundeonderwijs te analyseren. In structuralistisch en mechanistisch reken-wiskundeonderwijs werkt men vaak met concrete modellen, zoals bijvoorbeeld MAB-materiaal. Het basisidee bij zulk materiaal is dat de leerlingen zich de wiskundige relaties eigen maken die in het materiaal zijn neergelegd. Het materiaal fungeert als een intermediair tussen de leerling en de wiskunde. Het materiaal representeert de wiskundige relaties in een concrete, toegankelijke vorm en de leerling ontdekt die wiskundige relaties door op een gerichte manier met het materiaal te werken.

Het voordeel van dit type concreet materiaal is de doorzichtigheid, de helderheid. Je kunt de begrippen en relaties waar het omgaat zo aflezen. Het probleem is echter dat experts deze begrippen en relaties wel zien, maar dat ze daarom voor de leerlingen nog niet vanzelfsprekend zijn. Je moet weten wat je moet zien. De experts beschikken al over de wiskundige kennis waar het omgaat, die *herkennen* de begrippen en relaties in het materiaal, maar dat is wat anders dan een en ander uit het materiaal aflezen als je die kennis nog niet hebt.

Zo wordt concreet materiaal gebruikt om tientallen en eenheden duidelijk te maken. 'Tien' of een tiental wordt dan voorgesteld door een staafje en de eenheden door blokjes. Maar er wordt voorbijgegaan aan het feit dat tien een complex begrip is. We kunnen zeggen dat iemand over het mathematisch object 'tien' beschikt, wanneer hij 'tien' tegelijkertijd als tien eenheden en als één tiental kan zien (Cobb & Wheatly, 1988). Dit concept kunnen we gemakkelijk in tien-staafjes *herkennen*, maar voor iemand die nog niet over dit concept beschikt is zo'n tien-staafje gewoon een stukje hout.

Het resultaat van dit type onderwijs wordt zichtbaar in de rekenaanpak van Auburn, een leerlinge in eind Grade one (groep drie). In een interview (Cobb, 1989) krijgt ze eerst een paar losse rekensommen voorgelegd:

$$\begin{array}{l} 16 + 9 = \\ 28 + 13 = \\ 37 + 24 = \\ 39 + 53 = \end{array}$$

Al deze opgaven lost zij correct op, meestal door consciëntieus door te tellen. Daarna krijgt ze een werkblad (fig.3) met opgaven onder elkaar zoals in de Amerikaanse rekenboeken gebruikelijk is.

Nu komt ze tot


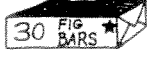
$$\begin{array}{r} 16 \\ 9 + \\ \hline 15 \end{array}$$

en er ontwikkelt zich het volgende gesprekje tussen de interviewer (I) en Auburn (A):




- I: Klopt dat, dat er twee antwoorden zijn?  
 A: ?  
 I: Wat is het beste denk je?  
 A: 25.  
 I: Waarom?  
 A: Ik weet het niet.  
 I: Als we 16 koekjes hadden en nog 9 erbij, zouden we er dan 15 hebben?  
 A: Nee.  
 I: Waarom?  
 A: Als je ze bij elkaar telt zou je 25 krijgen.  
 I: Maar dit (15), is af en toe goed.

Add the ones. Then add the tens.

$$\begin{array}{r} 48 \\ + 30 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ + 30 \\ \hline 78 \end{array}$$



How many cookies?      There are 78 cookies.

**Put a ring around the numbers you add first.**  
**Add.**

$\begin{array}{r} 28 \\ + 41 \\ \hline 69 \end{array}$	$\begin{array}{r} 22 \\ + 14 \\ \hline 36 \end{array}$	$\begin{array}{r} 22 \\ + 15 \\ \hline 37 \end{array}$	$\begin{array}{r} 22 \\ + 16 \\ \hline 38 \end{array}$	$\begin{array}{r} 22 \\ + 17 \\ \hline 39 \end{array}$
$\begin{array}{r} 22 \\ + 18 \\ \hline 30 \end{array}$	$\begin{array}{r} 81 \\ + 12 \\ \hline 93 \end{array}$	$\begin{array}{r} 16 \\ + 09 \\ \hline 15 \end{array}$	$\begin{array}{r} 28 \\ + 13 \\ \hline 31 \end{array}$	$\begin{array}{r} 37 \\ + 20 \\ \hline 57 \end{array}$
$\begin{array}{r} 39 \\ + 53 \\ \hline 82 \end{array}$	$\begin{array}{r} 11 \\ + 64 \\ \hline 75 \end{array}$	$\begin{array}{r} 59 \\ + 30 \\ \hline 89 \end{array}$	$\begin{array}{r} 25 \\ + 54 \\ \hline 79 \end{array}$	$\begin{array}{r} 47 \\ + 12 \\ \hline 59 \end{array}$
$\begin{array}{r} 82 \\ + 13 \\ \hline 95 \end{array}$	$\begin{array}{r} 43 \\ + 46 \\ \hline 89 \end{array}$	$\begin{array}{r} 78 \\ + 10 \\ \hline 88 \end{array}$	$\begin{array}{r} 32 \\ + 17 \\ \hline 49 \end{array}$	$\begin{array}{r} 11 \\ + 81 \\ \hline 92 \end{array}$

figuur 3: Auburn's antwoord op optellen

Hoe komt het toch dat het gebruik van concrete modellen zich in zo'n grote populariteit mag verheugen?

Het probleem is dat we zo vertrouwd zijn met deze wiskunde, dat de begrippen een vanzelfsprekend karakter hebben gekregen. Bovendien delen we deze kennis met zovelen, dat deze begrippen deel uit maken van een 'taken-as-shared basis for communication'. Dat wil zeggen dat we deze wiskunde ervaren als iets concreets, als iets wat kunt aanwijzen en waar je zonder misverstanden over kunt praten.

Dan is het heel vanzelfsprekend om concreet materiaal te ontwerpen waaraan je deze wiskunde kunt laten zien, of laten ontdekken. Als de leerlingen het dan niet zien, komt dat doordat ze niet goed kijken. En er is maar één manier om dat probleem op te lossen: door de op zichzelf toch al duidelijke relaties nog verder te expliciteren en nog verder te detailleren. In de praktijk heeft dit echter het tegenovergestelde effect van wat je wilt bereiken:

'...approaches in which the teacher becomes increasingly explicit about what it is that students are supposed to learn can lead to the excessive algorithmization of mathematics and the disappearance of conceptual meaning.'

(Cobb, Yackel & Wood, 1992, pag.5)

De leerlingen leren de wiskunde niet door het werken met het materiaal, maar wat ze leren, leren ze door de aanwijzingen van de leerkracht over te nemen. Met als gevolg dat ze algoritmisch handelen, wat de ontwikkeling van inzicht juist verhindert.

Zo bezien wordt mechanistisch reken-wiskundeonderwijs als vanzelf voort uit het feit dat men zich niet realiseert dat de eigen wiskundige realiteit niet dezelfde is als die van de leerling.

#### **literatuur**

- Cobb, P. (1989). *Reconstructing Elementary School Mathematics*. Paper presented at the meeting of the Research Council for Diagnostic and Prescriptive Mathematics.
- Cobb, P. & G. Wheatly (1988). Children's Initial Understanding of Ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 10(1), 1-28.
- Cobb, P., E. Yackel & T. Wood (1992). A Constructivist Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education* 23(1), 2-33.
- Cobb, P., T. Wood, E. Yackel & B. McNeal (in druk). Characteristics of Classroom Mathematics Traditions: An International Analysis. In: C. Maher & R. Davis (Eds.), *Relating Schools to the Reality of Mathematics Learning*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, NJ.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- Heege, H. ter (1992). Snoepverkopers-wiskunde. *Willem Bartjens* 11(4), 20-29.

#### **noten**

- 1 De auteur maakte als visiting professor enige tijd deel uit van de groep rond Cobb.
- 2 Opgave uit *Rekenen & Wiskunde*. Baarn: Bekadidact.
- 3 Opgave uit een proefversie van *Praktisch Rekenen 1<sup>b</sup>*. Enschede-Utrecht: SLO/OW & OC.