

Gerichte aandacht voor rekenen-wiskunde

Ronald Keijzer

Beter probleemoplossend rekenen



Zorgen over het reken-wiskundeonderwijs leidden vorig jaar tot uitvoerige media-aandacht. Men kan zich afvragen of deze zorgen terecht zijn. De afgenomen vaardigheid in bijvoorbeeld het staartdelen is het gevolg van een bewust gekozen verandering. Die houdt in dat het accent in het reken-wiskundeonderwijs is verlegd naar probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs. Voor leerkrachten is gericht professionaliseren voor rekenen-wiskunde zinvol.

Begin vorig jaar heeft het reken-wiskundeonderwijs uitvoerig in de publieke belangstelling gestaan. Enkele dagbladen kopten dat de vaardigheid in het cijferen van leerlingen in de hoogste groepen van het basisonderwijs in de afgelopen 10 à 15 jaar behoorlijk teruggelopen is. Er is echter reden om deze media-aandacht voor het reken-wiskundeonderwijs in perspectief te plaatsen. De discussie in de media richt zich namelijk vooral op een afnemende vaardigheid in het onder elkaar uitrekenen van sommen volgens een vast stramien. De staartdeling verdwijnt, luidde een van de verontruste koppen. En dat is in zekere zin ook zo. Het delingsalgoritme - zeg maar de rekenstappen die kinderen moeten volgen om de deling uit te rekenen - krijgt in het huidige onderwijs minder aandacht.

ANDERE ROL VOOR HET CIJFEREN

Veel vakdidactici brachten de afgelopen jaren naar voren dat het huidige tijdsgewricht om andere accenten in het reken-wiskundeonderwijs vraagt. Foutloos staartdelingen kunnen maken is niet meer zo van belang, omdat dat nauwelijks bijdraagt aan inzicht in getallen en het verkrijgen van een antwoord tegenwoordig goed kan worden overgelaten aan een rekenmachine, computer of mobiele telefoon. Er is niets tegen het leren van rekenregels, maar die moeten wel relevant zijn. Schattend rekenen, hoofdrekenen en handig gebruik leren maken van de zakrekenmachine zijn in dit opzicht relevanter.

dan het ouderwetse cijferen

Methodenschrijvers concretiseerden deze ideeën in de nieuwste methoden. De inhoud van het onderwijs in de scholen worden goeddeels bepaald door wat er in de methode staat en daarin is de aandacht voor het cijferen de afgelopen jaren kleiner geworden. De kinderen leren nog wel hoe cijferend moet worden opgeteld en afgetrokken, maar er is minder aandacht voor het cijferend vermenigvuldigen en de staartdeling. Er wordt vooral geïnvesteerd in hoofdreenstrategieën, waarin niet het nauwkeurig uitvoeren van het rekenvoorschrift centraal staat, maar het oog krijgen voor hoe getallen in elkaar zitten en wat dit betekent voor het optellen, aftrekken, delen of vermenigvuldigen met deze getallen. Dat is precies wat we terugzien in de opbrengst van het onderwijs.

VERTROUWD RAKEN MET GETALLEN

Argumenten voor het verschuiven van de rol van het cijferen zijn de afgelopen jaren ook zichtbaar geworden in de kerndoelen voor het basisonderwijs. Daarin is aangegeven dat het reken-wiskundeonderwijs zich vooral dient te richten op het bevorderen van de gecijferdheid van leerlingen. Anders dan bij het cijferen, waar het gaat om het navolgen van rekenstappen, gaat het bij gecijferdheid om het geleidelijk vertrouwd raken met getallen, maten, vormen, structuren en de daarbij passende relaties en bewerkingen. Kinderen gaan aan de slag met wat getallen voor ze betekenen. Ze hoeven daarbij uiteraard niet telkens uit te vinden hoe je een bepaalde som uitrekenet en ze mogen best enige routine verwerven. Belangrijk is daarbij wel dat dat wat ze doen betekenis voor ze heeft. Natuurlijk roept het teruglopen van de vaardigheid in het cijferen wel vragen op. De kerndoelen geven aan dat het van belang is dat leerlingen voldoende greep krijgen op de structuur van getallen. Ze moeten bijvoorbeeld leren dat een getal als '203' gezien kan worden als twee honderdtallen en drie eenheden. Ze moeten inzien dat de '0' in dit getal betekent dat er geen tientallen zijn. Vroeger ging men er vanuit dat dit inzicht zou ontstaan door regelmatig cijferopgaven te oefenen. Inmiddels weten we dat kinderen daardoor in het algemeen geen inzicht verwerven. Dat gebeurt wel als we met leerlingen op onderzoek gaan naar wat het getal 203 betekent, bijvoorbeeld:

- Hoe kun je een bedrag van € 203 gepast betalen?
- Maak met de cijfers '0', '2' en '3' eens een zo groot mogelijk getal en een zo klein mogelijk getal.

In dit laatste geval bediscussiëren kinderen bijvoorbeeld of 023 wel een getal is en wat dat getal dan betekent. De argumenten die ze daarbij naar voren brengen, raken de kern van het grip krijgen op de betekenis van '0'. Dit cijfer laat in dit geval zien dat er geen honderden zijn. Een dergelijk symbool is daarmee niet echt nodig, omdat het getal '23' dat zelf al duidelijk maakt. In navolging van de kerndoelen wordt recht gedaan aan het vergroten van de gecijferdheid van leerlingen, omdat zij op onderzoek gaan naar wat getallen betekenen. Dat een dergelijk onderzoek na verloop van tijd bij enkele leerlingen leidt tot kennis van rekenprocedures is meegenomen, maar vaak niet echt noodzakelijk.

DE TOEKOMST

Wat werkelijk uit de tijd is, verdient geen plek in het reken-wiskundeonderwijs. Het is niet onwaarschijnlijk dat sommige cijferprocedures, zoals bijvoorbeeld de staartdeling, net zo uit de doelen gaat verdwijnen als ooit gebeurde met het algoritme voor het (handmatig) berekenen van de vierkantswortel.* Scholen zouden daarin gerichte keuzen moeten maken. Onderwijstijd is schaars en kan bijvoorbeeld goed besteed worden aan het leren en onderhouden van de tafels en handig rekenen. En dat zien we op veel scholen ook gebeuren. Ondanks de media-aandacht voor rekenen-wiskunde, lijkt er niet zo veel aan de hand en dat zien we onder meer aan het uitblijven van reacties van basisscholen op deze berichten.

Ogenschijnlijk gaat het goed met het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs en dat wordt onder meer bevestigd in internationale vergelijkende onderzoeken als TIMSS en PISA. Jaren geleden is een verandering in gang gezet in het Nederlandse reken-wiskundeon-

Bereken $\sqrt{3}$ in 3 decimalen

$$\begin{array}{r} 1^2 = 1 \\ 2 \cdot x = 27 \times 7 \\ 34 \cdot x = 343 \times 3 = \\ 346 \cdot x = 3462 \times 2 = \end{array} \quad \begin{array}{r} \sqrt{3,00|00|00} = 1,732. \\ \end{array}$$

Het algoritme voor het berekenen van de vierkantswortel stond in 1959 nog in de schoolboeken.



Chris van Beek

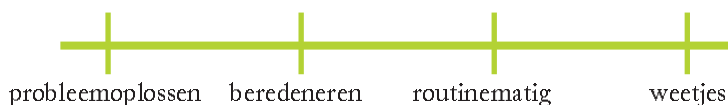
Handig gebruik leren maken van de rekenmachine is nu veel relevanter dan een staartdeling maken

derwijs. Deze vernieuwing, aangeduid als realistische didactiek, vinden we inmiddels ook terug in de omringende landen en de Verenigde Staten. Realistisch reken-wiskundeonderwijs sluit aan bij de kerndoelen, waarin de nadruk ligt op probleemgeoriënteerd onderwijs en het wiskundig grip krijgen op je wereld. Die wereld verandert en dat leidt tot een accentverschuiving in het reken-wiskundeonderwijs. Dit is zichtbaar gemaakt in onderstaand schema. Toen het cijferen nog van maatschappelijk belang was, lag de nadruk in het onderwijs op het routinematig uitvoeren van bewerkingen. Het gebruiken van routines is nog altijd een doel van het onderwijs, maar krijgt nu niet langer de nadruk. Die is verschoven naar het beredeneren van (getal)relaties en het verkennen van nieuwe problemen die om een oplossing vragen.

Als leerlingen zich ontwikkelen bewegen ze zich ook door dit schema. Ze beginnen dan in de regel aan de linkerkant. Wanneer het onderwerp nieuw is zal de eerste verkenning het karakter van probleemoplossen of *problem solving* hebben. Wanneer de leerlingen meer vertrouwd raken met de leerstof, gaat het proces vlotter. Het is geen echt probleem meer voor ze, hoewel ze er nog wel over moeten nadenken. De leerlingen kunnen het antwoord beredeneren. Na verloop van tijd gaat ook dit steeds vlotter, er ontstaan allerlei weetjes waar ze gebruik van kunnen maken en informele aanpakken die zich zelfs kunnen ontwikkelen tot standaard procedures.

HOE VERDEEL JE DRIE CHOCOLADEREPEN?

Het is niet eenvoudig te voorspellen hoe onze toekomst eruit zal zien. Het ligt evenwel voor de hand dat de behoefte aan routinematig kunnen handelen steeds kleiner wordt. Het beschikken over allerlei strategieën die te maken hebben met het oplossen van open, soms slecht gedefinieerde problemen, waarbij handig moet worden omgegaan met voor het probleem irrelevante gegevens, zal in belang toenemen. Laten we eens nagaan wat dit betekent voor een leerstof-



$200-100=100$ $60-10=50$ $3-7=-4$ $100+50-4=146$	265 117 146	$800-500=300$ $10-20=-10$ $8-4=4$ $300-10+4=294$	818 524 294
$700-400=300$ $40-60=-20$ $2-8=-6$ $300-20-6=274$	742 468 274	$900-600=300$ $80-50=30$ $7-4=3$ $300+30+3=333$	987 654 333
$400-200=200$ $30-70=-40$ $6-8=-2$ $200-40-2=158$	436 278 158	$500-300=200$ $0-20=-20$ $8-4=4$ $200-20+4=184$	508 324 184

Uit: Wis en Reken, Handleiding groep 5

onderdeel zoals 'breuken'. Daar worden relaties tussen verschillende breuken niet als regel geleerd, maar vanuit de betekenis van de breuken beredeneerd. Die relaties hebben vaak te maken met de situatie waaruit de breuken voortkomen, zoals bijvoorbeeld het verdelen van drie chocoladerepen onder vier kinderen. Dit is aanvankelijk een werkelijk probleem voor de leerlingen en het daadwerkelijk verdelen biedt een oplossing. Leerlingen zien dit aanvankelijk als een probleem dat moet worden opgelost en ontdekken dat ieder kind de volgende stukken reep kan krijgen:

- drie keer een stuk reep van $1/4$;
- een stuk reep van $3/4$;
- een halve reep en $1/4$ reep;
- een hele reep waarvan $1/4$ reep is weggelaten.

Het nauwkeurig bekijken van deze oplossingen helpt kinderen van links naar rechts te bewegen in het schema. Het werkelijk of in gedachten opdelen van repen leert de leerlingen daarmee dat $3/4$ gezien kan worden als drie stukken van $1/4$ en dat

twee van die stukken van een kwart reep een halve reep maken. Het gaat bij het leren van breuken overigens niet alleen om het handelen. Juist het bedenken van hoe de breuken samenhangen om zo nieuwe relaties tussen breuken te verkennen is van belang, omdat leerlingen zich bij dit leerstof-onderdeel uiteindelijk moeten leren bewegen tussen het beredeneren van oplossingen en het ontwikkelen van (deel)routines.

EXPERIMENTEREN EN REDENEREN

Wanneer het onderwijs draait om uitdagende open problemen is het onderwijs voor zowel leerkracht als leerlingen interessant. Als de problemen zo gekozen worden dat er veel aanpakken en oplossingen goed zijn, kunnen alle leerlingen meedoen. Die veelheid aan oplossingen vraagt overigens om ordening. Leerkracht en leerlingen gaan daarover in gesprek. Dan komt naar voren wat leerlingen met hun oplossing bedoelen. Om dit tot een succes te maken moeten de leerlingen zich inspannen om (a) hun oplossingen zo goed mogelijk uit te leggen, (b) de oplossingen van anderen proberen te begrijpen en (c) vragen te stellen wanneer ze het niet begrijpen. De individuele rollen van leerlingen zullen verschillend zijn. Sommigen zullen meer uitleggen en anderen zullen meer uitleg vragen en dit is beide van belangrijk voor het onderwijs.

Dergelijk probleemgeoriënteerd reken-wiskunde-onderwijs is voor veel scholen nieuw. Het vraagt om het uitleggen van oplossingen aan anderen. Dat is pas interessant als de problemen verschillende aanpakken toelaten. Dan kun je je eigen oplossing goed spiegelen aan die van anderen, omdat je in deze andere oplossing wellicht argumenten kunt vinden waarom je eigen oplossing ook goed is.

Tijdens de jaarlijkse 'Grote RekenDag' van het Freudenthal Instituut zijn vele duizenden leerlingen met een uitdagend probleem in de weer. Deze problemen zijn zo ontworpen dat leerlingen de kans krijgen met hun leerkracht werkelijk op onderzoek te gaan. De 'Grote RekenDag' die in maart vorig jaar gehouden werd had als thema 'Spelen met Getallen'. Leerlingen mochten toen bijvoorbeeld uitzoeken welk getalpatroon past bij een piramide van sinaasappels. Een piramide met één laag bestaat natuurlijk uit één sinaasappel. Met de tweede laag erbij worden dat 4 sinaasap-

REKENDAGEN

Het Freudenthal Instituut is het expertisecentrum voor reken-wiskundendidactiek. Zij is penvoerder van het TAL-project, dat in opdracht van de overheid leerlijnen en tussendoelen formuleert. Het Freudenthal Instituut organiseert de 'Grote RekenDag' (18 april 2007) en de 'Nationale RekenDagen' (22 en 23 maart 2007 en 27 en 28 maart 2008).

Informatie over deze activiteiten staat op de website:

www.rekenweb.nl/tal

www.rekenweb.nl/groterekendag

www.rekenweb.nl/rekendagen

pels en in drie lagen gaan 10 vruchten. Dat tellen gaat snel vervelen en leidt bovendien tot fouten. Maar hoe kun je er anders achterkomen hoeveel sinaasappels in de piramide liggen bij 5 lagen?

Door met hun leerlingen met een dergelijk probleem aan de slag te gaan, bekwamen leerkrachten zich in het aanzetten van leerlingen tot experimenteren en redeneren. Dat is ook een expliciet doel van de 'Grote RekenDag'.

Natuurlijk is er reden om de professionalisering rond rekenen-wiskunde systematischer aan te pakken. Die zou zich dan moeten richten op het samen met leerlingen experimenteren met open problemen en het gezamenlijk reflecteren op mogelijke oplossingen. Die professionalisering zou zich verder kunnen richten op het inrichten van het reken-wiskundeonderwijs op een manier dat leerlingen werkelijk op onderzoek gaan. De scholing kan zich nog specifieker richten op het inrichten van de interactie in de reken-wiskundeles of het toepassen van nieuwe vormen van differentiëren, waarbij nu eens niet gekozen wordt voor het verder individualiseren. Dat heeft ook weinig zin wanneer het onderwijs zich richt op het gezamenlijk aanpakken van uitdagende problemen. Deze nieuwe vormen van omgaan met verschillen kunnen onderwerp zijn van een (team)-scholing door een van de schoolbegeleidingsdiensten of lerarenopleidingen basisonderwijs. Deze genoemde onderwerpen staan ook centraal tijdens de 'Nationale RekenDagen', een jaarlijkse tweedaagse rekenconferentie voor leraren basisonderwijs.

Leerkrachten moeten zich ook gaan bekwamen in het aanzetten tot redeneren

TOT SLOT

De publieke opinie maakt zich zorgen over het teruglopen van de vaardigheid in het cijferen. Dit is evenwel geen vaardigheid die van groot belang is voor het functioneren in de 21ste eeuw. Het inzetten op handig rekenen, schattend rekenen en probleemoplossen, waarbij leerlingen de kans krijgen relaties tussen getallen te verkennen, is dat wel. De nieuwste methoden bieden daarvoor enkele mogelijkheden. Leerkrachten kunnen daarnaast ook andere bronnen aanboren. Rijke bronnen als de 'Grote RekenDag' bieden mogelijkheden om een eerste indruk te krijgen van probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs. En verder zijn er voldoende mogelijkheden voor leerkrachten om zich in dit opzicht verder te professionaliseren.

De auteur is werkzaam bij het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.

* Stoelinga, Th.G.D. & Tol, M.G. van (1959). *Leerboek der Algebra (deel II)*. Zwolle, W.E.J. Tjeenk Willink.

