HBO-raad
vereniging van hogescholen

Kennisbasis
Docent wiskunde

Bachelor

Kennisbasis

docent wiskunde
bachelor

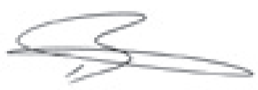
Voorwoord

De kwaliteit van ons bachelor onderwijs moet goed zijn, dit is niet alleen belangrijk voor onze studenten en het afnemende werkveld maar ook voor de Nederlandse kenniseconomie in het algemeen. Goede docenten zijn hierbij cruciaal en van de lerarenopleidingen wordt dus ook veel verwacht. Het niveau van de lerarenopleiding moet omhoog en het leerklimaat uitdagender. Om deze ambitie te kunnen realiseren moet je bij de basis beginnen, het gewenste eindniveau moet worden vastgesteld. De lerarenopleidingen voor het primair en voortgezet onderwijs hebben deze boodschap goed begrepen en zijn vorig jaar gestart met het ambitieuze project ‘Werken aan Kwaliteit’. Hierin werken zij aan de kwaliteit van de lerarenopleidingen door de vakinhoudelijke en vakdidactische kwaliteit van de lerarenopleidingen in kaart te brengen. Deze set van kennisbases garandeert de basiskwaliteit van de lerarenopleidingen.

Het afgelopen jaar is door alle lerarenopleidingen met veel enthousiasme hard gewerkt aan het beschrijven van de eerste set van kennisbases. Inhoudelijke experts, deskundigen op hun vakgebied, hebben de kennisbases die door de opleidingen aan hen zijn voorgelegd bestudeerd en daar waar zij dat nodig achtten nadere aanwijzingen gegeven. Het resultaat van deze arbeid ligt nu voor u. Dit is nog maar het begin van een traject waarin de kwaliteit van de opleidingen verder versterkt wordt door de implementatie van de kennisbases in de curricula van de opleidingen. Ook worden er kennistoetsen ingevoerd waarmee wordt gemeten of studenten de kennisbasis beheersen.

Zoals gezegd is ‘Werken aan Kwaliteit’ een groot en ambitieus project dat een bijzondere inspanning vergt van de sector. Velen uit de sector zijn op enigerlei wijze betrokken bij de uitvoering van het project. Door het harde werk en de grote betrokkenheid van al deze mensen zijn de eerste beschrijvingen van de kennisbases een groot succes te noemen en dit sterkt mij in het vertrouwen dat de lerarenopleidingen de overige kennisbases met dezelfde voortvarendheid en in nauwe samenwerking met externe deskundigen zullen beschrijven.

Ik dank allen die hieraan hebben bijgedragen.



Doekle Terpstra
Voorzitter HBO-raad

Inhoud

Inhoud 5

1. Toelichting en verantwoording 6

2. Preambule 10

3. Kennisbasis wiskunde 11

1. Wiskundige vakcompetenties 12
2. Analyse 15
3. Meetkunde 22
4. Algebra 28
5. Statistiek 34
6. Wiskunde overig 41

1. Toelichting en verantwoording

Inleiding

Voor u ligt de vakkennisbasis voor de tweedegraads opleiding van docenten voor het vak wiskunde. Deze is in het kader van het project Werken aan Kwaliteit ontwikkeld door een redactieteam, samengesteld uit docenten van de gezamenlijke tweedegraads lerarenopleidingen. De vakkennisbasis (kennis van het schoolvak) maakt deel uit van de drieslag: kennis van de leerling, kennis van het onderwijzen en kennis van het schoolvak. De vakredactie heeft zich eerst gebogen over dat deel van de totale kennis, wat een docent uit het schoolvak minimaal aan vakkennis zou moeten bezitten om verantwoord en adequaat vakonderwijs in het vmbo, het mbo en in de onderbouw van havo/vwo te kunnen verzorgen.

De vakredactie heeft prioriteit gelegd bij de vakkennisbases vanwege het maatschappelijke belang van een grondige beschrijving daarvan en het principe dat kennisinhoud vooraf gaat aan de constructie van het onderwijs en van toetsen. De kennisbasis is voorgelegd aan een panel, bestaande uit:

- twee vertegenwoordigers van de vakvereniging(en) van docenten wiskunde;
- drie gezaghebbende wetenschappers in de wiskunde;
- drie docenten die recent zijn afgestudeerd en thans werkzaam zijn in resp. vmbo, mbo en/of onderbouw havo/vwo. De kennisbasis is door het panel uitvoerig bestudeerd, besproken, van commentaar en advies voorzien en op basis daarvan bijgesteld.

De functies van de kennisbases

Aan het kennisniveau van iedereen in onze samenleving worden steeds hogere eisen gesteld. Dat geldt dus ook voor alle vormen van onderwijs waarmee mensen dat kennisniveau kunnen halen en behouden. Daarvoor is een versterking van de beroepsgroep docenten op alle niveaus, door innovatie en professionalisering van de onderwijsorganisaties, noodzakelijk. Dat vraagt om een onderlinge afstemming tussen alle betrokkenen en een planmatige aanpak met een duidelijke koers. Een gezamenlijk opgestelde en aanvaarde kennisbasis is daarbij het kompas.

De beroepskennis van leraren heeft wortels in twee wetenschappelijke domeinen. In de eerste plaats het domein van het vak en in de tweede plaats de kennis, die beschikbaar is over leren en onderwijzen. Die twee pijlers vormen samen het fundament onder de beroepskennis.

Het vermogen om zijn kennis op een doelmatige manier in de praktijk over te dragen, maakt iemand tot een goede leraar. De opbouw van beroepskennis begint tijdens de opleiding. De aldaar verworven kennis is een weldoordachte selectie uit het wetenschappelijke fundament, gerelateerd aan de actuele onderwijspraktijk. Deze selectie is de kennisbasis van de lerarenopleidingen. Die basis is vastgelegd in het curriculum van de opleidingen en in de bekwaamheidseisen. Deze eisen beschrijven het minimumniveau van kennis waarover de leraar moet beschikken om bekwaam verklaard te worden. Tijdens zijn loopbaan moet de leraar zijn kennis en vaardigheden, zowel op het gebied van zijn vak als van het ambt van leraar, via bij- en nascholing op peil houden. De beschrijving van de kennisbasis vormt de eerste schakel tussen theorie en praktijk. Samen met de nog te ontwikkelen elementen krijgt de startkwalificatie van de leraar vorm door:

1. een kennisbasis: de beschrijving van de kennis die de leraar aan het einde van zijn opleiding minimaal moet hebben om professioneel bekwaam en zelfstandig aan het werk te kunnen in het onderwijs;
2. een kennisbank: het dynamische systeem waarmee de lerarenopleidingen relevante kennis voor leraren toegankelijk maken;
3. kennistoetsen: het dynamische instrumentarium waarmee leraren in opleiding kunnen nagaan of zij de kennisbasis voldoende beheersen.

Competentiegericht opleiden

Bij competentiegericht opleiden staat bekwaamheid centraal. Het gaat om professioneel en adequaat leren handelen. Binnen de lerarenopleidingen is het leren op de werkplek in toenemende mate sturend voor de inrichting van het curriculum. Studenten doen in de praktijk veel (contextspecifieke) kennis op. Er moet dus nadrukkelijk aandacht besteed worden aan de inbedding van de praktische kennis in het repertoire aan theoretische en methodische kennis en andersom. De dubbele rol van de docent als kennisoverdrager en als pedagoog wordt door de Stichting Beroepskwaliteit Leraren en ander onderwijspersoneel (SBL) gedefinieerd als 'het kunnen hanteren van de praktische opgaven van het beroep in de verschillende situaties waarin het beroep wordt uitgeoefend, met kennis van zaken en methodisch geïnstrumenteerd'.

De kernopgaven zijn samengevat in vier beroepsrollen. Samen met de kenmerkende situaties in vier typen beroepssituaties ontstaat een matrix. Daarin onderscheidt SBL zeven onderwijscompetenties.

<table>
<tr><th></th><th>met leerlingen</th><th>met collega's</th><th>met omgeving</th><th>met mezelf</th></tr>
<tr><td>interpersoonlijk</td><td>1</td><td rowspan="4">5</td><td rowspan="4">6</td><td rowspan="4">7</td></tr>
<tr><td>pedagoog</td><td>2</td></tr>
<tr><td>(vak)didacticus</td><td>3</td></tr>
<tr><td>organisatorisch</td><td>4</td></tr>
</table>

Figuur 1: de zeven SBL-onderwijscompetenties

1. Interpersoonlijk: een goede leraar gaat op een goede, professionele manier met leerlingen om.
2. Pedagogisch: een goede leraar biedt de leerlingen in een veilige werkomgeving houvast en structuur om zich sociaal-emotioneel en moreel te kunnen ontwikkelen.
3. Vakinhoudelijk en didactisch: een goede leraar helpt de leerlingen zich de inhoudelijke en culturele bagage eigen te maken die iedereen nodig heeft in de hedendaagse samenleving.
4. Organisatorisch: een goede leraar zorgt voor een overzichtelijke, ordelijke en taakgerichte sfeer in zijn groep of klas.
5. Collegiaal: een goede leraar levert een professionele bijdrage aan een goed pedagogisch en didactisch klimaat op school, aan een goede onderlinge samenwerking en aan een goede schoolorganisatie.
6. Samenwerking met de omgeving: een goede leraar communiceert op een professionele manier met ouders en andere betrokkenen bij de vorming en opleiding van zijn leerlingen.
7. Reflectie en ontwikkeling: een goede leraar denkt op een professionele manier na over zijn bekwaamheid en beroepsopvattingen. Hij ontwikkelt zijn professionaliteit en houdt deze bij.

Al deze rollen voert de leraar op een professionele wijze uit, met kennis van zaken en praktisch en methodisch verantwoord. De kennisbasis levert daarvoor de noodzakelijke bouwstenen.

Elke leraar moet de wetenschapsbeoefening kennen die bijdraagt aan de ontwikkeling van zijn beroepskennis. De relevante uitkomsten daarvan moet hij voor zijn professionele ontwikkeling voortdurend betrekken op zijn eigen werk. Er zijn inmiddels mooie voorbeelden van gevestigde wetenschappelijke programma's. Daarin werken wetenschappers en leraren samen en gaat de theorieontwikkeling hand in hand met het ontwerpen en verbeteren van de onderwijsaanpak.

Kennis genereren en rubriceren

Op basis van het onderscheid tussen theoretische, methodische en praktische kennis enerzijds en het kennisperspectief van de leerling, leren en onderwijzen en leerinhouden anderzijds, ontstaat als matrix het negen-veldenmodel:

	Kennis van de leerling	**Kennis van leren en onderwijzen**	**Kennis van leerinhouden**
Theoretische kennis	Generiek	Generiek Vakspecifiek	Vakspecifiek
Methodische Kennis	Generiek	Generiek Vakspecifiek	Vakspecifiek
Praktische Kennis	Generiek	Generiek Vakspecifiek	Vakspecifiek

Figuur 2: Het negen velden-model om relevante kennis te genereren en te rubriceren

In deze beschrijving van de kennisbasis gaat het om de vakspecifieke componenten. In de tweede fase volgt een beschrijving van de generieke component. Naast de SBL-competenties bestaan er ook de Dublin descriptoren. Deze zijn leidend als eindtermen voor de bachelor- en masterstudies aan Europese hogescholen en universiteiten.

De descriptoren stellen dat de tweedegraads opgeleide leraar (op bachelorniveau):

- aantoonbaar kennis en inzicht heeft van een vakgebied;
- in de toepassing daarvan een professionele benadering van zijn werk toont en de problemen van zijn vakgebied beredeneerd oplost;
- in staat is om gegevens te verzamelen en te interpreteren en een oordeel te vormen, met afweging van relevante sociaal-maatschappelijke, wetenschappelijke en ethische aspecten;
- informatie, ideeën en oplossingen kan overdragen op anderen (zowel specialisten als niet-specialisten);
- de leervaardigheden bezit om op een hoog niveau van autonomie door te leren;
- zichzelf verantwoordt.

Het ligt voor de hand dat er overlap is tussen deze descriptoren en de SBL-competenties. Belangrijk is dat de leraar in opleiding uiteindelijk op deze verschillende gebieden zijn meesterproeven aflegt, die gemodelleerd zijn naar de realiteit. De lerarenopleidingen zelf ontwerpen deze meesterproeven. Op grond van de bekwaamheidseisen maken zij duidelijk welke kwaliteit het handelen van de leraar en zijn gebruik van kennis daarin moeten hebben. Maar die verantwoording houdt niet op na het afstuderen. Ook de school, waar de docent zijn beroep uitoefent, heeft een verplichting aan de samenleving om zich te verantwoorden voor de onderwijsinhoud en de professionaliteit van het personeel.

Permanente kwaliteitszorg is essentieel voor de maatschappelijke opdracht van iedere school. De kennisbasis levert de daarvoor noodzakelijke criteria (ijkpunten) aan. Hiermee is accreditatie en onderlinge benchmarking van scholen mogelijk gemaakt. Dit alles zal de transparantie aanzienlijk kunnen vergroten en ertoe bijdragen dat de kwaliteit van de leraar op het gewenste niveau blijft. De leraar kan aangesproken worden op de volgende minimale competenties:

- de leraar heeft op een praktisch niveau voldoende kennis van de onderwijsinhouden, van de onderwijsmethoden (pedagogisch en didactisch), -organisatie en -materialen en van de leerling en diens leefwereld;
- de leraar kan onderwijs- en begeleidingsprogramma's beoordelen, aanpassen en ontwerpen. Hij heeft voldoende kennis van pedagogische en didactische methoden om onderwijs- en begeleidingsprogramma's te kunnen beoordelen op kwaliteit en geschiktheid voor zijn leerlingen. Hij kan onderdelen daarvan aanpassen en bijdragen aan het ontwerpen van nieuwe programmaonderdelen;
- de leraar ontwikkelt zich zelfstandig verder. Hij heeft overzicht van de belangrijkste wetenschappelijke kennisgebieden waarop hij voor zijn beroepsuitoefening kan terugvallen en vindt daarin zelfstandig zijn weg.

Leeswijzer: de opbouw van de kennisbasis

Binnen het cluster exact zijn afspraken gemaakt over de vormgeving van de kennisbasis. De opbouw omvat beschrijvingen van de volgende onderdelen:

1. Een hoofdindeling op thema's of domeinen.
2. Een onderverdeling van kernconcepten / categorieën binnen de domeinen.
3. Een omschrijving van het kernconcept / categorie.
4. Een niveauaanduiding in de vorm van een voorbeeldopgave, een opdracht of een verwijzing naar algemeen erkende vakliteratuur.

De voorbeelden (voorbeeldopgaven) die in de kennisbasis genoemd worden, zijn exemplarisch. Als alleen naar deze opgaven gekeken wordt, geeft dat dus beslist een onvolledig beeld van de kennisbasis die een tweedegraads leraar binnen het cluster zou moeten hebben. Ze zijn dan ook alleen bedoeld om het gewenste niveau aan te geven.

2. Preambule

Dit rapport bevat een eindtermenontwerp als detaillering van het vakmatige deel van de kennisbasis wiskunde. Daarnaast bevat de kennisbasis wiskunde een vakdidactisch deel en een generiek deel.

Uitgangspunten voor de werkwijze

Voor de legitimering van deze kennisbasis heeft het legitimeringspanel de volgende uitgangspunten gehanteerd:

- De subdomeinen van de vakdomeinen (1 analyse, 2 meetkunde, 3 algebra, 4 kansrekening en statistiek en 5 wiskunde algemeen) zijn gedetailleerd uitgewerkt in eindtermen met voorbeeldtoetsen;
- De eindtermen zijn ten behoeve van gemeenschappelijke toetsing beschreven in termen van "De startbekwame docent kan … ". Daarnaast wordt met "De startbekwame docent kent en begrijpt…." de belangrijkste onderliggende conceptuele kennis benoemd;
- De voorbeeldtoetsen zijn compacte, niet al te omvangrijke en vrijwel contextloze opgaven, die vooral zicht geven op beheersing van vakkennis;
- Er is geen onderscheid gemaakt tussen propedeuse en hoofdfase. Voor de verwerving van vakinhoud is dat geen relevant onderscheid;
- Het domein 0 (wiskundige (vak)competenties) is beschreven in globale eindtermen. Deze worden niet geïllustreerd met opgaven, omdat toetsing voornamelijk via complexe opdrachten zal plaatsvinden;
- Er worden capita selecta gegeven. Dit zijn aanbevolen onderwerpen waaruit de opleidingen vanuit eigen opleidingsvisie en samenhang keuzen maken;
- De capita selecta zijn niet gedetailleerd uitgewerkt.

Uitgangspunten voor legitimering van het communale deel

- Het dient een basis en achtergrond te bieden voor onderwerpen in de schoolwiskunde van het onderwijsveld, waarvoor de tweedegraads lerarenopleiding opleidt;
- Het dient achtergrond te bieden aan denkbare toekomstige inhouden van schoolwiskunde (gezien de fluctuaties in de afgelopen 25 jaar);
- Beheersing van de wiskundeleerstof van de gehele bovenbouw van vwo;
- Wiskunde wordt als vakgebied in de breedte (o.a. geschiedenis, toepassingen) en diepte (o.a. de logische opbouw) gekend.

Voor achtergronden voor vakmatige doelstellingen en werkwijze van de lerarenopleidingen verwijzen we naar:

- *PML-rapport (Procesmanagement Lerarenopleidingen) van februari 1998*.
  Daarin zijn ook voorbeelduitwerkingen van leerinhouden toegevoegd die gestalte kunnen geven aan domein 0 van de KW.
- *Wiskunde vakbekwaam, WiVa,*
  NvvW (Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren), FI (Freudenthal Instituut) en SBL (Stichting Beroepskwaliteit Leraren), 2008, een beschrijving van de beroepsstandaard voor de wiskundedocent. In het bijzonder Bijlage 3 Wiskundige competenties, Onderdeel 1.

3. Kennisbasis wiskunde

Domein 0: Wiskundige vakcompetenties 12
Categorie 1: Denken en redeneren 12
Categorie 2: Argumenteren 12
Categorie 3: Communiceren 12
Categorie 4: Modelleren 12
Categorie 5: Probleem formuleren en oplossen 13
Categorie 6: Representatie 13
Categorie 7: Gebruik van symbolen, formele en technische taal en bewerkingen 13
Categorie 8: Gebruik van wiskundige hulpmiddelen en gereedschappen 13
Categorie 9: Onderzoeken 14
Categorie 10: Toepassen 14
Categorie 11: Omgaan met concepten 14

Domein 1: Analyse 15
Categorie 1: Functiebegrip 15
Categorie 2: Differentiaalrekening 16
Categorie 3: Integraalrekening 18
Categorie 4: Rijen en reeksen 19
Categorie 5: Differentiaalvergelijkingen 20
Categorie 6: Complexe getallen 21

Domein 2: Meetkunde 22
Categorie 1: Vlakke meetkunde 22
Categorie 2: Ruimtemeetkunde 24
Categorie 3: Analytische meetkunde 26
Categorie 4: Gonio-/trigonometrie 27

Domein 3: Algebra 28
Categorie 1: Elementaire algebra 28
Categorie 2: Getalverzamelingen 31
Categorie 3: Bewijstechnieken 32
Categorie 4: Matrixrekenen 33

Domein 4: Statistiek 34
Categorie 1: Beschrijvende statistiek 34
Categorie 2: Combinatoriek en kansrekening 37
Categorie 3: Kansverdelingen 38
Categorie 4: Verklarende statistiek 39

Domein 5: Wiskunde overig 41
Categorie 1: Grafentheorie 41
Categorie 2: Lineair programmeren 43
Categorie 3: Geschiedenis van de wiskunde 44
Categorie 4: Abstracte structuren 45

Domein 0: Wiskundige vakcompetenties

Categorie 1: Denken en redeneren

Omschrijving

De startbekwame docent kan:

- zichzelf en anderen wiskundige vragen stellen;
- een diversiteit aan antwoorden op een wiskundige vraagstelling geven;
- onderscheid maken tussen definitie, stelling, vermoeden enz.

Categorie 2: Argumenteren

Omschrijving

De startbekwame docent kan:

- diverse bewijsvoeringen leveren;
- onderscheid maken tussen aannemelijk maken en bewijzen;
- een deductieve structuur hanteren.

Categorie 3: Communiceren

Omschrijving

De startbekwame docent kan:

- zich schriftelijk en mondeling helder uitdrukken;
- wiskunde uitleggen voor specifieke doelgroepen m.b.v. (non-) voorbeelden, goede vragen (controlerende, stimulerende, kritische) en adequaat taalgebruik;
- vragen en reacties op gestelde vragen adequaat beantwoorden;
- wiskunde presenteren in een contextrijke omgeving m.b.v. foto's, tekeningen, modellen, simulaties, ICT; daarbij interactie organiseren.

Categorie 4: Modelleren

Omschrijving

De startbekwame docent kan:

- een situatie structureren;
- horizontaal (de-)mathematiseren;
- het model toetsen en reflecteren op beperkingen.

Categorie 5: Probleem formuleren en oplossen

Omschrijving

De startbekwame docent kan:

- problemen formuleren vanuit een situatie;
- problemen oplossen;
- heuristieken en algoritmen gebruiken;
- het vier-fasenmodel van Polya herkennen en hanteren.

Categorie 6: Representatie

Omschrijving

De startbekwame docent kan:

- verschillende representatievormen van wiskundige objecten (de-)coderen, vertalen en interpreteren;
- representatievormen kiezen en afwisselen.

Categorie 7: Gebruik van symbolen, formele en technische taal en bewerkingen

Omschrijving

De startbekwame docent kan:

- formele uitdrukkingen vertalen naar dagelijks taalgebruik en omgekeerd;
- beweringen en uitdrukkingen met symbolen en formules hanteren;
- symbolen en formules op diverse abstractieniveaus gebruiken.

Categorie 8: Gebruik van wiskundige hulpmiddelen en gereedschappen

Omschrijving

De startbekwame docent kan:

- gebruik maken van (grafische) rekenmachines en relevante wiskundige software;
- simulaties ontwerpen en uitvoeren;
- gebruik maken van concrete materialen;
- op verantwoorde wijze internet als hulpbron gebruiken;
- de beperkingen van deze hulpmiddelen aangeven.

Categorie 9: Onderzoeken

Omschrijving

De startbekwame docent kan:

- onderwerpen uit de wiskunde zelfstandig bestuderen;
- informatiebronnen raadplegen en zich verdiepen in de ontstaansgeschiedenis van het vakgebied;
- met behulp van (grafische) rekenmachines en relevante wiskundige software eigenschappen van functies, meetkundige figuren, e.d. ontdekken en daarover vermoedens formuleren;
- logische en relevante relaties leggen tussen probleemstelling, gegevens, beweringen en resultaten;
- bij een probleemstelling een passende aanpak kiezen;
- uitkomsten van onderzoek en de gevolgde werkwijze kritisch analyseren;
- het gebruik van wiskunde in kranten, boeken enz. kritisch beoordelen.

Categorie 10: Toepassen

Omschrijving

De startbekwame docent kan:

- wiskunde in andere schoolvakken en vakgebieden (natuurkunde, scheikunde, biologie, economie enz.) opsporen, kritisch beoordelen en gebruiken;
- het gebruik van wiskunde in dagelijkse situaties herkennen.

Categorie 11: Omgaan met concepten

Omschrijving

De startbekwame docent kan:

- van de wiskundige concepten in elke categorie van de vijf domeinen uit de Kennisbasis
  - hun betekenis in de wiskunde omschrijven;
  - een voorbeeld geven;
  - hun relevatie duiden voor de wiskunde in het voortgezet onderwijs en bve.

Domein 1: Analyse

Categorie 1: Functiebegrip

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: (afhankelijke en onafhankelijke) variabele, functie, inverse functie, grafiek, asymptoot, parameter, niveaulijn, extremen, injectie en bijectie.

De startbekwame docent kan:

T.a.v. lineaire, machts- en veeltermfuncties, exponentiële, logaritmische en periodieke functies:

- grafieken tekenen van machtsfuncties met rationale exponenten, van functies van het type $f(x)=a^x$ en hun inverse functies $f(x)={}^a\log x$, en van de goniometrische functies $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ en $f(x)=\tan x$;
- bij bovenstaande functies de begrippen domein, bereik, stijgen, dalen, symmetrie en asymptotisch gedrag hanteren;
- een in de context beschreven samenhang vertalen in een functievoorschrift;
- op grafieken transformaties uitvoeren (zoals verschuiven en rekken) en de samenhang met de bijbehorende verandering van het functievoorschrift beschrijven;
- functies combineren (optellen, aftrekken, schakelen) en de samenhang met de bijbehorende grafieken beschrijven;
- vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met numerieke, grafische of elementair-algebraïsche methoden;
- de rekenregels voor machten en logaritmen (inclusief grondtalverandering) gebruiken;
- gebruik maken van logaritmische schaalverdelingen;
- het begrip absolute waarde hanteren.

T.a.v. periodieke functies en parameterkrommen:

- eenparige cirkelbeweging en de harmonische beweging in verband brengen met de functies sinus en cosinus;
- gebruik maken van de begrippen periode, amplitude, evenwichtstand, faseverschil en frequentie bij het tekenen van een sinusoïde of het beschrijven van een periodiek verschijnsel;
- bij een gegeven sinusoïde een passende formule opstellen;
- vergelijkingen oplossen van het type $\sin a = \sin b$ en $\cos a = \cos$ waarbij a en b lineaire functies van x zijn en hierbij de periodiciteit gebruiken voor het vinden van alle oplossingen;
- de formules waarin $\sin(t \pm \pi)$, $\cos(t \pm \pi)$, $\cos(t \pm \frac{\pi}{2})$, $\sin(t \pm \frac{\pi}{2})$ $\sin(-t)$, $\cos(-t)$, $\sin(2t)$ en $\cos(2t)$ worden uitgedrukt in $\sin t$ en/of $\cos t$, gebruiken bij het herleiden van formules en het oplossen van vergelijkingen;
- de formules $\sin^2(t)+\cos^2(t)=1$ en $\sin t/\cos t=\tan t$,gebruiken bij het herleiden van formules;
- de formules voor $\sin(t \pm u)$, $\cos(t \pm u)$, $\sin t \pm \sin u$, $\cos t \pm \cos u$ gebruiken bij het verklaren van samengestelde trillingspatronen en bij het herleiden van formules;
- bij een gegeven parametervoorstelling de grafiek tekenen en domein, bereik en extremen bepalen.

T.a.v. functies van twee variabelen:

- eenvoudige functies grafisch weergeven m.b.v. niveaulijnen;
- vergelijkingen van vlakken en bollen koppelen aan functies van twee variabelen en weergeven in een driedimensionaal assenstelsel;
- lokale extremen en andere stationaire punten bepalen m.b.v. niveaulijnen en driedimensionale grafieken.

Capita selecta

- poolkrommen;
- richtingsafgeleiden, partiële afgeleiden en extremen van functies van twee variabelen.

Voorbeelden

Opgave 1

a) De functie f is voor iedere reële x gegeven door $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.

Toon aan dat $f(x) - f(1/x)$ een constante is mits $x \neq 0$.

b) Los op: $e^{-2x} + e^{2x} = 1$.

Opgave 2

Een punt beweegt in het Oxy-vlak volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$$

a) De grafiek die het punt beschrijft is een gedeelte van een parabool. Toon dit aan.

b) Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het punt waarvoor geldt $t = \pi/6$.

Categorie 2: Differentiaalrekening

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: limiet, differentie - en differentiaalquotiënt, continuïteit, snelheid van verandering, raaklijn, hellingfunctie, extremen.

De startbekwame docent kan:

- $\lim_{x \to a} f(x)$ en $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ berekenen met behulp van standaardlimieten en de rekenregels van limieten (som- en verschilregel, productregel, quotiëntregel en regel voor samenstelling);
- met limietberekeningen horizontale en verticale asymptoten van een functie bepalen;
- differentiequotiënten berekenen en deze interpreteren als gemiddelde verandering op een interval;
- bij afnemende stapgrootte differentiequotiënten interpreteren als benadering van de helling in een bepaald punt;

- met behulp van de limietberekening het differentiaalquotiënt berekenen van elementaire functies zoals x^2, x^3, $1/x$;
- in verschillende contexten de waarde van het differentiaalquotiënt interpreteren als verandering op één moment;
- de afgeleide van de inverse functie in verband brengen met de afgeleide van de functie, bijvoorbeeld bij de functie $\sin x$ en de inverse functie $\arcsin x$;
- het getal van Euler e in relatie brengen met het begrip differentiaalquotiënt; hij kent tevens de afgeleide van de functies e^x, $\ln x$, a^x, ${}^g\log x$;
- bepalen in welke punten een functie continu en differentieerbaar is;
- de eerste en hogere afgeleide van een willekeurige functie bepalen met behulp van de standaardafgeleiden en de rekenregels (scalarregel, som- en verschilregel, productregel, quotiëntregel en kettingregel);
- vergelijkingen van raaklijnen opstellen;
- bepalen op welke intervallen de grafiek van een functie stijgt of daalt en wat de extremen zijn;
- bepalen op welke intervallen de grafiek van een functie convex of concaaf is en wat de buigpunten zijn;
- met technieken uit de differentiaalrekening optimaliseringsvraagstukken oplossen.

Voorbeelden

Opgave 1

Bepaal m.b.v. de rekenregels van het differentiëren en de standaardafgeleiden een voorschrift van de afgeleiden van de volgende functies. Vereenvoudig het antwoord zoveel mogelijk.

a) $f(x) = x^2 \cdot \sin\left(3x^2\right)$ b) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

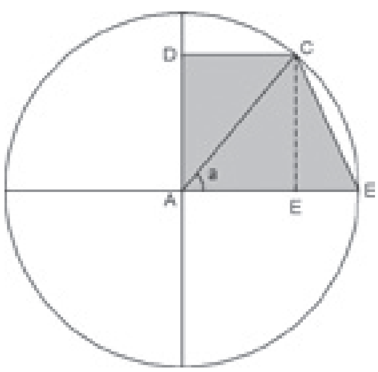
c) $f(x) = \sin^2(x+\pi) + 2 \cdot \ln x$ d) $f(x) = {}^4\log\left(16^x\right)$

Opgave 2

Gegeven is de eenheidscirkel met daarin getekend trapezium ABCD. Diagonaal AC van dit trapezium maakt hoek α met lijnstuk AB. Er geldt $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$

a) Laat zien dat de oppervlakte van het trapezium berekend kan worden met $\text{opp} = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (1 + \cos\alpha)$

b) Bereken bij welke α de oppervlakte van het trapezium maximaal is.



Categorie 3: Integraalrekening

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: Riemannsom, oppervlaktebegrip en primitieve functie.

De startbekwame docent kan:

- de oppervlakte onder de grafiek van een functie tussen de lijnen $x=a$ en $x=b$ benaderen met een Riemannondersom- en/of -bovensom;
- het verband leggen tussen oppervlakte, Riemannsom en integraal;
- het gemiddelde van een functie op een interval berekenen;
- met de rekenregels en de hoofdstelling van de integraalrekening oppervlakten berekenen;
- primitieve functies bepalen met de technieken breuksplitsen, partieël integreren en substitutie;
- eigenlijke en oneigenlijk integralen berekenen;
- de lengten van krommen en inhouden van omwentelingslichamen berekenen;
- integraalrekening toepassen in contexten.

Voorbeelden

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x)=3x^2$, op het interval $[0,2]$.

a) Laat zien dat de ondersom gelijk is aan $\sum_{k=0}^{n-1}\left(24\cdot\frac{k^2}{n^3}\right)$ voor willekeurige $n\in\mathbb{N}$.

b) Bepaal met de GR de ondersom voor $n=999$. Rond af op 2 decimalen.

Je kunt de oppervlakte met behulp van een ondersom ook exact bepalen.
Daarbij zul je gebruik moeten maken van de sommatie:

$$1^2+2^2+3^2+.....+(k-1)^2+k^2=\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$$

c) Laat zien hoe je de oppervlakte met een ondersom exact bepaalt.
d) Bepaal de exacte oppervlakte ook met behulp van primitiveren.

Opgave 2

Bereken of bepaal:

a) $\int\sin(2\pi t)\,dt$ b) $\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx$ c) $\int\frac{x+1}{x^2-1}\,dx$ d) $\int_0^\infty x\cdot e^{-x}\,dx$ e) $\int\sin^3 x\,dx$

3

Categorie 4: Rijen en reeksen

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: rij als functie van N naar R, meetkundige en rekenkundige rij, somrij, convergentie, discreet en continu, limiet, recursie.

De startbekwame docent kan:

- bij een probleem gegeven in een context het voorschrift voor een rij opstellen met behulp van een directe formule en/of een recursieve betrekking;
- de eigenschappen van een meetkundige en een rekenkundige rij benoemen;
- de termen en de som van een meetkundige of rekenkundige rij berekenen;
- een formule voor de termen van de verschilrij opstellen;
- rijen weergeven en bestuderen met tijd- en webgrafieken;
- de begrippen monotoon stijgende rij, monotoon dalende rij, begrensde rij, convergente rij en divergente rij herkennen en bepalen welk van deze eigenschappen een rij bezit;
- rekenregels voor limieten toepassen bij het berekenen van een limiet;
- de limiet van diverse rijen bepalen;
- met behulp van de insluitstelling de convergentie van een rij bepalen;
- webgrafieken inzetten om te onderzoeken of een rij convergeert;
- de contractiestelling gebruiken en dekpunten bepalen;
- de standaardlimieten $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ en $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}$ herkennen en met behulp van deze standaardlimieten andere limieten berekenen.

Capita selecta

- convergentieonderzoek met behulp van diverse convergentiecriteria, zoals absolute waarde kenmerk, d'Alembert, Cauchy en Leibnitz;
- Taylorreeksen, convergentiegebied en foutafschatting.

Voorbeelden

Opgave 1

Van een rekenkundige rij u_n is de eerste term u_1 gelijk aan 5. Het verschil tussen de 6e en de 10e term is 28.

a) Geef een rangnummerformule voor u_n.

b) Bereken s_{10}.

c) Bereken n als gegeven is dat $s_n = 3861$.

Opgave 2

Bereken de volgende limieten met behulp van standaardlimieten en rekenregels:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sin^4 n}{n}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-3)\cdot\frac{2n}{n^2-9}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{5n}\right)^{2n}$

Categorie 5: Differentiaalvergelijkingen

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: een differentiaalvergelijking als verband tussen grootheid en verandering, continu en discreet model, richtingsveld en beginvoorwaarde.

De startbekwame docent kan:

- bij een daartoe geschikt probleem een discreet model opstellen en verklaren;
- bij een daartoe geschikt probleem een continu model opstellen en verklaren;
- zo nodig het continue model afleiden uit een discreet model door verkleining van de stapgrootte, in het bijzonder bij de exponentiële, asymptotische en logistische modellen (concrete voorbeelden: griepepidemie, afkoelproces, populatiegroei);
- een differentiaalvergelijking oplossen met de methode ‘scheiden van variabelen’;
- uit de algemene oplossing van een differentiaalvergelijking de oplossing afleiden die past bij de randvoorwaarde;
- controleren door substitutie of een gegeven kromme de oplossingskromme is van een differentiaalvergelijking;
- een richtingsveld tekenen;
- van het richtingsveld de betekenis en het verband met de oplossingskrommen duiden;
- gebruik maken van geschikte ICT-hulpmiddelen om modellen door te rekenen en eigenschappen van uitkomsten en oplossingen te onderzoeken.

Capita selecta

- integratiefactor;
- isoclinen en orthogonale trajectorieën;
- stelsels differentie- en differentiaalvergelijkingen, tijdgrafieken en fasegrafiek;
- tweede-orde differentiaalvergelijkingen;
- uniciteit en existentie.

Voorbeelden

Opgave 1

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$.

a) Toon door substitutie aan dat $y = \frac{-1}{x^2}$ een oplossing is van de gegeven differentiaalvergelijking.

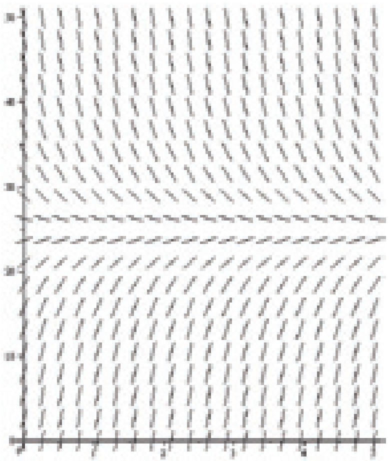
b) Zijn de lijnen met vergelijking $x = 0$ en $y = 0$ oplossingen van de differentiaalvergelijking?

c) Leid de algemene oplossing af van de differentiaalvergelijking. Bepaal vervolgens de oplossing bij randvoorwaarde $y(0) = 1$.

Opgave 2

Iemand bevindt zich op grote hoogte boven het aardoppervlak en laat daar een voorwerp los. Het voorwerp valt recht naar beneden. De snelheid van het vallende voorwerp voldoet aan de differentiaalvergelijking $\frac{dv}{dt} = 50 - 2v$

Hierin is t de tijd in seconden vanaf het moment dat het voorwerp wordt losgelaten en v de snelheid in meter per seconde. De valsnelheid op $t = 0$ is 0 m/s. Hiernaast is een gedeelte van het bijbehorende richtingsveld afgebeeld.



a) Ga na of uit bovenstaand richtingsveld kan worden opgemaakt of de volgende uitspraken waar zijn:

1) De snelheid van het voorwerp blijft toenemen, tot het voorwerp op de grond komt.

2) De snelheid van het voorwerp, vlak voordat het op de aardbodem neerkomt, is ca. 25 m/s.

b) Bepaal de oplossing van de differentiaalvergelijking en ga na of daaruit volgt dat de twee uitspraken, genoemd in a) waar zijn.

Categorie 6: Complexe getallen

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: complex getal, complexe functie en de hoofdstelling van de algebra.

De startbekwame docent kan:

- complexe getallen weergeven in Cartesische vorm, in poolvorm en als e-macht;
- rekenen met complexe getallen;
- representaties in het vlak tekenen;
- tweede- en hogeregraads vergelijkingen oplossen met complexe en reële oplossingen;
- meetkundige transformaties, zoals spiegeling, rotatie en translatie, beschrijven met complexe functies;
- met de formule van Euler berekeningen uitvoeren;
- de stelling van De Moivre toepassen;
- eigenschappen van complexe functies zoals $f(z) = z^2$, $f(z) = 1/z$ en $f(z) = az + b$ onderzoeken.

Capita selecta
- inversie;
- hoofdstelling van de algebra, complex ontbinden.

Voorbeelden

Opgave 1

Gegeven zijn de complexe getallen $z_1 = 3 + 4i$ en $z_2 = -2 + 2i$.

a) Bereken $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $\frac{1}{\overline{z_1}}$ en $\frac{1}{\overline{z_2}}$.

b) Hoe is de ligging van 0, z_1 en $\frac{1}{\overline{z_2}}$ ten opzichte van elkaar in het complexe vlak en wat kun je zeggen van de ligging van 0, z_2 en $\frac{1}{\overline{z_1}}$?

Opgave 2

A is de verzameling complexe waarvoor geldt $1 \leq |z| \leq 2$ en $0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{1}{3}\pi$.

a) Teken de verzameling A.

b) Teken het beeld van A onder de functie $f(z) = z^3$.

c) Beschrijf de beeldverzameling uit b) in woorden.

Domein 2: Meetkunde

Categorie 1: Vlakke meetkunde

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: constructie, gelijkvormigheid, puntverzamelingen, kegelsnede, congruentie en meetkundige plaats.

De startbekwame docent kan:

t.a.v. construeren en bewijzen:
- aan de hand van de gegevens van een driehoek nagaan of deze te construeren is;
- van twee driehoeken aantonen of ze gelijkvormig of congruent zijn;
- aantonen dat twee verschillende definities hetzelfde type vierhoek vastleggen;
- driehoeken en vierhoeken (en bijzondere lijnen daarin) construeren met geschikte software;
- stellingen bewijzen waarin middelloodlijnen, deellijnen en cirkels een rol spelen;
- puntverzamelingen construeren die aan zekere voorwaarden voldoen;
- stellingen over verschillende soorten hoeken die in een cirkel voorkomen benoemen;
- stellingen over koordenvierhoeken benoemen en bewijzen;
- meetkundige plaatsen opsporen en construeren met behulp van geschikte software.

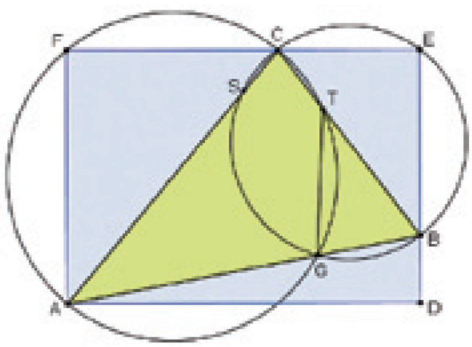
t.a.v. gebieden en grenslijnen:
- bij eenvoudige gebieden iso-afstandslijnen tekenen;
- de vorm van de iso-afstandslijn afleiden uit de vorm van het gebied;
- de eigenschappen van raaklijnvierhoeken benoemen;
- de meetkundige plaats vinden van punten die een gelijke afstand hebben tot twee gebieden;
- een conflictlijn puntsgewijs of stuksgewijs construeren.

t.a.v. de meetkundige interpretatie van kegelsneden:
- de meetkundige definities van parabolen, hyperbolen en ellipsen benoemen en ermee werken;
- cirkels, parabolen, ellipsen en hyperbolen beschouwen als kegelsneden;
- raaklijnen construeren aan kegelsneden, zowel in een punt van de kegelsnede als vanuit een punt daarbuiten;
- de raaklijneigenschappen van kegelsneden gebruiken, met name in verband met spiegels en golffronten;
- met geschikte software eigenschappen van kegelsneden ontdekken.

Capita Selecta
- niet-euclidische meetkunde.

Voorbeelden
Opgave 1

Om ΔABC is een rechthoek ADEF getekend, zoals in de figuur hiernaast. De omgeschreven cirkel van ΔACF heeft middelpunt M en de omgeschreven cirkel van ΔBCE heeft middelpunt N. De cirkels snijden elkaar in C en G. De omgeschreven cirkel van ΔACF snijdt BC in punt T. Noem $\angle BAC = \alpha$.



a) Bewijs: $\angle AGC = 90°$.

b) Bewijs: A, G en B liggen op één lijn.

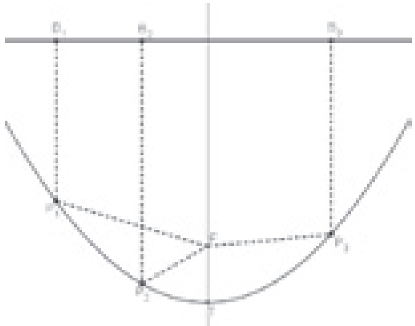
c) Bewijs: ΔTGB is gelijkvormig met ΔABC.

Opgave 2

Hieronder staat een parabool met brandpunt F. De symmetrieas is ook getekend; deze staat loodrecht op de richtlijn. Sommige spiegels, zoals een koplamp van een fiets en schotel-antennes hebben een oppervlak dat ontstaat door een parabool om te wentelen. Hiernaast staat een signaal van een verre bron getekend, de lijnen B_1P_1, B_2P_2 enz. zijn evenwijdig aan de symmetrie-as.

Bewijs dat alle signalen tegelijk in het brandpunt aankomen, dus dat geldt:

$|B_1P_1| + |P_1F| = |B_2P_2| + |P_2F| = |B_3P_3| + |P_3F|$



Categorie 2: Ruimtemeetkunde

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: doorsnede, parallelprojectie, afstand, snijden en kruisen, (parallel- en centrale) projectie, perspectief.

De startbekwame docent kan:

t.a.v. de onderlinge ligging van punten, lijnen, vlakken in concrete situaties:

- lengten van lijnstukken berekenen;
- argumenteren door gebruik te maken van incidentie-relaties tussen punten, lijnen en vlakken;
- constructies uitvoeren door gebruik te maken van argumenten betreffende incidentie-relaties.

t.a.v. afstanden en hoeken in concrete situaties:

- goniometrische berekeningen in een driehoek uitvoeren;
- afstanden en hoeken tussen twee objecten in de ruimte aangeven en berekenen.

t.a.v. fragmenttekeningen van ruimtelijke objecten:

- aanzichten in verschillende kijkrichtingen tekenen en interpreteren;
- uitslagen tekenen en interpreteren;
- in een gegeven voorstelling van een ruimtelijk object een vlakke doorsnede tekenen en doorsneden op ware grootte tekenen;
- uit een serie parallelle doorsneden van een ruimtelijk object een conclusie trekken over de vorm en de inhoud van het object.

t.a.v. perspectiefleer:

- bij twee gegeven aanzichten van orthogonale projectie het derde aanzicht construeren;
- bij een gegeven een afbeelding in het grondvlak, oogpunt en tafereel horizon, verdwijnpunten en afbeelding in perspectief construeren;
- bij gegeven boven- en zijaanzicht, met daarin een object, tafereel en oogpunt, alsmede een afbeelding in perspectief construeren;
- in perspectieftekeningen verdwijnpunten en verdwijnrechten construeren en met behulp daarvan de tekening uitbreiden;
- lijnstukken in perspectief in gelijke stukken verdelen;
- perspectieftekeningen maken;
- een-, twee- en driepuntsperspectief herkennen op schilderijen, tekeningen en foto's, alsmede de vluchtpunten construeren die de schilder of tekenaar heeft gebruikt.

t.a.v. regelmatige veelvlakken en de polyederformule van Euler:

- in regelmatige veelvlakken berekeningen uitvoeren aan lengten, hoeken, oppervlakte, inhoud, ingeschreven en omgeschreven bollen;
- voor regelmatige veelvlakken formules van samenhang tussen diverse grootheden (zoals het aantal ribben per hoekpunt) opstellen en gebruiken;
- grafen tekenen bij gegevens over veelvlakken om daarmee uitspraken te doen over het al dan niet bestaan van het veelvlak, het bepalen van aantallen zijvlakken, eigenschappen van duale figuren.

t.a.v. computergebruik bovengenoemde onderwerpen onderzoeken met geschikte software.

Capita selecta

- veelvlakken ontwerpen en bouwen;
- bouwplaten uit één stuk;
- anamorfosen;
- bovengenoemde punten met betrekking tot halfregelmatige veelvlakken, deltaveelvlakken en sterren.

Voorbeelden

opgave 1

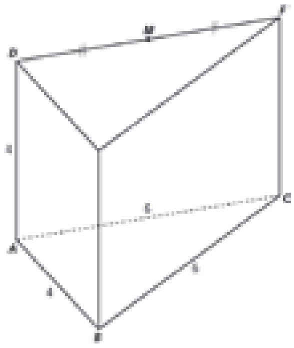
Gegeven is het prisma ABC.DEF met $AB = AD = 4$ en $AC = BC = 6$ Punt M is het midden van ribbe DF.

a) Bereken de lengte van BM.

b) Bereken in hele graden $\angle BMC$.

c) Bereken de afstand van de lijnen BM en CF.

d) Construeer het snijpunt van de rechte door M en midden van het vierkant ABED en het grondvlak ABC.



opgave 2

Een blok ABCD.EFGH is in perspectief gegeven. Het grondvlak ABCD is een vierkant.
Gegeven zijn tevens de punten P en R die op DCGH en DHAE liggen.

a) Construeer de doorsnede door het blok die gaat door P en R en evenwijdig is aan BC.
b) Construeer de verdwijnrechte van die doorsnede.

Categorie 3: Analytische meetkunde

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: vector, vectorvoorstelling, snijden en kruisen, inproduct, hoek, kegelsnede en meetkundige plaats.

De startbekwame docent kan:

- de mogelijke ligging van twee lijnen en twee vlakken onderscheiden;
- lijnen beschrijven met een vergelijking en met een vectorvoorstelling;
- de hoek berekenen tussen lijnen en/of vlakken;
- stelsels vergelijkingen oplossen, zowel handmatig als met geschikte software;
- de afstand tussen punten, lijnen en/of vlakken berekenen;
- het inwendig product berekenen en gebruiken bij het omzetten van een vergelijking in een vectorvoorstelling en andersom;
- de standaardvergelijkingen bij lijnen, vlakken, cirkels en bollen geven;
- de verzameling punten die een gelijke afstand hebben tot twee lijnen of twee vlakken bepalen;
- berekenen of twee lijnen of twee vlakken loodrecht op elkaar staan;
- parabool, ellips en hyperbool omschrijven als meetkundige plaatsen met een zekere eigenschap (conflictlijnen);
- van een parabool, een ellips en een hyperbool vergelijkingen opstellen;
- top, brandpunt en richtlijn van een parabool bepalen;
- de toppen en brandpunten van een ellips en hyperbool bepalen;
- met geschikte software diverse kegelsneden onderzoeken.

Capita selecta

- uitproduct;
- raaklijnen en poollijnen;
- algemene kwadratische vergelijking voor kegelsneden.

Voorbeelden

Opgave 1

Gegeven zijn het vlak V met vergelijking $3x - y + z = 5$ en

het vlak W met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Laat met een berekening zien dat de vlakken V en W evenwijdig zijn.

b) Geef een vergelijking van het vlak W.

c) Een lijn m snijdt de vlakken V en W loodrecht en gaat door het punt $(12,6,8)$.
Geef een vectorvoorstelling van m.

d) Bereken de afstand tussen de vlakken V en W.

Opgave 2

De punten $F_1(-6,0)$ en $F_2(6,0)$ zijn de brandpunten van een hyperbool. De lijn met vergelijking $y = 2x$ is één van de asymptoten.

a) Geef de vergelijking van de andere asymptoot.

b) Construeer de toppen van de hyperbool met de cirkel door F_1 en F_2.

c) Geef de vergelijking van de hyperbool.

Categorie 4: Gonio-/trigonometrie

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: goniometrische verhouding, periodiciteit en de eenheidscirkel.

De startbekwame docent kan:

- met behulp van de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens hoeken en lengten van lijnstukken berekenen;
- met behulp van de sinus- en de cosinusregel lengtes van lijnstukken en hoeken berekenen in het platte vlak en in de ruimte;
- een afleiding geven van formules voor de dubbele hoek.

Capita selecta

- landmeetkunde;
- bolmeetkunde;
- kaartprojecties.

Voorbeelden

Opgave 1

Op de rechthoek ABCD zijn punten P op DC en Q op BC zo gekozen dat $\angle AQP = 90^\circ$ en $AP = 1$.

We noemen $\angle BAQ = \alpha$ en $\angle QAP = \beta$.

a) Leg uit dat $\angle APD = \alpha + \beta$.

b) Toon aan: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Opgave 2

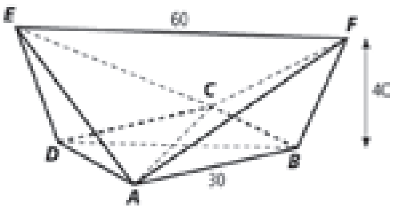
Het hieronder getekende lichaam heeft een vierkant grondvlak. De bovenste ribbe EF is evenwijdig aan de diagonaal BD van het grondvlak. De opstaande ribben BF en ED zijn even lang. In de tekening zijn de benodigde afmetingen te vinden.

a) Teken een bovenaanzicht van dit lichaam.

b) Bereken de lengte van ribbe AF.

c) Bereken in hele graden de hoek die het vlak AFE met het grondvlak maakt.

d) Bereken $\angle ABF$ in hele graden nauwkeurig.



Domein 3: Algebra

Categorie 1: Elementaire algebra

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: variabele, algebraïsche expressie, term, factor, formule, vergelijking, equivalentie, algebraïsch verband, macht, wortel, exponent en logaritme.

De startbekwame docent kan:

T.a.v. voorkennis:

- lineaire vergelijkingen en ongelijkheden oplossen;
- stelsels vergelijkingen en ongelijkheden oplossen en grafisch weergeven;
- op diverse manieren vergelijkingen oplossen, o.a. met tweedegraadstermen, wortelvormen en absolute waarde;
- karakteristieke eigenschappen benoemen van de functies x^2, x^3, $1/x$, $1/x^2$, $\sqrt{x}$, e^x, $\ln x$;
- translaties uitvoeren (horizontaal, verticaal, vermenigvuldiging t.o.v. x-as en vermenigvuldiging t.o.v. y-as).

T.a.v. formulemanipulatie:

- de volgende herleidingen uitvoeren met breukvormen:
  - $\frac{A}{B}+C=\frac{A+B\cdot C}{B}$
  - $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D+B\cdot C}{B\cdot D}$
  - $A\cdot\frac{B}{C}=\frac{A\cdot B}{C}=\frac{A}{C}\cdot B=A\cdot B\cdot\frac{1}{C}$
  - $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$
  - $\frac{A}{B/C}=A\cdot\frac{C}{B}=\frac{A\cdot C}{B}$

- de volgende herleidingen uitvoeren met wortelvormen:
  - $\sqrt{A}=B\Rightarrow A=B^2\ (B\geq 0)$
  - $\sqrt{A\cdot B}=\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\ (A,B\geq 0)$
  - $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\ (A,B\geq 0)$

- de volgende herleidingen uitvoeren met bijzondere producten:
  - $A^2\pm 2A\cdot B+B^2=(A\pm B)^2$
  - $A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)$

- de volgende regels van machten gebruiken:
  - $a^0=1$
  - $a^{p+q}=a^p\cdot a^q$
  - $(a^p)^q=a^{p\cdot q}$
  - $a^{-p}=\frac{1}{a^p}$
  - $a^{p-q}=\frac{a^p}{a^q}$
  - $(a\cdot b)^p=a^p\cdot b^p$
  - $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$

- de volgende regels van logaritmen gebruiken:
  - ${}^{g}\log(a \cdot b) = {}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b)$
  - ${}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right) = {}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b)$
  - ${}^{g}\log(a^{n}) = n \cdot {}^{g}\log(a)$
  - ${}^{g}\log(a) = \frac{{}^{b}\log(a)}{{}^{b}\log(g)}$

- vergelijkingen oplossen met behulp van de algemene vormen:
  - $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$
  - $A \cdot B = A \cdot C \Leftrightarrow A = 0 \vee B = C$
  - $\frac{A}{B} = C \Leftrightarrow A = B \cdot C \wedge B \neq 0$
  - $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \cdot D = B \cdot C \wedge B \neq 0 \wedge D \neq 0$
  - $A^{2} = B^{2} \Leftrightarrow A = B \vee A = -B$

- bovengenoemde herleidingen gecombineerd uitvoeren.

T.a.v. verzamelingen:

- de volgende begrippen uit de verzamelingenleer interpreteren en hanteren: verzamelingen, deelverzameling, element, doorsnede, vereniging, complementverzameling, disjunct, lege verzameling, verschilverzameling, machtsverzameling en symmetrisch verschil;
- de symbolen voor de begrippen uit de verzamelingenleer hanteren;
- het verschil en het product van twee verzamelingen bepalen en de symbolen van die bewerkingen hanteren;
- de gelijkheid van twee verzamelingen aantonen.

T.a.v. rekenen zonder rekenmachine:

- hoofdrekenen (tafels, kwadraten van de getallen 1 t/m 30, machten van 2 en 3 die kleiner zijn dan 1000);
- 'handig' rekenen, verschillende methoden*;
- schattend rekenen;
- cijferen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen) op papier;
- berekeningen uitvoeren met procenten, breuken en decimale schrijfwijzen;
- verhoudingstabellen gebruiken;
- het metriek stelsel toepassen;
- de volgorde van bewerkingen toelichten en uitvoeren.

* Voorbeelden van 'handig' rekenen zijn:

- 49 * 51 = (50 – 1) * (50 + 1) = 50 * 50 – 1 * 1 = 2499
- 67 * 63 = 70 * 60 + 7 * 3 = 4221
- 426 / 0,5 = 426 * 2 = 852
- 14 * 28 = 2 * 14 * 14 = 2 * 196 = 392
- 8000 / 25 = 8000 / 100 * 4 = 80 * 4 = 320
- 2,5 / 125 = (250 / 125) / 100 = 2 / 100 = 0,02

Voorbeelden

Opgave 1

a) breng $\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}$ onder een noemer, werk alle haakjes uit en vereenvoudig.

b) schrijf $16u^3-4uv^4$ als het product van drie factoren.

c) Schrijf $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ in de vorm $a\sqrt{b}$ waarin de wortel onvereenvoudigbaar is.

d) Schrijf $\left(ab^2c^{-1}\right)^3\cdot\left(\frac{b^3c}{a}\right)^2$ zo eenvoudig mogelijk als een macht of een product van machten.

e) Schrijf y als functie van x als gegeven is dat $x+3y+2xy=y$.

Opgave 2

Bepaal alle oplossingen van de onderstaande vergelijkingen.

a) $(3x+1)\cdot(3x-1)=8$.

b) $x^3+x=x^2$.

c) ${}^3\log\left(x^2+2\right)=1+{}^3\log x$.

Categorie 2: Getalverzamelingen

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: getal, verzameling, priemgetal, congruenties, ggd, rationaal en irrationaal.

De startbekwame docent kan:

- de getalverzamelingen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ onderscheiden en bewerkingen uitvoeren in die getalverzamelingen;
- eigenschappen van commutatieviteit, associativiteit en distributiviteit hanteren;
- delers en priemfactoren van een getal bepalen;
- de grootste gemene deler van twee getallen bepalen, onder andere met het algoritme van Euclides;
- het belang van priemgetallen voor de wiskunde benoemen, bijvoorbeeld in de hoofdstelling van de rekenkunde;
- modulo-rekenen;
- rekenen met binaire getallen;
- lineaire Diophantische vergelijkingen oplossen;
- bewijzen dat er getallen bestaan die wel in $\mathbb{R}$ zitten, maar niet in $\mathbb{Q}$;
- bewijzen dat rationale getallen zijn weer te geven als repeterende decimale breuk en omgekeerd.

Capita selecta
- lineaire congruentievergelijkingen;
- stellingen van Fermat en Euler.

Voorbeelden
Opgave 1

Bewijs dat:

a) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

b) $3 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Opgave 2

Beschouw de lineaire Diophantische vergelijking: $49x + 37y = 2000$.

a) Bepaal alle geheeltallige oplossingen *x*, *y* van de gegeven vergelijking.

b) Bepaal het *aantal* geheeltallige, *positieve*, oplossingen *x*, *y* van de gegeven vergelijking.

Categorie 3: Bewijstechnieken

Omschrijving
De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: contrapositie, volledige inductie, bewijs uit ongerijmde, universele en existentiële beweringen, (bi-)implicatie en logische operatoren.

De startbekwame docent kan:
- vermoedens formuleren op basis van voorbeelden;
- bewijzen leveren met de volgende technieken: waarheidstabel, contrapositie, bewijs met volledige inductie, Pigeonhole-principe, bewijs uit het ongerijmde en het geven van een tegenvoorbeeld;
- bi-implicaties bewijzen, bijvoorbeeld door een splitsing te maken in twee implicaties;
- onderscheid maken tussen existentie- en constructiebewijzen en deze uitvoeren;
- de wetten van De Morgan en de dubbele ontkenning gebruiken in een bewijs;
- samengestelde beweringen bewijzen uit enkele beweringen;
- bewijzen opschrijven met behulp van geschikte wiskundige symbolen, zoals getalverzamelingen, (bi-)implicaties, existentiële en universele kwantor.

Voorbeelden
Opgave 1

Bewijs:

a) Elk oneven getal m groter dan 1 is het verschil van twee kwadraten.

b) Gegeven is de bewering

“ $\forall_{n \in \mathbb{Z}} \; |n| > 2 \Rightarrow (n+2)(n^2 - 2n + 1) \neq 0$

Schrijf de contrapositie van deze bewering op en bewijs vervolgens de gegeven bewering.

Opgave 2

Bewijs met volledige inductie dat voor alle niet-negatieve gehele getallen *n* geldt:

$$\sum_{i=0}^{n} (4i + 2) = 2(n+1)^2$$

Categorie 4: Matrixrekenen

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: matrix, stelsels, inverse matrix en determinant.

De startbekwame docent kan:

- een lineair stelsel vergelijkingen oplossen met de eliminatiemethode van Gauss;
- een lineair stelsel vergelijkingen weergeven in matrixnotatie;
- rekenen met matrices;
- een probleem gegeven in een context vertalen naar een matrixmodel;
- het limietgedrag van een matrixmodel onderzoeken en stabiele toestanden bepalen m.b.v. ICT;
- de inverse en de determinant van een matrix bepalen en daarmee stelsels oplossen;
- matrixrekening in verband brengen met meetkundige afbeeldingen en afbeeldingsmatrices opstellen.

Capita selecta

- basis, lineaire (deel-)ruimte;
- kern- en beeldruimte;
- eigenwaarden en eigenvectoren, limietgedrag Leslie- en Markovmatrices;
- lineaire afbeelding;
- toepassingen van lineaire algebra, bijv. in de coderingstheorie of bij kleinste-kwadraten-krommen.

Voorbeelden

Opgave 1

Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ en de vector $\underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

a) Bepaal de determinant van A.

b) Bepaal de inverse matrix A^{-1} van matrix A.

c) Bepaal de vectoren $\underline{x}$ waarvoor geldt: $A\underline{x} = \underline{b}$.

Opgave 2

In een grote vijver zijn Japanse goudvissen uitgezet. Deze vissen hebben natuurlijke vijanden zoals padden en reigers. De populatie-voorspellingsmatrix staat hieronder. De gegevens zijn gebaseerd op jaarlijkse tellingen in de maand dat de jonge visjes geboren worden. In een nieuwe vijver zijn 100 nuljarige vissen uitgezet en 50 eenjarige.

a) Bereken de leeftijdsopbouw van de volgende drie generaties.
b) Onderzoek of na verloop van tijd een stabiele situatie ontstaat.

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \textbf{van} \\
 & & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \geq 4 \end{array} \\
\textbf{naar} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \geq 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 25 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Domein 4: Statistiek

Categorie 1: Beschrijvende statistiek

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: steekproef, cumulatief, frequentieverdeling, centrummaat, spreidingsmaat, regressie- en correlatie, discreet en continu, representativiteit van steekproef en populatie.

De startbekwame docent kan:

- de betekenis geven van basisbegrippen uit de statistiek: steekproef, populatie, non-respons, continue- en discrete variabele, meetschalen (nominaal, ordinaal, interval- en ratioschaal), klasse-indeling, klassemidden, frequentieverdeling, correlatiecoëfficiënt en regressiekromme;
- de juiste meetschaal van een statistische variabele vaststellen;
- een verzameling meetwaarden classificeren en weergeven in een frequentieverdeling;
- op basis van een aantal meetwaarden de centrummaten gemiddelde, modus en mediaan en de spreidingsmaten range, interkwartielafstand en standaarddeviatie berekenen;
- het gemiddelde, de mediaan, de modale klasse en de standaardafwijking bepalen van een geclassificeerde variabele;
- meetwaarden weergeven in een diagram, tabel of grafiek (onder andere cirkeldiagram, histogram, boxplot, cumulatief frequentiepolygoon en kruistabel);
- de vuistregels van de normale verdeling gebruiken;
- meetwaarden uitzetten op normaal-waarschijnlijkheidspapier om na te gaan of meetwaarden normaal verdeeld zijn;
- de correlatie tussen twee reeksen meetwaarden bepalen door de correlatiecoëfficiënt uit te rekenen;

- het voorschrift van de lineaire regressielijn opstellen en kan met dat voorschrift voorspellingen geven;
- meetwaarden verwerken met geschikte software;
- een eenvoudig statistisch onderzoek opzetten en uitvoeren.

Capita selecta

- voorschriften van niet-lineaire regressiekrommen bepalen met geschikte software;
- correlatiematen van niet-lineaire regressiemodellen bepalen en interpreteren.

Voorbeelden

Opgave 1

Hieronder zie je geboorte en sterftecijfers per jaar van de laatste acht jaar voor de stad Breda over de jaren 2000 t/m 2007. We willen onderzoeken of we op grond van deze gegevens een goede voorspelling kunnen maken voor het aantal inwoners van Breda in de komende jaren. Omdat er geen gegevens bekend zijn over het aantal personen dat per jaar door verhuizing uit de gemeente vertrekt, mag je aannemen dat hun aantal gelijk is aan het aantal mensen dat zich er vestigt.

Jaar	Geboorten	Overledenen
2000	2013	1545
2001	2086	1528
2002	2083	1580
2003	2040	1318
2004	1815	1384
2005	2146	1309
2006	2110	1358
2007	2192	1340

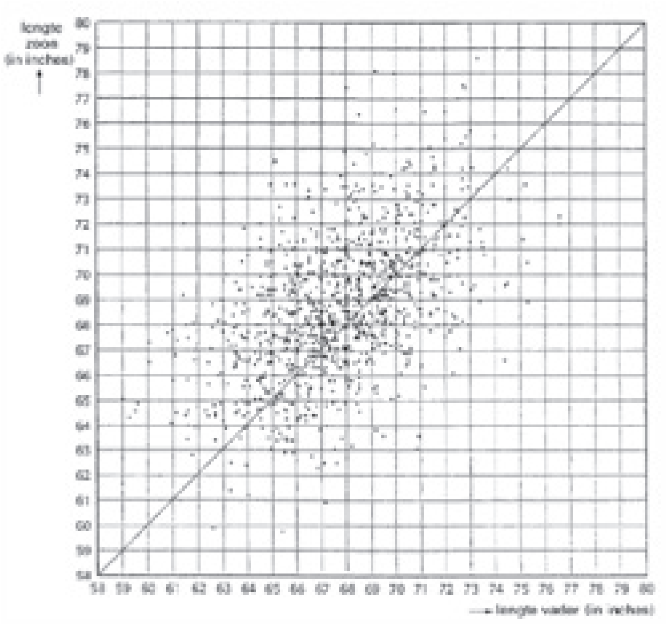
a) Geef de bevolkingsgroei per jaar weer in een spreidingsdiagram.
b) Bepaal de vergelijking van de lineaire regressielijn.
c) Bepaal de correlatiecoëfficiënt. Wat kun je hier uit afleiden over de bevolkingsgroei?
d) Aan het einde van het jaar 2007 had Breda 170 495 inwoners. Hoeveel inwoners voorspel je dat Breda aan het einde van 2008 heeft?
e) In welk jaar zal (volgens je model) het aantal inwoners van Breda voor het eerst boven de 175 000 uitkomen? Toon dit aan met een berekening.

Opgave 2

De Engelsman Karl Pearson was een van de grondleggers van de moderne statistiek en paste dit vaak toe op biologische onderwerpen. Ongeveer een eeuw geleden onderzocht hij of in Engeland zonen gemiddeld langer zijn dan hun ouders. Hij vergeleek in dat onderzoek de lengtes van 1064 zonen en hun vaders. De zonen studeerden allen aan een Londense universiteit.

a) Deze steekproef is niet aselect. Geef minstens twee concrete redenen waarom.

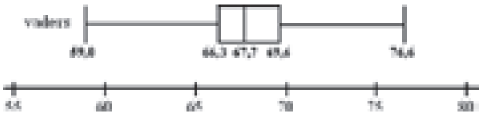
In de figuur hieronder zie je een overzicht van de resultaten. Elke stip stelt een vader-zoon-paar voor. De lengtes van de vader staan op de horizontale as, de lengte van de zoon op de verticale as. De lengtes zijn in inches (1 inch is 2,54 cm).



In de figuur is een lijn getekend. Als een stip op deze lijn ligt, dan zijn vader en zoon precies even lang. We noemen een vader en zijn zoon ongeveer even lang als ze minder dan 2 inch in lengte verschillen.

b) Teken in de figuur het gebied waarin de punten liggen die horen bij vaders en zonen die ongeveer even lang zijn.
c) Kun je met behulp van het getekende gebied in onderdeel b) concluderen dat de zonen **gemiddeld** langer zijn dan hun vaders?

In de figuur hieronder zie je een simpele boxplot bij de lengtes van de 1064 vaders uit het onderzoek van Pearson. Onder de boxplot staan vijf kenmerkende getallen.



d) Wat stellen die vijf getallen voor?
e) De volgende uitspraak is gebaseerd op de boxplot, is deze uitspraak waar? Het aantal vaders met een lengte tussen 67,7 en 69,6 inch is groter dan het aantal vaders met een lengte 66,3 en 67,7 inch.

Categorie 2: Combinatoriek en kansrekening

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: tellen, driehoek van Pascal, kans, voorwaardelijke kans, kansdefinitie van Laplace, experimentele wet van de grote aantallen en onafhankelijke gebeurtenis.

De startbekwame docent kan:

- telproblemen oplossen met behulp van combinaties, variaties, permutaties en samenstellingen daarvan;
- rekenen met binomiaalcoëfficiënten en kent de relatie met het binomium van Newton en de driehoek van Pascal;
- de kansregels (somregel, complementregel, productregel, regel voorwaardelijke kans) toepassen;
- kansproblemen inzichtelijk maken met een kansboom, vaasmodel of rooster.

Voorbeelden

Opgave 1

a) Hoeveel 4-cijferige getallen zijn er, die alleen bestaan uit de cijfers 1, 2, 3, 4 en 5, die even zijn, geen dubbele cijfers bevatten en beginnen met een 4 of kleiner?

Gegeven is het woord HERTENTAMEN.

b) Hoeveel verschillende ‘woorden’ zijn er mogelijk met alle letters van dat woord?
c) Hoeveel van die ‘woorden’ beginnen met een T?
d) In hoeveel ’woorden’ staan de letters H en de A **niet** naast elkaar?

Opgave 2

In een vaas bevinden zich 9 eerlijke dobbelstenen en een oneerlijke dobbelsteen.
De kans dat je met die oneerlijke dobbelsteen een 6 gooit is 1/2. Iemand neemt willekeurig een dobbelsteen uit de vaas en gooit vervolgens drie keer met die dobbelsteen. Resultaat: drie zessen. Bereken de kans dat de getrokken dobbelsteen de oneerlijke dobbelsteen is.

Categorie 3: Kansverdelingen

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: kansverdeling, verwachtingswaarde, variantie, centrale limietstelling, kansvariabele of stochast, discreet en continu.

De startbekwame docent kan:

- voor een kansvariabele met gegeven kansverdeling de verwachtingswaarde en variantie berekenen;
- bij een binomiale, hypergeometrische, Poisson en normale verdeling kansen en grenswaarden berekenen en de verwachting en de standaardafwijking van een binomiaal verdeelde kansvariabele berekenen;
- bij een binomiale, hypergeometrische, Poisson en normaal verdeelde kansvariabele de verwachtingswaarde, variantie en standaardafwijking bepalen;
- De samenhang benoemen tussen de hypergeometrische, binomiale en Poissonverdeling, en daarvan gebruik maken bij het oplossen van kansvraagstukken;
- regels voor verwachtingswaarde en variantie bij optelling van kansvariabelen toepassen, in het bijzonder de standaardafwijking van de som van onafhankelijke toevalsvariabelen berekenen en in samenhang daarmee de $\sqrt{n}$ -wet gebruiken;
- beoordelen of een verdeling mag worden benaderd met een normale verdeling;
- een discrete verdeling benaderen met een normale verdeling, al dan niet met een continuïteitscorrectie.

Capita selecta

- negatief-exponentiële verdeling en gamma-verdeling;
- Chi-kwadraat-verdeling.

Voorbeelden

Opgave 1

a) Een multiple choice-tentamen telt 20 vragen, elk met 4 mogelijke antwoorden, waarvan er één juist is. Indien een student naar willekeur aankruist, hoe groot is dan de kans op meer dan 10 goede antwoorden?

b) Een handelaar koopt 1500 LED-lampen in bij een fabriek. Bekend is dat 0,5% van de lampen een fabricagefout bevat. Bereken met een Poissonbenadering hoe groot de kans is dat de handelaar 12 of meer lampen met een fabricagefout koopt.

Opgave 2

Een instituut onderzoekt de prestaties van studenten voor een economietentamen. Voor studenten met wiskunde in hun vwo-examen geldt dat hun scores beschouwd kunnen worden als een normaal verdeelde variabele x met $\mu = 68{,}4$ punten en $\sigma = 5{,}2$ punten. Voor studenten zonder wiskunde in hun vwo-pakket is dit een normaal verdeelde variabele y met $\mu = 61{,}3$ en $\sigma = 6{,}4$.

a) Benader de kans dat 6 studenten met wiskunde in het vwo-examen een gemiddelde score behalen die hoger is dan 70,0 punten.

Van een groep van 6 studenten met wiskunde en van een groep van 8 studenten zonder wiskunde in het vwo-examen wordt de gemiddelde score bepaald.

b) Benader de kans dat het verschil tussen de gemiddelde scores van deze groepen meer dan 10 bedraagt.

Categorie 4: Verklarende statistiek

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: steekproefgrootheid, betrouwbaarheidsinterval, kritieke gebied, significantieniveau, onderscheidingsvermogen, nulhypothese, alternatieve hypothese, eenzijdig en tweezijdig toetsen en overschrijdingskans.

De startbekwame docent kan:

T.a.v. schatten:

- bij een normale verdeling en een Poissonverdeling een betrouwbaarheidsinterval bepalen voor de verwachtingswaarde;
- bij een binomiale verdeling een betrouwbaarheidsinterval bepalen voor de kans op succes;
- de minimale steekproefomvang bepalen bij een gegeven nauwkeurigheid van een betrouwbaarheidsinterval.

T.a.v. het toetsen van hypothesen:

- uit een context een geschikte toets destilleren;
- werken met nulhypothese, alternatieve hypothese, significatieniveau, kritieke gebied, overschrijdingskans, toegelaten gebied, een- en tweezijdige toets, onderscheidend vermogen en kansen op fouten van de eerste en de tweede soort;
- één- en tweezijdige toetsen uitvoeren bij een normale verdeling, een binomiale verdeling, een Poissonverdeling;
- de uitkomst van een toets beschrijven in termen van de context.

Capita selecta

- *t*-toets en chi-kwadraat-toets;
- ongepaarde en gepaarde verschiltoetsen;
- uitgebreid statistisch onderzoek;
- verdelingsvrije en non-parametrische toets.

Voorbeelden

Opgave 1

Tussen 1975 en 2007 hebben Europese luchtvaartmaatschappijen samen 55,2 miljoen vluchten uitgevoerd. Er vonden 46 ongelukken ongelukken plaats waarbij één of meer mensen om het leven kwamen.

a) Bepaal met behulp van bovenstaande gegevens het 90%-betrouwbaarheidsinterval voor de kans dat er minimaal één persoon omkomt tijdens een willekeurige vlucht met een Europese maatschappij.

In de periode 2007 tot heden voerden dezelfde maatschappijen samen 7,8 miljoen vluchten uit, waarbij drie ongelukken met dodelijke afloop te betreuren waren.

b) Toets met $\alpha = 0{,}05$ of het aantal ongelukken in de periode 2007 – heden is afgenomen ten opzichte van de periode 1975 tot 2007.

Opgave 2

Voor de montage van een apparaat is een busje nodig met een diameter van 15 mm. We beschouwen de diameter als een normaal verdeelde kansvariabele $\underline{x}$ met verwachting μ en bekende variantie. Om de productie te controleren worden regelmatig steekproeven genomen van omvang *n*. Van de *n* gemeten diameters wordt het gemiddelde berekend. Met dit gemiddelde wordt de hypothese $\mu = 15$ getoetst. Men gebruikt daarbij het kritieke gebied $[0 ; 14{,}7\rangle$. Er wordt dus linkseenzijdig getoetst. De onbetrouwbaarheid is 0,04. Bereken het onderscheidend vermogen als $\mu = 14{,}5$, aannemende dat de variantie gelijk is aan de variantie in de normale situatie, waarbij $\mu = 15$.

Domein 5: Wiskunde overig

Categorie 1: Grafentheorie

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: graaf, Euler- en Hamiltongraaf, isomorfie, kleurbaarheid, kortste pad, opspannende boom en algoritme.

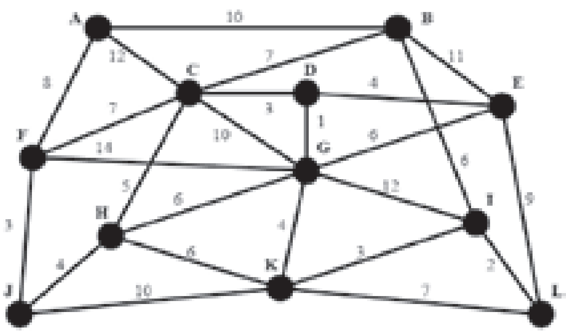
De startbekwame docent kan:

- een daartoe geschikt praktisch probleem herformuleren naar een probleem over grafen;
- bij grafen verbindingsmatrices opstellen en daarmee verbondenheid tussen punten bepalen;
- bepalen of een gegeven graaf tweedelig, volledig, regelmatig of platonisch is;
- bepalen of grafen onderling isomorf zijn;
- bepalen of een graaf Eulers of Hamiltons is;
- met het kortste-buur algoritme en uitwisselingsalgoritmen kortste handelsrouten benaderen;
- minimale of maximale opspannende bomen en kortste paden met behulp van de algoritmen van Prim, Kruskal en Dijkstra bepalen;
- het chromatische getal van een graaf bepalen.

Voorbeelden

opgave 1

Een provinciebestuur wil twaalf steden met elkaar verbinden door een supersnel wegennetwerk. De wegen moeten zodanig worden aangelegd dat elke stad (eventueel via een andere stad) te bereiken is. De kosten van het aanleggen van een supersnelle weg tussen twee steden staan gegeven in onderstaande gewogen graaf.

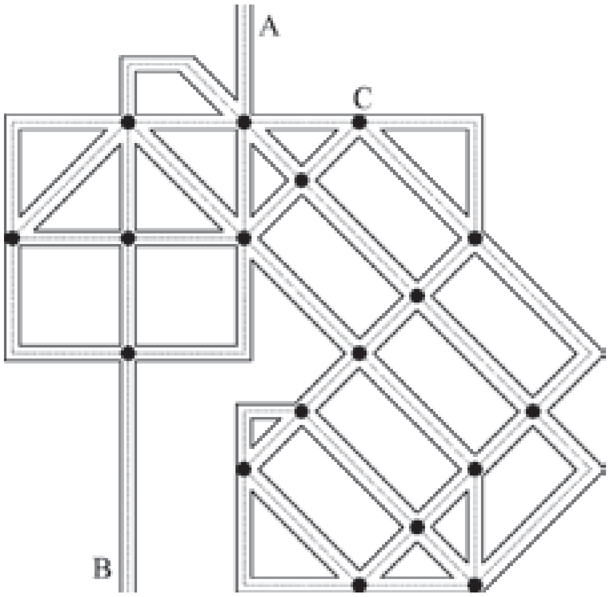


a) Welke wegen moet het provinciebestuur laten aanleggen om de totale kosten zo laag mogelijk te houden? Geef je oplossing weer op het werkblad.

b) Het budget van het provinciebestuur is niet toereikend om alle wegen aan te leggen. Uit nader onderzoek blijkt tevens dat de trajecten tussen stad L en H en tussen stad H en E dagelijks het meeste verkeer te verwerken krijgen. Daarom besluit het provinciebestuur om alleen tussen de steden L en H en tussen de steden H en E supersnelle wegen aan te leggen. Welke wegen moet het provinciebestuur laten aanleggen als zij de aanlegkosten wil minimaliseren? Geef je oplossing weer op het werkblad.

opgave 2

Hieronder is een plattegrond getekend van een stad. Alleen de hoofdwegen zijn getekend.
Op elke hoofdweg worden in opdracht van de lokale overheid middenstrepen geschilderd met een speciale auto, die automatisch de strepen trekt.
De provinciale overheid is geïnteresseerd in het volgende probleem:



Is het mogelijk om met de auto zonder onderbreking elke streep precies één keer te trekken, beginnend in punt A, en eindigend in punt B?

a) Vertaal het probleem van de provinciale overheid in termen van grafentheorie.
b) Geef een oplossing voor het probleem van de provinciale overheid. Gebruik daarvoor eventueel het bijgevoegde werkblad.

Op de plattegrond zijn alle kruisingen en splitsingen met dikke punten aangegeven. Deze worden door een medewerker van de gemeente wit geschilderd. Deze medewerker vertrekt vanuit kruispunt C bij de gemeentewerf. Daar haalt hij de schilderbenodigdheden op. Na de schilderwerkzaamheden levert hij de benodigdheden bij dezelfde werf in. De medewerker is geïnteresseerd in het volgende probleem:
Is het mogelijk om een wandeling te maken, beginnend in C en eindigend in C, waarbij elke kruising en splitsing precies één keer wordt aangedaan.

c) Vertaal het probleem van de medewerker in termen van grafentheorie.
d) Geef een oplossing voor het probleem van de medewerker.

Categorie 2: Lineair programmeren

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: doelfunctie, hoekpuntenstelling, optimaliseren, schaduwprijs, modelcyclus en optimaliseren.

De startbekwame docent kan:

- onderkennen of een probleem met lineair programmeren kan worden opgelost;
- de gegevens van een lineair programmeringsprobleem overzichtelijk weergeven met behulp van een graaf, een matrix of een andere geschikte representatievorm;
- uit een tekst beslissingsvariabelen vaststellen, een formule voor de doelfunctie opstellen, beperkende voorwaarden distilleren en vertalen in ongelijkheden of vergelijkingen;
- een lp-probleem met twee beslissingsvariabelen grafisch oplossen;
- bij een lp-probleem met meer dan twee beslissingsvariabelen op adequate wijze gebruik maken van een computerprogramma (zoals Orstat 2000, Maple, de oplosser in Excel of Geocadabra);
- het resultaat van een lp-probleem interpreteren in termen van de context, inclusief het interpreteren van een gegeven gevoeligheidsanalyse in termen van schaduwprijs en gereduceerde kosten.

Capita selecta

- bij een gegeven lineair programmeringsmodel met behulp van de Simplexmethode de optimale oplossing berekenen en een gevoeligheidsanalyse uitvoeren.

Voorbeelden

Opgave 1

In een meubelfabriek worden onder andere stoelen en banken gemaakt. Het productieproces van beide artikelen bestaat uit 3 onderdelen, het in elkaar zetten van de meubels op de constructieafdeling, het bekleden van de meubels op de stofferingsafdeling en de eindcontrole en het verpakken van de meubels op de controleafdeling. De winst per stoel is € 320, en op een bank wordt € 280, winst gemaakt. In de tabel hieronder zie je de benodigde arbeid per stoel en per bank. Ook staat hierin het beschikbare aantal manuren per dag.

	stoel	**bank**	**aantal manuren per dag**
constructieafdeling	6 uur	3 uur	96 uur
stofferingsafdeling	2 uur	6 uur	72 uur
controleafdeling	1 uur	1 uur	18 uur

a) Bepaal geschikte beslissingsvariabelen en stel een lineair programmeringsmodel op.
b) Bepaal met de grafische methode van lineair programmeren de maximale winst per dag.
c) Stel dat er 10 extra manuren per dag beschikbaar komen. Ga na hoe je deze uren over de afdelingen moet verdelen om de winst zo veel mogelijk te laten stijgen.

Opgave 2
Een fabriek maakt drie producten: X, Y en Z. de winst per eenheid product is resp. 5, 12 en 5. Er zijn drie verschillende grondstoffen A, B en C nodig, waarvan resp. 96, 60 en 42 eenheden beschikbaar zijn. Per eenheid X is nodig: 2 eenheid van A, 2 van B en 1 van C. voor Y is nodig: 8 van A, 4 van B en 3 van C. Voor Z is nodig: 4 van A, 1 van B en 2 van C. De fabriek streeft maximale winst na. Het model dat dit probleem beschrijft staat hieronder.

max $W = 5x + 12y + 5z$

voorwaarden:

$2x + 8y + 4z \leq 96$ grondstof A

$2x + 4y + z \leq 60$ grondstof B

$x + 3y + 2z \leq 42$ grondstof C

a) Los dit lp-probleem handmatig op.

b) Maak met behulp van een computerprogramma een tekening van het toegestane gebied en een tabel met de hoekpunten en de waarde van W. Geef ook de weg van de randwandel-methode vanuit de oorsprong naar de optimale oplossing.

Categorie 3: Geschiedenis van de wiskunde

Omschrijving

De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: rekenen in oude culturen, relatie wiskunde en maatschappij en wiskunde als menselijke activiteit.

De startbekwame docent kan:

- een diversiteit aan voorbeelden geven uit de ontwikkeling van de wiskunde als menselijke activiteit (personen/culturen);
- opgaven oplossen met betrekking tot talstelsels in diverse oude culturen, bijvoorbeeld die van de Egyptenaren, de Babyloniërs, de Grieken, de Romeinen en de Arabieren;
- onderdelen van de wiskunde in de tijd plaatsen en verbanden leggen met mondiale ontwikkelingen van die tijd.

Voorbeelden

Opgave 1

a) Schrijf het getal dat wij uitspreken als tweehonderdvierenzestig in de volgende getalsystemen: Babylonisch, Egyptisch, Romeins.

b) Verklaar kort de verschillen van de bij a) genoemde getalsystemen en beschrijf de voor- en de nadelen. Wat is de reden dat wij het nu schrijven zoals we doen?

c) Bereken op z'n Egyptisch: 19*28 , 19:24 en 49:15.

d) De Egyptenaren gebruikten een bepaalde benadering van π, zoals hieronder blijkt uit een stukje uit ‘Van Ahmes tot Euclides’. Bepaal uit dit stukje wat die benadering was. Hoe hebben de Grieken uiteindelijk bijgedragen tot een betere benadering van π en hoe ging die in zijn werk?

Voor de *oppervlakte van de cirkel* nam men als grove benadering $3r^2$, hetgeen dus neerkomt op $\pi = 3$. Men kende echter een veel betere benadering voor de oppervlakte van de cirkel, nl.: $(\frac{8}{9}d)^2$, waarin d de middellijn voorstelt. De afleiding hiervan zou men zich als volgt kunnen denken.

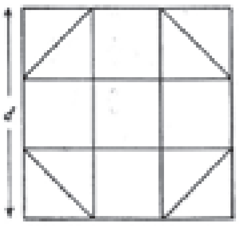


fig. 1

Zeven vierkantjes in nevenstaande figuur geven bij benadering de oppervlakte van de cirkel met d als middellijn. De oppervlakte ervan is dan $7 \times \frac{1}{9}d^2$, dus $\frac{63}{81}d^2$.

Nemen we hiervoor $\frac{64}{81}d^2$, dan zijn we niet zo ver mis, en deze breuk heeft het praktische voordeel een kwadraat te zijn, nl. van $\frac{8}{9}d$.

Opgave 2
Stelling I,20 van Euclides luidt:

In een willekeurige driehoek zijn twee willekeurig gekozen zijden samen groter dan de derde zijde. Bewijs deze stelling met behulp van de verlenging van een zijde met een lijnstuk dat zo groot is als de andere zijde, de stellingen I,5b en I,19 (zie hieronder) en algemeen inzicht.

Stelling I,5b: De basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn congruent.
Stelling I,19: Als in een driehoek de ene hoek groter is dan een andere is de zijde tegenover die ene hoek groter dan de zijde tegenover die andere.

Categorie 4: Abstracte structuren

Omschrijving
De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: axioma, deductieve opbouw en bewijs.

De startbekwame docent kan
- redeneren vanuit deductieve structuren en elementaire eigenschappen voortkomend uit deze structuren onderzoeken, bewijzen en toepassen.

De opleiding kiest ten minste één van onderstaande onderwerpen:

Capita selecta

- verzamelingenleer;
- groepen;
- axiomatische opbouw van getalverzamelingen;
- lineaire algebra;
- ringen en lichamen;
- logica;
- Boolese algebra;
- transformatiemeetkunde.

Voorbeelden

Omdat dit onderdeel in de capita selecta is opgenomen worden hier geen voorbeelden genoemd. Een lijst met voorbeeldopgaven kan desgewenst worden verstrekt.

Redactie

Michel van Ast (Hogeschool Utrecht)
Jan Essers (Fontys lerarenopleiding Tilburg)
Cornelia Wallien (Hogeschool Rotterdam)
Ton Konings (Hogeschool Arnhem/Nijmegen)
E. Bruinsma (Christelijke Hogeschool Windesheim)
Frans Leynse (Hogeschool van Amsterdam)

Legitimeringspanel

De heer Hans van der Lijcke (docent MBO)
De heer Swier Garst (docent)
De heer Lennart de Jonge (docent)
Mevrouw M. Lambriex (NVvW)
H. van de Kooij (NVvW)
De heer Paul Drijvers (Freudenthal Instituut)
De heer Hans Sterk (TU/E)
De heer Jos Tolboom (Rijksuniversiteit Groningen)
Mevrouw Joke Daemen (Freudenthal Instituut)

Colofon

Kennisbasis docent wiskunde bachelor

Vormgeving
Elan Strategie & Creatie, Delft

Omslagontwerp
Gerbrand van Melle, Auckland

www.10voordeleraar.nl