Van rekenen naar algebra, doorgaande leerlijnen op de lerarenopleidingen

Frans Ballering, lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Rotterdam (HRO); Hans Krabbendam, lerarenopleider wiskunde aan de Fontys Lerarenopleiding Tilburg (FLOT).
Beiden zijn lid van de Samenwerkingsgroep Lerarenopleiders Wiskunde (SLW).

Inleiding

In dit artikel proberen we met behulp van enkele voorbeelden te schetsen wat onze eerstejaars aan de tweedegraadslerarenopleiding wiskunde meebrengen aan bagage en wat we op het gebied van het rekenen daar nog verder aan doen.
We laten de voorbeelden voorafgaan door ongenuanceerde observaties om het probleem helder te introduceren. Daarmee schetsen we ogenschijnlijk een somber beeld van onze eerstejaars. Het is niet de bedoeling de aandacht te richten op het klagen over ons voortgezet onderwijs. We gaan liever uit van de gedachte dat een goede opleiding invloed heeft.
Tevens laten we aan de hand van enkele voorbeelden zien waarom we niet altijd blij zijn met de inhoud en didactiek van de rekenhoofdstukken in de schoolboeken voor wiskunde.
De rekendidactiek op de opleiding krijgt aandacht door het doorwerken van het boek 'Rekenen voor de lerarenopleiding'[23], waar niet alleen het rekenen op de middelbare school maar ook de didactiek van de basisschool aan de orde komt, en de term realistisch wiskundeonderwijs inhoud moet krijgen.
We sluiten af met discussievragen.

Een wiskundeleraar tweedegraads in opleiding

Enkele karakteristieken

ook zij hebben weinig gerekend in het VO
hun leraar zei meestal: mag dat?
ze leerden vooral hoe het moest
er werd niet gevraagd waarom.
Resultaat: grote onzekerheid ten aanzien van formele operaties met breuken; niet in staat tot concretiseren; onvoldoende getalbegrip; getallen zijn vooral om mee te rekenen; sinds groep 6 nooit meer een getallenlijn getekend.

Zomaar een vergelijking uit een eerstejaars les analyse: $f'(t) = 2{,}4\, f(t)(1 - \frac{f(t)}{8})$. Ik maak daarvan $f'(t) = 0{,}3\, f(t)(8 - f(t))$ en de vraagtekens zijn niet van de lucht. De meest gestelde vraag: "Mag dat?"

Een noemer 8 vervangen door een teller $\frac{1}{8}$? Een vergelijkbare reactie.

Maar wegstrepen kennen ze allemaal en kunnen ze ook allemaal. Er zijn studenten die ook geen moeite hebben met $\frac{3a+4}{a} = 7$ maar de wat betere trappen alleen in die val bij $\frac{3f(a)+4}{f(a)}$
(Waarom zegt niet allang iedereen: "wegdelen"?).

[23] Ballering F., e.a., 'Rekenen voor de lerarenopleiding', derde herziene druk, APS, Utrecht, 2008

Elke student pakt voor 24x58 zijn rekenmachine, dat is geen probleem. Maar uitgaan van de eigenschappen van getallen, zodat bijvoorbeeld 24x58 kan worden uitgerekend door 24x60-48? Dat komt echt niet aan.

Wat bijvoorbeeld te denken van een verdere 'uitwerking' van $\sqrt{7}$ door een wiskundestudent: $\sqrt{7}=\sqrt{4+3}=2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. Dit vraagt wel weer enige pas op de plaats.

Het zijn zomaar enkele voorbeelden die natuurlijk geen algemene geldigheid hebben, maar bedoeld zijn om aan te geven waar de zekerheden en onzekerheden van onze studenten zitten. Voor studenten met vooropleiding VWO geldt misschien dat de onzekerheden pas komen als er algebra in het spel is, bijvoorbeeld bij het vervangen van een noemer n door $\frac{1}{n}$. Het zijn vaardigheden waar je bij een cursus analyse toch af en toe graag snel een beroep op doet, om verder door te dringen in de materie of om een formule een handigere vorm te geven.

Bij lessen vakdidactiek valt al heel snel op dat denken over getallen iets is wat ze (opnieuw?) moeten leren. Dat de getallenlijn daarbij een fantastisch denkmodel is, behoort dus ook niet tot hun repertoire.

Dit gebrek aan inzicht in de getalstructuur en daarmee het gebrek aan wendbaarheid binnen die getallenwereld leidt steevast tot problemen die zorgen voor onbedoelde en onnodige hobbels in het leerproces van de student. Hobbels, die de student bovendien onzeker maken en hem/haar het gevoel geven niets te kunnen.

Als dit nog geen uitdaging voor opleiders is! Ze kunnen heel wat moeilijke wiskunde aan, maar op waaromvragen moeten ze nog leren antwoorden. Hoe veel breder kunnen wij hun kijk op wiskunde maken?

Dat er een analoog vermoeden is over de kennis van getallen bij de beginnende student op de PABO behoeft hier geen nadere onderbouwing, gezien de vooral ook in de pers breed uitgemeten discussie over het rekenniveau van die studentengroep. Veel meer aandacht voor het eigen niveau zou op de PABO prioriteit moeten hebben.

Rekenen in het voortgezet onderwijs

Enkele karakteristieken

de schoolboeken doen alsof leerlingen nog nooit van een breuk hebben gehoord
de leerlingen maken vooral sommen
de leraar alleen op afroep
de rekenmachine eerst.

In alle wiskundemethoden staan wel hoofdstukken rekenen. Er wordt daarin aandacht besteed aan breuken, decimale getallen, procenten, verhoudingen en verhoudingstabellen. Niet noodzakelijk in deze volgorde.

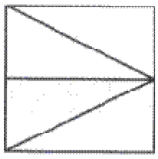
Bij het onderwerp breuken komen in een boek[24] voor VMBO-leerlingen de volgende opgaven voor. De eerste is de derde opgave in de paragraaf, nog voordat er enige theorie is geweest.

[24] De voorbeelden uit de schoolboeken komen allemaal uit: Reichard e.a., Getal en Ruimte 1 vmbo KGT, deel 1, EPN, Houten, 2007

O 32 Jaap koopt met zijn drie broers een dvd recorder. Ze betalen ieder evenveel.
a Welk deel betaalt ieder?
b Hoeveel euro betaalt Jaap?

De tweede opgave volgt op een stukje over een pizza en het gebruik van de woorden teller, noemer en breuk.

34 ▸werkboek
Het vierkant is verdeeld in vier gelijke stukken.
Kleur $\frac{3}{4}$ deel rood.



35 ▸werkboek

Beide opdrachten gaan eraan voorbij dat leerlingen op de basisschool vanaf groep 6 in die zin al wel met breuken hebben leren omgaan. Natuurlijk, ze zijn daarvan weer veel vergeten, maar bij een context met vier mensen om een breuk vragen of een aantal stukjes laten kleuren betekent dat je ze degradeert tot eenvoudigweg het tellen van stukjes, terwijl we ze toch graag willen laten nadenken over breuken.

Hieronder een stukje theorie over afronden.

Afronden

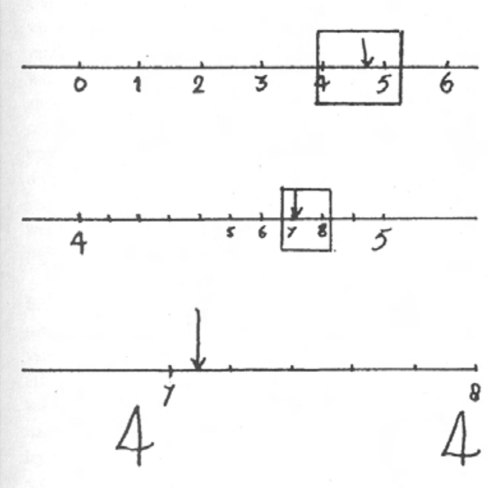
Bij 0,72864 heb je vijf decimalen.
Bij het afronden op twee decimalen kijk je naar de derde decimaal.
0,72864 is afgerond 0,73.
↑ derde decimaal 5 of meer
↑ tweede decimaal wordt 1 meer

Bij 2,356 heb je drie decimalen.
Bij afronden op een geheel getal kijk je naar de eerste decimaal.
2,356 is afgerond 2.
↑ eerste decimaal minder dan 5
↑ geheel getal verandert niet

Bij het afronden kijk je naar de eerste decimaal die je weglaat.
- **Is die decimaal een 5 of hoger? Dan wordt het cijfer ervoor 1 hoger.**
- **Is die decimaal kleiner dan 5? Dan verandert het cijfer ervoor niet.**

De getallenlijn ontbreekt geheel; afronden is een technische procedure, een algoritme waar de waaromvraag niet gesteld kan worden. Dat model van die getallenlijn is hier juist zo toepasbaar, omdat het af te ronden getal visueel geplaatst kan worden ten opzichte van mogelijke antwoordkandidaten[25].

[25] Onderstaand stukje is afkomstig uit: Staal, H. e.a., 'Het voorbereiden van lessen' voor de lerarenopleiding wiskunde, APS, Utrecht, 2002



Bij afronden wil ik dat leerlingen een beeld hebben van de getallenlijn. Ik ga ze vragen naar dat beeld. Zo nodig geef ik een voorbeeld. Met inzoomen en uitzoomen.
Eerste vraag: waar denk je aan bij afronden?
Vervolgvraag: Kun je een voorbeeld geven?
Teken er eens een getallenlijn bij.
Waar kijk je naar op die getallenlijn? (waar het getal het dichtst bij ligt; linkerdeel het grootst? of rechterdeel?

Laatste vraag: waarom wordt 5,46 niet afgerond naar 6?
(inzoomen bij afronden)

Toch is er ook een echte denkvraag: Joris heeft nog $\frac{5}{8}$ van zijn pizza over en Mariska $\frac{5}{12}$. Hebben ze samen meer of minder dan een hele pizza over?

Hoeveel wiskundeleraren zouden deze opgave echter ook als een denkvraag behandelen?

Studenten moeten leren dat een schoolboek een hulpmiddel is om doelen te bereiken en dat praten en denken over wiskunde en getallen daarbij een belangrijke rol moeten spelen. Liever een goed instapgesprek over breuken (“schrijf jij er eens tien op, kun je er nóg honderd opschrijven, kun je ook breuken opschrijven die gelijk zijn aan 3? Hoeveel? ……”) dan een aantal stukjes van een figuur kleuren.
Studenten vertellen dat leerlingen al op de basisschool hebben geleerd om zodra er een getal verschijnt naar de rekenmachine te grijpen. Wij zijn dan geneigd om dat niet te geloven. Ook hier stellen wiskundeschoolboeken nog wel eens teleur, zoals in dit voorbeeld: ‘Afronden met de rekenmachine’.

Afronden met de rekenmachine

Rond 3,25698 met de rekenmachine af op twee decimalen.
Dat gaat zo:

Casio *fx-82ES*

Tik in 3.25698 =.
Druk op SHIFT MODE.
Bij FIX staat 6. Kies dus 6.

De rekenmachine vraagt op hoeveel decimalen. Tik dus in 2 van twee decimalen.
Je krijgt als antwoord 3,26.

Afronden zet je zo uit:
Druk op SHIFT MODE.
Bij NORM staat 8. Kies dus 8.
Kies als laatste voor 2.
Op het scherm staat weer het getal 3,25698.

TI-30XS

Afronden op 2 decimalen gaat zo:
Kies MODE.
Ga met de cursor naar beneden tot FLOAT.
Ga met de cursor naar rechts tot 2.
Bevestig met ENTER.
Kies QUIT met 2nd MODE.
Je krijgt als antwoord 3,26.

Afronden zet je zo uit:
Kies MODE.
Zet de cursor op FLOAT.
Bevestig met ENTER.
Kies QUIT.

Op het scherm staat weer het getal 3,25698.

In verhoudingstabellen wordt vrijwel altijd teruggerekend naar 1, zoals het volgende voorbeeld laat zien[26].

Een non-voorbeeld

We kijken in een schoolboek bij het onderwerp verhoudingen. Zoals in de methoden van de laatste jaren gebruikelijk is, komen er verhoudingstabellen te voorschijn en de kinderen leren dat je daarin kolommen met een getal mag vermenigvuldigen en door een getal mag delen. Of, wat mooier gezegd, in een verhoudingstabel is elke kolom gelijk aan een andere kolom vermenigvuldigd met één getal. Tot zover geen probleem.
Het voorbeeld gaat als volgt:
Druiven kosten € 4,00 per 250 gram. Hoeveel kosten 400 gram druiven?
Onder deze tekst staan drie tabellen.

hoeveelheid (g)	250		400
prijs (€)	4,00		?

hoeveelheid (g)	250	1	400
prijs (€)	4,00	.....	?

hoeveelheid (g)	250	1	400
prijs (€)	4,00	0,016	?

Stel je voor: je weet dat 250=5x50 (of je weet dat 25=5x5, dus je kent je tafels en je bedenkt met behulp daarvan of met hulp van je leraar dat 250=50x5).
Evenzo met 40 =8x5 (tafels) en 400=8x50 (het toepassen van tafelkennis). Daarna heb je geen rekenmachine meer nodig, want in je tabel staat dan:

hoeveelheid (g)	250	50	400
prijs (€)	4,00	0,8	?

Of nog handiger:

hoeveelheid (g)	250	50	400
prijs in eurocenten	400	80	?

Met boogjes komt daar dan bij $\boxed{:5}$ en $\boxed{\times 8}$ en je vindt als antwoord 640.
Als je niet per se hoeft terug te rekenen naar 1 en je gebruikt eventueel meer tussenstappen, wordt er met eenvoudige getallen gerekend met als voordelen:
uitstralen dat VMBO-leerlingen best kunnen rekenen
VMBO-leerlingen oefenen met tafels en toepassingen daarvan
VMBO-leerlingen oefenen in omzetten van € 4,00 naar 400 eurocent.

In hetzelfde schoolboek volgen hierna opdrachten waarbij de leerlingen van 200 naar 320 moeten rekenen, van 50 naar 8, 196 moet worden gedeeld door 7 (twee keer 70 eraf en dan 8x7=56) 279 delen door 9 en 3,75 delen door 5. Je zou bijna denken dat bij deze opgaven is gedacht aan een les(deel) zonder de rekenmachine. Ofwel, er liggen allerlei kansen om de leerlingen eens te laten rekenen.

[26] Zie noot 1

Rekendidactiek op de opleiding voor leraar wiskunde

Enkele karakteristieken

studenten moeten ervaren dat rekenen meer is dan optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen
het (grote) verschil ervaren tussen een algoritme leren en begrijpend leren
oefenen baart misschien wel kunst, maar zelden inzicht
rekenen is de basis van algebra
op naar realistisch wiskundeonderwijs
Stiekem zijn we hierboven al begonnen met rekendidactiek. Het voorbeeld van de verhoudingstabellen staat geheel in hoofdstuk 8 van het boek ‘Rekenen voor de lerarenopleiding’, onder het motto: er horen lessen of delen van lessen te zijn waarbij de rekenmachine in de tas blijft. Daaraan voorafgaand wordt eerst het eindniveau van de basisschool besproken, aan de hand van het PPON 2004[27]. Daar kunnen de studenten in het eerste jaar nog niet voldoende grip op krijgen, maar we beginnen alvast om een idee te krijgen.
Daarna proberen we studenten te laten ervaren dat rekenen veel meer is dan optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. We laten ze rekenen in het Land van Okt, zonder dat je mag omrekenen van 8 naar 10 of 10 naar 8. Ze leren daarmee zich te verplaatsen in het leren rekenen en verder ervaren ze daarbij het belang van de structuur voor heel veel dingen die we met getallen doen.

“Realistisch wiskundeonderwijs is meer dan realistisch wiskundeonderwijs”. Dat is een uitspraak die we gebruiken na uitgebreid stilstaan bij het leren van algoritmen: eerst door voordoen-nadoen, dan door onderzoek en proberen, door kleine duwtjes naast zelf ontdekken. Duidelijk moet worden dat realistische wiskunde niet alleen het gebruiken van de realiteit betekent, maar ook voorkeur voor een constructivistische didactiek, die onder meer gebruik maakt van didactische elementen als hulpmiddelen en modellen, concretiseren en langzaam abstraheren.
Bij breuken moeten studenten in de tweedegraadsopleiding in het kader van vakdidactiek enkele didactische modellen leren kennen, zoals de breukenstok en de dubbele getallenlijn. Bij verhoudingen en procenten staan de verhoudingstabellen centraal. Die moeten wel in samenhang met de dubbele getallenlijn, waarmee ook de wiskundeleraar een wapen in handen krijgt om kinderen een beeld te geven bij dat moeilijke begrip procent.
Oefening baart kunst, maar zelden inzicht. We geven in het boek ‘Rekenen voor de lerarenopleiding’ een aantal mogelijkheden om bij oefenen het begrip niet uit het oog te verliezen en het overzicht niet kwijt te raken, maar juist te krijgen. Er zijn veel voorbeelden in opgenomen en de mogelijkheden voor eigen producties worden verkend.
Het laatste hoofdstuk wil laten zien dat rekenen de basis is van algebra en daarmee moet natuurlijk duidelijk worden dat er een doorlopende lijn hoort te zijn van basisschool naar middelbare school.

Het rekenboek nader bekeken

Het bovengenoemde APS-boek ‘Rekenen voor de lerarenopleiding’ is oorspronkelijk in 1994 ontwikkeld op basis van nascholingsmateriaal voor de invoering van W12-16, het leerplan wiskunde dat in 1993 is ingevoerd. Door genoemde ontwikkelingen was de tweede druk die stamt uit 1997 toe aan een ingrijpende herziening. Die derde druk is er nu. Een korte vergelijking van tweede en derde druk:
Het ‘oude’ boek ging veel meer uit van het voortbouwen en uitbouwen van op de basisschool verworven vaardigheden. Daardoor lag het accent in de tweede druk met name op het praktisch rekenen, de invulling zoals die in eerste instantie is bedacht voor het VO. Het nieuwe boek gaat veel

[27] Jansen, J. F. van der Schoot, B. Hemker, ‘Balans [32] van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4’, CITO, Arnhem, 2005

meer uit van het laten doorlopen van leerlijnen, en daarom is er ook veel aandacht voor breuken, verhoudingen en procenten en de fouten die leerlingen daarbij maken. Minder aandacht is er voor eigen oplosmethoden en de flexibiliteit die leerlingen in hun eigen strategieën kunnen hebben. Er is meer aandacht voor gevarieerd oefenen. Bovendien nemen we het rekenen als aangrijpingspunt voor uitbouw, ook naar de algebra. Er is daardoor meer aandacht voor eigenschapsrekenen en eigenschappen van getallen die 'abstract' kunnen zijn.

Vergeleken op inhoudsopgave

Nog even een kort schematisch overzicht, waarin de andere accenten duidelijk worden:

Inhoud oud (1997)	**Inhoud nieuw (2008)**
Resultaten van het huidige rekenonderwijs	Het rekenonderwijs in ontwikkeling
Het land van okt	Het land van okt
De tegelzetter	De tegelzetter
Ontwikkelingen in het reken/wiskundeonderwijs	
Hoofdlijnen van het rekenen in het VO	Hoofdlijnen van het rekenen in het VO
Examenprogramma VBO/MAVO	Examenprogramma VBO/MAVO
Eigen oplosmethoden van leerlingen	Breuken
Analyseren van rekenfouten	Verhoudingen en Procenten
De zakrekenmachine	De rekenmachine
	Handig rekenen en Schatten
	Gevarieerd Oefenen
	Van rekenen naar algebra

Discussie

Het is duidelijk dat PO en VO met elkaar de doorgaande lijnen met betrekking tot het rekenen moeten vormgeven. Het is ook duidelijk dat de lerarenopleidingen PO en VO samen moeten kijken hoe de leraren voldoende toegerust kunnen worden om dit leerstofdomein goed vorm te geven. Daarom sluiten we af door enkele vragen/discussiepunten aan te geven:
Wat zijn de verschillen tussen aanstaande leraren wiskunde en leraren basisonderwijs?
Wat moeten (aanstaande) leraren wiskunde in het VO weten van het rekenen in het PO?
Wat moeten (aanstaande) leraren in het basisonderwijs weten over wiskundeonderwijs in het VO?
Is het mogelijk om studenten van de PABO en van de lerarenopleiding van elkaar te laten leren?
Is het mogelijk noodzakelijk dat lerarenopleiders van PABO- en wiskundestudenten van elkaar leren?
Meer specifiek:
Welke plaats geven we zwakke rekenaars in de vakdidactiek?
Gebruiken we bij het rekenen nog de volgorde concreet-schematisch-abstract?
Welke vragen/discussiepunten kunnen we hier nog aan toevoegen?

Literatuur

Ballering, F. et al. (2008). *Rekenen voor de lerarenopleiding* (derde herziene druk), Utrecht, APS.
Jansen, J. F., Schoot, B. van der, & Hemker (2005). *Balans [32] van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4*, Arnhem: CITO.
Reichard, et al. (2007). *Getal en Ruimte 1 vmbo KGT, deel 1*, Houten: EPN.
Staal, H. et al. (2002). *Het voorbereiden van lessen voor de lerarenopleiding wiskunde*, Utrecht: APS.