rekenen-wiskunde 10 - 14

Minor

ELWIeR

FIsme Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education

Hogeschool van Arnhem en Nijmegen

Windesheim

Ruud de Moor Centrum

Open Universiteit
rdmc.ou.nl

Inhoudsopgave

Woord vooraf

De kwaliteit van het rekenonderwijs, de rekenvaardigheid van de leerlingen en de aanpak van problemen zijn al jaren onderwerp van stevige discussies.
De oorzaken van de problemen zijn divers. Na de afname van de Cito-toets en in het VO wordt er niet meer voldoende geoefend en bij veel rekenwerk in het VO wordt de rekenmachine gebruikt. Last but not least: in het PO is men niet op de hoogte van wat er in het VO gebeurt en andersom.

De regeringscommissie 'Doorlopende leerlijnen bij taal en rekenen' heeft in 2008 de minister geadviseerd prioriteit te geven aan basiskennis en basisvaardigheden voor taal en rekenen en te investeren in voorwaarden om niveauverhoging te bereiken.

De minor rekenen-wiskunde 10-14 draagt bij aan een vloeiende overgang rekenen-wiskunde van het primair naar het voortgezet onderwijs. Hij is bedoeld om binnen PO en VO rekenexperts op te leiden die een helder schoolbeleid voor deze problematiek kunnen vormgeven.

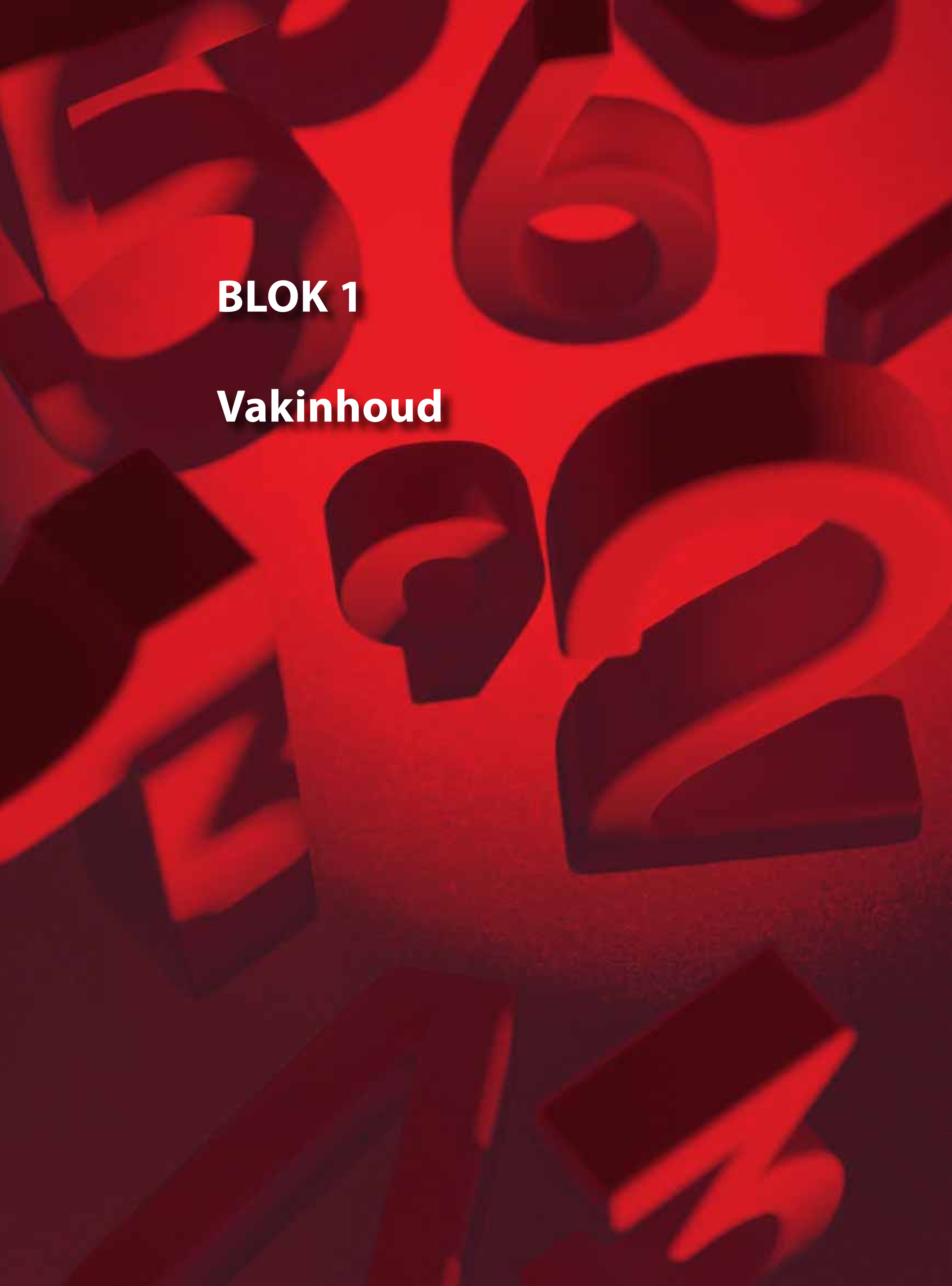
De minor bestaat uit drie onderdelen:
1. Actieonderzoek, visieontwikkeling en stage
2. Cursus vakinhoud in het grensgebied PO-VO met het accent op de doorlopende leerlijnen
3. Ontwerpen van reken-wiskundeonderwijs rondom oefenen en zorg

In dit blok is de inhoud van de cursus vakinhoud opgenomen. Die is opgesplitst in twee blokken: een blok '**Vakinhoud**' en een blok '**Oefenen en zorg**'. In '**Vakinhoud**' komen onderwerpen als breuken, verhoudingen, procenten, kolomsgewijs rekenen, meten, meetkunde en de overgang van rekenen naar algebra aan de orde.
In '**Oefenen en zorg**' gaat het ondermeer om het gebruik van werkvormen, inoefenen en het rekenbeleidsplan, de zakrekenmachine, rekenachterstand, rekenproblemen, rekenstoornis, dyscalculie en hoogbegaafdheid.

De minor rekenen-wiskunde 10-14 is het resultaat van een samenwerking van ELWIeR, RdMC, Hogeschool Windesheim en de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen.

Website van de minor: **www.rekenen10tot14.nl.**

Dédé de Haan
Jan Haarsma
Frank van Merwijk
Gé Nielissen
Henk Staal
Nathalie de Weerd



BLOK 1

Vakinhoud

Vakinhoud - inleiding

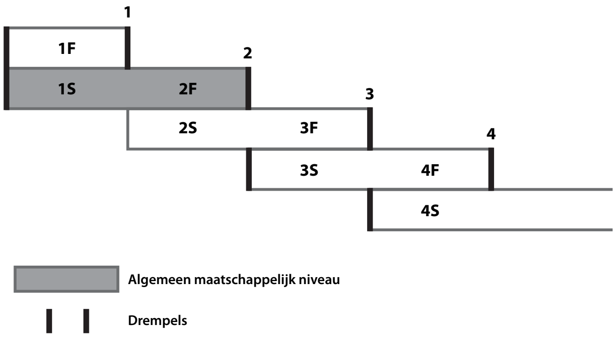
Onder het kopje vakinhoud komen de onderwerpen aan bod, die zowel in basisschool als in het voortgezet onderwijs een rol spelen. Hierbij is ook opgenomen het onderwerp negatieve getallen, omdat wij daarin mogelijkheden zien voor groep 8.

Eigen vaardigheid op een gevorderd niveau van de cursisten en de didactiek en de leerlijnen van de onderwerpen komen aan de orde. Zijn er verschillen in de manier van aanbieden op de basisschool en in het voortgezet? Loopt de leerlijn door, of is er sprake van een breuk in de aanpak?

De aanpak van een onderwerp op de basisschool biedt soms nieuwe mogelijkheden voor het voortgezet onderwijs (bijvoorbeeld: de aanpak van breuken en verhoudingen) en andersom (negatieve getallen; verbanden, patronen en algebra). Dergelijke mogelijkheden worden onderzocht en uitgeprobeerd.

Vakinhoud 1 - Breuken

REFERENTIEKADER



Inleiding

Deze bijeenkomst gaat over het werken met breuken en verhoudingen. Behalve een overzicht van verschillende verschijningsvormen van breuken wordt ook leerlingenwerk PO besproken. Verder komen modellen aan bod die bijdragen aan het vergroten van inzicht in breuken en verhoudingen.

Na deze bijeenkomst kan de student

- de acht verschijningsvormen van breuken herkennen en benoemen
- werken met de volgende modellen: stroken, tegelmodel, verhoudingtabel, taartmodel en (dubbele) getallenlijn
- meer didactisch verantwoord een breukenleerlijnneerzetten in het VO.

Programma bijeenkomst

- Vier instapsommen 'verhoudingen en breuken' plus woordvel maken (in tweetallen gekoppeld: PO- en VO-student)
- Plenaire terugblik op oplosaanpak en ingevuld woordvel
- Video fragment (leraar24)
- Toelichting op de verschijningsvormen van breuken (ppt)
- (practicum) Inventarisatie van gebruikte verschijningsvormen van breukopgaven uit twee rekenmethodes (2e helft groep 8) en twee wiskundemethodes voor het VO (deeltje 1e leerjaar);
- Neem uit elk deeltje twee breukopgaven, waar jullie commentaar (positief of negatief) op hebben. Dit opnemen in je PortFolio van deze Minor 10-14
- Beoordelen van leerlingenwerk van zowel basisschool als VO
- College over het modelgebruik bij breuken: stroken, tegelmodel, verhoudingstabel, taartmodel en dubbele getallenlijn.
- Toelichting op de onderzoekopdracht in het PO en VO
- Terugblik op het ingevuld woordvel: welke onderdelen kun je nu aanpassen, welke onderdelen worden toegevoegd?

Instapsommen

1. 4 kippen leggen gezamenlijk 4 eieren in 4 dagen.
   Hoeveel eieren leggen 10 kippen gezamenlijk in 10 dagen?

2. Geef commentaar op de volgende toegepaste regel:

   $$\frac{16}{64} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

   $$\frac{19}{95} = \frac{19}{95} = \frac{1}{5}$$

   Kunnen jullie nog twee breuken vinden die aan deze regel voldoen?

3. Student Willem werkt dinsdagavond in de keuken van het HAN-schoolgebouw.
   Hij kan de hele afwas in precies 5 uur doen.
   Samen met José lukt het hen beiden om de afwas in drie uur weg te werken.
   In hoeveel uur kan José deze afwas wegwerken als zij alleen op de dinsdagavond werkt?

4. Bereken uit je hoofd: $7^1/_2 \times 24 + 15 \times 28 =$

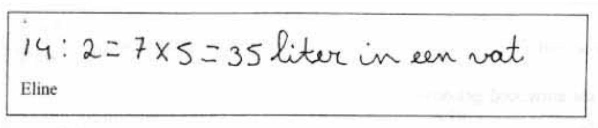
Maak een woordvel over het onderwerp breuken.
Plaats het woord **BREUKEN** midden op de flap. Neem hierbij in ieder geval jouw ervaringen en kennis over breuken mee. Noem ook onderwerpen waar jij meer over zou willen weten.

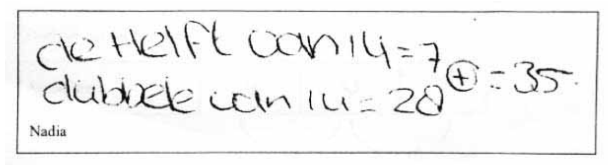
Een videofragment wordt vertoond (van Leraar24) en gaat over de problematiek van de overgang voor het vak rekenen van PO naar VO:
http://www.leraar24.nl/video/details/24,997/overgang-rekenen-wiskunde-van-po-naar-vo

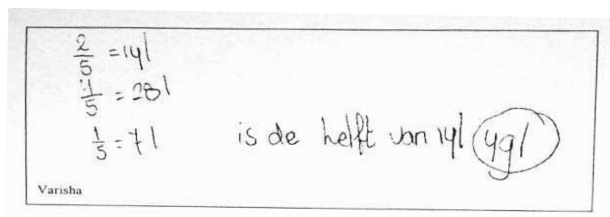
Leerlingenwerk behorende bij de volgende opgave voor groep 8

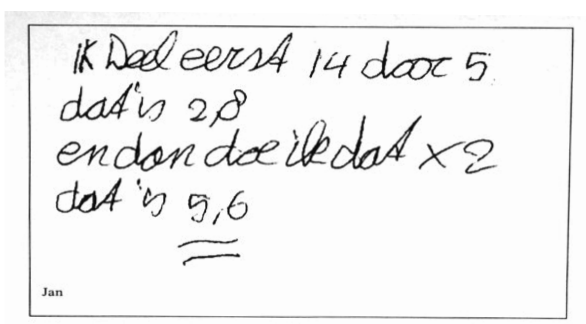
Een vat olie is voor $^2/_5$ gevuld.
Er zit 14 liter in. Hoeveel liter olie zit er in het vat als het helemaal gevuld is?

Bekijk het onderstaand leerlingenwerk en verzorg het in tweetallen van commentaar:









(Bron: Marjolein Kool, Freudenthal Instituut)

Modelgebruik

Na afloop van de rekenbijeenkomst dronk cursusleider Frank eerst $^1/_3$ deel van een fles wijn leeg.
De volgende dag dronk hij $^1/_4$ deel van wat overgebleven was. Voor hoeveel is de fles nu nog gevuld?

Los deze som op zonder en met gebruik van een strookmodel.

Onderzoekopdracht behorende bij deze bijeenkomst

1. Gebruik de matrix uit Over de Drempels. Vraag de leerkracht van groep 8 en de wiskundeleraar (brugjaar) welke onderdelen uit deze matrix de leerlingen op verantwoord niveau beheersen. Vraag om bewijslasten.
2. Onderzoek of het stukje tekst in onderstaande kader geldt op jouw basisschool.
   Stel de tekst zo nodig bij.
3. Stel een lijst op met aanbevelingen voor het werken met breuken voor PO en VO.

Stel je gemaakt woordvel over breuken bij.

> De onderwerpen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen vinden veel leerlingen lastige onderwerpen.
>
> **Mogelijke oorzaken:**
>
> o het overladen programma;
>
> o de gehanteerde breukendidactiek, met daarin te weinig differentiatie; (weinig gebruik van modellen en materialen;
>
> o het organiseren van de rekenlessen in niveau-groepen waardoor een aantal leerlingen weinig mee krijgen van de onderwerpen kommagetallen en procenten
>
> • De factor tijd is veel minder in het geding omdat er voldoende tijd voor breuken wordt uitgetrokken nl. 14% van de beschikbare tijd voor rekenonderwijs of anders gezegd: in groep 6, 7 en 8 van de basisschool gemiddeld 41 minuten per week.

Bijlage 1

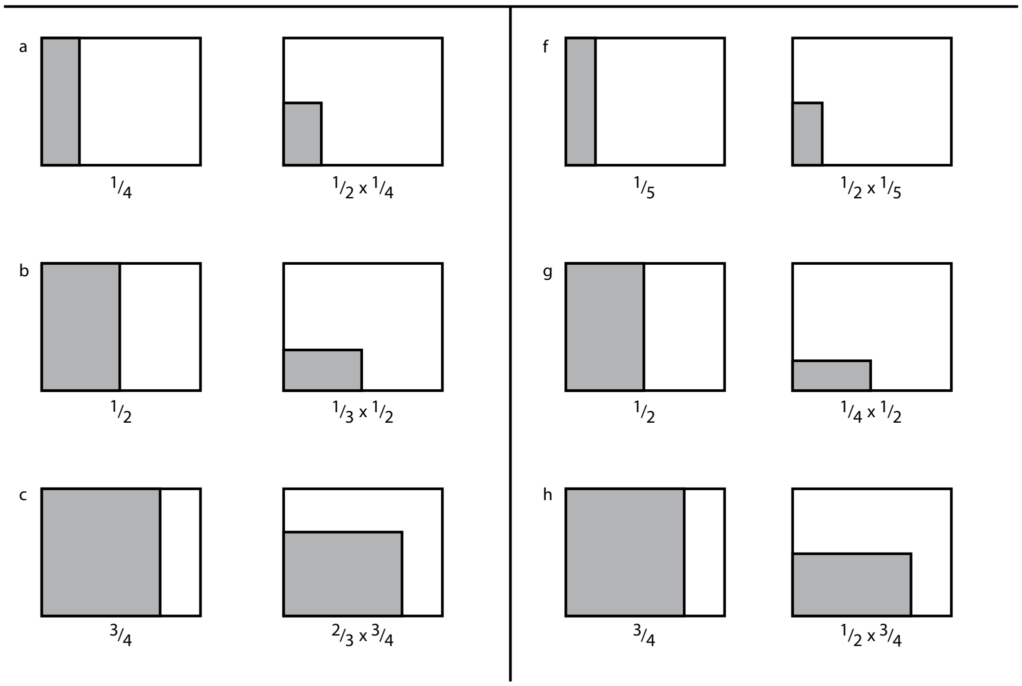
De verschijningsvormen van breuken : de ppt wordt na afloop van deze bijeenkomst op de site geplaatst

Bijlage 2

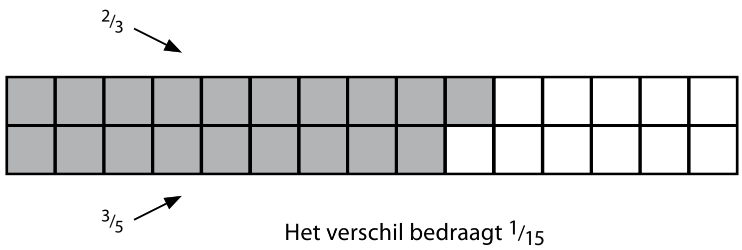
Verschillen tussen de oude breukendidactiek en de nieuwe realistische didactiek is kort samengevat: (wel in zwart-wit weergegeven)

Mechanistisch	Realistisch
Kaal, betekenisarm rekenen	Contextproblemen
Blind, niet inzichtelijk	Eigen constructies van kinderen zijn belangrijk
Toepasbaarheid verwaarloosd	Toepassingen zijn uitgangspunt
Vrijwel geen materialen, schema's en modellen	Modellen en schema's als brug
Veelal individueel	Veel interactief onderwijs
Vooral automatiseren	Zowel memoriseren als flexibel rekenen

Bijlage 3 - tegelmodel

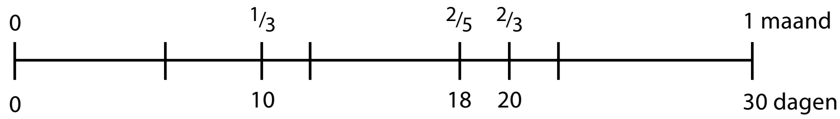


Bijlage 4 - stroken als model bij het rekenen met breuken, voorbeeld: $^2/_3$-$^3/_5$



Het verschil bedraagt $^1/_{15}$

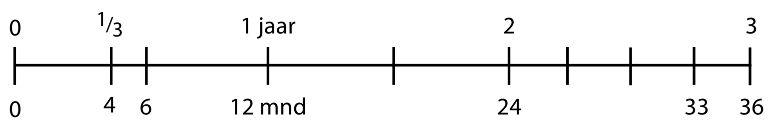
Bijlage 5 - dubbele getallenlijn als model bij het rekenen met breuken, voorbeeld $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}$



In de ondermaat bedraagt het verschil 2 dagen;
dit wordt $\frac{2}{30}$ als antwoord in de bovenmaat.

dubbele getallenlijn als model bij het een deling: $2\frac{3}{4}$: $\frac{1}{3}$

$2\frac{3}{4} : \frac{1}{3}$ = kies eerst een geschikte boven- en ondermaat



De breuksom wordt in de ondermaat $33 : 4 = 8\frac{1}{4}$

Ter afsluiting drie opgaven

1. Bekijk de onderstaande verkeersweg.
   a. Bereken welk gedeelte van de hele verkeerstroom gaat naar S, T en U.
      Geef je antwoorden als een breuk .
   b. Controleer je antwoorden door ze op te tellen.

2. Los deze opgave op (24game). De breuken 24game is nog niet uitgebracht in Nederland, maar alleen in de VS.

3. Als Mr. Bean stilstaat op een roltrap is hij na 60 seconden boven.
   Als de roltrap stilstaat en Mr. Bean loopt erop is hij na 90 seconden boven.
   Na hoeveel seconden is hij boven als hij naar boven loopt op een bewegende roltrap?
   Maak, als je het lastig vindt, gebruik van een verhoudingstabel.

Vakinhoud 1 - Breuken

Bijlage 1.1

Aansluitingsproblemen tussen primair en voortgezet onderwijs

- geen doorgaande lijn voor het vermenigvuldigen van breuken -

K.P.E. Gravemeijer, G. Bruin-Muurling & M. van Eijck
Technische Universiteit Eindhoven

Dit artikel opent met de constatering dat het rapport van de commissie Meijerink feitelijk niet handelt over leerlijnen, daar het zich beperkt tot het 'wat' en zich niet uitspreekt over het 'hoe'. Tegen deze achtergrond wordt een analyse besproken van reken-wiskundemethoden voor de groep 8 basisschool en klas 1 havo/vwo, die zich richt op de vraag hoe de leerlingen worden voorbereid op het vermenigvuldigen van breuken op een formeel niveau.
Het blijkt dat opgaven en voorbeelden in de basisschoolmethoden aansturen op verschillende rekenprocedures voor verschillende getalcombinaties, terwijl de havo/vwomethoden al snel starten met één algemene regel voor alle mogelijke gevallen ('teller keer teller en noemer keer noemer'). Bovendien blijken de basisschoolprocedures sterk gebonden aan contexten, waardoor de leerlingen in het algemeen niet met breuken als onbenoemde, op zichzelf staande, getallen rekenen, maar met benoemde contextgebonden getallen. In het voortgezet onderwijs wordt echter al snel op het niveau van de onbenoemde getallen gerekend.

Deze overgang van getallen die gebonden zijn aan telbare eenheden, naar getallen als objecten die hun betekenis ontlenen aan een netwerk van getalrelaties (Van Hiele, 1973), vraagt een conceptuele sprong die op deze manier veel te weinig aandacht krijgt. Bovendien is het formaliseringsproces dat voorbereidt op de algebra hiermee nog niet afgerond.
De conclusie is dat er een aansluitingsprobleem zit in de leerlijn van primair naar voortgezet onderwijs dat betrekking heeft op hoe de leerlingen met breuken leren rekenen.

1 Inleiding

Doorgaande leerlijnen vormen op dit moment een centraal thema in het reken-wiskundeonderwijs. Merkwaardig genoeg handelt het rapport van de commissie Meijerink, dat hieraan gewijd is, feitelijk niet over leerlijnen. De commissie beperkt zich tot het wat en spreekt zich niet uit over het hoe. Niet alleen het leren maar ook het onderwijzen blijft daarmee buiten beeld. Dat is problematisch, omdat al lang het vermoeden bestaat dat er juist op het punt van het leren en onderwijzen een probleem zit in de aansluiting tussen primair onderwijs (PO) en voortgezet onderwijs (VO).

Een door ons uitgevoerde analyse van enkele reken-wiskundemethoden laat zien dat dit inderdaad het geval is en dat de aansluiting niet alleen het 'wat' betreft, maar vooral het 'hoe'.
De door ons uitgevoerde analyse richt zich specifiek op het vermenigvuldigen van breuken. De onderliggende vraag daarbij is, 'Hoe worden de leerlingen geacht te rekenen in het PO en het VO?' We proberen een voorlopig antwoord op die vraag te krijgen door het analyseren van methoden.

2 Verschillende fasen in het rekenen met breuken

Om de bevindingen in perspectief te kunnen plaatsen schetsen we eerst een globaal kader van de ontwikkeling van het rekenen met breuken. Daarbij proberen we niet om een volledig overzicht te geven van wat er in het onderwijs aan de orde komt, noch van de op dit moment beschikbare kennis en didactische inzichten. We beperken ons tot de grote lijn, meer specifiek tot de lijn van begin basisschool tot eind havo/vwo. De keuze van dit eindpunt brengt een beperkte kijk op het breukenonderwijs met zich mee, we richten ons hier op het leren van breuken voorzover dat voorbereidt op het formele rekenen met breuken aan het einde van havo en vwo. Daarmee kiezen we dus een smaller perspectief dan bijvoorbeeld de TAL-brochure (Van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Van Herpen & Keijzer, 2005), waarin vanuit didactische overwegingen en met het oog op toepassingen een belangrijke plaats wordt ingeruimd voor de verbindingen van breuken met verhoudingen, procenten en kommagetallen. In onze beschrijving van de (deel)leerlijn, die is gericht op het formele rekenen met breuken en de doorloop naar de algebra, laten we deze verwevenheid van (deel)leerlijnen buiten beschouwing.

We beperken ons bovendien tot een grove schets waarin het ons gaat om sprongen in niveaus van denken. In deze lijn naar het formele rekenen met breuken kunnen we grofweg drie fasen onderscheiden. De eerste betreft de fase van de informele, contextgebonden verkenning. Hier vindt een brede fenomenologische exploratie plaats van allerlei aspecten van breukbegrip, zoals operatieaspect, deelaspect, verhoudingsaspect, meetaspect en getalsaspect (Streefland, 1991). Tegelijk met deze fenomenologische verkenning wordt een relatienet opgebouwd dat zowel relaties tussen breuken omvat, als relaties met verhoudingen, procenten en kommagetallen. In combinatie hiermee wordt ook het rekenen ontwikkeld op basis van het beredeneerd oplossen van contextopgaven. Breuken worden daarbij al snel geassocieerd met een handelingsvoorschrift - 'drie vierde' betekent dat je de eenheid in vier gelijke delen moet verdelen en vervolgens drie van die delen moet samennemen. Daarnaast worden breuken gekoppeld aan visuele representaties, veelal standaard afbeeldingen en concreet materiaal (fig.1).

figuur 1: standaardvoorstelling van $\frac{3}{4}$

Verder wordt er in deze fase onderzoek gedaan naar equivalentierelaties in concrete contexten. Wanneer je zes pannenkoeken met acht personen verdeelt, kun je dat bijvoorbeeld zo doen dat ieder $\frac{3}{4}$ pannenkoek krijgt, of zo dat ieder $\frac{6}{8}$ pannenkoek krijgt. Een belangrijk kenmerk van deze fase is dat breuken, zoals in dit voorbeeld, het karakter hebben van benoemde getallen. Het kan dan zowel gaan om conventionele meetgetallen, zoals in $\frac{3}{4}$ kilometer, als om meer contextgebonden maten, zoals bij $\frac{2}{3}$ reep of $\frac{3}{4}$ pizza. Het benoemde karakter van breuken wordt uitgebuit door gebruik te maken van maatwisseling. Zo kun je $\frac{3}{4}$ km omzetten in 750 meter of $\frac{3}{4}$ reep in negen stukjes wanneer de hele reep uit twaalf stukjes bestaat. Door middel van maatwisseling kun je het optellen en aftrekken van breuken, bijvoorbeeld, vereenvoudigen tot het rekenen met gehele getallen. De vraag: 'Hoeveel is $\frac{3}{4}$ reep meer dan $\frac{2}{3}$ reep?', kan dan worden opgelost door uit te gaan van een reep van twaalf stukjes en $\frac{3}{4}$ reep te vertalen in negen stukjes en $\frac{2}{3}$ reep in acht stukjes. Het verschil is dan één stukje van een reep van twaalf stukjes, ofwel $\frac{1}{12}$ reep (Treffers, Streefland & De Moor, 1994).

In de tweede fase staat de vorming van breukgetallen als wiskundige objecten centraal. Dit impliceert een overgang van benoemde naar onbenoemde getallen. Deze overgang kunnen we vergelijken met de overgang van benoemde naar onbenoemde getallen in het aanvankelijk rekenen. Daar doet zich een fase voor waarin jonge kinderen de vraag: 'Hoeveel is 4 + 4?', niet begrijpen, terwijl ze wel weten dat 4 knikkers en nog eens 4 knikkers samen 8 knikkers oplevert. De leerlingen kennen in die fase alleen benoemde getallen en nog geen onbenoemde getallen. Benoemde getallen ontlenen hun betekenis aan de telbare objecten waar ze naar verwijzen. Zoals in ons voorbeeld de getelde knikkers. Geleidelijk krijgen getallen daarna het karakter van zelfstandige objecten. Ze ontlenen hun betekenis aan een netwerk van getalrelaties. Een (natuurlijk) getal heeft dan de status van een knooppunt in een relatienet, om de terminologie van Van Hiele (1973) te gebruiken. Op eenzelfde manier kunnen breuken hun betekenis gaan ontlenen aan getalrelaties, bij $\frac{3}{4}$ kan dat bijvoorbeeld zijn: $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ of $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$, maar omvat ook $3 : 4 = \frac{3}{4}$ en equivalentierelaties als $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16}$ en dergelijke, en deel-geheelrelaties als $\frac{3}{4}$ van 100 is 75 enzovoort.

Bij het vermenigvuldigen van breuken, doet zich nog een specifiek probleem voor, daar de voor de leerlingen vertrouwde betekenis van vermenigvuldigen als herhaald optellen niet altijd meer toepasbaar is. De vermenigvuldiging '$\frac{3}{4}$ keer iets' is immers moeilijk op te vatten als herhaald optellen. Dit probleem wordt opgelost door af te spreken om '$\frac{3}{4}$ keer' gelijk te stellen met '$\frac{3}{4}$ deel van'; wat voor ons misschien logisch lijkt, maar voor de leerlingen toch neerkomt op een tamelijk arbitraire keuze. Bovendien leidt dit tot inconsistenties met ervaringen die de leerlingen eerder hebben opgedaan. De op ervaringskennis gebaseerde regel, 'vermenigvuldigen maakt groter en delen maakt kleiner', blijkt bij vermenigvuldigingen als '$\frac{3}{4}$ keer iets' niet meer op te gaan. Dit probleem is waarschijnlijk te ondervangen door de leerlingen veel ervaringen op te laten doen en door situaties te creëren waarin de keuze voor "keer" is hetzelfde als 'deel van'', als logisch wordt ervaren. Zoals bijvoorbeeld bij het vermenigvuldigen met een gemengd getal in een context, 'tweeënhalve meter stof à twaalf euro per meter' of bij het vergelijken van $\frac{3}{4} \times 6$ en $6 \times \frac{3}{4}$. Daarnaast lijkt het verstandig het vermenigvuldigen van begin af aan, dus al bij de natuurlijke getallen, breder in te bedden dan als herhaald optellen alleen.

In de derde fase - die zich pas halverwege havo en vwo voltrekt - vindt een verdere 'objectivering' plaats. Na de breuken zelf, worden nu ook de operaties met breuken tot object gemaakt. Om verder te kunnen in de algebra zullen bijvoorbeeld de leerlingen het product van twee breuken moeten gaan zien als een object waarmee je kunt opereren. In deze fase gaat het om inzicht in meer algemene eigenschappen en structuren. Waarbij bijvoorbeeld wordt ingezien, dat vermenigvuldigen met een breuk hetzelfde is als achtereenvolgens vermenigvuldigen met de teller en delen door de noemer. Zo kan $5 \times \frac{3}{4}$, bijvoorbeeld, worden vertaald in $5 \times 3 : 4$. Op dit niveau wordt ook ingezien, dat $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$, en dat dit principe voor alle breuken geldt. Tot dit niveau behoort verder het inzicht dat je uit $\frac{6}{2} = 3$ kunt afleiden dat $\frac{6}{3} = 2$. Dit niveau van vermenigvuldigen van breuken past bij wat Van Hiele (1973) het tweede denkniveau noemt, dat hij typeert met 'relaties tussen relaties'.

3 Schoolboeken

Om te zien hoe het vermenigvuldigen van breuken wordt aangeboden, hebben we gangbare schoolboeken voor primair en voortgezet onderwijs onderzocht. Dit betreft de basisschoolmethoden 'Alles Telt' (Boerema et al., 2001), 'Pluspunt' (Van Beusekom et al., 2000), 'Rekenrijk' (Bokhove et al., 1999), 'De wereld in getallen (Huitema, Van der Klis, Timmermans, Erich & Man, 2000) en de voorgezet-onderwijsmethoden 'Getal en Ruimte' (Reichard et al., 2004) en 'Moderne Wiskunde' (De Bruijn et al., 2007).

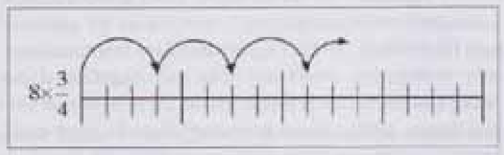
Uit de leerlingboeken van deze methoden hebben we alle opgaven en stukken theorie geselecteerd die in het domein breuken passen. In aanvulling hierop hebben we bekeken wat er in de handleidingen over deze opgaven, en over het rekenen met breuken in het algemeen, wordt gezegd. Daar het perspectief van het onderzoek waar deze analyse een onderdeel van is, de voorbereiding op het rekenen met breuken in havo en vwo betreft, hebben we procenten, verhoudingen en kommagetallen niet meegenomen - tenzij het rekenen met breuken daarin werd verwacht. In de analyse hebben we ons bovendien beperkt tot de onderdelen waar het om het vermenigvuldigen van breuken gaat. Bij deze analyse hebben we gekeken naar de oplossingsstrategie waar leerlingen naartoe worden gestuurd, naar het soort opgave dat daarbij wordt gebruikt en naar welke didactische modellen worden aangeboden. Wanneer we deze schoolboeken voor het basisonderwijs bekijken, zien we dat er verschillende procedures voor het vermenigvuldigen worden aangeleerd. Opvallend is bovendien dat die procedures worden gekoppeld aan specifieke combinaties van getallen.

a Wanneer het gaat om 'geheel getal keer breuk', wordt gekozen voor herhaald optellen, waarbij bijvoorbeeld de getallenlijn als model wordt gebruikt (fig.2).

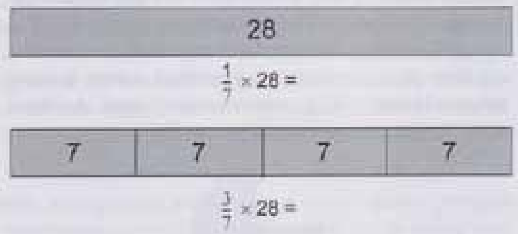
b Wanneer de opgave echter het karakter heeft van 'breuk keer geheel getal' dan wordt gekozen voor een 'deel van'-benadering (fig.3). Een aanpak die steeds goed uitvoerbaar is omdat de getallen bij dit type opgaven steeds zo gekozen zijn, dat de uitkomst een geheel getal is.

c Bij 'breuk keer breuk' wordt gekozen voor een rechthoeksmodel - waarbij de rechthoek als eenheid fungeert - dat wordt gecombineerd met de 'deel van'-benadering. De betrokken breuken worden als procedures opgevat. $\frac{3}{4}$ wordt vertaald in vier gelijke delen maken en daar 3 van nemen. En $\frac{1}{2}$ in twee gelijke stukken delen en daar één van nemen (fig.5).

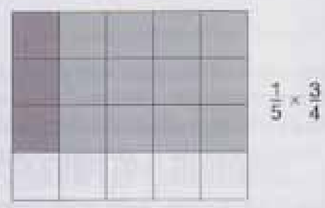
d Voor opgaven met gemengde getallen zien we dat leerlingen wordt aangeleerd het getal te 'splitsen' in een geheel getal en een echte breuk om dan verder te rekenen als in (a), (b) en (c) beschreven werd.



figuur 2: sprongen op de getallenlijn



figuur 3: deel-van benadering

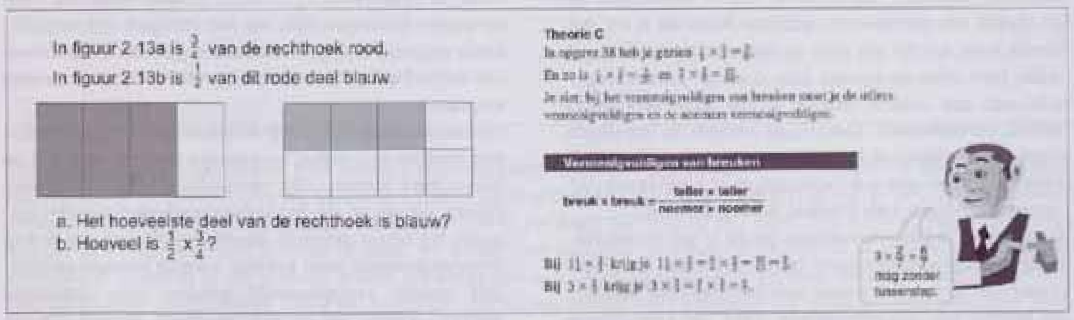


figuur 4: rechthoeksmodel

Tegenover het handelen met contextgebonden, benoemde getallen kunnen we het werken met onbenoemde getallen stellen. Hoewel er in de methoden voor het primair onderwijs ook kale sommen staan, lijkt er van de leerlingen te worden verwacht dat ze deze met concrete situaties, dan wel specifieke plaatjes associëren. Als de leerlingen deze aanwijzingen volgen, dan rekenen ze dus niet met breuken als onbenoemde, op zichzelf staande getallen, maar met benoemde contextgebonden getallen. Het rekenen heeft bovendien steeds het karakter van het uitvoeren van getalspecifieke procedures. Zoals bijvoorbeeld, $20 \times \frac{3}{4}$ reken je uit via herhaald optellen, $\frac{3}{4} \times 20$ reken je uit als 'deel van' en $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ met een oppervlaktemodel. De voorbeelden, die we hierboven hebben gegeven, laten zien dat het vermenigvuldigen van breuken op het niveau van de onbenoemde getallen op de basisschool niet wordt nagestreefd. Dit is in overeenstemming met de kerndoelen, waar de breuken alleen genoemd worden in kerndoel 26: 'De leerlingen leren de structuur en samenhang van aantallen, gehele getallen, kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen.' Nu valt te beargumenteren dat veel leerlingen een hoger niveau niet nodig hebben. Voor veel leerlingen zal het voldoende zijn als ze met de drie in de PO-boeken gepresenteerde procedures in concrete situaties uit de voeten kunnen. Een probleem voor die leerlingen kan echter wel zijn dat de te gebruiken procedure in de boekjes altijd wordt aangereikt. Er wordt niet van hen gevraagd te bedenken hoe een concrete situatie om te zetten in een rekenbewerking. Ze leren daardoor niet om zelf een procedure te kiezen. Bovendien zijn de getallen in veel gevallen zo gekozen dat het mooi uitkomt en worden ze niet voorbereid op situaties waar je niet mooi op een geheel getal uitkomt. Dit alles belemmert de toepasbaarheid van het geleerde. Voor de betere rekenaars geldt dat zij mogelijk al vermenigvuldigingen met onbenoemde getallen kunnen uitvoeren, maar dat daar in de PO-methoden niet aan wordt gewerkt.

4 Voortgezet onderwijs

Wanneer we de methoden voor het voortgezet onderwijs voor havo en vwo, 'Getal en Ruimte' en 'Moderne Wiskunde' bekijken, zien we dat er al snel met onbenoemde getallen wordt gewerkt. De formele regel voor het vermenigvuldigen van breuken wordt in 'Getal en Ruimte' vrijwel direct ingevoerd aan de hand van een concreet model (fig.5).

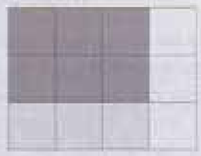


figuur 5: introductie van de regel voor het vermenigvuldigen van breuken

Het lijkt erop alsof de auteurs van deze methode ervan uitgaan dat dit voor de leerlingen niet nieuw is. 'Moderne Wiskunde' sluit wat meer aan op het basisonderwijs, in die zin, dat er in eerste instantie met verschillende opgaventypen wordt gewerkt. Ook hier wordt de regel voor het vermenigvuldigen van breuken ingevoerd aan de hand van het oppervlaktemodel. Deze regel wordt echter alleen aan de orde gesteld voor het vermenigvuldigen van echte breuken. Dat je deze regel ook kunt gebruiken voor vermenigvuldigingen waar gehele getallen, of onechte breuken in voorkomen wordt niet besproken. Vanaf dat moment wordt er ook in Moderne Wiskunde regelmatig met onbenoemde breuken gewerkt.

5 Overgang PO-VO

Opvallend is dat in het PO vrijwel uitsluitend met breuken als benoemde getallen wordt gewerkt, terwijl in het VO direct op het niveau van de onbenoemde getallen wordt gestart. In het PO wordt, terecht, gestart met een brede fenomenologische verkenning van breuken; daarmee wordt (1) aangesloten bij de informele kennis van de leerlingen, wordt (2) een brede begripsmatige basis gelegd en wordt (3) een basis gelegd voor toepasbaarheid. In lijn daarmee komen bewerkingen met breuken, zoals het vermenigvuldigen, naar voren als informele contextgebonden oplossingen. Een probleem is echter dat deze situatiespecifieke oplossingen in de huidige methoden worden ingeoefend als geïsoleerde standaardprocedures. Zo wordt $20 \times \frac{3}{4}$ geassocieerd met twintig pakjes melk van $\frac{3}{4}$ liter, een probleem dat kan worden opgelost door herhaald op te tellen of met behulp van de getallenlijn. Bij de opgave $\frac{3}{4} \times 20$ gaat het echter heel anders. Dit wordt gekoppeld aan $\frac{3}{4}$ deel van iets nemen, wat geassocieerd wordt met de breukbetekenis van 'in vier gelijke stukken delen en daar drie van nemen'. In de boekjes gaat het daarbij altijd om telbare of afpasbare zaken die je netjes kunt delen - zonder rest en zonder breuk in de uitkomst. Wanneer de realistische benadering consequent wordt gevolgd zou er in aansluiting op de informele aanpak moeten worden aangestuurd op een proces van generaliseren en formaliseren. Bijvoorbeeld door de leerlingen na te laten denken over de vraag of $20 \times \frac{3}{4}$ gelijk is aan $\frac{3}{4} \times 20$ en of je dat kunt beredeneren. Als we 20 keer $\frac{3}{4}$ moeten optellen, kunnen we dit ook zien als 5 groepen van $4 \times \frac{3}{4}$ die elk 3 waard zijn. Met andere woorden $20 \times \frac{3}{4} = (20 : 4) \times 3$ en dat is hetzelfde als waar je op uitkomt wanneer je $\frac{3}{4} \times 20$ opvat als $\frac{3}{4}$ deel van 20 nemen. Kortom $20 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 20$. Dit soort activiteiten zou ergens in PO of VO aan de orde moeten komen. Nu gebeurt dat niet en wordt in het VO direct gestart met één standaardprocedure voor breuken als onbenoemde getallen. Daar wordt wel een plaatje bij gebruikt dat lijkt op het plaatje dat in het PO voor het vermenigvuldigen van breuken kleiner dan één wordt gebruikt, maar de rol van deze plaatjes is heel verschillend.



figuur 6: de betekenis is *in the eye of the beholder*

Bovendien zijn zulke plaatjes (fig.6) heel verraderlijk: de leraar kan daarbij praten over onbenoemde getallen, terwijl de leerling denkt aan benoemde getallen. De leraar kan het plaatje als een illustratie zien van de vermenigvuldiging van alle mogelijke breuken, terwijl de leerling alleen het concrete geval ziet dat staat afgebeeld.

Voor de leerlingen die naar havo en vwo doorstromen, is er dus geen sprake van een doorgaande leerlijn van PO naar VO. In het PO is vermenigvuldigen voor de leerlingen niet één ding, maar een conglomeraat van getalspecifieke procedures, die sterk gebonden zijn aan concrete situaties en modellen en die bovendien meestal zijn 'voorgeschreven'. Breuken functioneren niet of nauwelijks op het niveau van onbenoemde getallen. Maar dit is wel het niveau waar het VO vrij snel op insteekt. Nadat de regel 'teller keer teller en noemer keer noemer' kort is toegelicht met een visueel model, wordt deze vervolgens bekend verondersteld. Deze regel kunnen de leerlingen uiteraard mechanisch leren toepassen, maar dat heeft weinig te maken met wat de leerlingen in het PO rond (het vermenigvuldigen van) breuken hebben geleerd.
Sterker nog, je kunt verwachten dat de in het PO ontwikkelde rekenprocedures gaan interfereren met de slecht onderbouwde regel, die voor veel leerlingen het karakter zal hebben van een onbegrepen regel. De kans daarop wordt verder vergroot doordat de uitontwikkeling van breukenkennis en -vaardigheden in VO-methoden in het algemeen geen systematische aandacht krijgt. Er wordt ten onrechte van uitgegaan dat het rekenen met breuken in het PO in feite al is afgerond. Daarbij wordt aangenomen dat breuken voor de leerlingen betekenis hebben als onbenoemde getallen annex op zichzelfstaande wiskundige objecten. Bovendien is er weinig aandacht voor de meer algemene eigenschappen en structuren op het tweede niveau van Van Hiele (1973). Ook in die zin is er dus geen sprake van een doorgaande leerlijn, want het is deze manier van redeneren over het vermenigvuldigen (en delen) van breuken, die ons inziens een voorwaarde is voor algebraïsch rekenen met breuken.

6 Aanbevelingen

Om dit probleem op te lossen, lijken aanpassingen in de bestaande reken- en wiskundemethoden noodzakelijk. Daarbij zal er afstemming tussen PO en VO moeten plaatsvinden. Zolang dat nog niet is gebeurd, adviseren we leraren PO het aanleren van aan specifieke contextgebonden procedures te vermijden. In plaats daarvan stellen wij voor te investeren in het ontwikkelen van inzicht in meer algemene eigenschappen en structuren. Net als bij het rekenen met natuurlijke getallen, dient het streven te zijn dat de leerlingen zich bij het uitvoeren van een berekening laten leiden door de getallen en het besef dat de volgorde van vermenigvuldiger en vermenigvuldigtal er niet toe doet. Dat $5 \times \frac{1}{2}$, bijvoorbeeld, hetzelfde is als 'de helft van 5', of '5 : 2'.
Een dergelijke aanpak zou ook meer recht doen aan het idee achter het gebruik van informele strategieën in het realistisch reken-wiskundeonderwijs, waar deze informele strategieën als opstap dienen voor het meer formele rekenen. Een van de uitgangspunten van het realistisch rekenen is het progressief mathematiseren (Treffers, 1987), dit omvat naast het horizontaal mathematiseren ook het verticaal mathematiseren (Gravemeijer, 2005). Het verticaal mathematiseren wordt in de huidige PO-methoden echter verwaarloosd en daarmee worden met name de betere leerlingen tekort gedaan. Maar ook voor de andere leerlingen lijkt ons het inslijpen van verschillende procedures ongewenst, zeker wanneer ze niet leren om zelf te beslissen wanneer ze welke procedure moeten toepassen.
VO-leraren zouden we erop willen wijzen dat het rekenen met breuken nog niet af is, wanneer de leerlingen van de basisschool komen. Dat verschillende lijntjes (procedures), die nu in de basisschoolmethoden worden uitgezet, bij elkaar gebracht moeten worden en dat er nog een slag gemaakt moet worden, voordat breuken op zichzelf staande (onbenoemde) getallen voor leerlingen worden. Verder zal er ook aandacht besteed moeten worden aan de relaties tussen breuken en de bewerkingen vermenigvuldigen en delen. En het vermenigvuldigen van breuken moet uiteindelijk zodanig veralgemeniseerd worden, dat niet alleen de breuken zelf, maar ook vermenigvuldigingen, zelfstandige wiskundige objecten worden, waar leerlingen mee kunnen redeneren.
Voor de wat langere termijn is onze aanbeveling dat ontwikkelaars van PO- en VO-methoden gezamenlijk een doorgaande leerlijn voor het rekenen met breuken ontwikkelen. Een leerlijn die beschrijft *hoe* er geleerd kan worden. Dat lijkt ons vruchtbaarder dan het precies vastleggen, *wat* er wanneer beheerst moet worden.

Literatuur

Beusekom, N. van, L. Schuffelers, G. Boersma, A. van Gool, J. Groen, H. van der Straaten, et al. (2000). *Pluspunt - rekenwiskundemethode voor de basisschool.* Den Bosch: Malmberg.

Boerema, J., W. Sweers, B. Krol, S. Hessing, J.N. van Noort, E. van den Bosch-Ploegh, et al. (2001). *Alles telt - reken-wiskundemethode voor het basisonderwijs.* Thiememeulenhof.

Bokhove, J., K. Kuipers, J. Postema, F. Baas, N. Eigenhuis, R. Roelofs, et al. (1999). *Rekenrijk - tweede editie.* Wolters-Noordhoff.

Bruin, I. de, W. Doekes, E. van der Eijk, S. Greefkens, T. Koens, D. Kok, et al. (2007). *Moderne wiskunde (9e editie).* Groningen: Wolters-Noordhoff bv.

Galen, F. van, E. Feijs, N. Figueiredo, K. Gravemeijer, K., E. van Herpen & R. Keijzer. (2005). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen - tussendoelen annex leerlijnen.* Groningen: Wolters Noordhoff.

Gravemeijer, K.P.E. (2005). Revisiting 'Mathematics education revisited'. In: Heege, H. ter, T. Goris, R. Keijzer & L. Wesker (eds.). *Freudenthal 100.* Utrecht: Freudenthal Instituut, 106-113.

Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en Inzicht.* Purmerend: Muusses.

Huitema, S., A. van der Klis, M.T.A.L. Erich, & P. Man (2000). *De wereld in getallen.* Den Bosch: Malmberg.

Reichard, L., S. Rozemond, J. Dijkhuis, C. Admiraal, G.T. Vaarwerk & J. Verbeek et al. (2004). *Getal en Ruimte 1 havo/vwo 1.* Houten: EPN.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research.* Dordrecht: Kluwer.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education.* The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel

Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1994). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3A Breuken.* Tilburg: Zwijsen.

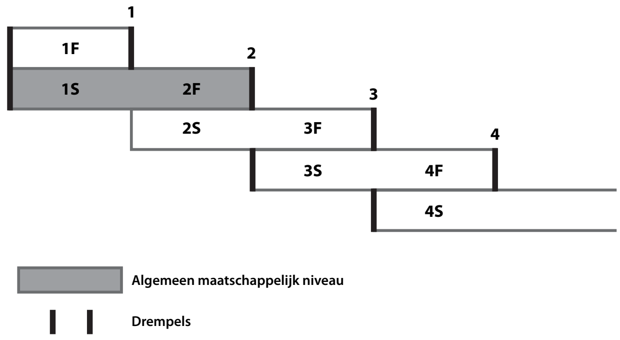
The fraction curriculum extends from primary into secondary education. The continuity - or its lack - of the learning route encompassing two school systems has always been a point of concern. This article reports about an investigation of both primary school textbooks and secondary school textbooks for havo and vwo on this issue. The focus of this investigation was on how these textbooks prepare students for multiplying fractions on a more formal level. It showed that tasks and worked-out examples in the primary school textbooks aim at a set of calculation techniques, which are each tailored to specific number combinations, while the secondary school textbooks swiftly introduce one general rule (numerator times numerator, denominator times denominator) for all rational numbers.

The investigation further showed that the calculation techniques for multiplying fractions in the primary school textbooks are all grounded in contextual problems. Basically, students seem to be expected to reason with numbers that are tied to measures of some sort (such as kilometers or pizzas), and not with bare numbers as such. The general rule that is introduced in secondary school asks students to reason with numbers that do not have any reference to countable units. This shift, from reasoning with numbers tied to countable units to reasoning with 'unspecified' numbers, involves the construction of numbers as mathematical objects that derive their meaning from a framework of number relations (Van Hiele (1973).

It is argued that this transition requires a conceptual shift, which deserves much more attention. According to the theory of realistic mathematics education (RME) informal, situated, solution procedures should be followed by a process of generalizing and formalizing. Since neither primary, nor secondary school textbooks address this issue, the authors speak of a discontinuity. They further point to the need for a second conceptual shift concerning the multiplication of fractions when moving towards algebra.

Vakinhoud 2 - Kommagetallen

REFERENTIEKADER



Inleiding

(deze bijeenkomst samengevat in een of twee zinnen)
Kommagetallen vormen in het havo en vwo geen didactisch onderwerp. De wetenschappelijke notatie is een van de weinige nieuwe onderwerpen, deze wordt op definitieniveau ingevoerd. Voor het overige wordt het verschijnsel kommagetallen als bekend verondersteld. Bij leerlingen van het vmbo en bij sommigen van havo en vwo zal er behoefte zijn aan herhaling op context- en modelniveau van het onderwerp kommagetallen.

Na deze bijeenkomst kan de student

- het belang aangeven van het (re)construeren van kennis, van het ontwikkelen van vaardigheden op inzichtelijk niveau en het daarna inoefenen van onderwerpen uit het vakonderdeel kommagetallen
- aangeven welke contexten en modellen in het onderwijs aan bod komen en daarmee werken
- aantonen over een beter ontwikkeld en versterkt gevoel te beschikken voor afronden en schattend rekenen bij kommagetallen
- aangeven wat het belang is van het leggen van relaties met andere vakonderdelen en welke mogelijkheden er daarvoor zijn.

Programma bijeenkomst

- practicum
- college
- ontwerpopdracht

Practicum

1. Bereken de niet ingevulde getallen, op twee verschillende manieren:

Artikel	Gewicht (kg)	Prijs per gewicht (€/kg)	Prijs (€)
Appels	0,5	3,30	...
Peultjes	0,387	...	1,84
Shiitakes	...	12,35	7,88

2. Maak verschillende schattingen van de volgende opgaven:
   a. 30,45 + 3,5 + 400,0005 =
   b. 721,97 - 5,08 =
   c. 0,245 x 23,978 =
   d. 319,89 : 0,81 =

3. 1,50 = 1,5. Klopt die gelijkheid altijd?

4. Geef de bijbehorende breuken-met-breukstreep:
   1. 0,108108108…
   2. 0,234234234…

5. Bewijs door berekening: 0,142857142757142857…. = $^1/_7$

6. Bepaal de repeterende decimale breuk, die hoort bij $^4/_{17}$

7. Schieten op 100, een spel voor twee spelers met één rekenmachine: speler 1 kiest een getal onder 100, speler 2 vermenigvuldigt dit met een getal met bedoeling om zo dicht mogelijk bij 100 uit te komen, speler 1 vermenigvuldigt die uitkomst weer met een ander getal, om nóg dichter bij 100 uit te komen, enzovoort. Je stopt nadat allebei het van tevoren afgesproken aantal handelingen (bijvoorbeeld zes) heeft uitgevoerd. Wie in een van zijn beurten het dichtst bij 100 is gekomen heeft gewonnen. Het is raadzaam voor de uitslag om de gevonden getallen allemaal op te schrijven.

College

Van Galen, F. e.a.(2005) Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen, Groningen, Wolters-Noordhoff, hfsk. 2 en 6
Buijs, K. (2005) Kommagetallen, hoever gaan we?, Volgens Bartjens, jrg. 25, nr 1

Onderzoekopdracht / thuisopdracht behorende bij deze bijeenkomst

Kies een paragraaf uit een wiskundemethode voor het voortgezet onderwijs of uit een reken-wiskunde-methode van groep 7 of 8, waarin kommagetallen aan de orde zijn.

1. Bedenk voor de sterke rekenaars uit die klas een mooie uitdagende oefening of verdiepende opdracht, bijvoorbeeld op het gebied van de verstrengeling met breuken of procenten, of op het gebied van de decimale structuur (bijvoorbeeld in verband met afronden), liefst met gebruik van de rekenmachine of de computer.

2. Bedenk voor zwakke rekenaars, die moeite hebben met een aspect van kommagetallen, een oefening in een context die hen waarschijnlijk inzicht zal geven. Beschrijf eerst het probleem van deze leerlingen dat jij in je hoofd hebt.

Studie en reflectie

3. Wat zijn de belangrijkste verschillen tussen het fundamenteel- en het streefniveau voor kommagetallen?

4. Is er voor kommagetallen een goede doorlopende leerlijn PO-VO als je kijkt naar de leerboeken? Is er in de praktijk voor de leerlingen een goede doorlopende leerlijn PO-VO?

5. Welke aanbevelingen kun je doen voor een goede doorlopende leerlijn kommagetallen?

Artikel(en) en sites

[Kees Buijs: Kommagetallen, hoever gaan we? VB, 05-06 nr 1]
http://tule.slo.nl/RekenenWiskunde/F-KDRekenenWiskunde.html
http://www.slo.nl/downloads/2008/Fundamentele_doelen_rekenenwiskunde.pdf/

Bijbehorend deel uit rapport 'doorlopende leerlijnen rekenen'

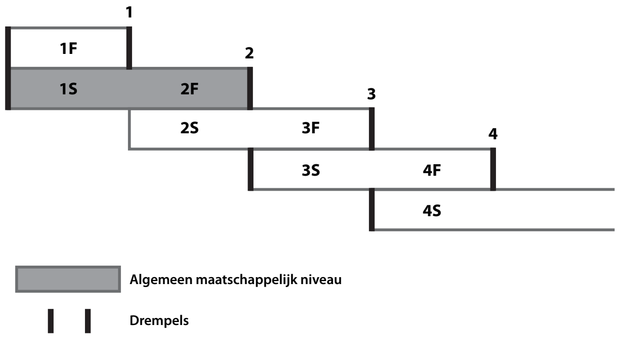
uit: Noteboom, A., (2008), Minimumdoelen rekenen-wiskunde, Enschede, Slo

GETALLEN EN GETALRELATIES: kommagetallen

Minimumdoelen	Voorbeelden
Koppelen van uitspraak en schrijfwijze van veelvoorkomende eenvoudige kommagetallen	- Hoe schrijf je 'vijfenveertig hondersten' in cijfers? - Nederland heeft ongeveer 16,5 miljoen inwoners. Hoe schrijf je 16,5 miljoen in cijfers? - Zet maar 'anderhalf brood' op het boodschappenlijstje. Hoe schrijf je 'anderhalf' in cijfers?
Elementaire kommagetallen kunnen plaatsen op een getallenlijn, zowel precies als globaal (kale getallenlijnen of maatlijn)	- Waar ligt 0,2 of 0,75 op de getallenlijn tussen 0 en 1? - 1,495 gram, waar staat de pijl op de weegschaal dan ongeveer? - 1,5 liter in de kan, tot waar is dat ongeveer?
Elementaire kommagetallen kunnen vergelijken en ordenen	- Wat is meer: 0,5 of 0,05? - Geldbedragen, gewichten, lengtes ordenen - 45,8 is dat meer of minder dan 44,9? - Zet in volgorde: 2,5; 25; 2,05
Kunnen afronden van eenvoudige kommagetallen binnen contexten die zich daartoe lenen	- Het wereldrecord verspringen voor mannen is 8,95 meter, dat is bijna ... meter - De broek kost 48,99 euro, dat is bijna ... euro
Weten hoe ons decimale positiestelsel is opgebouwd met hele getallen en kommagetallen en de betekenis en waarde van cijfers en hun plaats in kommagetallen kennen	- Hoe vaak past 0,01 in 1? en in 10? en 100? - Welk cijfer staat op de plaats van de hondersten in het getal 425,36? - Op de kilometerteller van de fiets staat dat we 8,28 hebben gefietst. Als we nu doorfietsen, welk cijfer verandert dan het eerst? Wat wordt het dan? - Hoeveel is de 2 waard in 0,25?

Vakinhoud 3 - Verhoudingen

REFERENTIEKADER



Inleiding

Deze bijeenkomst en de volgende bijeenkomst gaan over verhoudingen en procenten. In deze bijeenkomst beperken we ons tot verhoudingen. In de tweede bijeenkomst komen behalve procenten ook het verband tussen verhoudingen, breuken en procenten aan de orde.

Na deze bijeenkomst kan de student

- voorbeelden geven van verbanden die "verhoudingsgewijs" verlopen (ofwel recht evenredige verbanden) en verbanden waarbij dat niet het geval is
- aangeven welke didactische modellen er zijn voor verhoudingen en hoe ze die kunnen gebruiken.
- duidelijk maken wat het fundamenteel niveau en wat het streefniveau is voor verhoudingen.
- de aansluiting PO-VO voor het onderwerp verhoudingen in kaart brengen.

Programma bijeenkomst

- Inleiden, uitvoeren en nabespreken van de instapproblemen.
- Plenaire inleiding over didactische modellen bij verhoudingen.
- Inleiden van de onderzoeksopdracht.

De studenten maken een start door na te gaan hoe de opdracht aan te pakken is.
Verschillende mogelijkheden om de opdracht aan te pakken worden besproken.

Instapsommen / probleem

Maak de volgende opgaven in heterogene groepen (PO- en VO-studenten). Procedure per opgave:

- Eerst individueel oplossen.
- Daarna aanpak vergelijken, elkaar uitleggen, elkaar helpen.
- Verschillende manieren van aanpak inventariseren en daar notities van maken.

1. Vul aan:
   1 ei kook je in 5 minuten hard, dus 4 eieren kook je in … minuten hard.

2. Wat vind je van de volgende redenering?
   De som van de hoeken van een driehoek is 1800. Dat is gemiddeld per hoek 600.
   De som van de hoeken van een vierhoek is dus 2400.

3. Vul aan:
   Als 4 kippen in 4 dagen 4 eieren leggen, dan leggen 8 kippen in 8 dagen … eieren.

4. Anita heeft in haar woonplaats gecollecteerd voor een goed doel. Na het legen van haar collectebus ziet ze dat er 488 euromunten in zaten. De meeste euromunten hadden een Nederlandse kant. Verder waren er 51 euromunten met een Belgische kant en 91 euromunten uit overige Europese landen. Teken in een cirkeldiagram de verdeling van Nederlandse, Belgische en overige euromunten. Laat zien hoe je aan je antwoord komt (opgave uit het centraal schriftelijk eindexamen vmbo kgt 2004).

5. Welke van de volgende uitspraken is waar?
- Als je met een auto 100 km per uur rijdt verbruik je twee keer zoveel brandstof als wanneer je 50 km per uur rijdt.
- Iemand met 30 euro in zijn portemonnee heeft twee keer zoveel geld bij zich als iemand die 15 euro in zijn portemonnee heeft.
- Als de temperatuur buiten 30 graden is, is het twee keer zo warm als wanneer de temperatuur buiten 15 graden is. Verzin zelf ook zo'n uitspraak.

6. Boer A heeft 24 koeien op 3 ha weiland.
Boer B heeft 15 koeien op 2 ha weiland.
Bij welke boer zijn de koeien het beste uit?

Punten voor de plenaire bespreking van deze opgaven:
- Wat vond je lastig?
- Heb je uitleg van anderen gekregen of zelf anderen iets uitgelegd?
- Zijn de opgaven op verschillende manieren uitgewerkt? Welke?

Plenaire inleiding over didactische modellen bij verhoudingen

Met behulp van voorbeelden worden de volgende didactische modellen toegelicht:
- verhoudingstabel
- dubbele getallenlijn
- cirkeldiagram
- kruiselings vermenigvuldigen

Discussiepunten bij de didactische modellen:
- Wat heb je eraan? (zoals: de verhoudingstabel dwingt je om je gegevens goed te organiseren)
- Gebruiken de leerlingen de didactische modellen ook als deze niet worden voorgeschreven? (bijvoorbeeld: kan een leerling zelfstandig een probleem met verhoudingen oplossen en komt de leerling op het idee om daarbij een verhoudingstabel te gebruiken?)

Bronnen
Voor het VO: Thema Verhoudingstabellen in de Kennisbank Wiskunde
Voor het PO: Thema verhoudingen in de Kennisbank Rekenen

Onderzoeksopdracht / thuisopdracht behorende bij deze bijeenkomst

Beantwoord de volgende vragen. PO-studenten doen dat door leerboeken wiskunde voor het VO (klas 1 en 2) te analyseren. VO-studenten doen dat door leerboeken rekenen voor het PO (groep 6,7, en 8) te analyseren.

1. Welke contexten worden gebruikt bij verhoudingen?

2. Welke didactische modellen worden gebruikt bij verhoudingen?

3. Wat zijn de belangrijkste verschillen tussen het fundamenteel- en het streefniveau voor verhoudingen?

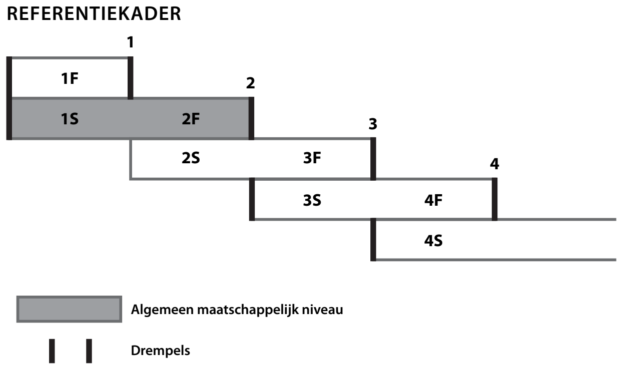
4. Is er voor verhoudingen een goede doorlopende leerlijn PO-VO als je kijkt naar de leerboeken?
   Is er in de praktijk voor de leerlingen een goede doorlopende leerlijn PO-VO?

5. Welke aanbevelingen kun je doen voor een goede doorlopende leerlijn verhoudingen?

Bronnen

Voor het VO: Thema Verhoudingstabellen in de Kennisbank Wiskunde
Leerboeken wiskunde voor het VO (klas 1 en 2)
Voor het PO: Thema verhoudingen in de Kennisbank Rekenen Leerboeken rekenen voor het PO.

Vakinhoud 4 - Procenten



Inleiding

Deze bijeenkomst gaat vooral over procenten, maar ook de samenhang tussen verhoudingen, breuken, kommagetallen en procenten krijgt aandacht.

Na deze bijeenkomst kan de student

- de samenhang (ook in didactisch opzicht) tussen verhoudingen, breuken, kommagetallen en procenten duidelijk maken
- aangeven welke didactische modellen er zijn voor procenten en hoe die kunnen worden gebruikt
- aangeven wat het fundamenteel niveau 1F en wat het streefniveau 1S is voor procenten
- aan de hand van een analyse duidelijk maken hoe het gesteld is met de doorlopende leerlijn procenten op hun stageschool
- zich oriënteren zich op mogelijkheden om die doorlopende leerlijn te verbeteren en de Kennisbank Rekenen/Wiskunde gebruiken om ideeën door te geven aan medestudenten of collega's.

Programma bijeenkomst

- Inleiden, uitvoeren en nabespreken van de instap problemen
- Plenaire inleiding over didactische modellen bij procenten
- Inleiden van de onderzoeksopdracht.

Studenten maken een start door na te gaan hoe de opdracht aan te pakken is.
Bespreken van verschillende mogelijkheden om de opdracht aan te pakken.

Instapsommen / probleem

Maak de volgende opgaven in heterogene groepen (po- en vo-studenten). Procedure per opgave:

- Eerst individueel oplossen,
- Daarna aanpak vergelijken, elkaar uitleggen, elkaar helpen.
- Verschillende manieren van aanpak inventariseren en daar notities van maken.

1. Iemand beweert:
   Op mijn school wonen 2 van de 5 leerlingen meer dan 6 km van de school.
   Formuleer deze bewering met behulp van breuken.
   Formuleer deze bewering met behulp van procenten.

2. Hoe groot is de kans om met een dobbelsteen een vier te gooien?
   Formuleer je antwoord als verhouding, als breuk, als percentage en als kommagetal.

3. Een bericht uit de NRC van zaterdag 05-09-2009:

   Werkloosheid VS loopt verder op
   Washington, 5 sept. - De werkloosheid in de Verenigde Staten is in augustus opgelopen tot 9,7 procent, het hoogste niveau sinds juni 1983. In juli was nog 9,4 procent van de beroepsbevolking werkloos. Dat maakte het Amerikaanse ministerie van Arbeid vrijdag bekend. Vorige maand schrapten werkgevers 216.000 banen. Een maand eerder gingen nog 276.000 banen verloren. Het cijfer, de duidelijkste indicator voor de ontwikkeling van de economie, was iets lager dan verwacht. Analisten rekenden gemiddeld op een verlies van 225.000 banen.

   Is het mogelijk om met deze gegevens te berekenen hoeveel werklozen er in de VS waren op 31-08-2009? En op 30-07-2009?

   Kun je dit krantenartikel herschrijven en daarbij in plaats van procenten verhoudingen gebruiken? Kun je ook de procenten vervangen door breuken? En door verhoudingen? En door kommagetallen?

4. De AEX-index staat op 2 mei aan het eind van de dag op 310 punten. Op 3 mei is aan het eind van de dag de AEX-index met 1% is gestegen, maar op 4 mei blijkt aan het eind van de dag dat de AEX-index weer met 1% gedaald is. Op hoeveel punten staat de AEX-index op 4 mei aan het eind van de dag?

5. De prijs van een artikel steeg gedurende de eerste zes maanden van 2008 met 5 %.
   Gedurende de volgende zes maanden van 2008 steeg de prijs met 3%.
   Wat was de prijsstijging over het hele jaar 2008?

6. Marcel zet € 2000 op een spaarrekening. De rente is 4% per jaar. In de voorwaarden staat dat het spaartegoed op elk moment opgenomen kan worden. Na een half jaar besluit Marcel om zijn spaartegoed op te nemen. Hoeveel rente krijgt hij?

Plenaire inleiding over didactische modellen bij procenten

Met behulp van voorbeelden worden de volgende didactische modellen toegelicht:
- Dubbele getallenlijn
- Strookmodel/procentenstrook/schuifstrook
- Verhoudingstabel
- Cirkel-/sectordiagram

Bronnen
Voor het PO: Thema procenten in het po in de Kennisbank Rekenen\Wiskunde
Voor het VO: Thema procenten in het vo in de Kennisbank Rekenen\Wiskunde

Onderzoekopdracht / thuisopdracht behorende bij deze bijeenkomst

Beantwoord de volgende vragen. VO-studenten letten daarbij in het bijzonder op de situatie op hun stage school in het PO en VO-studenten op de situatie op hun stageschool in het po.

Bronnen
- Thema procenten in het VO in de Kennisbank Rekenen\Wiskunde
- Thema procenten in het PO in de Kennisbank Rekenen\Wiskunde
- Leerboeken rekenen voor het PO (groep 6, 7 en 8)
- Leerboeken wiskunde voor het VO (klas 1 en 2)

1. Welke contexten worden gebruikt bij procenten? Zijn er opvallende verschillen tussen PO en VO?

2. Welke didactische modellen worden gebruikt bij procenten? Zijn er opvallende verschillen tussen PO en VO?

3. Wat zijn de belangrijkste verschillen tussen het fundamenteel niveau en het streefniveau voor procenten?

4. Voor het rekenen met procenten is het nodig dat leerlingen een zekere basiskennis hebben van breuken, verhoudingen en kommagetallen. Hoe kun je nagaan of leerlingen daarover beschikken?

5. Is er voor procenten een goede doorlopende leerlijn PO-VO als je kijkt naar de leerboeken?
   Is er in de praktijk op je stageschool voor de leerlingen een goede doorlopende leerlijn PO-VO?

Opmerking voor het PO

Ga na of leerlingen het onderwerp procenten krijgen aangeboden op een niveau dat ze aankunnen en ga na of leerlingen voldoende krijgen aangeboden over het onderwerp procenten. Voor zwakke rekenaars bestaat het risico dat ze het tempo bij rekenen niet kunnen bijbenen en daarom bepaalde onderwerpen missen die voor de aansluiting met het VO belangrijk zijn.

Opmerking voor het VO

In het VO bestaat het risico dat de vaardigheden die leerlingen hebben met procenten onvoldoende onderhouden worden.

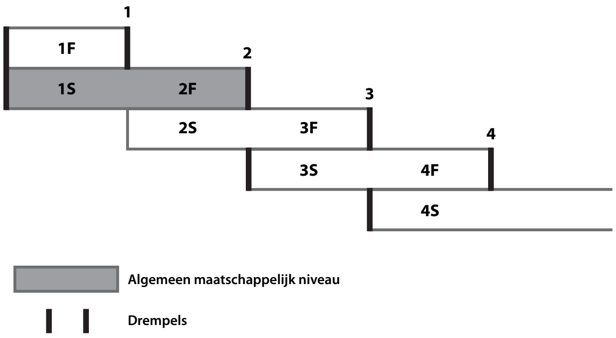
6. In het thema procenten in het PO in de Kennisbank Rekenen/Wiskunde is een aparte paragraaf opgenomen over de doorlopende leerlijn PO-VO voor procenten. Klopt deze beschrijving met de situatie op je stageschool?

7. Welke aanbevelingen kun je doen voor een goede doorlopende leerlijn procenten op je stageschool?

8. Plaats opmerkingen en aanvullingen op het thema procenten in het VO in de Kennisbank Rekenen\Wiskunde of het thema procenten in het PO in de Kennisbank Rekenen\Wiskunde als bezoekersbijdrage in deze kennisbank.

Vakinhoud 5 - Cijferend optellen en aftrekken

REFERENTIEKADER



Inleiding

Deze bijeenkomst gaat over het werken met algoritmen. Een voorbeeld van een algoritme is het cijferend optellen en aftrekken. Daarnaast wordt ingegaan op kolomsgewijs, handig en cijferend rekenen.

Na deze bijeenkomst kan de student

- het begrip algoritme uitleggen
- de aanleerfase van een algoritme benoemen en toepassen in de praktijk
- het verschil aangeven tussen kolomsgewijs, handig en cijferend rekenen en deze kennis bewust toepassen in de praktijk
- de eigen hoofdrekenvaardigheid inschatten ten opzichte van mede-studenten (PO en VO)
- een rekenvaardigheidstoets opstellen voor mogelijke afname in PO en/of VO school
- zich een beeld vormen over de in deze bijeenkomst behandelde begrippen ten aanzien van de doorgaande lijn. Hierdoor kan de student in de eigen beroepspraktijk een meer verantwoorde keuze maken voor het reken-wiskunde onderwijs.

Programma bijeenkomst

- Vier instapsommen op eigen manier oplossen (in tweetallen gekoppeld: PO- en VO-student)
- Plenaire terugblik op de verschillende oplosstrategieën
- Bespreking van 'kolomsgewijs rekenen', 'cijferend rekenen' en 'handig rekenen'
- Drie algoritmen als instap (Amerikaans, Marokkaans en Duits)
- Hoe wordt een algoritme aangeleerd? Vygotsky, principe van interiorisatie
- Zelf ervaren van een aanleren van algoritme (toren van Hanoi)
- Opstellen van een formule (mentaal niveau) door VO-student
- Eigen vaardigheid hoofdrekenen en bespreking door PO-student
- Stellingen VO-PO over kolomsgewijs rekenen/cijferen
- Opstellen van een gezamenlijke toets om de rekenvaardigheid te meten in basisschool en 2de jaar VO.

Resultaten worden besproken in volgende bijeenkomst.

Instapsommen / probleem

Vier instapsommen op eigen manier oplossen (in tweetallen gekoppeld: PO- en VO-student)

1. 234 - 198 =

2. 728 + 478 =

3. 12,178 - 3,34 =

4. € 12,23 + € 245,67 + € 0,10 + € 45,44 =

5a. Reflectievraag: komt jouw gekozen aanpak overeen met de aanpak die jouw leerlingen uit jouw klas / stagegroep bij deze sommen hanteren?
5b. Mogen jouw leerlingen bij deze sommen de zakrekenmachine gebruiken?

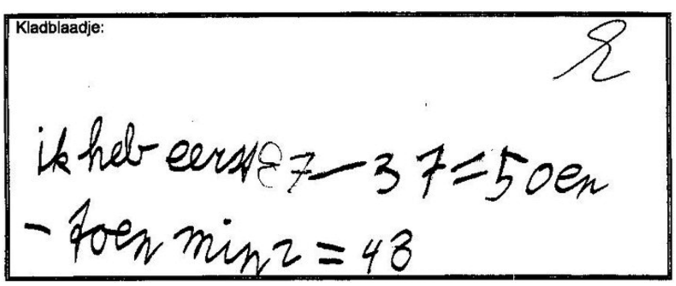
Hoofdthema

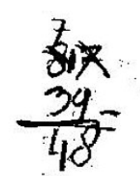
Plenaire terugblik op de verschillende oplosstrategieën

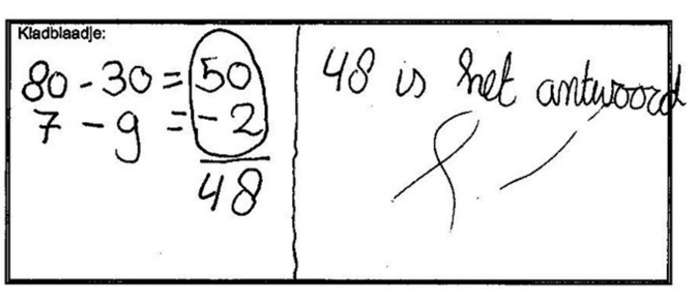
Bespreking van
- 'kolomsgewijs rekenen'
- 'cijferend rekenen'
- 'handig rekenen'

aan de hand van leerlingenwerk.

87 - 39 =







Drie algoritmen als instap (Amerikaans, Marokkaans en Duits)

A. De Amerikaanse optelsom

```
     456
+    589
--------
      15
     13
+    9
--------
       5
      4
+   10
--------
    1045
```

B. De Marokkaanse aftreksom

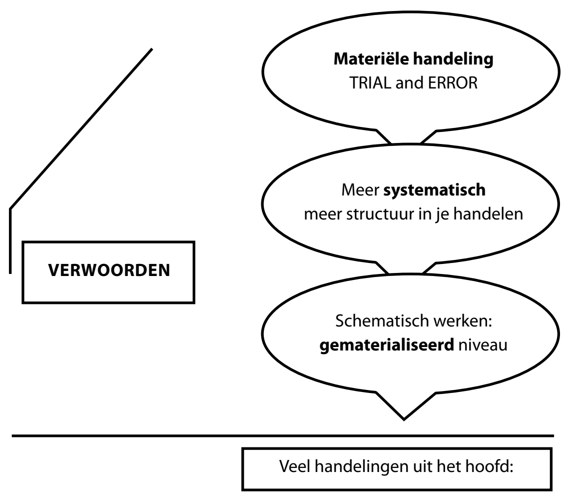
```
     842
-    176
--------
      11
=    666
```

C. De Duitse vermenigvuldiging

```
564 x 22
--------
 1128
   1128
--------
 12408
```

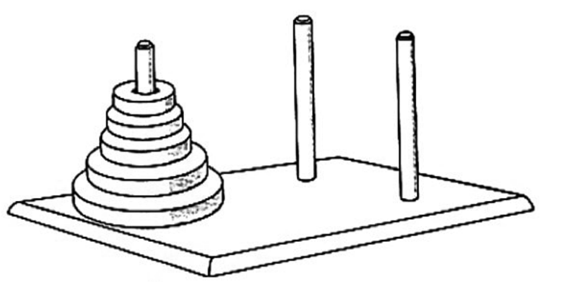
Hoe wordt een algoritme aangeleerd? Vygotsky, principe van interiorisatie

Het leren van een algoritme:



Zelf ervaren van een aanleren van algoritme (toren van Hanoi)

Rekenprobleem
De Toren van Hanoi



De Hoofdrekentoets (eigen vaardigheid):

1. 7 + 8 : 8 x 8 - 8 = …

2. 0,125 x 0,75 x 4 x 8 = …

3. 1 dl = … dal

4. 30 : 14 = …

5. Welk deel is 3 van 12?

6. 144 : 2 : 3 : 4 = …

7. 4 19 x 12 12 x 9 x 8 = …

8. 642 - 310 - 232 = …

9. 17 x 17 = …

10. 118 - 51 - 49 + 82 = …

12. 1004 - 996 =

13. 18 % van € 200,- =

14. 55 x 18 =

15. 64 x 5,125 =

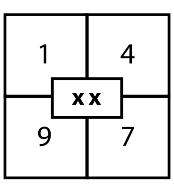
16. 2 56 x 36 = …

17. 8 km in 115 uur;
11 km in … minuten

18. 1500 inwoners / ha = … inwoners / dam2

19. (16 x 113) + (274 x 8) = …

20. Maak 24:



Stellingen

- Een leerling uit het VO hoeft niet te kunnen cijferen om goed in wiskunde te zijn.
- Hoofdrekenen is voor het voortgezet onderwijs van cruciaal belang.
- Binnen het voortgezet onderwijs worden de basisvaardigheden niet goed onderhouden.

Moet er in het voortgezet onderwijs aandacht worden gegeven aan basisvaardigheden?

Onderzoekopdracht / thuisopdracht behorende bij deze bijeenkomst

Neem de toets af die in deze bijeenkomst door de groep is opgesteld.
Maak voor de volgende bijeenkomst een analyse van de gegevens.

Bron

Noteboom, A. Fundamentelen doelen rekenen-wiskunde. Uitwerking van het Fundamenteel niveau 1F voor einde basisonderwijs, Versie 1.1. SLO Enschede, 2008 **het onderdeel bewerkingen:**

Bewerkingen

BEWERKINGEN: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen (Notaties op papier toegestaan)

Minimumdoelen	Voorbeelden
Optellen en aftrekken	
Kunnen optellen en aftrekken (waaronder ook verschil bepalen) met getallen onder ± 1000. (Procedures kunnen zijn: rijgen, splitsen, handig rekenen, kolomsgewijs rekenen, cijferen). Zonder rekenmachine, notaties op papier zijn toegestaan.	- 235 + 349; 578 + 736 - 678 - 384; 600 - 597; 1268 - 385 - en toepassen in eenvoudige dagelijkse contexten als geld, meetsituaties en situaties met hoeveelheden: Op basisschool de Klimop zitten 456 kinderen en op de Smalle weegbree zitten 398 kinderen. Op welke school zitten meer kinderen? Hoeveel meer? De kinderen gaan samen op schoolreisje. Hoeveel kinderen zijn dat in totaal?
Kunnen optellen en aftrekken (waaronder ook verschil bepalen) van grotere getallen boven ± 1000 en kommagetallen. (Procedures kunnen zijn: rijgen, splitsen, hoofdrekenen, cijferen of oplossen met de rekenmachine).	- 13,35 + 37,99 + 125,99 (geld) - 2500 - 1239 - en toepassen in eenvoudige dagelijkse contexten met aantallen, geld en meetsituaties
Globaal schattend kunnen optellen/aftrekken als controle voor rekenen op de rekenmachine of als een globaal antwoord voldoet in de context met de getallen die zich hiervoor lenen. Notaties op papier toegestaan.	- Rekenen met kassabonnen of met bedragen die eenvoudig zijn af te ronden: Pim koopt kleren: en trui voor 12,95; een broek voor 49,98; en T-shirt voor 9,99; samen ongeveer ... euro of: Heeft hij genoeg aan een briefje van 100 euro?
Vermenigvuldigen en delen	
Vermenigvuldigen van een getal met één cijfer met een getal met twee of drie cijfers; Vermenigvuldigen van getal van twee cijfers met een getal met twee cijfers. (Procedures kunnen zijn: splitsen, handig rekenen, vormen van kolomsgewijs rekenen, cijferen). Zonder rekenmachine, notaties op papier zijn toegestaan.	- 6 x 28 = ; 7 x 165 = - 5 dozen van 335 blikjes, hoeveel blikjes zijn dat in totaal? - 35 x 67 = ; 3 x € 2,75 = - 5 uur werken voor € 5,75 per uur - en toepassen in eenvoudige dagelijkse contexten als geld en meetsituaties en met aantallen
Vermenigvuldigen in toepassingssituaties en met grotere getallen en kommagetallen met behulp van eigen procedures of de rekenmachine.	- 36 uur werken voor € 5,75 per uur - 24 x 135 - en toepassen in eenvoudige dagelijkse contexten als geld en meetsituaties en met aantallen
Globaal schattend kunnen vermenigvuldigen als controle voor rekenen op de rekenmachine of als een globaal antwoord voldoet in de context met getallen die zich hiervoor lenen. Notaties op papier toegestaan.	- Rekenen met geldbedragen die eenvoudig zijn af te ronden: 4 shirts van 29 euro: samen ongeveer ... euro - 6 borden van 2,95 euro, samen ongeveer ... - 4 vliegtickets van 289 euro per stuk, hoeveel gaat ons dat ongeveer kosten?
Getallen met maximaal drie cijfers delen door een getal met maximaal 2 cijfers, al dan niet met een rest. Dit kan via opvermenigvuldigen, de verdeeleigenschap, een vorm van kolomsgewijs delen of cijferend delen. In principe zonder de rekenmachine. Notaties op papier toegestaan.	- 132 : 6, 132 : 16 - en toepassen in eenvoudige dagelijkse contexten als geld en meetsituaties en met aantallen: De 435 leerlingen van basisschool Landweert moeten voor de sportdag in 8 gelijke groepen worden verdeeld. Hoeveel leerlingen zijn dat per groep? Leerlingen die overblijven, mogen helpen bij de gymtoestelllen. Hoeveel leerlingen zijn dat?

Omgaan met getallen

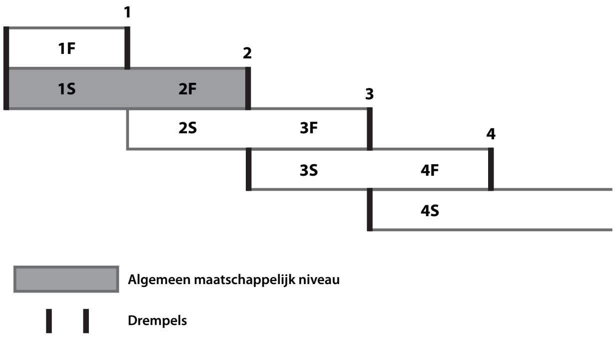
"Tijd is geld", zo sprak de ober en dat was voor ons een strop, want hij telde toen de datum vlotjes bij de nota op.

(van Drs. P en Marjolein Kool, Wis- en natuurlyriek, Nijgh & van Ditmar)

Vakinhoud 6 - Vermenigvuldigen en delen

Van kolomsgewijs naar cijferend

REFERENTIEKADER



Inleiding

In deze bijeenkomst behandelen we de leerlijn vermenigvuldigen en delen. We bekijken de stappen die gezet worden van kolomsgewijs naar cijferend vermenigvuldigen. Ook komt een "bekend" discussiestuk naar voren: de staartdeling!

Na deze bijeenkomst kan de student

- kolomsgewijs vermenigvuldigen en delen
- cijferend vermenigvuldigen
- de eigen visie bepalen over cijferend delen.

Programma bijeenkomst

- Van kolomsgewijs naar cijferend vermenigvuldigen, een uitleg.
- Kolomsgewijs delen.
- Cijferend delen….de staart is nooit weggeweest!
- Discussie cijferend en kolomsgewijs rekenen.

Instapsom

Bereken de volgende opgave kolomsgewijs en cijferend:

125 x 78 =

Bespreek met elkaar de verschillen.

Rekenen met gehele getallen

In hoofstuk 2.5 van de Kennisbasis Rekenen (versie 3 juli 2009) worden de standaardprocedures voor het rekenen met hele getallen uitgelegd.
Het hoofdstuk onderscheidt drie standaardprocedures voor de vier basisbewerkingen.

- Kolomsgewijs rekenen
- Cijferen via progressief schematiseren
- Regelgeleid cijferen

Kolomsgewijs rekenen

Het kolomsgewijs rekenen wordt opgebouwd vanuit het hoofdrekenen. Er wordt aangesloten op en gebruik gemaakt van de aanwezige voorkennis in de vorm van splitsend (hoofd)rekenen. Er wordt gerekend met de getallen en getalwaarden en niet met de losse cijfers (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001). Kolomsgewijs rekenen kan worden benut als opstap naar cijferend rekenen.
Een variant hierop is het voortbouwen op informele kennis en strategieën van kinderen en via vormen van gestileerd hoofdrekenen komen tot standaardprocedures (Buijs, 2008).
De afstand tussen hoofdrekenen en cijferen kan hierbij worden overbrugd met de standaardprocedures van het kolomsgewijs rekenen. Er kan ook direct worden aangesloten bij het hoofdrekenen (Van Biervliet, 1994).

Cijferen via progressief schematiseren

Bij het aanleren van het cijferen is sprake van progressief schematiseren als de procedure in een uitvoerige vorm wordt geïntroduceerd. Er worden situaties aangeboden waarin met vrij grote getallen wordt gewerkt die zich duidelijk niet meer lenen voor een hoofdrekenende aanpak. Deze probleemsituaties vragen om een geschematiseerde weergave die gaandeweg het leerproces verkort wordt tot er uiteindelijk een procedure overblijft die efficiënt en automatisch kan worden uitgevoerd (Goffree, 1992b).

Regelgeleid cijferen

De leerlingen krijgen bij elke bewerking direct het meest verkorte standaardalgoritme voor cijferen aangeboden en gaan deze manier vervolgens systematisch inoefenen. Bij deze aanpak wordt meestal gekozen voor een vorm van progressief compliceren; de opgaven worden gaandeweg moeilijker doordat de getallen groter worden (vergelijk Van de Craats & Bosch, 2007).

Kolomsgewijs delen

Aan de hand van onderstaande opgave laten we zien hoe de verschillende fasen in het schematiserings- en verkortingsproces eruit kunnen zien.
Twaalf leden van een sportteam gingen uit eten. Dat kostte in totaal € 420. Ieder betaalt evenveel. Hoeveel is dat?

A

10 euro's x 12 = 120 euro's
20 euro's x 12 = 240 euro's
*30 euro's x 12 = 360 euro's
* 5 euro's x 12 = 60 euro's
35 euro's x 12 = 420 euro's

Kinderen leren rekenen, tal team, ISBN 9789001851002

B

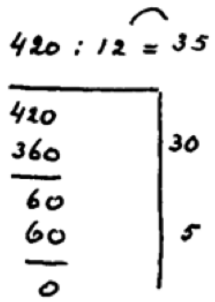
420 : 12 = 35

420	
240 -	20x
180	
120 -	10x
60	
60 -	5x
0	35x

	12
1	12
2	24
4	48
8	96
10	120
5	60

Kinderen leren rekenen, tal team, ISBN 9789001851002

C



Kinderen leren rekenen, tal team, ISBN 9789001851002

Wat valt je op aan deze bewerkingen?

Cijferend delen….de staart is nooit weggeweest!

Lees de volgende artikelen door:
- Boels, Lonneke, De staartdeling is nooit weggeweest, Euclides, 84-7, blz 253-255
- Vermeulen, Willem, Cijferend delen: daar krijg ik een staart van, Volgens Bartjens Jaargang 24 nr. 5

Wordt de staartdeling nog gebruikt in het voortgezet onderwijs? Wie kan voorbeelden noemen?

Bekijk vervolgens op de dvd de fragmenten van Jan van de Craats en Jan van Maanen.
Bespreek met elkaar de dvd.

Discussie cijferend en kolomsgewijs rekenen

In groepen worden nu een aantal stellingen geformuleerd. Gebruik als bronnen:
- Kennisbasis hoofdstuk 2.5
- Kinderen leren rekenen, blz74-82
- De staartdeling is nooit weggeweest, Euclides
- Cijferend delen: daar krijg ik een staart van, Volgens Bartjens

De stellingen die in groepen zijn geformuleerd worden vervolgens klassikaal besproken.
Probeer je argumenten te onderbouwen met feiten.

Onderzoekopdracht / thuisopdracht behorende bij deze bijeenkomst

Aan de hand van de artikelen geef je jouw visie over cijferend en kolomsgewijs delen.

Bijlagen

- Kennisbasis rekenen voor de Pabo.
- Boels, Lonneke, De staartdeling is nooit weggeweest, Euclides, 84-7, blz 253-255
- Kinderen leren rekenen, blz 74-82
- Vermeulen, Willem, Cijferend delen: daar krijg ik een staart van, Volgens Bartjens Jaargang 24 nr. 5

Artikel(en)

- Vermeulen, Willem, Cijferend delen: daar krijg ik een staart van, Volgens Bartjens Jaargang 24 nr. 5
- Boels, Lonneke, De staartdeling is nooit weggeweest, Euclides, 84-7, blz 253-255

Willem Vermeulen

Cijferend delen: daar krijg ik een staart van

Moet het nog en hoe zou het dan moeten?

Van alle bewerkingsschema's die in de rekenles op de basisschool geleerd worden is 'cijferend delen' het moeilijkste. Niet voor niets maken kinderen bij het uitvoeren van een cijferende deling de meeste fouten. Waarom zouden we leerkracht en leerling nog vervelen met het cijferend delen?

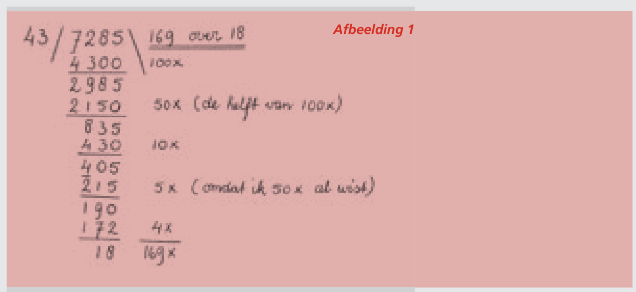
Wat maakt delen zo moeilijk?

Het cijferend delen was vroeger de kroon op het werk. Als je dat goed beheerste, dan kon je rekenen! Cijferend delen is moeilijker dan cijferend optellen, aftrekken en vermenigvuldigen. Dat komt omdat het onder elkaar optellen, aftrekken en vermenigvuldigen zuivere algoritmen zijn. Dat wil zeggen dat het om gesloten procedures gaat. Bij deze berekeningen staat precies vast wat je moet doen. Het cijferend delen daarentegen bevat naast vaste, ook heuristische elementen. Je moet steeds uitmikken hoeveel keer de deler (of een stukje ervan) in het deeltal (of het restant) past. Bovendien is er dan ook nog de eigenaardigheid van de 'rest', wanneer de deling niet precies uitkomt. De 'rest' is een proportie van de deler, die in principe als breuk of kommagetal kan worden weergegeven: 7285 : 43 = 169 rest 18, dat is 169,418…. of $169\frac{18}{43}$
Het schema van het cijferend delen zoals wij dat kennen is mede door deze complexiteiten pas laat in de geschiedenis ontwikkeld.

Kinderen en cijferend delen.

Moeten kinderen het cijferend delen nog wel leren? En zo ja, hoe zou dat dan moeten?
Over deze vragen lopen de meningen uiteen. Jongeren die nooit cijferend hebben leren delen (omdat ze maar tot halverwege groep 6 van de basisschool zijn gekomen met de rekenmethode), blijken best in staat te zijn om een contextprobleem op te lossen als: 'De school houdt een schoolreisje. Er gaan 243 kinderen en 22 personeelsleden mee. In iedere bus kunnen 48 passagiers. Hoeveel bussen moeten er worden besteld?'
Marcus (16), pakt de rekenmachine: 'Eerst 243 + 22, dat is 265, en dan gedeeld door 48, dat is 5,5208 en allemaal drieën. Dus ruim 5 en een halve bus.' Als ik hem erop wijs dat halve bussen niet rijden, zegt hij: 'Zes bussen, maar dan zitten ze niet vol.' Op de vraag of hij het ook zonder rekenmachine kan, antwoordt Marcus: 'Jawel, maar dat duurt mij te lang.' Als ik hem vraag het toch eens te proberen, berekent hij: '48 + 48 = ….(duurt even) 96. Dat zijn twee bussen. Dan nog een, weer 48…. poeh…! Hee, ik kan beter doen alsof er 50 in een bus gaan, dan heb ik steeds twee te veel, dus 100, 200, 250, dat zijn vijf bussen, en tien teveel. En dan nog die 15 dan heb ik er nog 25, daar moet nog een bus voor komen.' Marcus laat zien dat hij er via opvermenigvuldigen zonder rekenmachine ook wel uitkomt. Het lijkt een natuurlijke manier te zijn om dit probleem aan te pakken, net zoals veel leerlingen een deelsom via de overeenkomende vermenigvuldiging (stipsom) aanpakken (48 : 8 = … omzetten naar … x 8 = 48)
Deze aanpak laat zich goed combineren met handig rekenen, zoals in bovenstaand voorbeeld is te zien.

Afbeelding 1



De deling 7285 : 43 volgens de moderne methode van het progressief schematiseren.

De moderne aanpak

De moderne realistische rekenmethodes leren het cijferend delen nog wel aan, maar doen dat via de aanpak van het progressief schematiseren. Dat betekent dat er handige hapenschema's worden gemaakt die de kinderen gaandeweg kunnen verkorten, zie afbeelding 1.

Toen ik onlangs met ouders deze aanpak van het progressief schematiseren besprak, overheerste bij velen de mening dat deze methode 'omslachtig, ondoorzichtig en inefficiënt' was. Sommigen vonden zelfs dat het eind zoek was, als ieder kind zijn eigen manier kon gaan gebruiken. Verschillende ouders vertelden mij dat ze 'op een achternamiddag' hun kind even hadden geleerd hoe een staartdeling 'moest'. Dat wil zeggen: ze hadden met het kind hun eigen oude, verkorte aanpak geoefend. En enkele ouders meldden mij met trots, 'dat het nu veel sneller en beter ging'.

Deze indruk lijkt ondersteund te worden door bevindingen van de PPON, waaruit blijkt dat kinderen die de traditionele staartdeling gebruiken beduidend minder fouten maken dan kinderen die een vorm van de bovengenoemde aanpak hanteren. Opvallend is overigens dat, ondanks de aanpak

van het progressief schematiseren in de moderne reken-wiskundemethodes, ruim een derdedeel van de leerlingen toch de traditionele staartdeling hanteert. Wijken de leerkrachten op dit punt af van de methodes, of zijn het de ouders die dit bewerkstelligen?
Kinderen die de traditionele staart hanteren maken ruim tweederde van de deelopgaven goed, terwijl kinderen die met een vorm van progressief schematiseren werken ruim de helft van de deelopgaven correct oplossen.
Een mogelijke verklaring is dat vooral de betere en snellere leerlingen aan de traditionele staartdeling toekomen. We mogen dus niet zonder meer concluderen dat deze vorm van cijferend delen beter is.

Wat moeten we nu met het cijferend delen?

Vanuit de vakstructuur is het mooi als we voor alle bewerkingen een schematische aanpak hebben: cijferend optellen, waaruit voortvloeit het cijferend vermenigvuldigen, en cijferend aftrekken met in het verlengde het cijferend delen. Maar het cijferend delen blijft, vanwege de genoemde complicaties, een zorgenkind.

JASPER OOSTLANDER

Wat leren we onze leerlingen? Cijferend delen, handig rekenen of gebruik maken van de rekenmachine?

Kinderen zullen van nature veel delingen in contextopgaven eerder aanpakken via handig opvermenigvuldigen dan via een al dan niet gestileerde aftrekprocedure. Ik vraag me dan ook af of het gerechtvaardigd is om zo veel tijd en moeite te investeren in een aanpak die maar weinig functioneel wordt gebruikt. Tenslotte ligt voor kale en moeilijkere sommen het gebruik van de rekenmachine voor de hand. Juist daarbij is het van belang om de uitkomst goed te interpreteren, omdat er, als de deling niet precies uitkomt, altijd een puntgetal in het venster verschijnt. De bespreking daarvan is belangrijk om het inzicht in dit soort getallen te ondersteunen.

De auteur is werkzaam bij Bekadidact

INTER

In het reken-wiskundeonderwijs bestaan nog vele kwesties waarover de meningen verdeeld zijn. In de rubriek 'Interactie' wordt steeds zo'n kwestie onder de loep genomen. De column eindigt telkens in een stelling waarop u via de internetsite kunt reageren.

De uitslag van de vorige stemming

De stelling in het maartnummer van *Volgens Bartjens…* was:
Inzicht maakt oefenen grotendeels overbodig

Voor: **33,4%** Tegen: **66,6%**

De reacties:

Inzicht is belangrijk, maar oefenen eveneens. Dat lijkt de opvatting van het merendeel van de mensen die hun stem uitbrachten. Volgens Ad Schuijf kan inzicht juist door goed oefenen vergroot worden. Want wie hetzelfde probleem binnen verschillende contexten oefent, vergroot zijn abstractievermogen. Bovendien zorgt goede oefening ervoor dat algoritmen inslijpen. Dat levert tijdwinst op bij nieuwe probleemsituaties en dat komt de ontwikkeling van inzicht weer ten goede.
Natuurlijk was er niemand tegen oefenen. Wel waren verschillende stemmers van mening dat inzicht het oefenen kan bekorten. Het is zinloos en zeer tijdrovend om zaken te oefenen die je niet begrijpt. De kans op vergeten en fouten maken is dan erg groot. Als je begrijpt wat je doet kan oefenen heel plezierig zijn. Er zijn kinderen met goed inzicht, maar met een zwak geheugen, voor wie dingen echt regelmatig herhaald moeten worden. Jaap Griffioen beweert krachtig: 'Geoefende rekenaars hebben een groter probleemoplossend vermogen omdat zij uit een rijker repertoire kunnen putten.' Ook als je inzicht hebt en een goed probleemoplossend vermogen, moet je oefenen, want pas door te oefenen word je echt vaardig.
Samenvattend: Zonder inzicht is oefenen zinloos, zonder oefening levert inzicht weinig op. Maar waar ligt de juiste balans tussen oefenen en inzicht ontwikkelen?

Vakinhoud 6 - Vermenigvuldigen en delen

Bijlage 6.2

Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo

Eindversie, 3 juli 2009

2.5. Kennis voor onderwijzen van hele getallen: standaardprocedures waaronder cijferen

Standaardprocedures zijn er in verschillende vormen. De kerndoelen (OC&W, 2006) geven aan dat leerlingen de vier basisbewerkingen (onder andere) leren oplossen door „meer of minder verkorte standaardprocedures. Dat kan cijferen - het meest verkorte standaardalgoritme - zijn, maar dat kan ook een minder verkorte vorm zijn. Er zijn globaal drie verschillende aanpakken binnen dit subdomein te onderscheiden: kolomsgewijs leren rekenen, leren
Voetstuk van de Pabo, Kennisbasis rekenen-wiskunde, pag. 61
cijferen via progressief schematiseren en regelgeleid leren cijferen. Daarbinnen zijn variaties mogelijk. De verschillende aanpakken hangen samen, ook voor wat betreft de te bereiken doelen.

Kolomsgewijs rekenen
Het kolomsgewijs rekenen wordt opgebouwd vanuit het hoofdrekenen. Er wordt aangesloten op en gebruik gemaakt van de aanwezige voorkennis in de vorm van splitsend (hoofd)rekenen. Er wordt gerekend met de getallen en getalwaarden (en niet met de losse cijfers) (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001). Kolomsgewijs rekenen kan worden benut als opstap naar cijferend rekenen.
Een variant hierop is het voortbouwen op informele kennis en strategieeën van kinderen en via vormen van gestileerd hoofdrekenen komen tot standaardprocedures (Buijs, 2008). De afstand tussen hoofdrekenen en cijferen kan hierbij worden overbrugd met de standaardprocedures van het kolomsgewijs rekenen. Er kan ook direct worden aangesloten bij het hoofdrekenen (Van Biervliet, 1994).

Cijferen via progressief schematiseren
Bij het aanleren van het cijferen is sprake van progressief schematiseren als de procedure in een uitvoerige vorm wordt geïntroduceerd. Er worden situaties aangeboden waarin met vrij grote getallen wordt gewerkt die zich duidelijk niet meer lenen voor een hoofdrekenende aanpak.
Deze probleemsituaties vragen om een geschematiseerde weergave die gaandeweg het leerproces verkort wordt tot er uiteindelijk een procedure overblijft die efficiënt en automatisch kan worden uitgevoerd (Goffree, 1992b).

Regelgeleid cijferen
De leerlingen krijgen bij elke bewerking direct het meest verkorte standaardalgoritme voor cijferen aangeboden en gaan deze manier vervolgens systematisch inoefenen. Bij deze aanpak wordt meestal gekozen voor een vorm van progressief compliceren; de opgaven worden gaandeweg moeilijker doordat de getallen groter worden (vergelijk Van de Craats & Bosch, 2007).

Bij de genoemde aanpakken worden ook verschillende voor- en nadelen onderscheiden (vergelijk Van Biervliet, 1994; Feys, 1995b):

- Al lange tijd worden vraagtekens gezet bij het (maatschappelijk) nut van cijferend rekenen, vooral als het gaat om grote getallen (Zijlstra, 1890; Turkstra & Timmer, 1953; Van Gelder, 1969; Uittenbogaard, 2007). Met de komst van de rekenmachine is het maatschappelijk nut van cijferen verder afgenomen (Gravemeijer, 2001).
- Indien algoritmes niet-inzichtelijk worden aangeleerd, worden ze makkelijk vergeten, of treden er gemakkelijk onopgemerkte fouten op in de uitwerking (Erlwanger, 1973)
- Procedures die zonder inzicht worden uitgevoerd zijn gevoelig voor fouten, bijvoorbeeld bij het optreden van nullen in de getallen bij het cijferend delen (Hoogland, 2008b). Inzichtelijk aangeleerde algoritmes kunnen met behulp van de inzichtelijke basis weer gereconstrueerd worden (vergelijk Vermeulen, 2005).

- Regelgeleid cijferen aanleren beperkt zich tot procedurele aanwijzingen, die bij verschillende getallen, feitelijk steeds anders moeten zijn (vanwege bijvoorbeeld lenen en inwisselen).
  Procedurele aanwijzingen zijn daardoor maar beperkt generaliseerbaar en maken bovendien niet zichtbaar waarom de procedure werkt (Ball e.a., 2008)
- Alternatieve aanpakken als kolomsgewijs rekenen, zijn gebaseerd op inzichtelijk handelen; de waarde van getallen blijft zichtbaar en de procedure sluit aan op beschikbare voorkennis van het splitsend hoofdrekenen. Echter, als leerlingen niet tot verkorting komen, moeten er veel deelstappen worden gezet. Met name zwakkere rekenaars komen minder snel tot verkorting en juist zij hebben bij veel deelstappen meer kans op fouten in het uitvoeren van de procedure. Sommigen wijzen er op dat juist zwakkere leerlingen gebaat kunnen zijn bij standaardprocedures (Huitema, 2009) terwijl anderen juist stellen dat deze leerlingen in staat zijn verschillende strategieën te ontwikkelen en te gebruiken (Boswinkel & Moerlands, 2001). Ook wordt er op gewezen dat kolomsgewijs rekenen alleen geschikt is voor relatief kleine getallen (Van de Craats, 2007).
- Verkorting bij progressief schematiseren en kolomsgewijs vermenigvuldigen en delen is noodzakelijk. Kinderen zullen niet altijd uit zichzelf de meest efficiënte strategie ontdekken. Kinderen die bijvoorbeeld dreigen te volharden in uitgebreide en lange procedures moeten gestimuleerd worden tot verkortingen (Uittenbogaard, 2009).
- Welke standaardprocedure het meest efficiënt is en kan worden beschouwd als einddoel, kan verschillen per kind. De meningen hierover zijn in Nederland overigens erg verdeeld (vergelijk Van Zanten, 2009b). De verschillen in effectiviteit (de kans om tot een goed antwoord te komen) tussen cijferen en kolomsgewijs rekenen zijn voor de meeste leerlingen beperkt, de effectiviteit van uitwerkingen wordt (veel) meer beïnvloed door het al dan niet noteren van de uitwerking op papier. Voor leerlingen die qua rekenniveau in de middengroep vallen lijkt het dat cijferprocedures effectiever zijn (Van Putten & Hickendorff 2009).

2.5.1. Contexten en toepassingssituaties bij standaardprocedures waaronder cijferen

Bij het kolomsgewijs rekenen wordt geld als modelcontext gebruikt. Het splitsen in honderdjes, tientjes en euro's geeft voor de kinderen betekenis aan de getallen binnen het formele rekenen.
Allerlei contexten worden gebruikt om standaardprocedures toe te passen. Deze procedures zijn immers niet afhankelijk van de aard en de grootte van de getallen. Bij het cijferen via progressieve schematisering wordt meestal gestart met voorstelbare probleemsituaties waarbij gerekend moet worden met grote getallen. Het regelgeleid cijferen wordt veelal zonder steun van contexten aangeleerd. Hierbij staat de procedure op zich centraal.

2.5.2. Modellen en schema's bij standaardprocedures waaronder cijferen

Bij het aanleren van het kolomsgewijs rekenen en cijferprocedures via progressief schematiseren gaat het om vaste rekenprocedures, die uiteindelijk in sterk verkorte vorm worden genoteerd. De verkorte vormen van noteren die bij het cijferen worden gebruikt steunen sterk op (inzicht in) het decimale positiesysteem. Cijfers moeten steeds op de positie die overeen-komt met hun waarde worden genoteerd.
Aanvankelijk kunnen hierbij schema's worden gebruikt gebaseerd op de positiewaarde van de cijfers, bijvoorbeeld het positieschema H T E (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001). De onderliggende positiewaarden kunnen worden geconcretiseerd met geld of eventueel additief materiaal als M.A.B.-materiaal. Dit materiaal kan worden ingezet om de positiewaarde van de cijfers te visualiseren, niet om daadwerkelijk mee te tellen.
Bij specifieke aanpakken, zoals het bepalen van deeluitkomsten bij vermenigvuldigen, wordt bijvoorbeeld het rechthoekmodel gebruikt (vergelijk Fosnot & Dolk, 2001b).
Bij het regelgeleide cijferen wordt direct de meest verkorte notatievorm gebruikt, zonder hulp van schema's en modellen.

2.5.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij standaardprocedures waaronder cijferen

Het onderscheid tussen kolomsgewijs rekenen en cijferen biedt aanknopingspunten tot differentiatie, bijvoorbeeld in de mate van verkorting die van verschillende leerlingen wordt verwacht.

Aandachtspunten bij het (aan)leren van standaardprocedures zijn onder meer (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001; Koersen & Uittenbogaard, 2006; Buijs, 2008):

- Voor het rekenen met standaardprocedures moeten kinderen optellingen en aftrekkingen tot twintig en de tafels van vermenigvuldiging hebben geautomatiseerd of gememoriseerd. Verder moeten ze voor het cijferen de positiewaarden van de cijfers binnen een getal kunnen benoemen.
- Het honoreren van informele aanpakken in het begin van het leerproces heeft (alleen) zin wanneer deze perspectief bieden voor verdere schematisering en verkorting. Uitwisselen van verschillende aanpakken van de leerlingen kan bijdragen aan het proces van verkorting, als in de aan de orde gestelde aanpakken bijvoorbeeld grotere deelstappen worden gezet (Van Zanten, 2009a).
- Het cijferend optellen kan worden afgeleid en opgebouwd vanuit het kolomsgewijs optellen. Het cijferend aftrekken kan echter niet rechtsreeks uit het kolomsgewijs aftrekken worden afgeleid.

Voetstuk van de Pabo, Kennisbasis rekenen-wiskunde, pag. 63

- Vermenigvuldigen met standaardprocedures wordt geleerd, aansluitend op hoofdrekenstrategieën en informele aanpakken die kinderen al hanteren. Cijferend vermenigvuldigen kan worden afgeleid en opgebouwd vanuit kolomsgewijs vermenigvuldigen. (Buijs, 2008; 2009b; Treffers, 2009).
- Bij het delen kan veelal worden volstaan met een vorm van kolomsgewijs delen waarin zo verkort mogelijk wordt gerekend, honderdtallen, tientallen en eenheden worden per ronde maximaal verdeeld, maar de quotiënten worden volledig uitgeschreven als eind-vorm. Deze vorm is verder te verkorten tot het meest verkorte standaardalgoritme cijferend delen (Treffers & De Moor, 1990; Van Putten & Hickendorff, 2006).
- Lettersommen kunnen bijdragen aan inzicht in de manier waarop algoritmes werken bijvoorbeeld (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001):

```
 EEN
 TWEE
________+
 DRIE
```

De startbekwame leerkracht beschikt over de kennis die nodig is voor het onderwijzen van de standaardprocedures uit deze paragraaf en beheerst daarnaast en in relatie daarmee de opbouw van de verschillende leerlijnen, inclusief mogelijke variaties. Hij /zij kent de respectievelijke voor- en nadelen van de verschillende standaardprocedures. Hij/zij beheerst didac-tische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert, zo-als relevante betekenisverlenende contexten en toepassingssituaties, modellen en schema's en verkortingen. Deze kennis past hij/zij toe om adaptief en diagnosticerend reken-wiskunde onderwijs te kunnen realiseren. Hij/zij stimuleert kinderen om na te denken over de onderlinge relaties tussen verschillende aanpakken.

Bron
http://s3.amazonaws.com/kennisbasis/attachments/85/20090703_kennisbasis_rekenen-wiskunde_eindversie_def.pdf?AWSAccessKeyId=1MAE0Z2V59S5Q91QF2G2&Expires=1265125711&Signature=QC3J4QSV%2BS8lcGmuypizbZsq65E%3D

Bijlage 6.3

De staartdeling is nooit weg geweest

[Lonneke Boels]

Staartdeling als symbool

Met enige regelmaat duikt in de media de discussie over de staartdeling op. Kinderen zouden deze niet meer leren en dat zou één van de verklaringen zijn voor de tegenvallende resultaten voor rekenen bij leerlingen. De staartdeling is daarmee symbool geworden voor algoritmen die niet meer worden aangeleerd en voor de daaruit voortvloeiende problemen.
In dit artikel zal ik laten zien dat de notatie van de staartdeling weliswaar anders is, maar dat het algoritme dat de kinderen wordt aangeleerd, nog steeds hetzelfde is. Het is zelfs vrij eenvoudig om van de ene notatie naar de andere te gaan, zoals ik ook met voorbeelden zal laten zien.

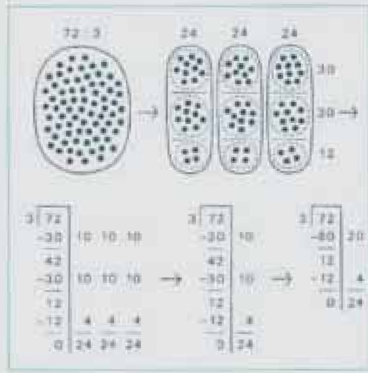
In het rapport *Doorlopende Leerlijnen Rekenen*[1] wordt aangegeven dat onder andere bij het delen de resultaten significant achteruit zijn gegaan. Een mogelijke verklaring voor de oorzaak wordt ook al gegeven: leerlingen noteren hun berekeningen niet, maar proberen alles uit hun hoofd uit te rekenen.
Dat is waarschijnlijk een betere verklaring voor de problemen met delen dan het idee dat het aan het (niet) aanleren van de staartdeling zou liggen. Dit vermoeden wordt verder onderbouwd door het gegeven dat de zwakkere rekenaars in het Nederlandse rekenonderwijs relatief beter presteren dan in andere landen.

Het aanleren van het delen

Hoe gaat tegenwoordig het aanleren van de staartdeling? Dit aanleren gaat in verschillende stappen. In de kleuterklassen (groep 1 en 2) begint het leren delen eigenlijk al. Een kind is jarig en gaat de traktatie, bijvoorbeeld op zelfgebakken koekjes, eerlijk verdelen. Bij dit delen krijgt iedereen eerst één koekje en als er genoeg over is, krijgen de kinderen er weer één. Dit gaat net zo lang door totdat er niet meer genoeg over is om iedereen één koekje te geven. In groep 3 wordt hier op voortgebouwd door appels, kastanjes, steentjes, geld enz. eerlijk te verdelen; ***zie figuur 1***. De vraag 'Hoe heb je verdeeld?' wordt klassikaal besproken en

figuur 1 Voorbeeld van leren delen uit Rekenrijk, een rekenmethode voor groep 3[2]

hierbij wordt dan een eerste stap gemaakt naar het noteren en formaliseren: het verticale mathematiseren. In plaats van verdelen over kinderen wordt nu soms ook verdelen over kommetjes gebruikt: ook een eerste abstractie. In de loop van de volgende jaren wordt deze methode genoteerd en steeds verder geformaliseerd; zie de voorbeelden ***in figuur 2*** en ***in figuur 3***.
Zoals u ziet, begint het met herhaald aftrekken van hoeveelheden die de leerling zelf kiest. Er wordt wel gestreefd naar handige veelvouden (bijvoorbeeld 10 tegelijk). Daarbij wordt vaak gebruik gemaakt van een tabel met hulpsommen zoals in het voorbeeld hierna.



figuur 2 Voorbeeld van stappen in het proces van aanleren van het deelalgoritme middels herhaald aftrekken in een didactiekboek voor de Pabo[3]

Delen	uitgebreid	verkort
1976 : 52	1976 1040 20x 936 520 10x 416 208 4x 208 208 4x 0	1976 1560 30x 416 416 8x 0

figuur 3 De laatste twee stappen in het aanleren van het algoritme van het delen zoals de uitgever van de rekenmethode Pluspunt dit uitlegt aan leerkrachten en ouders[4]

De bedoeling is dat de toekomstige leerlingen van havo en vwo uiteindelijk de kortste manier van dit algoritme gebruiken. Dat ziet er dan bijvoorbeeld als volgt uit als ***in figuur 4***.
Daarbij wordt gebruik gemaakt van een hulptabel die er als volgt kan uitzien:
1 × 58 = 59
2 × 58 = 116
4 × 58 = 232
5 × 58 = 290
10 × 58 = 580
7 × 58 = 406

6237 : 58 =

```
58 | 6237 |
     5800 | 100
     ----
      437 |
      406 |   7
     ---- | ---
       31 | 107  rest 31
```

figuur 4 Kortste notatie van een deling in de rekenboeken die op basisscholen worden gebruikt

6237 : 58 =

A

58 6237		
5800	100	
437		
406	7	
31		
29	0,5	
2		
1,74	0,03	
0,26	107,53	rest 0,26

B

58 / 6237 \ 107,53
58
437
406
310
290
200
174
26

figuur 5 Deling volgens nieuwe notatie (A) en dezelfde deling met een staartdeling (B)

De traditionele manier van oplossen van de staartdeling leidde in het hierboven gegeven voorbeeld steevast tot problemen. Veel leerlingen gaven hier als antwoord: 17 door het vergeten van de 'nul' (***zie figuur 5B***). Deze problemen waren nog groter als er ook cijfers na de komma moesten worden gegeven. De komma werd vaak verkeerd geplaatst met grote gevolgen voor de uitkomst. Als we de twee notaties naast elkaar zetten, wordt duidelijk waarom de kans op fouten bij de nieuwe notatie minder groot is: er wordt met de correcte cijfers gerekend en niet met losse getallen: ***zie figuur 5A***, ***figuur 5B*** en ***figuur 7***.
Bij de berekening in figuur 5A kan een hulptabel als onderstaand worden gebruikt:
0,1 × 58 = 5,8
0,5 × 58 = 29
0,01 × 58 = 0,58
0,02 × 58 = 1,16
0,03 × 58 = 1,74

Het delen vroeger

Maaike zat aan haar bureautje huiswerk te maken. Ze keek hem stralend aan, want ze was net bezig met staartdelingen en ze wist dat Tjerk daar heel goed in was. 'Kom je me helpen?', vroeg ze. Tjerk pakte een stoel, ging naast haar zitten en keek naar de ellenlange som. 'Hij komt niet uit', zuchtte ze. 'Ik word er gek van. Ik zit al een half uur op die rotsom.'[?]

Destijds leverde het direct aanleren van de staartdeling een groot aantal problemen op die door sommigen nu vergeten lijken, zoals ik onlangs nog kon constateren. Een leerling uit groep 7/8 was aan het worstelen met de staartdeling. Zijn leerkracht had hem het trucje geleerd, maar het was duidelijk dat hij er niets van begreep. Hij moest twee kommagetallen op elkaar delen en schoof maar wat met de komma's. Na een kwartier was hij nog nauwelijks verder. Een vmbo-docent die als basisschoolleerkracht zo'n 40 jaar geleden is begonnen en daarna jaren op een huishoudschool en later vmbo heeft gewerkt, bevestigde eveneens dat er een grote groep leerlingen was die de staartdeling niet onder de knie kreeg. Van enig inzicht door herhaalde oefening was hierbij geen sprake. Ook de uitgever van de rekenmethode *Pluspunt*[?] noemt een aantal nadelen van het oude leerproces op. De meest voorkomende problemen met de staartdeling waren:

- zwakke rekenaars kregen het algoritme meestal niet onder de knie;
- zwakke rekenaars hadden geen alternatieve strategie als de staartdeling niet lukte;
- als het antwoord een '0' bevatte, werd deze nogal eens vergeten waardoor het antwoord ongeveer een factor 10 (of 100 of ...) te klein was;
- voor delingen met kommagetallen moesten de leerlingen aparte regels leren; hiermee werden veel fouten gemaakt, met name ook weer door de zwakke rekenaars.

Pluspunt: Wat zijn de verschillen met vroeger? Als u kijkt naar [de] voorbeelden, dan ziet u verschillen bij vermenigvuldigen en vooral bij delen. Vroeger, bij het ouderwetse 'cijferen', werd een getal opgesplitst in de verschillende cijfers en daar moest je dan volgens vaste regels mee werken. Dat leidde tot trucjes met nullen en open plaatsen. Sommige kinderen werden daarin heel handig door veel te oefenen zonder dat ze een idee hadden wat ze precies aan het doen waren.
Kinderen noteren bij het huidige rekenen hun berekeningen uitgebreider, zeker in het begin. Dat komt omdat de kinderen steeds met een heel getal werken. Ze realiseren zich dat de '5' uit 53 staat voor 50 en met dat getal gaan ze rekenen. De verschillen tussen vroeger en nu zijn echter ook weer niet zo erg groot. De verkorte vorm van nu lijkt erg veel op de ouderwetse manier. De kinderen nu doen iets meer schrijfwerk, hebben daardoor meer inzicht en minder kans op fouten![?]

Staartdeling als kortste notatie

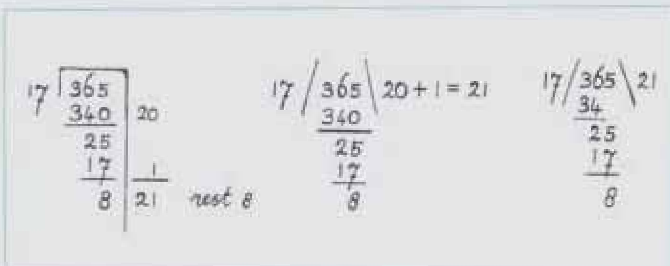
Dankzij de discussie over het rekenen staat de staartdeling nu weer in sommige wiskundeboeken, zoals in *Getal en Ruimte*. Wat ik daarbij een gemiste kans vind, is dat er niet even een link wordt gelegd met de aangeleerde notatievorm. De staartdeling kan dan wat mij betreft gepresenteerd worden als de kortste notatievorm en is dus een logische volgende stap in het proces van delen als herhaald aftrekken. In een didactiekboek over het rekenonderwijs[?] vond ik een prachtig voorbeeld over precies deze overgang: ***zie figuur 6***.
Want laten we wel wezen, de staartdeling heeft voor rekenaars één groot voordeel: door de overbodige cijfers tijdelijk weg te laten blijven de vermenigvuldigingen beperkt tot kleine(re) getallen. Het is niet voor niets dat Van de Craats in zijn artikel[?] schrijft "... en is de staartdeling niet gewoon de meest efficiënte hapmethode?"
De 'hapmethode' is een benaming voor deze 'nieuwe' manier van delen via herhaald aftrekken. In de nieuwe boeken van *Moderne Wiskunde* voor de brugklas van havo en vwo wordt bijvoorbeeld wel teruggegrepen naar de 'hapmethode', alleen wordt hier de staartdeling (nog) niet aangeleerd of herhaald.

Overigens, er wordt door tegenstanders van de 'nieuwe' rekenmethoden hard geroepen dat ze niet goed zijn (o.a. kolomsgewijs rekenen), omdat het van links naar rechts is terwijl 'alle andere' methoden voor het cijferen van rechts naar links zijn. Maar mij valt op dat ook deze staartdeling van links naar rechts is…

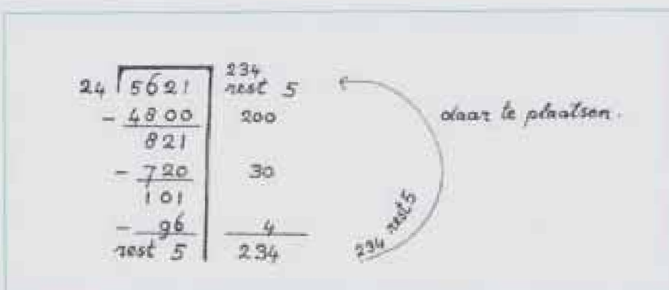
Door de zwakke rekenaars de strategie van herhaald aftrekken met kleinere happen te leren en vervolgens de (toekomstige) havo/vwo-leerlingen de staartdeling te leren als de ultieme verkorting van deze methode, combineren we in mijn ogen het beste van twee werelden. Het biedt bovendien het voordeel dat de staartdeling verderop in de opleiding met letters kan worden uitgevoerd, hetgeen bij de exacte hbo- en wo-opleidingen nogal eens vereist is. Overigens kunnen dergelijke vraagstukken ook zonder de staartdeling worden opgelost, maar dat terzijde.

Als dan bovendien het verband wordt gelegd tussen de 'hapmethode' en de staartdeling, wordt tegelijk tegemoet gekomen aan één van de kritiekpunten van de commissie Dijsselbloem op het wiskundeonderwijs. Er wordt dan immers wél voortgebouwd op de kennis en methoden die leerlingen op de basisschool hebben geleerd. En daar zijn onze leerlingen nog het meest bij gebaat.

Er woedt een rekenoorlog lijkt het wel. Je bent óf voor Van de Craats c.s. (en dus tegen Freudenthal c.s.) óf tegen. Persoonlijk vind ik dat jammer. Want volgens mij willen alle docenten die zich hierover druk maken, uiteindelijk hetzelfde: dat onze leerlingen *goed* kunnen rekenen. Dat lukt alleen als wij genuanceerd kijken naar wat werkt en wat niet, én onze vooringenomenheid durven te laten varen.



figuur 6 Overgang van herhaald aftrekken naar staartdeling[4]



figuur 7 Voorbeeld van herhaald aftrekken (verkorte methode)[4]

Noten

[1] *RekenRijk. leerlingenboek voor groep 3.* Groningen: Wolters-Noordhoff (2e editie).

[2] F. Goffree (1992): *Wiskunde en didactiek, deel 2.* Groningen: Wolters-Noordhoff (2e druk).

[3] Zie: *www.malmberg.nl/systeem/images/rekenresultaten-Pluspunt_tcm6-32767.pdf*

[4] K. van Broekhuizen e.a. (1994): *Rekenen in beweging.* Uitgeverij SLO/VPC (ISBN 9062387004).

[5] J. Vriens (1984): *De zesde tegen het soepie.* Houten: Van Holkema en Warendorf.

[6] T. Braams, M. Milikowski (redactie): *De gelukkige rekenklas.* Amsterdam: Uitgeverij Boom; pag. 34 (ISBN 978-90-8506-615-6).

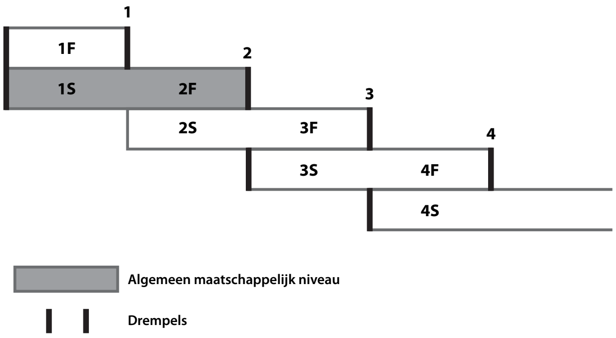
[7] Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008): *Over de drempels met rekenen.* Deelrapport van de Eindrapportage van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen.
Zie: *www.taalenrekenen.nl/Algemeen/Nieuws/00002/Rekenrapport.pdf*

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocente op het Christelijk Lyceum Delft. Daarnaast heeft zij invalwerk verricht op een basisschool en op een Pabo. Zij heeft haar eigen bedrijf, Alaka (*www.alaka.nl*), waarin zij onder andere materialen maakt voor een Pabo voor de nascholing van basisschoolleerkrachten en wiskundebijlessen geeft. Zij is bovendien een van de ontwikkelaars van de rekenlessen voor de bovenbouw havo binnen een project van de NVvW.
E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

Vakinhoud 7 - Negatieve getallen

REFERENTIEKADER



Inleiding

Deze bijeenkomst gaat over het werken met negatieve getallen. Rekenen met negatieve getallen is een onderdeel van rekenen-wiskunde die "als rekenen met getallen" pas voor het eerst behandeld wordt in de eerste klas van het voorgezet onderwijs. Maar dit is niet de eerste keer dat leerlingen van de basisschool met negatieve getallen in aanraking komen. In deze bijeenkomst gaan we met elkaar kijken naar de manier van aanleren van de negatieve getallen. Maar ook krijg je de vraag om zelf op een eigen manier didactiek voor negatieve getallen te ontwikkelen. Natuurlijk gaan we ook kijken naar de kerndoelen. Als basisbron gebruiken we in deze bijeenkomst de Kennisbank Wiskunde en de Kennisbank Rekenen van het Ruud de Moor Centrum.

Na deze bijeenkomst kan de student

- uitleggen wanneer en hoe leerlingen negatieve getallen kunnen toepassen
- beweringen over negatieve getallen beargumenteren
- gebruik maken van de Kennisbank Wiskunde en Kennisbank Rekenen
- de kerndoelen toepassen in te ontwerpen lesmateriaal.

Programma bijeenkomst

- Minteken met verschillende betekenissen
- Doelen van negatieve getallen
- Hulpmiddelen negatieve getallen
- Beweringen
- Stellingen negatieve getallen
- Ontwerpen van lesmateriaal

Instapsommen / probleem

Het minteken wordt op verschillende manieren gebruikt. Zo is er het teken voor aftrekken en het teken voor negatief zijn.
Hoe leg je het verschil uit aan leeringen die voor het eerst met negatieve getallen in aanraking komen? Maak per groep een duidelijke uitleg.
Dit presenteren de groepen vervolgens.

Doelen
Elke methode heeft zijn eigen doelen, maar wel met een gemeenschappelijk doel: "het kunnen rekenen met negatieve getallen". Aan de hand van de kennisbasis bespreken we met elkaar de doelen, en of die behaald zijn. Deze doelen zijn te vinden in "kerndoelen wiskunde - negatieve getallen".

Verschillende vormen van uitleg
In de verschillende methoden worden verschillende manieren voor uitleggen van negatieve getallen gebruikt. De kennisbank Wiskunde heeft dit duidelijk uitgelegd. Zie het kopje "hulpmiddelen" en "methodespecifieke informatie".
Geef over elk hulpmiddel je mening in PMI-vorm.
(PMI-vorm: positief, minder, Interessant)
Bespreek vervolgens met elkaar de voors en tegens van elk hulpmiddel.

Beweringen
Hieronder staan beweringen over gehele getallen. Vul steeds positief of negatief in. Als je niet kunt weten of de uitkomst positief of negatief is, vul je in: weet niet.

Voorbeeld:
Als je bij een positief getal een positief getal optelt, is de uitkomst?
Het antwoord is dan: positief

Als je van een positief getal en negatief getal aftrekt is de uitkomst?
Als je van een negatief getal en positief getal aftrekt is de uitkomst?
Als je van een negatief getal en negatief getal aftrekt is de uitkomst?
Als je bij een negatief getal een negatief getal optelt is de uitkomst?
Als je bij een negatief getal een positief getal optelt is de uitkomst?
Als je twee negatieve getallen met elkaar vermenigvuldigt, is de uitkomst?
Als je vijf negatieve getallen met elkaar vermenigvuldigt, is de uitkomst?
Als je vijf positieve en twee negatieve getallen met elkaar vermenigvuldigt, is de uitkomst?
Het tegengestelde van een getal is?

De Getallenlijn ⟷ Heksenketel
We bekijken een totaal andere uitleg voor het rekenen met negatieve getallen. Deze methode komt van "Op z'n Inges", een methode van Inge van der Heijden. Zij heeft zelf een wiskundecentrum waar ze ondersteuning biedt aan leerlingen voor rekenen wiskunde. Haar uitleg staat in de bijlage "op z'n Inges".

Vergelijken/ onderzoek
Ga uit een wiskundemethode (Getal en Ruimte, Moderne wiskunde) het hoofdstuk over negatieve getallen vergelijken met de methode van "Op z'n Inges".
Wat zijn essentiële verschillen?

Stellingen
Beargumenteer met elkaar de volgende stellingen:

- In het basisonderwijs kan al goed begonnen worden met negatieve getallen.
- De heksenketel is een context waarin duidelijk kan worden aangeleerd wat negatieve getallen zijn.

Onderzoekopdracht / thuisopdracht behorende bij deze bijeenkomst
Het materiaal dat we tot nu toe bekeken hebben is materiaal van het voortgezet onderwijs.
Negatieve getallen komen niet in de kerndoelen van de basisschool voor. Toch wordt er al wel een begin gemaakt met negatieve getallen. Te denken valt dan aan de thermometer. In de Kennisbank Rekenen wordt er ook al volop aandacht besteed aan het onderdeel temperatuur.
Zoek in bestaande methoden (delen van) lessen hierover op. Nu is het jullie taak om zelf aanvullende opdrachten bij deze methoden te maken. Opdrachten waarin leerlingen uiteindelijk eenvoudige rekensommetjes met negatieve getallen kunnen oplossen. Maak gebruik van de Kennisbank Rekenen en de Kennisbank Wiskunde. Gebruik als basis het hoofdstuk "operationalisering van getallen" uit "doorlopende leerlijnen rekenen".

Maak in groepen van twee personen deze opdrachten. Voer deze les ook op je stageschool uit. Evalueer je gemaakte opdrachten in tweetallen.

Bijlagen
Kennisbank Wiskunde.
Op z'n Inges.
Kerndoelen wiskunde - negatieve getallen.

Artikel (en)
H7 rapport doorlopende leerlijnen. "De operationalisering van getallen".

Kennisbank Wiskunde

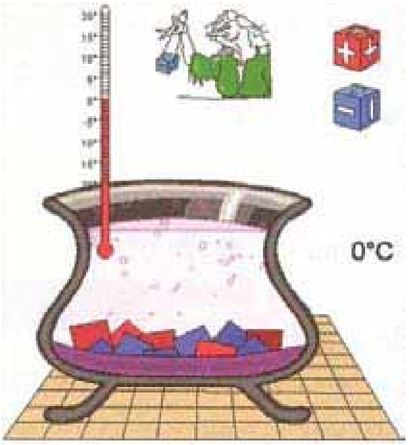
U kijkt nu naar het thema: Negatieve getallen (gt)

Introductie negatieve getallen
We bekijken hier de manieren waarop negatieve getallen in het eerste jaar van het VMBO (gemengd theoretisch) worden geïntroduceerd. De leerlingen maken kennis met negatieve getallen en maken vervolgens een begin met optellen en aftrekken hiermee.

Het is zinvol om onderscheid te maken tussen de twee mintekens: het teken voor aftrekken en het teken voor negatief zijn. Begrippen als groter en kleiner bij negatieve getallen kunnen nu aan de orde komen. Uitbreiding van het assenstelsel naar het deel rechts onder de oorsprong wordt mogelijk. Soms zijn echter alle kwadranten al eerder bij het onderwerp Assenstelsels behandeld.

Hulpmiddelen
Hieronder geven we voorbeelden van hulpmiddelen bij het introduceren van de negatieve getallen.

De heks
Zij kan de temperatuur van haar toverketel regelen met blauwe (=koude) en rode (=warme) blokjes. Toevoegen staat voor optellen, blokjes er uithalen staat voor aftrekken.

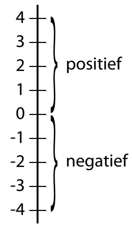


Bron: Moderne Wiskunde, deel 1B, vmbo gt havo

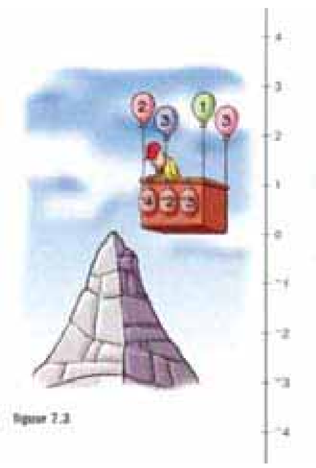
De thermometer

Een thermometer wordt omgebouwd naar een verticale getallenlijn. Het optellen en aftrekken wordt weergegeven met behulp van een luchtballon met ballonnen (positieve getallen) en zandzakken (negatieve getallen). Optellen wordt uitgebeeld door een ballon of zandzak erbij, aftrekken door een ballon of zandzak weggooien.

Als je bij een thermometer de graden weglaat krijg je een verticale lijn waar alleen getallen bij staan.
Zo'n lijn noem je een **getallenlijn.**
De **positieve getallen** staan boven nul.
De **negatieve getallen** staan onder nul.



bron: Moderne Wiskunde, deel 1B, vmbo gt havo



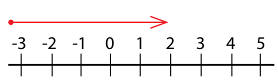
bron: Getal & Ruimte, 1 vmbo-T/havo 2

De horizontale getallenlijn

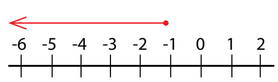
Het optellen van positieve en negatieve getallen wordt hier uitgebeeld door naar rechts, dan wel naar links te gaan. Aftrekken vraagt om een omgekeerde bewerking.

Bij optellen kun je een getallenlijn gebruiken

Voorbeeld 1
Hoe bereken je -3 + 5?
Denk aan de balletjes -3 en +5
Na het eerste balletjes sta je in -3.
Daarna ga je vijf plaatsen naar rechts.
De uitkomst is 2.
-3 + 5 = 2



Voorbeeld 2
Hoe bereken je -1 + -5
Denk aan de balletjes -1 en 5
Na het eerste balletje sta je in -1.
Vanaf -1 ga je vijf plaatsen naar links.
De uitkomst is -6.
-1 + -5 = -1 -5 = -6



bron: Netwerk, deel 1B, vmbo gt havo

Methodespecifieke informatie

Getal & Ruimte
hoofdstuk 7 (Rekenen met negatieve getallen).

Moderne Wiskunde
hoofdstuk 9 (Negatieve getallen).

Netwerk
hoofdstuk 10 (Negatieve getallen).

Optellen en aftrekken
Moderne Wiskunde hanteert als hulpmiddel **de heks**.
Netwerk gebruikt het mannetje **MinPlus** (ga naar hoofdstuk 11, kern 1). Dat mannetje loopt naar rechts en naar links over een getallenlijn al naar gelang er groene dan wel rode balletjes verschijnen.
Beide methodes behandelen met deze applets het optellen van positieven en negatieve getallen.
Ook het aftrekken kan hiermee worden behandeld.
Getal & Ruimte gebruikt als hulpmiddel bij het optellen en aftrekken een luchtballon met ballonnen en zandzakken om de luchtballon te laten stijgen en dalen (verticale getallenlijn).

Vermenigvuldigen en delen
Getal & Ruimte beperkt zich niet tot het optellen en aftrekken van negatieve getallen. Zij besteedt ook aandacht aan het vermenigvuldigen en delen met negatieve getallen en het gebruik van voorrangsregels.
Moderne Wiskunde bespreekt het vermenigvuldigen in een plusparagraaf.
Ook *Netwerk* bepreekt het vermenigvuldigen in een plusparagraaf. Daar wordt eveneens het delen besproken.

Min-teken
Getal & Ruimte benadrukt het verschil tussen de bewerking aftrekken en het negatief zijn van een getal door gebruik te maken van typografisch onderscheid. Het min-teken bij aftrekken is langgerekt en in normaal lettertype, het min-teken bij een negatief getal is korter en in superscript: -3 – 1 = -4.

Doelen

De leerlingen moeten:
- weten wat een negatief getal voorstelt
- kunnen optellen en aftrekken met positieve en negatieve getallen, bijvoorbeeld -12 + 5 = ... en 12 – -5 = ...

Methodespecifieke informatie

Daarnaast zijn er meer methodespecifieke doelstellingen.
Bij *Moderne Wiskunde* en *Netwerk* vinden we de volgende aanvullende doelstellingen:
De leerlingen moeten
- van twee getallen (positief dan wel negatief) kunnen bepalen welk groter en welk kleiner is
- in een assenstelsel kunnen werken met het deel rechts onder de oorsprong.

Bij *Getal & Ruimte* vinden we de volgende aanvullende doelstellingen:
De leerlingen moeten
- kunnen vermenigvuldigen en delen met positieve en negatieve getallen
- de voorrangsregels kunnen toepassen bij de vier bewerkingen.

Opgaven

De leerlingen moeten uiteindelijk kunnen werken met opgaven als:

Optellen en aftrekken

7 + -5 =
-2 + 10 =
-12 + -8 =
2 – 8 =
-3 – 4 =
-2 – -1 =

Vermenigvuldigen en delen (alleen bij Getal & Ruimte)

7 × 5 =
-10 ÷ 2 =
3 × -8 =
-4 ÷-2 =

Voorrangsregels (alleen bij Getal & Ruimte)

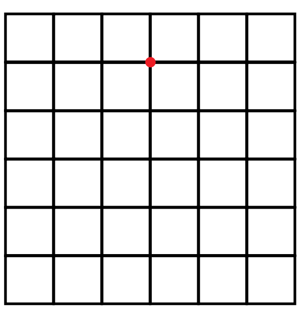
3 + 2 × -5 =
10 ÷ -2 – 4=

Groter en kleiner (niet bij Getal & Ruimte)

Vul in: < of >
6 ... 4
-3 ... 2
-7 ... -10

Assenstelsel (niet bij Getal & Ruimte)

Teken het punt A (2,-1) en schrijf van het punt B de coördinaten op.



Lange-termijndoelen

De leerlingen worden voorbereid op het uitvoeren van complexere bewerkingen als vermenigvuldigen en delen bij negatieve getallen (bij *Moderne Wiskunde* en *Netwerk*).

Voorkennis

De leerling
- kan optellen en aftrekken met positieve gehele getallen, waarbij de uitkomst een positief getal is
- heeft al kennisgemaakt met tabellen en grafieken, waarbij uitsluitend met positieve getallen wordt gewerkt.

Diagnose stellen

Optellen en aftrekken
Het toetsen van optellen en aftrekken kan met opgaven als:

Temperatuur
Het is 7 graden en het wordt 3 graden warmer of kouder.
7 + 3 = ...
7 − 3 = ...
Gisteren was het 10 graden en vandaag is het 2 graden. Is het vandaag kouder of warmer dan gisteren? Hoeveel graden is het dan kouder/warmer geworden?
10 +/- .... = 2

Verdiepingen van een gebouw
Marloes woont op de 10e verdieping van een flat. Zij gaat op bezoek bij haar vriendin op de 2e verdieping. Hoeveel verdiepingen gaat zij dan naar beneden?
10 − ... = 2

Saldo
Jan heeft op maandag 15 euro op zijn rekeningnummer staan. Op dinsdag pint hij 10 euro. Hoeveel heeft hij daarna op zijn rekening?
Op donderdag krijgt hij 5 euro zakgeld op zijn rekening gestort. Welk saldo heeft hij dan op vrijdag op zijn rekening?
15 − 10 + 5 =

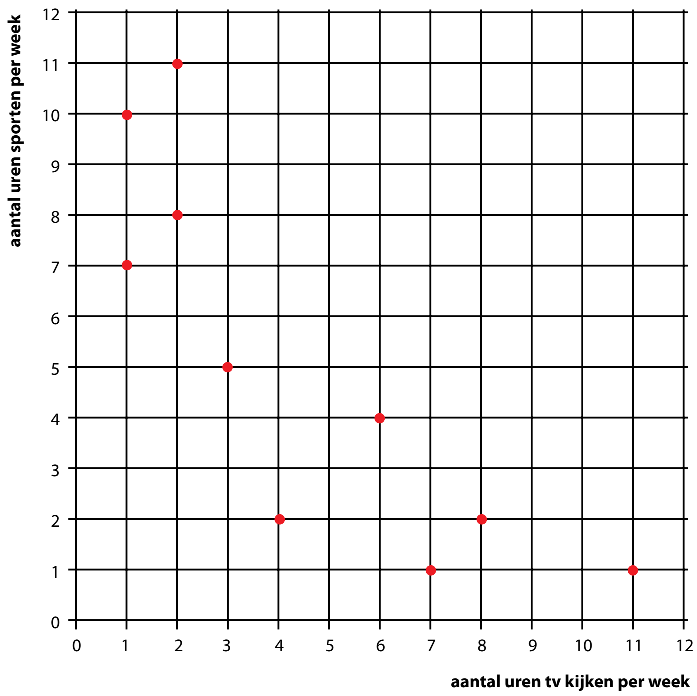
Tip
Besteed hierbij aandacht aan de wiskundige notatie.

Tabellen en grafieken
Het toetsen van kennis van grafieken en tabellen kan met opgaven als:

Persoon	Aantal uren TV kijken per week	Aantal uren sporten per week
Jan	11	1
Frits	4	2
Flip	3	5
Esther	1	7

Wie van deze vier kinderen is het meest sportief? Wie van deze vier kinderen kijkt het minst naar de TV?

In onderstaande grafiek zijn de gegevens van 10 kinderen in een grafiek gezet.
Welke punten horen bij Jan, Frits, Flip en Esther?
Waar zou jij ongeveer een punt moeten neerzetten? Past dat nog in deze grafiek?



Hoe de doelen te bereiken?

Instapproblemen

- Op een thermometer de temperatuur in de zomer (boven nul) en in de winter (onder nul) aflezen (*Moderne Wiskunde*);
- Rood staan (*Getal & Ruimte*);
- Bordjes opduiken in een zwembad (*Getal & Ruimte*);
- Hoogte onder/boven N.A.P. (*Netwerk)*;
- Hoe hoog woon je? Hoe laag woon je?: een inleiding in werken met negatieve getallen (*APS*).

Contexten

Temperatuur
Weersvoorspelling: morgen wordt het kouder.
<u>Voorbeeldopgave</u>

Saldo
Sonja wil dure schoenen kopen.
<u>Voorbeeldopgave</u>

Flatgebouw
Peter gaat zijn fiets halen uit de kelder.
<u>Voorbeeldopgave</u>

Krant
In kranten staan tabellen over het weer in Europa.
<u>Voorbeeldopgave</u>

Landkaart
De Vaalserberg ligt op 321 m boven zeeniveau. Op de kaart staat +321 m.
<u>Voorbeeldopgave</u>

DVD-recorder
Jorinde koopt een dvd-recorder van 375 euro.
<u>Voorbeeldopgave</u>

Cadeaubon
Bert heeft een cadeaubon van 5 euro voor zijn verjaardag gekregen.
<u>Voorbeeldopgave</u>

Duikboot
Een duikboot vaart aan de oppervlakte. Daarna duikt hij.
<u>Voorbeeldopgave</u>

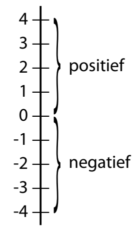
Reflectie

Het rekenen met negatieve getallen blijkt vaak nog in latere leerjaren een struikelblok te vormen.
Van belang is dan ook om vanaf het begin veel aandacht te besteden aan inzicht. Maar ook het oefenen moet niet worden verwaarloosd.

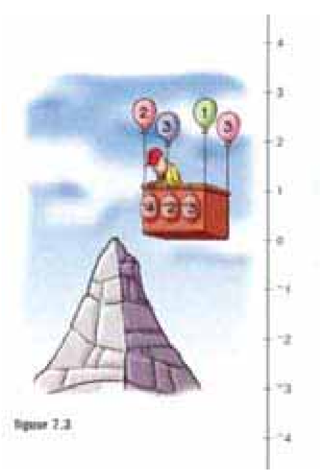
Methodespecifieke informatie

Moderne Wiskunde start met de thermometer. Ze vertaalt het principe ervan naar de verticale getallenlijn.
Ook Getal & Ruimte gebruikt de verticale getallenlijn.

Als je bij een thermometer de graden weglaat krijg je een verticale lijn waar alleen getallen bij staan.
Zo'n lijn noem je een **getallenlijn.**
De **positieve getallen** staan boven nul.
De **negatieve getallen** staan onder nul.



bron: Moderne Wiskunde, deel 1B, vmbo gt havo

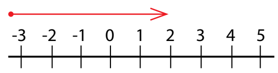


bron: Getal & Ruimte, 1 vmbo-T/havo 2

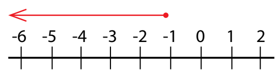
Netwerk start ook met de thermometer, maar vertaalt dit naar een horizontale getallenlijn. Omhoog/omlaag wordt dan: naar rechts/naar links. Dit vereist van de leerlingen een hoger abstractieniveau.

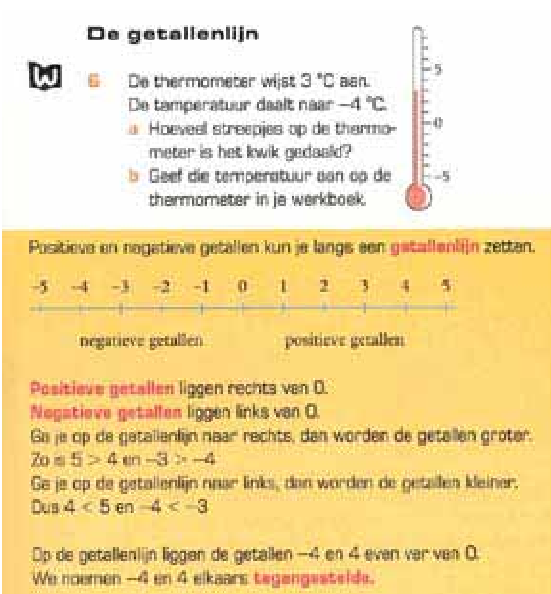
Bij optellen kun je een getallenlijn gebruiken

Voorbeeld 1
Hoe bereken je -3 + 5?
Denk aan de balletjes -3 en +5
Na het eerste balletjes sta je in -3.
Daarna ga je vijf plaatsen naar rechts.
De uitkomst is 2.
-3 + 5 = 2



Voorbeeld 2
Hoe bereken je -1 + -5
Denk aan de balletjes -1 en 5
Na het eerste balletje sta je in -1.
Vanaf -1 ga je vijf plaatsen naar links.
De uitkomst is -6.
-1 + -5 = -1 -5 = -6





De getallenlijn

6 De thermometer wijst 3 °C aan.
De temperatuur daalt naar −4 °C.
a Hoeveel streepjes op de thermometer is het kwik gedaald?
b Geef die temperatuur aan op de thermometer in je werkboek.

Positieve en negatieve getallen kun je langs een **getallenlijn** zetten.

−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5

negatieve getallen — positieve getallen

Positieve getallen liggen rechts van 0.
Negatieve getallen liggen links van 0.
Ga je op de getallenlijn naar rechts, dan worden de getallen groter.
Zo is $5 > 4$ en $-3 > -4$
Ga je op de getallenlijn naar links, dan worden de getallen kleiner.
Dus $4 < 5$ en $-4 < -3$

Op de getallenlijn liggen de getallen −4 en 4 even ver van 0.
We noemen −4 en 4 elkaars **tegengestelde**.

bron: Netwerk, deel 1B, vmbo gt havo

Leerlingenfouten

- Het is de leerling niet duidelijk wat het verschil is tussen het min-teken bij aftrekken en het min-teken bij een negatief getal.
  Oplossingen
  - Vertel bij Moderne wiskunde en de heks nadrukkelijk wat er gebeurt: een min hoort bij een blauw blokje, maar ook bij een blokje uit de ketel halen; de eerste min is een eigenschap van het blokje (=getal), de tweede min beschrijft wat je met het blokje doet (in of uit de ketel).
  - Getal & Ruimte lost dit typografisch op. Het min-teken bij aftrekken is langgerekt en in normaal lettertype, het min-teken bij een negatief getal is korter en in superscript.
    Een som kan er dus zo uitzien: -3 – 1 = -4.
  - Wijs de leerling erop dat hetzelfde verschil speelt bij het rekenapparaat: een toets voor aftrekken (–) en een toets voor negatief zijn (+/- of (-)).

- De leerling kan niet goed overweg met een horizontale getallenlijn (*Netwerk*):
  Oplossingen
  - Laat de leerling meer oefenen met de verticale getallenlijn. Geef sommen voor optellen en aftrekken van positieve getallen, en gebruik de thermometer om dit te visualiseren.
  - Koppel het gebruik van de thermometer aan de blokjes in de ketel van de heks. Wat gebeurt er met de temperatuur als we er een blokje bij gooien of uithalen?.
  - Geef een duidelijk spiekvoorbeeld (op bord of op apart vel): een grote getallenlijn met daarop duidelijk een paar positieve en negatieve getallen.
  - Wees er op bedacht dat niet elke leerling goed met de begrippen links en rechts overweg kan!

- De leerling kan niet goed overweg met de tekens < en >.
  Oplossing
  - Werk met een ezelsbruggetje: 'de pijl wijst naar het kleinste getal', of 'van < kun je de letter k van kleiner maken'.

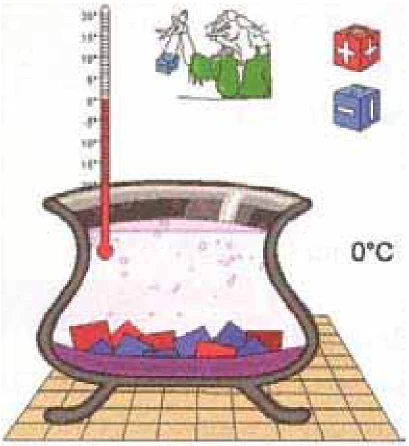
- De begrippen positief en negatief roepen bij de leerling een heel andere associatie op: denk aan negatieven van een foto, een positieve kijk op de wereld, een positieve/negatieve beoordeling.
  Oplossing
  - Vraag expliciet naar deze andere betekenissen.

- De leerling blijft problemen houden met negatieve getallen en aftrekken.
  Oplossing
  - Probeer een uitleg in termen van krijgen en weggeven: -8 + 6 = 2 vertalen in 8 weggeven en 6 krijgen met als eindresultaat 2 weggeven.

Ict en rekenmachine bij negatieve getallen

Voor uitleg is erg aantrekkelijk de applet **De heks** van *Moderne Wiskunde*.

De heks heeft een toverketel met daarin een toverdrank die ze met koude en warme blokjes van temperatuur kan laten veranderen. Een rood blokje erin laat de temperatuur met 1 graad stijgen, een blauw blokje erin laat de temperatuur met 1 graad dalen.
Het toevoegen van deze rode en blauwe blokjes representeert het optellen van positieve en negatieve getallen. Door blokjes uit de ketel te halen kan de bewerking aftrekken worden uitgelegd: een rood (warm) blokje eruit halen doet de temperatuur dalen, een blauw (koud) blokje eruit halen doet de temperatuur stijgen.



bron: Moderne Wiskunde, deel 1B, vmbo kgt

Voor oefenen met optellen en aftrekken van positieve en negatieve getallen is geschikt de applet **MinPlus** op **Wizzkit** (van **Netwerk**). Ga hiervoor naar hoofdstuk 10, kern 1.

Een mannetje MinPlus loopt op commando naar rechts of naar links op een horizontale getallenlijn. Komt er een groen balletje (met daarop bijvoorbeeld +4) uit de koker omhoog, dan moet hij vier stappen naar rechts. Komt er een rood balletje (met daarop bijvoorbeeld -3) uit de koker omhoog, dan moet hij drie stappen naar links.
Uit de koker omhoog komen staat voor optellen. Het aftrekken wordt voorgesteld door een balletje dat in de koker omlaag gaat.
Deze applet maakt het optellen met positieve en negatieve getallen inzichtelijk. Voor het inzichtelijk maken van het aftrekken is hij minder geschikt. Aftrekken wordt zonder enige uitleg geponeerd als de weg terug gaan.
In de spelniveaus 1 en 2 kun je oefenen in optellen van positieve en negatieve getallen. In de niveaus 3 en 4 oefen je in het aftrekken van positieve en negatieve getallen. Niveau 5 is een mix van optellen en aftrekken.

bron: Netwerk, deel 1B, vmbo kgt

Nog meer oefenmateriaal

Specifiek voor *Moderne Wiskunde* biedt het Cals College **Wiskundehulp per hoofdstuk** in de vorm van theorie, oefenopgaven en antwoorden.
Let er op dat hier ook het aftrekken van negatieve getallen aan de orde komt!

Sommen met negatieve getallen staan op **Oefenen met negatieve getallen**. De niet gewenste opgaven kunnen hier worden overgeslagen. Leerlingen kunnen op deze site oefenen met optellen/aftrekken, vermenigvuldigen en groter/kleiner.

Bij de applet **Drie op een rij (negatieve getallen)** van het Freudenthal-instituut moeten drie optel- en/of aftreksommen uit een rij worden gekozen, die een vooraf gegeven uitkomst hebben. Om het moeilijker te maken is er ook de mogelijkheid om uit vijf sommen te kiezen.
Hier is geen mogelijkheid om het aftrekken van negatieve getallen te omzeilen.

Wiskunde Interactief biedt op cd-rom oefenmateriaal voor het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van positieve en negatieve getallen.
ISBN: 9061127122, € 13.95.

De applet **Thermometer** biedt oefenmateriaal op een wat minder abstract niveau. Het verschil in temperatuur op twee dagen wordt berekend, maar leerlingen kunnen ook zelf een berekening uitvoeren. De applet is Engelstalig, maar dit is geen serieuze belemmering.

Math4all geeft uitleg en voorbeelden in haar Basiswiskunde VMBO.

De uitbreiding van het assenstelsel naar negatieve getallen kan worden geoefend met het **General Coordinates Game**: bij gegeven coördinaten kan een huisje worden neergezet en omgekeerd.
Een soortgelijke oefening biedt het **Maze Game** (mijnenvegen).

Rekenmachine

Rekenmachines verschillen in hun werking met negatieve getallen.
Er zijn rekenmachines waarbij onderscheid gemaakt wordt tussen de min voor aftrekken en de min voor negatief zijn. Voor aftrekken wordt de toets – gebruikt en voor negatief zijn de toets +/- of (-) .
Ook zijn er rekenmachines die hierin geen onderscheid maken.

Methodespecifieke informatie

Moderne Wiskunde levert op haar **WiskDisk** naast de eerder besproken applet De heks ook een mini-applet Tovervierkanten. Hier moet de leerling positieve en negatieve getallen invullen, zodanig dat ze opgeteld een bepaald getal opleveren.
Verder staat op **WiskDisk** bij Assenstelsels extra uitleg (in gesproken vorm) en extra oefenmateriaal. Ook is er oefenmateriaal op basis van De heks en een diagnostische toets.

Getal & Ruimte biedt extra oefenmateriaal in haar Werkboek-i (alleen op cd-rom). Oefenen kan hier ook in de vorm van applets (De lift, Beltegoed; beide met geluid).

Netwerk heeft op **Wizzkit** de eerder besproken applet MinPlus voor uitleg en oefenen. Ook is er een diagnostische toets.

Getal en Ruimte en *Netwerk* besteden aandacht aan de rekenmachine bij het werken met negatieve getallen.

Werkvormen

Individueel

- ***Olifantje***
  Eerste en tweede kwadrant in een assenstelsel: de leerling maakt een puntenfiguur. Controle door leerling zelf.
- ***Rekenpuzzel***
  Puzzel met optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. De leerling controleert zichzelf.
  (Uit: *Getal & Ruimte*, vmbo kgt.)
- ***Rekenpuzzel***
  Puzzel met optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, inclusief voorrangsregels. De leerling controleert zichzelf.
  (Uit: *Getal & Ruimte*, vmbo gt havo.)

Voor twee personen

- ***Temperatuurgrafiek***
  Eerste en tweede kwadrant in een assenstelsel: de leerlingen maken in tweetallen een grafiek. Daarna kunnen de resultaten in een kringgesprek worden besproken.

Voor drie of vier personen

- ***Kaartspel***
  Optellen en aftrekken van drie positieve en negatieve getallen. De leerlingen controleren zichzelf.
  (Uit: *Moderne Wiskunde*, vmbo gt havo.)

Zijn de doelen bereikt?

De gestelde doelen waren:
- De leerlingen moeten weten wat een negatief getal voorstelt.
- De leerlingen moeten kunnen optellen en aftrekken met positieve en negatieve getallen (bijvoorbeeld: -12 + 5 = en 12 – -5 =).

De meer methodespecifieke doelen waren:

Bij *Moderne Wiskunde* en *Netwerk*
- De leerlingen moeten van twee getallen (positief dan wel negatief) kunnen bepalen welke groter dan wel kleiner is.
- De leerlingen moeten in een assenstelsel kunnen werken met het deel rechts onder de oorsprong.

Bij *Getal & Ruimte*
- De leerlingen moeten kunnen vermenigvuldigen en delen met positieve en negatieve getallen.
- De leerlingen moeten de voorrangsregels kunnen toepassen bij de vier bewerkingen.

Of deze doelen bereikt zijn, kan worden getoetst aan de hand van opgaven als:

Optellen
Sonja gaat na hoeveel geld ze na het weekend nog op haar rekening heeft staan. Dat doet ze vijf keer. Ze vindt: 10 euro tekort, 5 euro tegoed, 8 euro tekort, 2 euro tekort en 15 euro tegoed. Ze wil haar gemiddelde saldo berekenen en telt daarvoor de vijf bedragen bij elkaar op en deelt het totaal door vijf. Wat komt eruit?

Aftrekken
Sonja lost een deel van de schuld aan haar vader af. Hij krijgt van haar nog 10 euro. Ze geeft hem 4 euro. Hoe groot is haar schuld dan nog? Welk sommetje hoort daarbij?

Vermenigvuldigen en delen
Sonja zegt dat -3 x -2 hetzelfde is als 3 x 2. Klopt dat?

Voorrangsregels
Han koopt een cadeau voor de leraar. Elk kind uit de klas geeft hem 2 euro. Er zijn 25 kinderen.
Het cadeau kost € 49,95. Hij houdt geld over.
Welk sommetje hoort hierbij?

a. 49,95 – 2 x 25 = 49,95 – 50
b. 2 x 25 – 49,95 = 50 – 49,95
c. 49,95 – 2 x 25 = 47,95 x 25
d. 2 x 25 – 49,95 = 2 x – 24,95

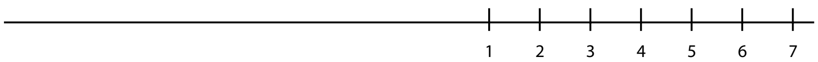
Groter/kleiner
Zet de getallen op volgorde. Begin met de kleinste.
2 -1 0 -3 5

Assenstelsel naar rechts onder de oorsprong
Teken in het assenstelsel de punten A(2,1), B(3,2), C(5,1), D(5,-1), E(0,1), F(2,-1), G(3,-1), H(3,0) en I(0,-1).
Verbind daarna met een rood potlood de volgende punten:
A en F,
A en E,
I en E,
I en F,
H en B,
H en G,
H en C,
H en D.
Wat staat er dan? (Antwoord: OK)

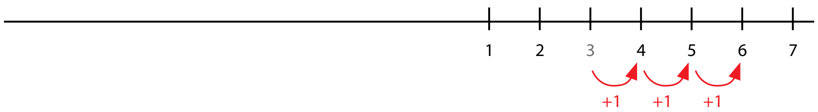
Op z'n Inges

Uitleg

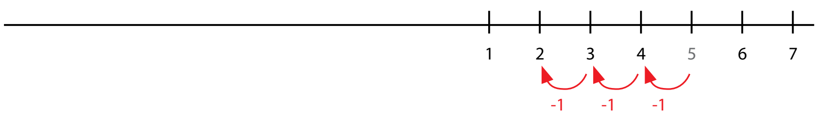
We gaan eens op onderzoek uit naar de gehele getallen op de getallenlijn:



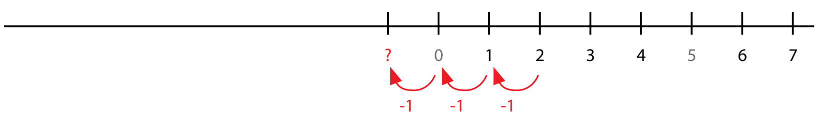
We beginnen, willekeurig, bij de 3. Voor elke "stap" naar rechts, tel je 1 op bij het getal waar je was.



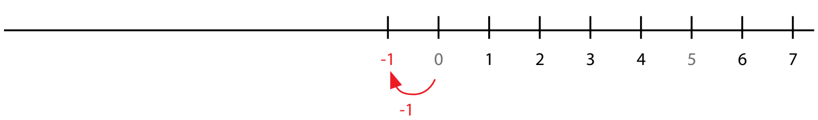
Je kunt op die manier tot in het oneindige naar rechts; het stopt nergens.
1 stap naar rechts = + 1
Hoe werkt dat als je de andere kant op gaat?
Tegengestelde richting = tegengestelde bewerking
en het tegengestelde van + is –.
Merk op: alleen de richting verandert, de grootte/afstand van elke stap blijft 1



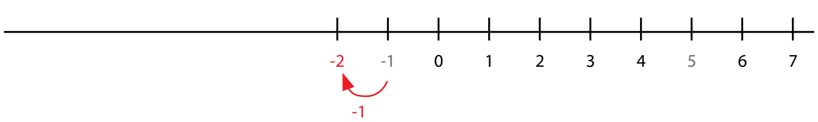
Dat gaat zonder problemen, totdat je bij de 0 bent aangekomen.



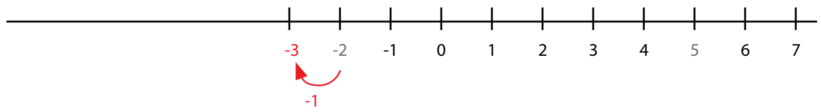
Het zou erg onlogisch zijn, als de getallenlijn bij de 0 definitief zou stoppen. Dat is dan ook niet het geval. Hier gaan we kennis maken met de negatieve getallen. Ga je, vanaf de 0, één stap naar links, dan kom je op -1.



Weer een stap naar links, brengt je op -2

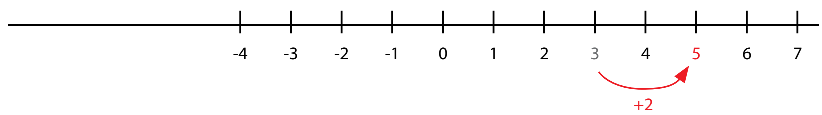


De volgende wordt -3



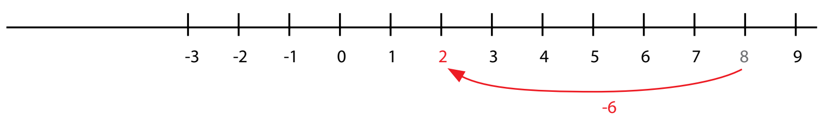
En zo kun je ook naar links tot in het oneindige doorgaan

Optellen en aftrekken met behulp van de getallenlijn
Het sommetje 3 + 2 kun je als volgt op de getallenlijn weergeven:



Je ziet dat 3 + 2 = 5

Afspraak
+ betekent naar rechts
– betekent naar links
Zo kun je de uitkomst van 8 – 6 vinden met:

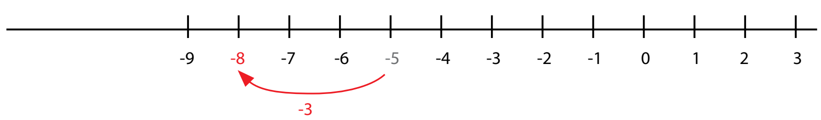


8 – 6 = 2

Nog meer voorbeelden:
a. -2 + 3 =

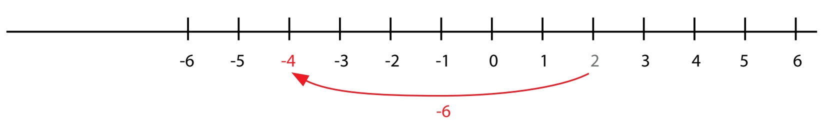
-2 + 3 = 1

b. -5 – 3 =



-5 – 3 = -8

c. 2 – 6 =



2 – 6 = -4

Download oefeningen 1 (optellen en aftrekken, basis)
1a: oefeningen - antwoorden
1b: oefeningen - antwoorden
1c: oefeningen - antwoorden

Zeker in het begin is het verwarrend dat:
- het symbool + wordt gebruikt voor de bewerking optellen en om aan te geven dat iets positief is
- het symbool – wordt gebruikt voor de bewerking aftrekken en om aan te geven dat iets negatief is

en een getal zonder symbool ervoor is vanzelf positief.
4 + +3 = 7 is niet moeilijk. Twee positieve getallen bij elkaar optellen heb je al vaak gedaan.
Maar wat doe je met:
3 + -5 (Bij een positief getal, een negatief getal optellen)
Of, nog erger:
2 – - 6 (Van een positief getal, een negatief getal aftrekken)
Hierbij gelden dezelfde regels als in de Nederlandse taal.

				Suiker?
Ik drink mijn koffie	+ altijd	+ met	suiker	+ ja
Ik drink mijn koffie	+ altijd	– zonder	suiker	– nee
Ik drink mijn koffie	– nooit	+ met	suiker	– nee
Ik drink mijn koffie	– nooit	– zonder	suiker	+ ja

Makkelijk: twee dezelfde symbolen achter elkaar wordt + twee verschillende symbolen achter elkaar wordt –

Voorbeelden

a.	3	+	-5	=	3	–	5	=	-2
b.	2	–	-6	=	2	+	6	=	8
c.	-3	–	+4	=	-3	–	4	=	-7
d.	-6	–	-12	=	-6	+	12	=	6
e.	5	+	-3	=	5	–	3	=	2
f.	18	–	-12	=	18	+	12	=	30

Download oefeningen 2 (optellen en aftrekken, vervolg)
2a: oefeningen - antwoorden
2b: oefeningen - antwoorden
2c: oefeningen - antwoorden

Vermenigvuldigen en delen
Je hebt hiervoor gezien hoe je moet omgaan met twee symbolen die vlak achter elkaar staan.
Bij vermenigvuldigen geldt het volgende:

voorbeelden

+...	x	+...	=	+...	3	x	5	=	15
+...	x	–...	=	-...	3	x	-5	=	-15
-...	x	+...	=	-...	-3	x	5	=	-15
-...	x	–...	=	+...	-3	x	-5	=	15

Bij delen:

voorbeelden

+...	:	+...	=	+...	15	:	5	=	3
+...	:	-...	=	-...	15	:	-5	=	-3
-...	:	+...	=	-...	-15	:	5	=	-3
-...	:	-...	=	+...	-15	:	-5	=	3

Merk op: een getal zonder symbool ervoor is positief.
Je ziet dat ook bij vermenigvuldigen en delen geldt:
2 "dezelfde" => positieve uitkomst
2 "verschillende" => negatieve uitkomst

Een breuk is ook een "deling" dus ook hier:

voorbeelden

+... +...	=	+...	20 5	=	4
+... -...	=	-...	20 -5	=	-4
-... +...	=	-...	-20 5	=	-4
-... -...	=	+...	-20 -5	=	4

Download oefeningen 3 (delen en vermenigvuldigen)
3a: oefeningen - antwoorden
3b: oefeningen - antwoorden
3c: oefeningen - antwoorden

Download oefeningen 4 (alles door elkaar)
4a: oefeningen - antwoorden
4b: oefeningen - antwoorden
4c: oefeningen - antwoorden

Uit 'doorlopende leerlijnen rekenen' het onderdeel bewerkingen

7.3 Referentieniveau 2 (16 jaar)

Na het PO moeten de kennis en vaardigheden worden geconsolideerd en onderhouden. In het VO wordt beperkt aandacht besteed aan 'basale rekenvaardigheden' (getalbegrip, basisoperaties, bewerkingen). Er wordt vanuit gegaan dat dit gebied is afgerond in het PO. Wel is er - in onder meer in de uitwerking van de kerndoelen voor de onderbouw VO - expliciet aandacht voor onderhoud en consolidatie van schatten en benaderend rekenen en het werken met een rekenmachine.22 De leerling leert de structuur en samenhang te doorzien van positieve en negatieve getallen, decimale getallen, breuken, procenten en verhoudingen, en leert ermee te werken in zinvolle en praktische situaties.

4 Basistechnieken gebruiken

- In betekenisvolle situaties gelijknamige breuken optellen en aftrekken en eenvoudige breuken vermenigvuldigen en delen (niet voor vmbo bb).
- In betekenisvolle situaties eenvoudige breuken, vermenigvuldigen met een geheel getal.
- In betekenisvolle situaties negatieve getallen ordenen, optellen en aftrekken vermenigvuldigen en delen (niet voor vmbo bb).
- Hoofdbewerkingen in de afgesproken volgorde toepassen.
- Bij het berekenen en bij het vermelden van resultaten gebruik maken van de wetenschappelijke notatie (niet voor vmbo bb).

7 De operationalisering voor *Getallen*

7.1. Inleiding

Er is gekozen voor het beschrijven van het conceptuele netwerk rond getallen. Het gaat bij verstand hebben van getallen niet alleen om de reken/wiskundige 'werktuigen' en begrippen, maar ook om de relaties daartussen. Samengevat omvat dit netwerk de gebieden: getallen (geheel, decimaal, breuken, machten en wortels), de bewerkingen ermee (+,- , ×, ÷ en machtsverheffen, worteltrekken) en toepassingen. Omdat dit voor het rekenen & wiskundeonderwijs een groot en belangrijk gebied is, met name in het basisonderwijs, beschrijven we het wat uitgebreider dan de andere subdomeinen. We baseren ons daarbij op diverse bronnen, en nemen uit enkele ook beschrijvingen over, dat betreft PPON 2004, Minimumdoelen PO (Noteboom, 2007) en Domeinbeschrijving Rekenen (Van de Craats, 2007).

In het primair onderwijs wordt gerekend met natuurlijke getallen, kommagetallen en breuken. Natuurlijke getallen zijn getallen waarmee je aantallen kunt weergeven: 5 vingers aan je hand, 12 appels op een schaal, 60 minuten in een uur,16 miljoen Nederlanders, 0 euro in je portemonnee. Het is van belang de manier te kennen waarop ons decimale positiestelsel is opgebouwd. Hieronder valt het kennen van de betekenis van cijfers en hun plaats in getallen, bijvoorbeeld weten dat 6498 = 6 ×1000 + 4 ×100 + 9 ×10 + 8 en dat op die manier met behulp van slechts tien cijfers (namelijk 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9) elk natuurlijk getal kan worden weergegeven.

Kommagetallen (decimale breuken, decimaalgetallen) zijn getallen zoals 354,27 en 0,067. De betekenis en de plaats kennen van kommagetallen op de getallenlijn komt ook in het po aan bod. Kommagetallen komen voor in tal van praktijksituaties, bijvoorbeeld bij het rekenen met euro's, bij schaalverdelingen, bij het bepalen van maten en gewichten of bij het rekenen met verhoudingen en procenten. Ook in de beschrijving van de domeinen Verhoudingen en Meten & Meetkunde komen dus kommagetallen voor.
Breuken zijn getallen zoals $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{15}{29}$, $\frac{15}{4}$. In het po leren leerlingen breuken, als deel van geheel, visualiseren door middel van bijvoorbeeld pizzadiagrammen (taartdiagrammen) en stroken. Daarnaast is ook aandacht voor de breuk als 'getal' en de plaats ervan op de getallenlijn en voor de betekenis van termen als teller, noemer en breukstreep.

Negatieve getallen zijn getallen onder nul, die links van 0 op de getallenlijn liggen. Gehele negatieve getallen, negatieve decimale getallen en breuken krijgen afhankelijk van het schooltype aandacht in het vo. Zowel het ordenen en plaatsen van negatieve getallen op de getallenlijn als bewerkingen uitvoeren met negatieve getallen komen aan bod.

Tot het onderwijs in het vo horen naast de eerder genoemde getalsoorten ook nog machten, wortels en bijzondere getallen als π.

De bewerkingen met getallen kunnen met het hoofd, op papier of met de rekenmachine worden uitgevoerd. In het basis-onderwijs ligt de nadruk op de eerste twee manieren. Met het begrip *hoofdrekenen* wordt bedoeld dat leerlingen een aantal bewerkingen vlot, handig en inzichtelijk kunnen uitvoeren. Daarbij kan de leerling kennis van getallen, basisoperaties en eigenschappen van bewerkingen inzetten. Wij verstaan hieronder dat in de praktijk een leerling bij hoofdrekenen waar nodig de berekening of tussenstappen daarvan mag opschrijven. Dus *met* het hoofd rekenen in plaats van *uit* het hoofd. Dit wijkt af van wat in PPON onder hoofdrekenen verstaan wordt.

In het voortgezet onderwijs wordt zoals hierboven gezegd, afhankelijk van het onderwijstype, ook gerekend met negatieve getallen, machten en wortels. Hiermee werken leerlingen vaak met de rekenmachine (in eenvoudige gevallen ook uit het hoofd). In de bovenbouw van havo en vwo wordt ook exact met machten en wortels gerekend.

7.2 Referentieniveau 1 (12 jaar)

Het conceptuele netwerk rond *Getallen* wordt voor het grootste deel ontwikkeld in het basisonderwijs. Het gaat daar om verstand hebben van drie soorten getallen (geheel, decimaal, breuken) en om de operaties optellen, aftrekken vermenigvuldigen en delen daarmee. Daarnaast is het gebruiken van getallen in praktische situaties van belang. In 2006 zijn de volgende kerndoelen po geformuleerd op het gebied van getallen en bewerkingen:

26 De leerlingen leren structuur en samenhang van aantallen, gehele getallen, kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen.
27 De leerlingen leren de basisbewerkingen met gehele getallen in elk geval tot 100 snel uit het hoofd uitvoeren, waarbij optellen en aftrekken tot 20 en de tafels van buiten gekend zijn.
28 De leerlingen leren schattend tellen en rekenen.
29 De leerlingen leren handig optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
30 De leerlingen leren schriftelijk optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen volgens meer of minder verkorte standaardprocedures.
31 De leerlingen leren de rekenmachine met inzicht te gebruiken.

In diverse publicaties (TAL, TULE) zijn deze kerndoelen uitgewerkt en toegelicht en in de rekenmethodes worden ze geconcretiseerd. De *fundamentele kwaliteit* op dit referentieniveau (1F) beschrijft het minimum dat beheerst zou moeten worden op het gebied van getallen, getalrelaties en het rekenen (hoofdrekenen, procedures voor bewerkingen) aan het eind van de basisschool. We zijn daarbij uitgegaan van wat we noodzakelijk en wenselijk achten, rekening houdend met de haalbaarheid. Ons algemene uitgangspunt is dat we ons voor de vaardigheden voor deze kwaliteit baseren op dat wat de percentiel 25 leerlingen in PPON 2004 goed beheersen (dit is dus dat wat 25% van de leerlingen matig of onvoldoende beheerst); dit is echter geen rigide norm. Zo is voor het onderdeel bewerkingen ook gekeken naar PPON resultaten uit eerdere jaren, omdat op dat onderdeel toen beter werd gepresteerd. We vinden het bijvoorbeeld noodzakelijk voor deze kwaliteit dat de bewerkingen met natuurlijke getallen in het getalgebied tot 1000 beheerst worden. Het beheersen van (formele) bewerkingen met breuken vinden we voor de fundamentele kwaliteit minder van belang.
Het gaat dus voor 1F vooral om basale kennis, inzicht en vaardigheden in met eenvoudige getallen. We sluiten aan bij de voorwaarden en het voorstel voor de minimumdoelen zoals geformuleerd door SLO (Noteboom, 2007):

De volgende voorwaarden zijn in acht genomen bij de ontwikkeling:
- de doelen moeten de kerndoelen dekken
- de doelen moeten passen bij het vervolgaanbod in het voortgezet onderwijs (garanderen dat er geen hiaten zijn)
- de doelen moeten passen bij de voorwaarden die de maatschappij (redzaamheid) van kinderen vraagt als zij van de basisschool afkomen
- de doelen moeten in beschrijving aansluiten bij het repertoire en onderwijs van de huidige leraar, zoals dat in gehanteerde rekenmethodes beschreven wordt.

Voor de *streefkwaliteit* hebben we ons gericht op wat de groep tussen percentiel 50 en percentiel 75 leerlingen bij PPON goed of voldoende beheersen. Daar zit natuurlijk nog een groep boven. De streefkwaliteit van dit niveau (1S) omvat de onderdelen uit de fundamentele kwaliteit (1F) en is ten opzichte hiervan een verdieping van de kennis en vaardigheden. Deze verdieping kenmerkt zich doordat (wiskundig) redeneren, formaliseren en generaliseren ('weten waarom') verweven wordt met de onderdelen die ook op 1F voorkomen. Zo moeten deze leerlingen onder andere goed inzicht hebben in het decimale stelsel en moeten ze weten dat er voor elke bewerking procedures zijn die altijd werken.
Daarnaast is er sprake van het verleggen van accenten. Zo zit er onder andere verschil tussen de fundamentele kwaliteit en de streefkwaliteit in de soort getallen waarmee (met pen en papier) gerekend wordt. Een goede beheersing van het getalgebied tot 100 (en soms tot 1000) wordt nagestreefd voor 1F, alsmede het werken met eenvoudige decimale getallen en veelvoorkomende breuken. Voor 1S gaat het om de bewerkingen in het hele gebied van de natuurlijke getallen en met complexere decimale getallen. Bewerkingen met breuken zijn op 1S voornamelijk beperkt tot bewerkingen in betekenisvolle situaties (zie de voorbeelden in de tabel aan het eind van dit hoofdstuk). Formeel opereren met breuken komt op 1S beperkt aan bod (optellen en aftrekken).
Het is echter raadzaam toekomstige havo/vwo leerlingen al in het basisonderwijs kennis te laten maken met alle formele procedures voor bewerkingen met breuken.

7.3 Referentieniveau 2 (16 jaar)

Na het po moeten de kennis en vaardigheden worden geconsolideerd en onderhouden. In het vo wordt beperkt aandacht besteed aan 'basale rekenvaardigheden' (getalbegrip, basisoperaties, bewerkingen). Er wordt vanuit gegaan dat dit gebied is afgerond in het po. Wel is er – in onder meer in de uitwerking van de kerndoelen voor de onderbouw VO - expliciet aandacht voor onderhoud en consolidatie van schatten en benaderend rekenen en het werken met een rekenmachine.

22 De leerling leert de structuur en samenhang te doorzien van positieve en negatieve getallen, decimale getallen, breuken, procenten en verhoudingen, en leert ermee te werken in zinvolle en praktische situaties
23 De leerling leert exact en schattend rekenen en redeneren op basis van inzicht in nauwkeurigheid, orde van grootte en marges die in een gegeven situatie passend zijn.

Er is in het vo ook sprake van uitbreiding en verdieping van het conceptuele netwerk rond getallen: negatieve getallen en irrationale getallen (wortels, π) worden geïntroduceerd en de kennis over en inzicht in getalsystemen ("weten waarom") neemt een belangrijker plaats in.

Bij het beschrijven van het tweede referentieniveau (16 jaar, 4 vmbo) zijn ook de examenprogramma's wiskunde vmbo betrokken. Wiskunde is op dit moment een verplicht examenvak voor de sectoren *Techniek* en *Landbouw*. Het bevat eindtermen

‘Het gevaar van werken met referentieniveaus is dat het leidt tot ‘koker-kijken’ en leerlingen moeten zich wel ontwikkelen tot mensen die rijp zijn voor functioneren in onze maatschappij’

voor het domein genaamd: rekenen, meten, schatten.
Deze eindtermen zijn dus niet uitgesplitst over de in het po gebruikelijke deelgebieden. Een deel van deze eindtermen valt onder ons subdomein ‘getallen’, het gaat om de volgende selectie:

De kandidaat kan
1 Handig rekenen in alledaagse situaties:
• bij het rekenen en vermelden van resultaten gebruik maken van gangbare begrippen en voorvoegsels zoals miljoen, miljard en milli-, centi-, kilo-,
• het resultaat van een berekening afronden in overeenstemming met de gegeven situatie,

2 Een rekenmachine gebruiken:
• met een rekenmachine optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen,
• met een rekenmachine breuken, procenten, machten en wortels berekenen of benaderen als eindige decimale getallen,
• gebruik maken van de functietoetsen voor het rekenen (niet voor vmbo bb).

3 (Meten en) schatten:
• vooraf uitkomsten schatten van berekeningen (en meetresultaten).
• uitspraken doen over de orde van grootte en de nauwkeurigheid.

4 Basistechnieken gebruiken:
• in betekenisvolle situaties gelijknamige breuken optellen en aftrekken en eenvoudige breuken vermenigvuldigen en delen (niet voor vmbo bb),
• in betekenisvolle situaties eenvoudige breuken vermenigvuldigen met een geheel getal,
• in betekenisvolle situaties negatieve getallen ordenen, optellen en aftrekken vermenigvuldigen en delen (niet voor vmbo bb),
• hoofdbewerkingen in de afgesproken volgorde toepassen,
• bij het berekenen en bij het vermelden van resultaten gebruik maken van de wetenschappelijke notatie (niet voor vmbo bb).

Daarnaast is voor het vmbo ook gekeken naar het rekenen dat gebruikt wordt bij andere vakken. Daarvoor zijn onder meer examenprogramma’s en examens van een aantal beroepsgerichte programma’s geraadpleegd. In andere vakken vindt voor een deel ook onderhoud en consolidatie van het rekenen en getalbegrip plaats en daar wordt ook het rekenen en het onderliggende getallennetwerk gebruikt in diverse toepassingssituaties.

Voor de *fundamentele kwaliteit* 2F ligt de nadruk op het gebruik van getallen, getalrelaties en bewerkingen in situaties. Daarbij worden kennis en vaardigheden van 1F onderhouden. Bij het rekenwerk is meestal de rekenmachine toegestaan. Deze fundamentele kwaliteit beschrijft ook wat iedere Nederlander zou moeten kennen en kunnen op het gebied van getallen en bewerkingen. Bij het toepassen van kennis en vaardigheden uit dit subdomein gaat het meestal niet om ‘het kale rekenen’ en de getallen op zichzelf. Getallen en het rekenen ermee komen voor in betekenisvolle situaties. Getallen zijn dan vaak aantallen of grootheden (maten), ze verschijnen in tabellen met informatie en in de situaties gaat het vaak om rekenen met maten, verhoudingen en procenten. Voorbeelden van het gebruik van kennis en vaardigheden uit het subdomein getallen zijn dus voor algemeen maatschappelijke niveau (2F) niet uitsluitend te vinden in dit subdomein maar ook in alle overige subdomeinen.

De *streefkwaliteit* (2S) op dit referentieniveau bouwt voort op de streefkwaliteit van het eerste referentieniveau 1S. Het is niet zo dat 2S de fundamentele kwaliteit 2F geheel omvat. In 2F staat het toepassen en gebruiken centraal. Voor de streefkwaliteit 2S is ook een verdieping gewenst in de structuur van getalsystemen en een formalisatie van procedures voor diverse bewerkingen, bijvoorbeeld bewerkingen met breuken. Daarnaast is er soms sprake van uitbreiding: zo is het gebruik van de wetenschappelijke notatie voor 2F niet vereist maar voor de streefkwaliteit 2S wel.

7.4 Referentieniveau 3 (17- 20 jaar)

Voor het derde referentieniveau (mbo/havo/vwo) is rekening gehouden met het in ontwikkeling zijnde raamwerk rekenen & wiskunde mbo en zijn de examenprogramma’s van havo en vwo geraadpleegd. In die examenprogramma’s is momenteel weinig expliciet te vinden op het gebied van rekenen. Voor de toekomstige examenprogramma’s zijn wijzigingen voorgesteld.

5. De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden en formules, heeft daar inzicht in en kan de bewerkingen uitvoeren met, maar ook zonder, gebruik van ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine.

Voor de *fundamentele kwaliteit* 3F is het rekenen vooral gericht op het gebruik van hetgeen in 2F en 1F aan bod is geweest in toepassingen. Deze kwaliteit wordt bereikt in het mbo (bijvoorbeeld op niveau 3 en 4 opleidingen met weinig rekenen &

wiskunde). Voor veel opleidingen in het mbo is het met name van belang het 'verstand hebben van getallen' te onderhouden en te consolideren. Dit onderhoud moet bij voorkeur zoveel als mogelijk plaatsvinden door het gebruiken van de betfeffende kennis en vaardigheden in toepassingssituaties.

Voor de streefkwaliteit 3S die voortbouwt op 2S moeten we denken aan leerlingen op de havo met wiskunde A. Bij deze kwaliteit zal de kennis over getalsystemen en de relaties tussen soorten getallen verdiept worden ("weten waarom") en wordt de relatie met algebra van groter belang. Het subdomein getallen is niet los zien van rekenkundige en algebraïsche inzichten en vaardigheden.

7.5 Concretisering

In de tabel op de volgende pagina's wordt het subdomein getallen geconcretiseerd. De inhoud wordt beschreven voor elk van de drie referentieniveaus en daarbinnen steeds voor de fundamentele kwaliteit en de streefkwaliteit naast elkaar.
Daarbij is sprake van een getrapte indeling, als eerste in:

A. Notatie, taal en betekenis
- Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties
- Wiskundetaal gebruiken

B. Met elkaar in verband brengen
- Getallen en getalrelaties
- Structuur en samenhang

C. Gebruiken
- Memoriseren, automatiseren
- Hoofdrekenen (noteren van tussenresultaten toegestaan)
- Hoofdbewerkingen (+, -, ×, :) op papier uitvoeren met gehele getallen en decimale getallen
- Bewerking met breuken (+, -, ×, :) op papier uitvoeren (vanaf 2S)
- Berekeningen uitvoeren om problemen op te lossen
- Rekenmachine op een verstandige manier inzetten

Daarbinnen is steeds het soort 'weten' omschreven, we onderscheiden drie soorten:
- Paraat hebben: kennis van feiten en begrippen, reproduceren, routines, technieken.
- Functioneel gebruiken: probleemaanpak, toepassen, gebruiken, onderzoeksvaardigheden
- Weten waarom: begrijpen, principes, abstracties, rijke cognitieve schema's, overzicht

Na de tabel zijn voorbeeldopgaven opgenomen om een beeld te geven van de beschreven inhouden en niveaus.

Getallen – 12 jaar – fundament en streef

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
A Notatie, taal en betekenis – Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken	**Paraat hebben** – 5 is gelijk aan (evenveel als) 2 en 3 – de relaties groter/kleiner dan – 0,45 is vijfenveertig honderdsten – breuknotatie met horizontale streep $\frac{3}{4}$, – teller, noemer, breukstreep	**Paraat hebben** – breuknotatie herkennen ook als ¾
	Functioneel gebruiken – uitspraak en schrijfwijze van gehele getallen, breuken, decimale getallen – getalbenamingen zoals driekwart, anderhalf, miljoen	**Functioneel gebruiken** – gemengd getal – relatie tussen breuk en decimaal getal
	Weten waarom – orde van grootte van getallen beredeneren	**Weten waarom** – verschil tussen cijfer en getal – belang van het getal 0

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
B Met elkaar in verband brengen – Getallen en getalrelaties – Structuur en samenhang	**Paraat hebben** – tienstructuur – getallenrij – getallenlijn met gehele getallen en eenvoudige decimale getallen	**Paraat hebben** – getallenlijn, ook met decimale getallen en breuken
	Functioneel gebruiken – vertalen van eenvoudige situatie naar berekening – afronden van gehele getallen op ronde getallen – globaal beredeneren van uitkomsten – splitsen en samenstellen van getallen op basis van het tientallig stelsel	**Functioneel gebruiken** – vertalen van complexe situatie naar berekening – decimaal getal afronden op geheel getal – afronden binnen gegeven situatie: 77,6 dozen berekend dus 78 dozen kopen
	Weten waarom – structuur van het tientallig stelsel	**Weten waarom** – opbouw decimale positiestelsel – redeneren over breuken, bijvoorbeeld: is er een kleinste breuk?

NB. 1S omvat de inhouden van 1F

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
C Gebruiken	Paraat hebben	Paraat hebben
– Memoriseren, automatiseren – Hoofdrekenen (noteren van tussenresultaten toegestaan) – Hoofdbewerkingen (+, -, ×, :) op papier uitvoeren met gehele getallen en decimale getallen – Bewerkingen met breuken (+, -, ×, :) op papier uitvoeren – Berekeningen uitvoeren om problemen op te lossen – Rekenmachine op een verstandige manier inzetten	– uit het hoofd splitsen, optellen en aftrekken onder 100, ook met eenvoudige decimale getallen: 12 = 7 + 5 67 – 30 1 – 0,25 0,8 + 0,7	– standaardprocedures gebruiken ook met getallen boven de 1000 met complexere decimale getallen in complexere situaties
	– producten uit de tafels van vermenigvuldiging (tot en met 10) uit het hoofd kennen: 3 × 5 7 × 9	
	– delingen uit de tafels (tot en met 10) uitrekenen: 45 : 5 32 : 8	– delingen uit de tafels (tot en met 10) uit het hoofd kennen – ook met complexere getallen en decimale getallen: 18 : 100 1,8 × 1000
	– uit het hoofd optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met "nullen", ook met eenvoudige decimale getallen: 30 + 50 1200 – 800 65 × 10 3600 : 100 1000 × 2,5 0,25 × 100	– volgorde van bewerkingen
	– efficiënt rekenen (+, -, ×, :) gebruik makend van de eigenschappen van getallen en bewerkingen, met eenvoudige getallen	– efficiënt rekenen ook met grotere getallen
	– optellen en aftrekken (waaronder ook verschil bepalen) met gehele getallen en eenvoudige decimale getallen: 235 + 349 1268 – 385 € 2,50 + € 1,25	
	– vermenigvuldigen van een getal met één cijfer met een getal met twee of drie cijfers: 7 × 165 = 5 uur werken voor € 5,75 per uur	
	– vermenigvuldigen van een getal van twee cijfers met een getal van twee cijfers: 35 × 67 =	
	– getallen met maximaal drie cijfers delen door een getal met maximaal 2 cijfers, al dan niet met een rest: 132 : 16 =	– delen met rest of (afgerond) decimaal getal: 122 : 5 =
	– vergelijken en ordenen van de grootte van eenvoudige breuken en deze in betekenisvolle situaties op de getallenlijn plaatsen: $\frac{1}{4}$ liter is minder dan $\frac{1}{2}$ liter	– vergelijken ook via standaardprocedures en met moeilijker breuken
	– omzetten van eenvoudige breuken in decimale getallen: $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $0{,}01 = \frac{1}{100}$	– omzetten ook met moeilijker breuken eventueel met rekenmachine
	– optellen en aftrekken van veel voorkomende gelijknamige en ongelijknamige breuken binnen een betekenisvolle situatie: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$; $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$	– optellen en aftrekken ook via standaardprocedures, met moeilijker breuken en gemengde getallen zoals $6\frac{3}{4}$

NB. 1S omvat de inhouden van 1F.
In deze opsomming is geen verschil gemaakt tussen memoriseren en vlot (binnen enkele seconden) kunnen berekenen.
Een deel van de bewerkingen met breuken zoals 'deel van' kunnen bepalen, is beschreven in het subdomein verhoudingen.

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
C Gebruiken (vervolg)	Paraat hebben	Paraat hebben
– Memoriseren, automatiseren – Hoofdrekenen (notaties toegestaan) – Hoofdbewerkingen (+, -, ×, :) op papier uitvoeren met gehele getallen en decimale getallen – Bewerking met breuken (+, -, ×, :) op papier uitvoeren – Berekeningen uitvoeren om problemen op te lossen – Rekenmachine op een verstandige manier inzetten	– geheel getal (deel van nemen): $\frac{1}{3}$ deel van 150 euro – in een betekenisvolle situatie een breuk vermenigvuldigen met een	– ook een geheel getal vermenigvuldigen met een breuk of omgekeerd – vereenvoudigen en compliceren van breuken en breuken als gemengd getal schrijven: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ $\frac{1}{5} = \frac{20}{100}$ $\frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$ – een breuk met een breuk vermenigvuldigen of een deel van een deel nemen, met name in situaties: $\frac{1}{2}$ deel van $\frac{1}{2}$ liter $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$ – een geheel getal delen door een breuk of gemengd getal: $10 : 2\frac{1}{2}$ – een breuk of gemengd getal delen door een breuk, vooral binnen een situatie: $1\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$; hoeveel pakjes van $\frac{1}{4}$ liter moet je kopen als je $1\frac{1}{2}$ liter slagroom nodig hebt
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– globaal (benaderend) rekenen (schatten) als de context zich daartoe leent of als controle voor rekenen met de rekenmachine: Is tien euro genoeg? € 2, 95 + € 3,98 + € 4,10 1589 – 203 is ongeveer 1600 – 200 - in contexten de "rest" (bij delen met rest) interpreteren of verwerken - verstandige keuze maken tussen zelf uitrekenen of rekenmachine gebruiken (zowel kaal als in eenvoudige dagelijkse contexten zoals geld- en meetsituaties) - kritisch beoordelen van een uitkomst	– standaardprocedures met inzicht gebruiken binnen situaties waarin gehele getallen, breuken en decimale getallen voorkomen
	Weten waarom	Weten waarom
	– interpreteren van een uitkomst 'met rest' bij gebruik van een rekenmachine	– weten dat er procedures zijn die altijd werken en waarom – decimale getallen als toepassing van (tiendelige) maatverfijning – kennis over bewerkingen: $3 + 5 = 5 + 3$, maar $3 - 5 \neq 5 - 3$

NB. 1S omvat de inhouden van 1F.
In de verschillende 'cellen' zijn voorbeelden genoemd. Deze zijn niet uitputtend.

Getallen – 16 en 17-20 jaar – fundament

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
A Notatie, taal en betekenis	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
– Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken	– schrijfwijze negatieve getallen: -3°C, -150 m – symbolen zoals < en > gebruiken – gebruik van wortelteken, machten	– negatieve getallen (ook breuken en decimale getallen)
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	– getalnotaties met miljoen, miljard: er zijn 60 miljard euromunten geslagen	– schrijfwijze grote getallen met behulp van machten, $2 \cdot 10^9$
	Weten waarom	**Weten waarom**
	– getallen relateren aan situaties; Ik loop ongeveer 4 km/u, Nederland heeft ongeveer 16 miljoen inwoners 3576 AP is een postcode Hectometerpaaltje 78,1 0,543 op bonnetje is gewicht 300 Mb vrij geheugen nodig	– werken met haakjes om de volgorde van bewerkingen te veranderen

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
B Met elkaar in verband brengen	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
– Getallen en getalrelaties – Structuur en samenhang	– negatieve getallen plaatsen in getalsysteem	– getallen (negatieve getallen, enkelvoudige breuken en decimale getallen) ordenen – getallenlijn gebruiken
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	– getallen met elkaar vergelijken, bijvoorbeeld met een getallenlijn: historische tijdlijn, 400 v. Chr-2000 na Chr. – situaties vertalen naar een bewerking: 350 blikjes nodig, ze zijn verpakt per 6 – afronden op 'mooie' getallen: 4862 m^3 gas is ongeveer 5000 m^3	– complexere situaties vertalen naar een bewerking
	Weten waarom	**Weten waarom**
	– binnen een situatie het resultaat van een berekening op juistheid controleren: Totaal betaald aan huur per jaar €43,683 klopt dat wel?	– eigen repertoire opbouwen van getallen die gerelateerd zijn aan situaties

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
C Gebruiken	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
- Berekeningen uitvoeren met gehele getallen, breuken en decimale getallen	- negatieve getallen in berekeningen gebruiken: $3 - 5 = 3 + -5 = -5 + 3$ - haakjes gebruiken - met een rekenmachine breuken, procenten, machten en wortels berekenen of benaderen als eindige decimale getallen	- berekeningen uitvoeren waarbij gebruik gemaakt moet worden van verschillende rekenregels
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	- van een uitkomst - resultaat van een berekening afronden in overeenstemming met de gegeven situatie	- resultaten van een berekening interpreteren
	Weten waarom	**Weten waarom**
	- bij berekeningen een passend rekenmodel of de rekenmachine kiezen - berekeningen en redeneringen verifiëren	

NB. 2F omvat de inhouden van 1F, 3F omvat de inhouden van 2F

Getallen – 16 en 17- 20 jaar – streef

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
A Notatie, taal en betekenis	Paraat hebben	Paraat hebben
– Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken	– verschillende schrijfwijzen van getallen met elkaar vergelijken	
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– wetenschappelijke notatie rekenmachine gebruiken	– wetenschappelijke notatie rekenmachine gebruiken, ook met negatieve exponenten
	Weten waarom	Weten waarom
		– adequate (wiskunde)taal en notaties lezen en gebruiken als communicatiemiddel – inzicht in wiskundige notaties en daarmee kwalitatief redeneren

16 en 17 -20 jaar	2- streef	3 - streef
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	Paraat hebben
– Getallen en getalrelaties – Structuur en samenhang	– soorten getallen, zoals priemgetallen, wortels als irrationale getallen enz. – uitbreiding naar reële getallen	– relatie leggen tussen breuken, decimale notatie en afronden
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– soorten getallen, zoals priemgetallen, wortels als irrationale getallen enz. – uitbreiding naar reële getallen	– kiezen van een oplossingsstrategie, deze correct toepassen en de gevonden oplossing controleren op juistheid
	Weten waarom	Weten waarom
	– verband tussen breuken met getallen en met variabelen – decimale getallen als tiendelige breuken	– kennis getalsystemen en hun onderlinge relatie – patronen in getallen herkennen en beschrijven

16 en 17 -20 jaar	2- streef	3 - streef
C Gebruiken	Paraat hebben	Paraat hebben
– Berekeningen uitvoeren met gehele getallen, breuken en decimale getallen	– rekenen met breuken	– beheersen van de regels van de rekenkunde, zonder ICT-middelen – berekeningen uitvoeren waarbij gebruik gemaakt moet worden van verschillende rekenregels, inclusief die van machten en wortels
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– rekenen in de wetenschappelijke notatie	– beheersen van de regels van de rekenkunde, zonder ICT-middelen – berekeningen uitvoeren waarbij gebruik gemaakt moet worden van verschillende rekenregels, inclusief die van machten en wortels
	Weten waarom	Weten waarom
	– eigenschappen van bewerkingen – correctheid van rekenkundige redeneringen verifiëren	– correctheid van rekenkundige redeneringen verifiëren

NB 2S omvat de inhouden van 1S, 3S omvat de inhouden van 2S

Voorbeeldopgaven Getallen - 1F

Voorbeeld 1
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 10 leerling

7] Maak de som af.

980 = ________ x 10 + 80

Voorbeeld 2
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 25 leerling

24] 0,25 + 9,5 = ________

25] 0,8 + 0,7 = ________

26] 10 − 0,45 = ________

10] 24000 : 100 = ________

11] 10 x 0,5 = ________

Voorbeeld 3
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 25 leerling

6] Alle kinderen van de school mogen kiezen waar ze de laatste schooldag naar toe willen.
De kinderen kiezen als volgt:
Pretpark: $\frac{1}{3}$ deel van de kinderen.
Dierentuin: $\frac{1}{2}$ deel van de kinderen.
Circus: $\frac{1}{6}$ deel van de kinderen.
Waar willen de meeste kinderen naar toe?

Voorbeeld 4
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 50 leerling

5] In de bioscoop zijn 25 rijen met stoelen. In elke rij staan 22 stoelen. Hoeveel stoelen zijn er in totaal?

________ stoelen

Voorbeeld 5
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 50 leerling

1] 6508 + 7089 = ________

2] 4327 + 432 + 43 = ________

Voorbeeldopgaven Getallen - 2F

Maatschappelijk situaties waarin zichtbaar is hoe kennen, kunnen en inzicht op het gebied van rekenen & wiskunde functioneert zijn lastig te illustreren via (schoolse) opgaven. Ook beslaan dit soort situaties zelden maar een enkel subdomein. Ze kenmerken zich door verbindingen ertussen.
Denk voor dit soort situaties onder andere aan:
Omgaan met geld (schuld, rente, kosten/tijdeenheid); reizen (tijd, geld, afstand); aanschaf en bedienen apparaten (vaste kosten, korting, gebruikskosten, aflezen displays); huis en tuin inrichten en onderhoud (plattegrond, werktekening, schaal, meetinstrumenten, maten, materiaal); voeding en gezondheid (kosten, koken, calorieën, maten, geld); planningen in de tijd.

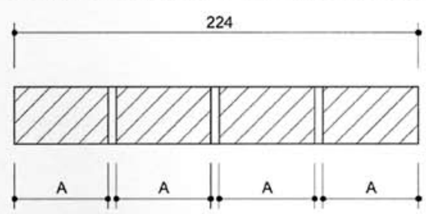
Voorbeeld 6
Bron: CSE Zorg en welzijn-breed vmbo gl 2007 tijdvak 1

12 Mike heeft voor het warm / koud buffet een pastasalade met tomaatjes gemaakt. Mike vindt het een erg lekker gerecht en wil het thuis ook een keer maken. Van de kok krijgt Mike het recept mee. Het recept is voor 18 personen.
→ Reken het recept om naar 3 personen.

Pastasalade met tomaatjes:
- 900 gram pasta
- 18 bosuitjes
- 6 teentjes knoflook
- 600 gram gekruide tahoereepjes
- 12 eetlepels olijfolie
- 12 eetlepels citroensap
- 900 gram kerstomaatjes
- 6 takjes peterselie
- 6 takjes selderij
- zout en peper naar smaak

Voorbeeld 7
Bron: CSE Bouwtechniek-timmeren vmbo bb 2004 tijdvak 1
(aangepast, was meerkeuzevraag)

● 21 De onderstaande afbeelding toont de doorsnede van een geschaafd stuk hout. Het stuk hout is in vier gelijke stukken geschulpt.
Hoe groot is maat A als de houtbreedte 224 mm is en de zaagsnede 4 mm?



Voorbeeld 8
Bron: CSE Wiskunde vmbo GT 2005 tijdvak 1

BOSLOOP

Een atletiekvereniging heeft een bosloop georganiseerd.
Er zijn drie afstanden uitgezet: 2300 m en 3,5 kilometer voor kinderen en 14 kilometer voor volwassenen.

O 1 Rienk heeft zijn afstand van 2300 m met een gemiddelde snelheid van 3,8 meter per seconde gelopen.
→ Bereken in hele seconden hoe lang Rienk over zijn afstand heeft gedaan. Schrijf je berekening op.

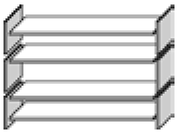
O 2 Op de foto hieronder komt Sibren na 3,5 km over de finish in een tijd van 14 minuten en 15 seconden.

→ Bereken in één decimaal zijn gemiddelde snelheid in meter per seconde. Schrijf je berekening op.

O 3 Janneke heeft de afstand van 14 km met een gemiddelde snelheid van 4,5 meter per seconde gelopen.
Bij de start van de bosloop stond de klok op 00:00:00 (uren minuten seconden).
→ Welke tijd stond er op de klok toen Janneke finishte? Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

Voorbeeld 9
Bron: PISA 2003 - in Nederland 70% goed

Boekenrekjes
Om één boekenrekje te maken heeft een timmerman de volgende onderdelen nodig:
4 lange houten planken,
6 korte houten planken,
12 kleine beugels,
2 grote beugels en
14 schroeven.



De timmerman heeft 26 lange houten planken, 33 korte houten planken, 200 kleine beugels, 20 grote beugels en 510 schroeven in voorraad.
Hoeveel volledige boekenrekjes kan de timmerman maken?

Voorbeeld 10
(eigen opgave)

Op de etiketten van flessen sap en limonade staat allerlei informatie. Enkele gegevens van de etiketten op beide flesjes vruchtensap zijn hieronder overgenomen:

Versgeperst sinaasappel-kiwisap
500 ml
Ingrediënten: 80% sinaasappelsap, 20% kiwisap
Voedingswaarde per 100 ml
Energie..........................165KJ (39 kcal)
Eiwit..............................1,0 g
Koolhydraten............... ..8,5 g
waarvan suikers...............8,5 g
Vet.............................. .0 g
Voedingsvezel.................2,0 g

Percentage van de aanbevolen dagelijkse hoeveelheid:
Vitamine C 78%..................47 mg
Een glas versgeperst sinaasappel-kiwisap (150 ml) bevat 59 kcal en 71 mg vitamine C

Versgeperst sinaasappel-mango-passievruchtensap
500 ml
Ingrediënten: 50% sinaasappelsap, 43% mangomoes, 7% passievruchtensap
Voedingswaarde per 100 ml
Energie..........................220KJ (52 kcal)
Eiwit..............................0,9 g
Koolhydraten.................12 g
waarvan suikers............ 12 g
Vet..................................0 g
Voedingsvezel.................3,5 g

Percentage van de aanbevolen dagelijkse hoeveelheid:
Vitamine C 60%.................36 mg
Een glas versgeperst sinaasappel-mangosap (150 ml) bevat 78 kcal en 54 mg vitamine C

Vraag:
a. Hoeveel mg is de aanbevolen dagelijkse hoeveelheid vitamine C?
b. Is die aanbevolen hoeveelheid vitamine C op beide etiketten gelijk?

Voorbeeld 11
Bron: CSE Wiskunde havo A12 2006 tweede tijdvak

Voorraadkosten

FuelMaster produceert benzinepompen, die gebruikt worden door tankstations. In elke benzinepomp zit een pomp. FuelMaster heeft elk jaar 40 000 pompen nodig voor zijn productie. FuelMaster bestelt zijn pompen bij PumpTech.
De bestelkosten bedragen 0,50 euro per pomp plus 300 euro per bestelling.

3p 13 □ Bereken de jaarlijkse bestelkosten als er 4000 pompen per bestelling geleverd worden.

Voorbeeld 12

Bron: PPON - goed of bijna goed beheerst door percentiel 75 leerling

25] Rond af op het dichtstbijzijnde gehele getal.

3437,48 → ________

Voorbeeld 13

Bron: PPON - goed of bijna goed beheerst door percentiel 75 leerling

18]

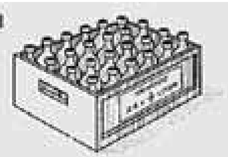
Hoeveel stond er op 1-1-2004 meer op de rekening dan op 1-1-2003?

€ ______

Voorbeeld 14

Bron: PPON - goed of bijna goed beheerst door percentiel 75 leerling

15]



In een krat staan 24 flesjes van $\frac{1}{3}$ liter.
Hoeveel liter is dat in totaal?

________ liter

Voorbeeld 15

Bron: PPON - goed of bijna goed beheerst door percentiel 75 leerling

22] $1\frac{3}{8} - \frac{7}{8} =$ ________

Voorbeeld 16

Bron: Voorbeeldopgaven REAL-project: "Breuken voor de brugklas"

Invuloefening
Je mag de volgende symbolen gebruiken:
+ (optellen), - (aftrekken), × (vermenigvuldigen), : (delen), = (is gelijk aan), < (is kleiner dan) en > (is groter dan).

$\frac{1}{8} \ldots \frac{1}{9} \qquad \frac{5}{8} \ldots \frac{5}{9} = \frac{5}{72}$

$\frac{1}{a} \ldots \frac{1}{a+1} \qquad \frac{1}{a} \ldots \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$

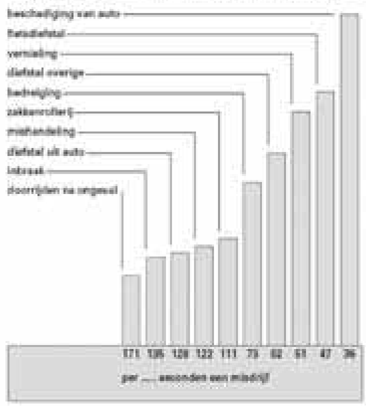
Voorbeeld 17

Bron: CSE Wiskunde havo A12 2001 eerste tijdvak

Opgave 1 Misdrijven

Elk jaar worden in Nederland veel misdrijven gemeld. Deze variëren van het stelen van een chocoladereep tot het plegen van een moord.
Misdrijven worden gemeld bij het Openbaar Ministerie (OM). Het OM beslist dan over de (eventuele) vervolging van de daders.
In figuur 1 vind je informatie over misdrijven die in 1996 werden gemeld.

figuur 1



De getallen langs de horizontale as geven voor elke categorie aan hoeveel seconden er gemiddeld tussen twee opeenvolgende meldingen zitten.
Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat in 1996 in Nederland (gemiddeld) elke 135 seconden een inbraak werd gemeld.
Let op: 1996 was een schrikkeljaar en had dus 366 dagen.

In figuur 1 komt ook de categorie 'fietsdiefstal' voor.

1 □ Toon aan dat er in 1996 ongeveer 670 000 keer een fietsdiefstal werd gemeld.

Voorbeeld 18

Bron: CSE Wiskunde havo A12 2001 eerste tijdvak

Opgave 2 Verwarming

Om een kamer goed te kunnen verwarmen, moet de verwarmingsradiator voldoende capaciteit hebben. Een grote kamer heeft natuurlijk een radiator met een grotere capaciteit nodig dan een kleine kamer.
De verwarmingsinstallateur bepaalt aan de hand van onderstaande tabel hoe groot de capaciteit van een radiator moet zijn. De inhoud van een kamer (vertrek) wordt gegeven in m^3 en de capaciteit van een radiator in Watt.

tabel 1

Benodigde capaciteit in Watt per m^3	vertrekken met 1 buitenmuur			vertrekken met 2 buitenmuren			vertrekken met 3 buitenmuren		
	kleiner dan 50 m^3	van 50 m^3 tot 150 m^3	groter dan 150 m^3	kleiner dan 50 m^3	van 50 m^3 tot 150 m^3	groter dan 150 m^3	kleiner dan 50 m^3	van 50 m^3 tot 150 m^3	groter dan 150 m^3
begane grond	70	60	55	85	70	60	100	80	70
1e verdieping	60	55	50	70	60	50	80	70	60
2e verdieping	70	60	55	85	70	60	100	80	70
badkamers	als voor een normaal vertrek, met een toeslag van 20%								

Uit tabel 1 lees je bijvoorbeeld af dat voor een kamer van 40 m^3 op de tweede verdieping met twee buitenmuren een radiator met een capaciteit van $85 \times 40 = 3400$ Watt nodig is.

Iemand heeft nog de oude radiator die geschikt was om de kinderkamer te verwarmen.
Hij vraagt zich af of deze radiator geschikt is voor de vernieuwde badkamer.
De kinderkamer van 30 m^3 was op de begane grond en had één buitenmuur.
De badkamer op de eerste verdieping is wel kleiner, de inhoud is maar 24 m^3, maar er zijn twee buitenmuren. En in een badkamer moet het iets warmer zijn dan in andere vertrekken: volgens tabel 1 is daarvoor 20% extra capaciteit nodig.

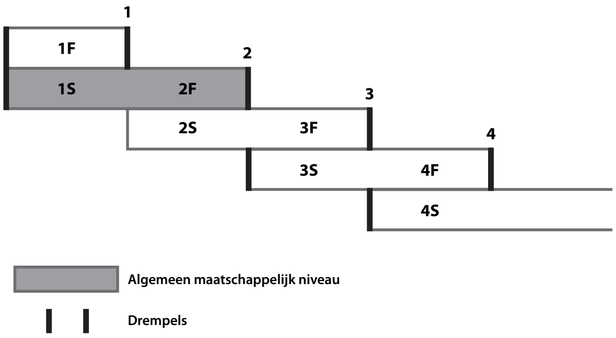
6 □ Heeft de oude radiator voldoende capaciteit? Licht je antwoord toe.

SLO-doelen rekenen-wiskunde

Inhoud			
sleutelbegrip	**vmbo - bb**	**vmbo - kb/gl/tl**	**havo/vwo**
Negatieve getallen	Negatieve getallen als middel om situaties te beschrijven. Daarin zijn negatieve getallen steeds 'gerichte grootheden': Vanuit een '0-situatie' kun je twee kanten op, 'onder 0' en 'boven 0'.		
	Grootheden die doorlopen 'onder 0' aflezen en binnen de situatie stappen maken, ook die 'over de 0' gaan.	Binnen situaties berekeningen maken met grootheden die negatieve waarden aan kunnen nemen. Formeel rekenen met negatieve getallen alleen m.b.v. ondersteunende modellen. Dit kan overigens wachten tot klas 3/4.	Uitbreiding van het rekenen met positieve getallen naar rekenen met positieve en negatieve getallen. Dit op basis van begrip, door bijv. toepassen van het permanentieprincipe

Vakinhoud 8 - Meetkunde

REFERENTIEKADER



Inleiding

Meetkunde lijkt een onbelangrijk onderwerp op de basisschool, omdat het domein vaak in projecten verwerkt is. Rekenen wordt belangrijker gevonden. Op die manier worden er kansen gemist, onder andere om puur plezier aan wiskunde te ervaren. Voor zowel het primair onderwijs als het voortgezet onderwijs geldt dat de leerlingen zelden tot onderzoek worden aangezet. Jammer, want het plezier in de wiskunde zou er zeker door bevorderd worden. Ook meetkunde leent er zich zeer voor.

Na deze bijeenkomst kan de student

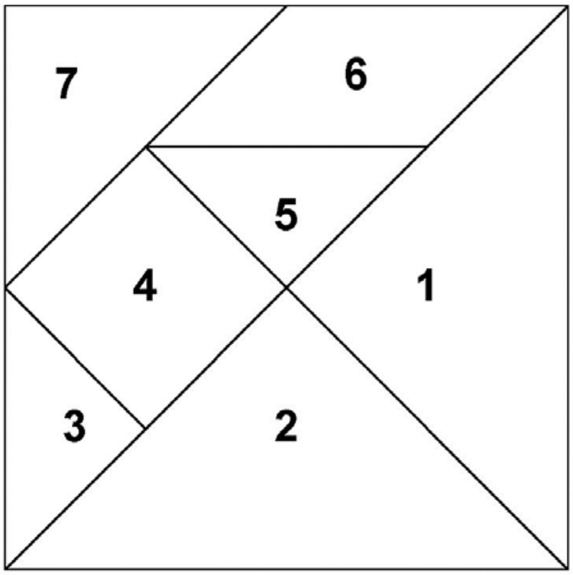
- aangeven wat meetkunde in PO. en VO inhoudt
- het verschil tussen meten en meetkunde in het PO benoemen en duidelijk maken dat beide subdomeinen samen in het VO meetkunde wordt genoemd
- op eigen niveau onderzoek uitvoeren naar meetkundige onderwerpen uit het dagelijks leven en meetkundepuzzels.

Programma bijeenkomst

- Instappracticum: onderzoekopdrachten
- Nabespreking
- College
- Zelfstudieopdrachten

Instap-en zelfstudieproblemen

1. Tangram



Bron: http://www.tangram.co.uk/Tangram-Making_a_Tangram.html

a. Leg een aantal van de tangramfiguurtjes:

Bron: http://www.identifont.com/show?6ML

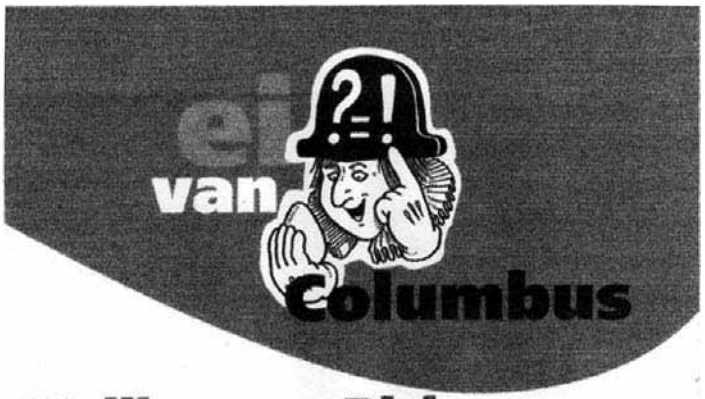
b. Formuleer enkele wetmatigheden
c. Formuleer ook enkele moeilijkheden bij het zoeken naar de juiste positionering van de verschillende figuurtjes

2. Maak zo precies mogelijk een routekaart van jouw weg van huis naar school, zodat iemand anders er dezelfde weg mee kan vinden. Geef er ook een voldoende precieze schaal bij.

3. Teken alle verschillende uitslagen van een kubus. Ga na, waarom je weet dat je ze allemaal hebt

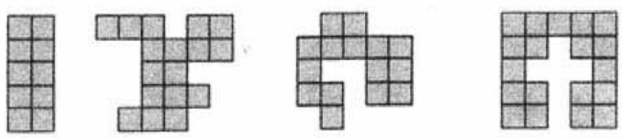
4. Leg uit waarom de schaduwen van bijvoorbeeld een rij palen in de zon evenwijdig aan elkaar zijn

5. Voer onderstaande opdracht uit, hij komt uit het Ei van Columbus in Volgens Bartjens van september 2009. Kun je formule vinden? Kun je erachter komen, waarom hij klopt voor alle figuren, opgebouwd uit vierkantjes?



Stelling van Pick

Neem tegeltjes van 1 cm^2 en leg ze in een mooie figuur, bijvoorbeeld:



figuur 1 figuur 2 figuur 3 figuur 4

Leg zelf een aantal vergelijkbare figuren en voer de gegevens in in de tabel.
Tel nu alle randpunten (r) en alle binnenpunten (b), en vul hiermee onderstaande tabel in:

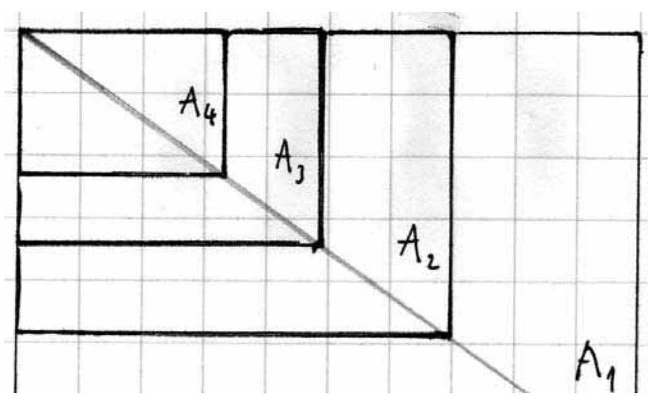
Kun je een formule bedenken voor de oppervlakte van de figuren (aantal tegels) door te letten op kolom 3 en kolom 4?
Volgende aflevering meer over deze bijzondere stelling.

Figuur	punten op de Rand r =	de helft daarvan r/2 =	punten Binnenin b =	Oppervlakte O =
1	14	7	4	10
2	28	14	4	17
3	26	13	3	15
4	32	16	4	19

Bron: Volgens Bartjens, Jaargang 28 nr 5

6. Waarom is onderstaande afbeelding zo langgerekt afgebeeld? Hoe komt het dat men vanaf de fiets dit op de weg gespoten rijwiel in de juiste verhoudingen zien? Hoe komt het dat de fiets niet dóórgetekend is en dat er onderbrekingen in de wielen en het frame te zien zijn.

7a. Zijn alle rechthoeken gelijkvormig?



b. A1-, A2-, A3-, A4-rechthoeken, etc. zijn gelijkvormig. Leg uit waarom.

College

- Meetkunde PO, jongere kind: Oriënteren, construeren, opereren (Tal); verschil meten en meetkunde in po
- Meetkunde PO, oudere kind: Oriëntatie in de ruimte, vlakke en ruimtelijke figuren, visualiseren en representeren (Tal)
- Het meetkundeprogramma VO eerste twee leerjaren (vmbo, havo, vwo)
- Het belang van onderzoek door de leerlingen naar aanleiding van meetkunde in het dagelijks leven
- Doorlopende leerlijnen meetkunde

Onderzoekopdracht / thuisopdracht behorende bij deze bijeenkomst

1. Maak de opdrachten af.
2. Ontwerp twee meetkundeopgaven, waarbij de leerlingen ook wat onderzoeken. Geef er voldoende aanwijzingen bij, zodat de leerlingen ermee aan het werk kunnen. Je kunt behalve zelf doeopgaven verzinnen ook maakopgaven uit methoden ombouwen tot doeopgaven
3. Wat zijn de belangrijkste verschillen tussen het fundamenteel- en het streefniveau voor meetkunde?
4. Is er voor meetkunde een goede doorlopende leerlijn PO-VO als je kijkt naar de leerboeken? Hoe is de verhouding tussen doe- en schriftelijke rekenopgaven bij meetkunde?
   Is er in de praktijk voor de leerlingen een goede doorlopende leerlijn PO-VO?
5. Welke aanbevelingen kun je doen voor een goede doorlopende leerlijn meetkunde?

Bijbehorend deel uit rapport 'doorlopende leerlijnen rekenen'

vervolg Meten en Meetkunde – 12 jaar – fundament en streef

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	Paraat hebben
– Meetinstrumenten gebruiken – Structuur en samenhang tussen maateenheden – Verschillende representaties, 2D en 3D	– $1 dm^3$ = 1 liter = 1000 ml – een 2D representatie van een 3D object zoals foto, plattegrond, landkaart (incl. legenda), patroontekening	– $1 m^3$ = 1000 liter – $1 km^2$ = 1000 000 m^2 = 100 ha
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– in betekenisvolle situaties samenhang tussen enkele (standaard)maten • km → m • m → dm, cm, mm • l → dl, cl, ml • kg → g, mg – tijd (maanden, weken, dagen in een jaar, uren, minuten, seconden) – afmetingen bepalen met behulp van afpassen, schaal, rekenen – maten vergelijken en ordenen	– samenhang tussen (standaard)maten ook door terugrekenen, in complexere situaties en ook met decimale getallen 'Is 1750 g meer of minder dan 1,7 kg?' – samengestelde grootheden gebruiken en interpreteren, zoals km/u – kiezen van de juiste maateenheid bij een situatie of berekening
	Weten waarom	Weten waarom
	– (lengte)maten en geld in verband brengen met decimale getallen: – 1,65 m is 1 meter en 65 centimeter – € 1,65 is 1 euro en 65 eurocent	– decimale structuur van het metriek stelsel – structuur en samenhang metrieke stelsel – relatie tussen 3D ruimtelijke figuren en bijbehorende bouwplaten

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
C Gebruiken	Paraat hebben	Paraat hebben
– Meten – Rekenen in de meetkunde	– schattingen maken over afmetingen en hoeveelheden – oppervlakte benaderen via rooster – omtrek en oppervlakte berekenen van rechthoekige figuren – routes beschrijven en lezen op een kaart met behulp van een rooster	– omtrek en oppervlakte bepalen/berekenen van figuren (ook niet rechthoekige) via (globaal) rekenen
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– veel voorkomende maateenheden omrekenen – liniaal en andere veelvoorkomen meetinstrumenten gebruiken	– formules gebruiken bij berekenen van oppervlakte en inhoud van eenvoudige figuren
	Weten waarom	Weten waarom
		– formules voor het berekenen van oppervlakte en inhoud verklaren – beredeneren welke vergrotingsfactor nodig is om de ene (eenvoudige) figuur uit de andere te vormen – verschillende omtrek mogelijk bij gelijkblijvende oppervlakte

NB. 1S omvat de inhouden van 1F.
In verschillende 'cellen' zijn voorbeelden genoemd. Deze zijn niet uitputtend.

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	Paraat hebben
– Meetinstrumenten gebruiken – Structuur en samenhang tussen maateenheden – Verschillende representaties, 2D en 3D	– $1 dm^3$ = 1 liter = 1000 ml – een 2D representatie van een 3D object zoals foto, plattegrond, landkaart (incl. legenda), patroontekening	– $1 m^3$ = 1000 liter – $1 km^2$ = $1000\,000 m^2$ = 100 ha
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– in betekenisvolle situaties samenhang tussen enkele (standaard)maten • km → m • m → dm, cm, mm • l → dl, cl, ml • kg → g, mg – tijd (maanden, weken, dagen in een jaar, uren, minuten, seconden) – afmetingen bepalen met behulp van afpassen, schaal, rekenen – maten vergelijken en ordenen	– samenhang tussen (standaard)maten ook door terugrekenen, in complexere situaties en ook met decimale getallen ‘Is 1750 g meer of minder dan 1,7 kg?’ – samengestelde grootheden gebruiken en interpreteren, zoals km/u – kiezen van de juiste maateenheid bij een situatie of berekening
	Weten waarom	Weten waarom
	– (lengte)maten en geld in verband brengen met decimale getallen: – 1,65 m is 1 meter en 65 centimeter – € 1,65 is 1 euro en 65 eurocent	– decimale structuur van het metriek stelsel – structuur en samenhang metrieke stelsel – relatie tussen 3D ruimtelijke figuren en bijbehorende bouwplaten

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
C Gebruiken	Paraat hebben	Paraat hebben
– Meten – Rekenen in de meetkunde	– schattingen maken over afmetingen en hoeveelheden – oppervlakte benaderen via rooster – omtrek en oppervlakte berekenen van rechthoekige figuren – routes beschrijven en lezen op een kaart met behulp van een rooster	– omtrek en oppervlakte bepalen/berekenen van figuren (ook niet rechthoekige) via (globaal) rekenen
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– veel voorkomende maateenheden omrekenen – liniaal en andere veelvoorkomen meetinstrumenten gebruiken	– formules gebruiken bij berekenen van oppervlakte en inhoud van eenvoudige figuren
	Weten waarom	Weten waarom
		– formules voor het berekenen van oppervlakte en inhoud verklaren – beredeneren welke vergrotingsfactor nodig is om de ene (eenvoudige) figuur uit de andere te vormen – verschillende omtrek mogelijk bij gelijkblijvende oppervlakte

NB. 1S omvat de inhouden van 1F.
n verschillende ‘cellen’ zijn voorbeelden genoemd. Deze zijn niet uitputtend.

Bron: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008), Over de drempels met rekenen, Enschede, SLO

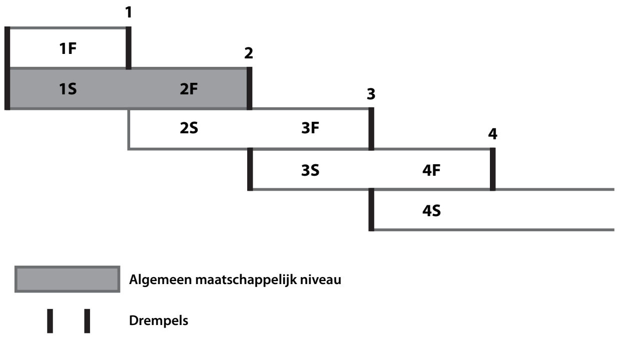
Andere literatuur

Gravemeijer, K. e.a., 2007, Meten en meetkunde in de bovenbouw, Groningen, Wolters-Noordhoff

Van den Heuvel-Panhuizen, M. e.a., 2004, Jonge kinderen leren meten en meetkunde, Groningen, Wolters-Noordhoff

Vakinhoud 9 - Meten

REFERENTIEKADER



Inleiding

Er zijn nog steeds leraren die het wiskundeonderdeel meten opvatten als schrifelijk werk. Dat je voor meten in de weer moet met natuurlijke maten, meetinstrumenten en zelfs eigen ledematen komt kennelijk niet bij hen op. Wiskunde leer je door te doen. Dat geldt in het bijzonder voor meten:
Meten moet je doen!

Na deze bijeenkomst kan de student

- aangeven welke grootheden en bijbehorende contexten en modellen in het onderwijs aan bod komen
- vanuit een duidelijke visie onderwijs in meten bedenken en organiseren
- het belang van en mogelijkheden tot het leggen van relaties met vakken als aardrijkskunde (schaal en metriek) en natuurkunde (bv. snelheid) duidelijk maken.

Programma bijeenkomst

- Vier instapopgaven
- College, waarin opgenomen (persoonlijke) referentiematen; zie ook: doelen bijeenkomst
- De fout van Marieke, een voorbeeld van een didactische aanpak
- Practicum, tevens zelfstudieopdracht:
- Stellingen

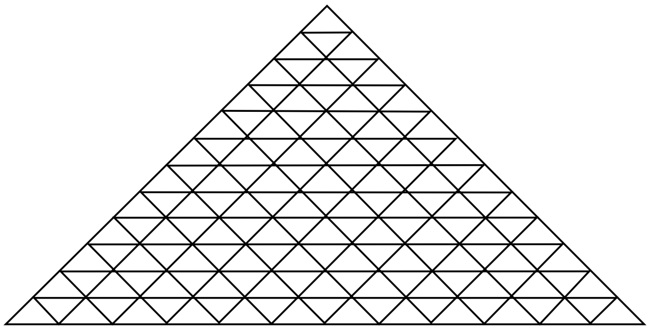
Instapopgaven

1. Maak van de volgende opgave eerst onmiddellijk en intuïtief een schatting van het antwoord: durf het direct te zeggen. Reken hem daarna precies uit.

   Van een fabriekshal van 50 bij 60 meter begaf het dak het gedurende een enorme hoosbui. Er stond na afloop van de storm over de hele vloeroppervlakte 2 cm water. Hoeveel liter water lag er op vloer van de fabriekshal?

2. Is 1 kubieke centimeter even groot als 1 centiliter, of is hij groter dan 1 cl, of misschien toch kleiner? Geef je argumenten.

3. Neem een driehoekje uit onderstaande figuur als oppervlakte-eenheid. Wat is dan de oppervlakte? Geef eerst een schatting en bereken de oppervlakte dan precies. Kun je het op een of meer handigere manieren berekenen?



4. Wat is de oppervlakte van Flevoland?

Bron: Routiq patent road maps, NEDERLAND, Eindhoven, Falkplan bv

De afstand van Almere tot Lelystad langs de A6, van het knooppunt met de A 27 tot afslag nummer 10, is 18 kilometer. Bepaal ook de schaal van de kaart en geef deze in de gebruikelijke notatie.

College

(voor de inhoud: zie de Tal-brochure "Meten en meetkunde in de bovenbouw" en Tule (Slo))

- verschillende grootheden, vergelijken en ordenen; natuurlijke maten en referentiematen; natuurlijke vs standaard maateenheid; metriek stelsel; relatie met kommagetallen; samengestelde maten
- de rol van formules
- relatie rekenen, meten en meetkunde; verschil meten en meetkunde in po

- didactische consequenties; eigen producties (bv: Fout van Marieke: Marieke meet haar tafel. De lengte is 2 meter en de breedte is 52 centimeter. Ze concludeert dat de oppervlakte van haar tafel 104 is, zie Tal-brochure, pagina 39 ev)

Practicum

1. Ontwerp vier meetopgaven, waarbij de leerlingen ook daadwerkelijk moeten meten. Geef er voldoende aanwijzingen bij, zodat de leerlingen ermee aan het werk kunnen. Je kunt behalve zelf doeopgaven verzinnen ook maakopgaven uit methoden ombouwen tot doeopgaven

Enkele voorbeelden:
- leid een benadering van de formule van de omtrek van een cirkel af door cirkels te meten
- bepaal de breedte van een rivier zonder hem over te steken
- bepaal de hoogte van een toren (bijvoorbeeld de domtoren) vanaf de voet ervan
- past de wereldbevolking in de provincie Utrecht?

2. Wat zijn de belangrijkste verschillen tussen het fundamenteel- en het streefniveau voor meten?

3. Is er voor meten een goede doorlopende leerlijn PO-VO als je kijkt naar de leerboeken? Hoe is de verhouding tussen doe- en schriftelijke rekenopgaven bij meten?
   Is er in de praktijk voor de leerlingen een goede doorlopende leerlijn PO-VO?

4. Welke aanbevelingen kun je doen voor een goede doorlopende leerlijn meten?

Stellingen (eventueel)

- een vierkante meter hoeft niet vierkant te zijn
- meten houdt altijd in, dat je moet afronden
- meten moet je doen!

Onderzoekopdracht / thuisopdracht behorende bij deze bijeenkomst

Zie: practicum

Artikel(en) en sites

http://tule.slo.nl/RekenenWiskunde/F-KDRekenenWiskunde.html
http://www.slo.nl/downloads/2008/Fundamentele_doelen_rekenenwiskunde.pdf/

Bijbehorend deel uit rapport 'doorlopende leerlijnen rekenen'

Verbanden – 12 jaar – fundament en streef

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
A Notatie, taal en betekenis	Paraat hebben	Paraat hebben
– Analyseren en interpreteren van informatie uit tabellen, grafische voorstellingen en beschrijvingen – Veel voorkomende diagrammen en grafieken	– informatie uit veel voorkomende tabellen aflezen zoals dienstregeling, lesrooster	– legenda – assenstelsel
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– eenvoudige globale grafieken en diagrammen (beschrijving van een situatie) lezen en interpreteren – eenvoudige legenda	– trend in gegevens onderkennen – staafdiagram, cirkeldiagram
	Weten waarom	Weten waarom
	– uit beschrijving in woorden eenvoudig patroon herkennen	– grafiek in de betekenis van 'grafische voorstelling'

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	Paraat hebben
– Verschillende voorstellings-vormen met elkaar in verband brengen – Gegevens verzamelen, ordenen en weergeven – Patronen beschrijven	– eenvoudige tabel gebruiken om informatie uit een situatiebeschrijving te ordenen	– eenvoudige tabellen en diagrammen opstellen op basis van een beschrijving in woorden – globale grafiek tekenen op basis van een beschrijving in woorden, bijvoorbeeld: tijd-afstand grafiek – eenvoudige patronen in rijen getallen en figuren herkennen en voortzetten: 1 – 3 – 5 – 7 - .... 100 – 93 – 86 – 79 – ..... – stippatronen
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– eenvoudige patronen (vanuit situatie) beschrijven in woorden, bijvoorbeeld: Vogels vliegen in V-vorm. "Er komen er steeds 2 bij."	– conclusies trekken door gegevens uit verschillende informatiebronnen met elkaar in verband te brengen (alleen in eenvoudige gevallen)
	Weten waarom	Weten waarom
	– informatie op veel verschillende manieren kan worden geordend en weergegeven	– keuze om informatie te ordenen door middel van tabel, grafiek, diagram

NB. 1S omvat de inhouden van 1F.

vervolg Verbanden – 12 jaar – fundament en streef

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
C Gebruiken	Paraat hebben	Paraat hebben
– Tabellen, diagrammen en grafieken gebruiken bij het oplossen van problemen – Rekenvaardigheden gebruiken	– eenvoudig staafdiagram maken op basis van gegevens	– berekeningen uitvoeren op basis van informatie uit tabellen, grafieken en diagrammen
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– kwantitatieve informatie uit tabellen en grafieken gebruiken om eenvoudige berekeningen uit te voeren en conclusies te trekken, bijvoorbeeld: In welk jaar is het aantal auto's verdubbeld t.o.v. het jaar daarvoor?	– punten in een assenstelsel plaatsen en coördinaten aflezen (alleen positieve getallen) – globale grafieken vergelijken, bijvoorbeeld: wie is het eerst bij de finish?
	Weten waarom	Weten waarom
		– op basis van een grafiek of diagram conclusies trekken over een situatie – op basis van een grafiek of diagram voorspellingen doen over een toekomstige situatie

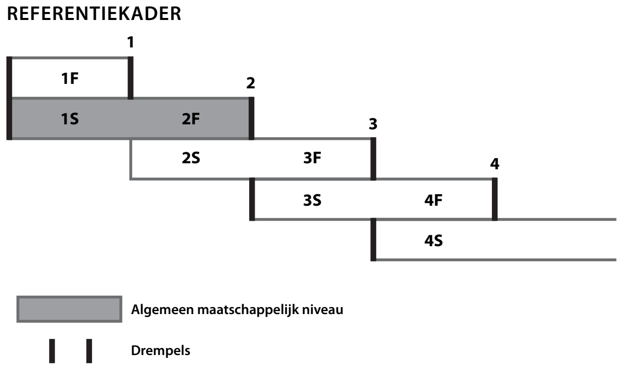
NB. 1S omvat de inhouden van 1F.
In de verschillende 'cellen' zijn voorbeelden genoemd. Deze zijn niet uitputtend.

Bron: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008), Over de drempels met rekenen, Enschede, SLO

Om over na te denken
Er is 20 cm sneeuw gevallen:

Foto: Jan Haarsma

Vakinhoud 10 - Grafieken



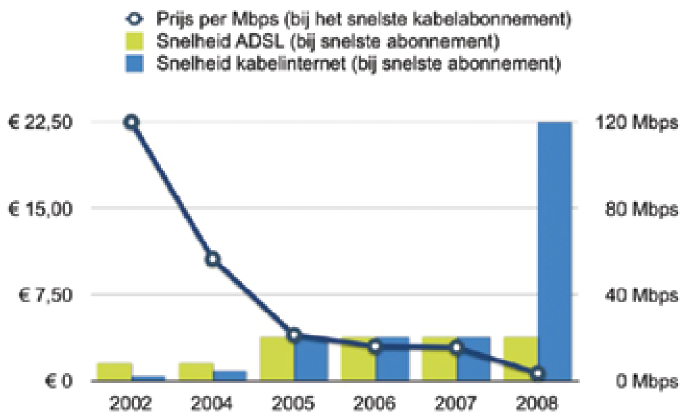
Inleiding

Deze bijeenkomst gaat over het gebruik van grafieken. Behalve dat je verschillende grafische vormen beheerst, is het vooral belangrijk dat je als docent in je onderwijs de leerlingen duidelijk kunt maken dat het gebruik van grafische weergaves een belangrijk onderdeel vormt in onze huidige informatievoorziening.

Programma bijeenkomst

- Instapsom grafieken
- Inventarisatie van de verschillende soorten grafieken (in ppt): turftabel, dichthedengrafiek, staafgrafiek, samengesteld- en meervoudig staafdiagram, histogram, samengesteld- en meervoudig histogram, frequentiepolygoon, lijngrafiek, stengel-bladdiagram, puntenwolk, stroomdiagram, cirkeldiagram, enz.
- Vanuit de meegebrachte reken-wiskundemethode wordt een inventarisatie gemaakt van de grafieken die de leerlingen moeten beheersen.
- Het ontwerpen van een opdracht over grafieken, bruikbaar voor eigen onderwijs.

Instapprobleem



Bron: PC Magazine (november 2002) Personal Computer Magazine (oktober 2004), Consumentengids (januari 2007), websites bedrijven

a. Van welke twee soorten grafieken is hier gebruik gemaakt?

b. Formuleer drie verschillende vragen / opdrachten behorende bij deze grafische weergave. Zorg voor opbouw in niveau en geef aan welke vraag past bij het gemiddeld niveau van de leerlingen uit jouw klas.

c. In de plenaire rapportage krijgt ieder de vragen van de medecursisten ter oplossing. Geef behalve het antwoord ook feedback op elkaars gekozen vragen.

Inventarisatie van verschillende grafische vormen in de meegebrachte reken-wiskundemethodes

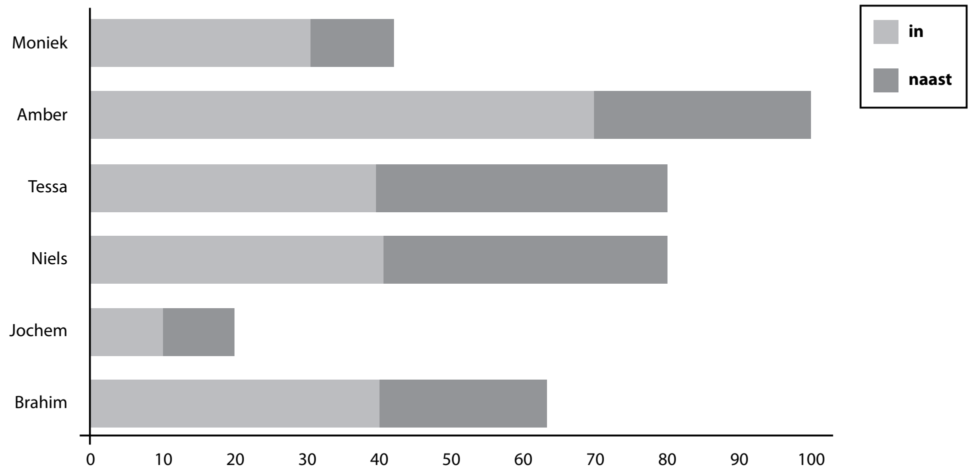
Geef bij de naam van de wiskundemethode een opsomming van de verschillende grafieken met doelgroep (klas of jaargroep), de wijze van het gebruik van de grafiek en wat volgens jou het doel van deze opdracht is.

Eigen ontwerp

a. Maak eerst de onderstaande opgave: deze opgave komt uit een les over basketbal.
b. Beredeneer zo precies mogelijk het doel van deze opdracht.
c. Ontwerp een les met activiteiten over het werken met grafieken, passend voor jouw klas. Je mag eventueel gebruik maken van een computerprogramma (zie FI-site) voor het maken van grafieken, maar de keuze ligt bij jou. Presenteer een eerste opzet aan de groep.

Mikken

Wie kan de meeste doelpunten maken met een basketbal?
De kinderen die het het beste kunnen hebben vanmorgen geoefend. Hieronder zie je hoe vaak ze raak gooiden. Alleen, kun je niet zo goed zien wie het het allerbeste kan, want de kinderen gooiden niet even vaak.



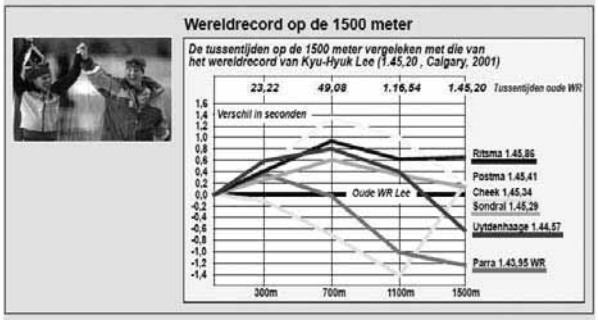
1. Volgend week wordt er wedstijd gehouden. Iedereen mag 20 keer gooien. Wie denk je dat de wedstijd gaat winnen?
2. Welk kind deed het vanmorgen het slechtst? Denk er eerst alleen over na. Overleg dan met de andere kinderen van je groepje en schrijf samen een antwoord op. Leg bij elke vraag uit *waarom*.

Bron: Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeondewijs - jaargang 20 - no4

Eigen ontwerp (vervolg)

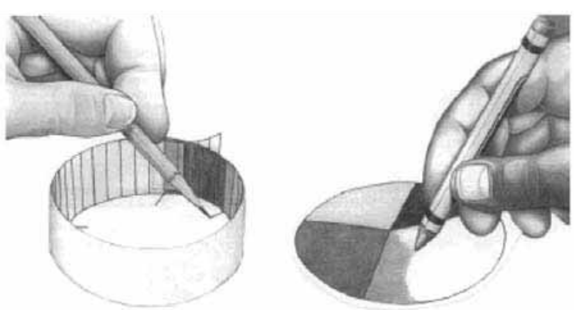
Het onderstaand werkblad (van T.Gorius - Freudenthal Instituut Universiteit Utrecht) is gedateerd. Ontwerp met behulp van de nieuwe tijden van de Olympische Spelen van Vancouver een nieuw doeblad. Voeg deze toe aan je PortFolio en eventueel kun je deze publiceren in het tijdschrift ''Panama-post' of het rekentijdschrift 'Volgens Bartjens.

Op 19 februari 2002 won Derek Parra de 1500 m op de Olympische spelen met een nieuw wereldrecord. Een krant illustreerde het artikel met de volgende grafiek:



1. Parra verpletterde het oude wereldrecord met maar liefst 1,25 s. Er zijn twee manieren om die informatie uit de afbeelding te halen. Welke?
2. Joey Cheek had even de illusie ook een wereldrecord te kunnen rijden. Helaas, niet gelukt. Hij kan zich troosten met de gedachte dat hij de snelste ooit op de 1100 m is. Wat was zijn tussentijd op 1100 m?
3. Uytdenhaage had het wereldrecord een paar minuten in handen. Tijdens zijn race was de TV commentator niet zo optimistisch of dit wel zou lukken. Waarom?
4. Uytdenhaage moest het hebben van zijn laatste ronde. Er zijn twee manieren om de rondetijd van die laatste ronde te bepalen. Welke manieren zijn dat?
5. Hoe kun je in één oogopslag zien dat Lee eigenlijk een zwakke derde ronde reed?
6. Teken Uytdenhaage's grafiek ten opzichte van de rondetijden van Parra in plaats van Lee.
7. Als Parra en Uytdenhaage tegen elkaar gereden zouden hebben, kun je dan een schatting maken van hun onderlinge afstand op het moment dat Parra over de finish ging?
8. In afstand-tijddiagrammen betekent een snijpunt 'ontmoeten' of 'inhalen'. Wat is in dit diagram de interpretatie van bijvoorbeeld het snijpunt tussen Cheek en Parra?

Bijlage: hoe je een cirkeldiagram maakt

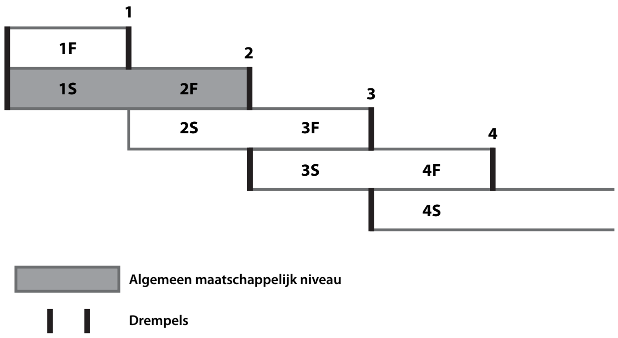


Tekenen van cirkeldiagram door strook in te kleuren en dan begin en eind aan elkaar te plakken

bron: Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs - jaargang 20 - no 4

Vakinhoud 11 - Van Rekenen naar Algebra 1

REFERENTIEKADER



Inleiding

Er zijn didactisch lijnen te trekken van rekenen-wiskunde op de basisschool naar algebra in het voortgezet onderwijs. Bijvoorbeeld van breuken met getallen naar breuken met onbekende of onbepaalde getallen. Of langs het rechthoekmodel, van vermenigvuldigen van getallen kleiner dan 10 tot de zogenoemde merkwaardige producten.

Na deze bijeenkomst kan de student

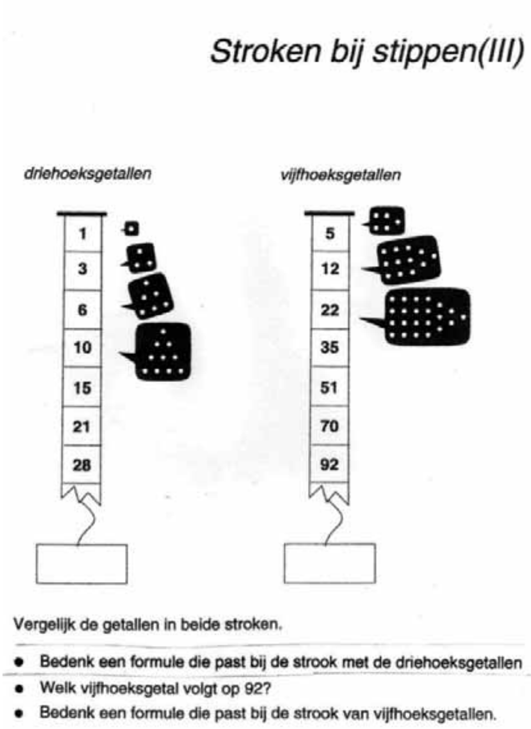
- de verbanden zien tussen bijvoorbeeld de regels bij de hoofdbewerkingen met breuken en de meer gecompliceerde functievoorschriften die een deling van expressies met een onbekende bevatten
- duidelijk maken wat de functie is van de modellen, die op de basisschool geïntroduceerd worden en in het voortgezet onderwijs verder ontwikkeld worden
- die modellen inzetten voor het eigen onderwijs.
- de leerlijn breuken overzien van referentieniveau 1 tot en met niveau 2, van 12 tot 16 jaar, zowel op streef- als op fundamenteel niveau.

Programma bijeenkomst

- Instapopgaven
- College
- Zelfstudieopgaven

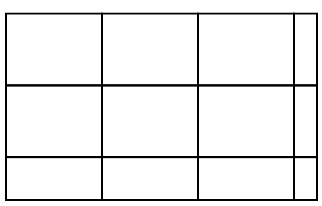
Instapproblemen

1. Voer de opdrachten in onderstaand werkblad "Stroken bij stippen" uit.



Bron: Oefeningen in Algebra, M. Kindt

2.



Reken in dit rechthoekmodel uit: $3\,{}^{1}/_{4} \times 2\,{}^{3}/_{5} =$

3. Leid de rekenregel voor het vermenigvuldigen van breuken in een rechthoekmodel af, bijvoorbeeld aan de hand van de opgave: ${}^{3}/_{4} \times {}^{2}/_{5} =$

4. bedenk een gelijkwaardige formule met één breukstreep voor:
   a. $y = 2/x + 3/(x+1)$
   b. $((x + 3)/2) : ((x - 1)/5) =$

5.

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} \; ; \; a_3 = \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}} \; ; \; a_4 = \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}} \; ; \text{enz}$$

Bewijs dat $a^n = \dfrac{n}{(n+1)}$

College

Naar aanleiding van het artikel: "Wat doen we (niet) met breuken?" van Martin Kindt

Onderzoekopdracht / thuisopdracht behorende bij deze bijeenkomst

1. Wat zijn de belangrijkste verschillen tussen het fundamenteel- en het streefniveau voor verhoudingen op referentieniveau 1?
2. Wat zijn de belangrijkste verschillen tussen het fundamenteel- en het streefniveau voor verhoudingen op referentieniveau 2?
3. Is er een consequente lijn waar te nemen op fundamenteel niveau van referentieniveau 1 naar 2 (vmbo-mbo)? Geef voorbeelden, waar dit uit blijkt.
4. Is er een consequente lijn waar te nemen op streefniveau van referentieniveau 1 naar 2 (havo-vwo)? Geef voorbeelden, waar dit uit blijkt.
5. Wordt ergens in de niveaubeschrijvingen de verbinding tussen verhoudingen (breuken) en algebra gelegd? Als je deze vraag met ja beantwoordt, geef dan aan, op welke plaats(en) je die verbindingen ziet.

Artikel (en)

"Wat doen we (niet) met breuken?" van Martin Kindt

Bijlage

2 Binnenland NRC eind oktober '09

Onderwijs Wetenschappelijk en hoger beroepsonderwijs testen eerstejaars op weggezakte wiskundevaardigheden

De bètastudent oefent nu weer basisdingetjes

Vijfduizend eerstejaars oefenen met algebra, na klachten over het lage wiskundeniveau op de middelbare school. „Je snapt meer dan je denkt."

Door onze redacteur
MARIEKE VAN TWILLERT

AMSTERDAM, 20 OKT. Docent wiskunde André Heck zit samen met eerstejaarsstudent scheikunde Dave Poldervaart (22) achter de computer. „Het gaat erom dat je telkens tussenstappen doet", legt Heck uit.

Poldervaart staart glazig naar het scherm met oefeningen. „Ik vind het best lastig."

Heck: „Wat zou je nu doen?"

Poldervaart: „De wortel weghalen?"

Heck: „Probeer het, tik het in."

Het wiskunde-oefenprogramma laat een groen bolletje zien. De oplossing was goed.

Heck: „Voor jou, omdat je veel kwijt bent, is het belangrijk om tussenstapjes te maken. Je snapt meer dan je denkt, alleen moet je het meer opknippen."

Na aanhoudende klachten in het hoger onderwijs over het wiskundeniveau van eerstejaarsstudenten werken zeventien instellingen uit voorgezet en hoger onderwijs samen om de kloof te verkleinen. Binnen het project Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde (NKBW) zijn gezamenlijke vaardigheidstoetsen ontwikkeld.

Dit collegejaar is begonnen met het afnemen van een landelijke vaardigheidstoets, ontwikkeld voor ongeveer vijfduizend studenten die beginnen met een studie waarin wiskunde een belangrijke rol speelt, zoals een bèta- of economiestudie.

De toetsen worden op dit moment door het hele land gemaakt. Bijvoorbeeld door de kleine dertig studenten die zich vorige week verzamelden in het Euclides-gebouw (natuurwetenschappen, wiskunde en informatica) van de Universiteit van Amsterdam. Het zijn eerstejaars scheikunde, of een verwante studie die bio-exact heet. Ze zitten in de tweede maand van hun studie en oefenen differentiëren, integreren, haakjes omrekenen en andere algebraoefeningen.

Dave Poldervaart uit Groet heeft 2,5 jaar rechten gestudeerd. „Dit soort basisdingetjes wist ik niet meer." Op de middelbare school had hij wiskunde in zijn vakkenpakket, maar ja, daar deed hij ook al niet echt z'n best.

Naast hem zitten Dirk Uittenbogaard (19) en Mudassar Malik (20) uit Amsterdam. Ook zij hadden de eerste test „vrij matig" gemaakt. „Ik had het makkelijk beter kunnen doen", zegt Malik, die is uitgeloot voor tandheelkunde. Hij heeft een jaar niet gestudeerd en gaf scheikundeles in het volwassenenonderwijs. Malik: „Het is ook zo lang geleden allemaal, dat differentiëren en primitiveren." Ook Uittenbogaard was „er een jaartje uit". Hij heeft gereisd en geroeid. „Deze vaardigheidstest lijkt veel simpeler dan hij is."

'En ik ben ook niet zo gewend om zonder rekenmachine te rekenen'

NKBW-projectleider Leendert Van Gastel: „Deze studenten hebben dit soort algebraoefeningen veel minder geoefend dan jij en ik vroeger deden. Het ontbreekt hun aan vaardigheid. En dat komt door de veranderingen in het vwo, de invoering van de profielen."

Nu wordt dat veranderd en in 2011 zijn de achterstanden – deels – gerepareerd, voegt André Heck toe. „De generatie van volgend jaar zal daar minder last van hebben. Die leerlingen hebben expliciet geoefend met algebra. In de nieuwe wiskundeboeken zie je dit soort algebrasommen terug."

De generatie van nu heeft nog „last van vaardigheidsproblemen", benadrukt Van Gastel. Hij merkt op dat ze problemen hebben met „alles, met de hele breedte van kennis". Al wisselt het per student wát er precies aan schort.

Na een lange vakantie zakt kennis sowieso weg. Maar wat Heck opvalt: „Ook al kunnen ze het, ze blijven onzeker in het opschrijven." En dat komt doordat ze te weinig hebben geoefend, vult Van Gastel aan. „Vertrouwen ontstaat door te oefenen. Dan gaan er dingetjes fout, maar dat is niet erg."

Nina Jansen is met 22 jaar een van de ouderen in het lokaal. Ze is vorig jaar pas ingestroomd in de interdisciplinaire bachelor 'bèta-gamma', vanuit de bachelor 'future planet studies'. „Ik wilde toch liever een zonnecel bouwen in plaats van hem managen." Ze heeft niet goed geleerd, erkent Nina meteen. „Ik ben een beetje lui en ik was te laat begonnen." Maar, voegt ze toe, „veel stof had ik ook niet gehad op mijn oude school."

Bij Sandra Thonhauser (19), eerstejaarsstudent scheikunde uit Amsterdam, was veel kennis van wiskunde weggezakt. Ze heeft een jaar gewerkt als voedingsassistente in het ziekenhuis. „Nadat ik was uitgeloot voor verloskunde wist ik echt niet wat ik wilde studeren." Haar vriendin Ayke Rosbach (20) – ze kennen elkaar nog van de basisschool – heeft de test evenmin gehaald. „Te zenuwachtig. En ik ben ook niet zo gewend om zonder rekenmachine te rekenen."

Projectleider Van Gastel: „Het is niet zo dat ze deze stof nog nooit hebben gezien." Het ligt ook niet aan de individuele leraar, voegt zijn collega toe. „Op de middelbare school heb je een druk programma. Je moet méér onderdelen leren in minder uren."

De wiskundigen Heck en Van Gastel van de UvA blijven twijfels houden over het niveau van de vwo'ers, ondanks de bijstellingen van het wiskundeprogramma op de middelbare school. „Leerlingen krijgen nog altijd 15 tot 20 procent uren minder wiskunde per jaar dan vóór de vernieuwde tweede fase uit 2007. Dat is een politieke afweging."

Van Gastel heeft de toets gisteren nagekeken. Na twee rondes heeft 67 procent van de 190 deelnemers de toets gehaald.

Voorbeelden van toets op nrc.nl/onderwijs

Bijbehorend deel uit rapport 'doorlopende leerlijnen rekenen'

Verhoudingen – 12 jaar – fundament en streef

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
A Notatie, taal en betekenis	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
– Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken	– een vijfde deel van alle Nederlanders korter schrijven als $\frac{1}{5}$ 'deel van ...' – 3,5 is 3 en $\frac{5}{10}$ – '1 op de 4' is 25% of 'een kwart van' – geheel is 100%	– schrijfwijze $\frac{1}{4} \times 260$ of $\frac{260}{4}$ – formele schrijfwijze 1 : 100 ('staat tot') herkennen en gebruiken – verschillende schrijfwijzen (symbolen, woorden) met elkaar in verband brengen
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	– notatie van breuken (horizontale breukstreep), decimale getallen (kommagetal) en procenten (%) herkennen – taal van verhoudingen (per, op, van de) – verhoudingen herkennen in verschillende dagelijkse situaties (recepten, snelheid, vergroten/verkleinen, schaal enz.)	– schaal
	Weten waarom	**Weten waarom**
		– relatieve vergelijking (term niet)

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
B Met elkaar in verband brengen	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
– Verhouding, procent, breuk, decimaal getal, deling, 'deel van' met elkaar in verband brengen	– eenvoudige relaties herkennen, bijvoorbeeld dat 50% nemen hetzelfde is als 'de helft nemen' of hetzelfde als 'delen door 2'	– procenten als decimale getallen (honderdsten) – veel voorkomende omzettingen van percentages in breuken en omgekeerd
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	– beschrijven van een deel van een geheel met een breuk – breuken met noemer 2, 4, 10 omzetten in bijbehorende percentages – eenvoudige verhoudingen in procenten omzetten bijv. 40 op de 400	– breuken en procenten in elkaar omzetten – breuken benaderen als eindige decimale getallen – verhoudingen en breuken met een rekenmachine omzetten in een (afgerond) kommagetal
	Weten waarom	**Weten waarom**
		– relatie tussen breuken, verhoudingen en percentages – breuken omzetten in een kommagetal, eindig of oneindig aantal decimalen

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
C Gebruiken	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
– In de context van verhoudingen berekeningen uitvoeren, ook met procenten en verhoudingen	– rekenen met eenvoudige percentages (10%, 50%, ...)	– rekenen met percentages ook met moeilijker getallen en minder 'mooie' percentages (eventueel met de rekenmachine)
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	– eenvoudige verhoudingsproblemen (met mooie getallen) oplossen – problemen oplossen waarin de relatie niet direct te leggen is: 6 pakken voor 18 euro, voor 5 pakken betaal je dan ...	– gebruik dat 'geheel' 100% is – ontbrekende afmeting bepalen van een foto die vergroot wordt – rekenen met eenvoudige schaal
	Weten waarom	**Weten waarom**
	– eenvoudige verhoudingen met elkaar vergelijken: 1 op de 3 kinderen gaat deze vakantie naar het buitenland. Is dat meer of minder dan de helft?	– vergroting als toepassing van verhoudingen – bij procenten mag je niet zomaar optellen en aftrekken (10% erbij 10% eraf) – betekenis van percentages boven de 100 – relatieve grootte: de helft van iets kan minder zijn dan een kwart van iets anders

NB. 1S omvat de inhouden van 1F.
In verschillende 'cellen' zijn voorbeelden genoemd. Deze zijn niet uitputtend.

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
A Notatie, taal en betekenis	Paraat hebben	Paraat hebben
– Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken	– een 'kwart van 260 leerlingen' kan worden geschreven als '$\frac{1}{4} \times 260$' of als '$\frac{260}{4}$' – formele schrijfwijze 1 : 100 bij schaal herkennen – 1 op de 5 Nederlanders is hetzelfde als 'een vijfde deel van alle Nederlanders'	
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– notatie van breuken, decimale getallen en procenten herkennen en gebruiken	– verschillende schrijfwijzen met elkaar in verband brengen – adequate taal en notaties gebruiken bij het oplossen van problemen waarin verhoudingen een rol spelen (vaak binnen de gekozen beroepsopleiding)
	Weten waarom	Weten waarom

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	Paraat hebben
– Verhouding, procent, breuk, decimaal getal, deling, 'deel van' met elkaar in verband brengen	– eenvoudige stambreuken ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$,...), decimale getallen (€ 0,50; € 0,25; € 0,10), percentages (50%, 25%, 10%) en verhoudingen (1 op de 2, 1 op de 4, 1 op de 10) in elkaar omzetten	
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– met een rekenmachine breuken en procenten berekenen of benaderen als eindige decimale getallen	– een passend rekenmodel kiezen of een rekenmachine op een goede manier gebruiken bij het in elkaar omzetten van breuken, decimale getallen en procenten
	Weten waarom	Weten waarom

NB. 2F omvat de inhouden van 1F, 3F omvat de inhouden van 2F

Verhoudingen – 16 en 17-20 jaar – streef

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
A Notatie, taal en betekenis	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
– Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken		– omgekeerd evenredig
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	– adequate (wiskunde)taal en notaties lezen en gebruiken. Ook de notatie 3 : 5 voor 'drie van de vijf leerlingen'	– verhouding relateren aan lineair verband
	Weten waarom	**Weten waarom**
	– gebruik maken van de begrippen *absoluut* en *relatief* bij het rekenen met procenten	

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
B Met elkaar in verband brengen	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
– Verhouding, procent, breuk, decimaal getal, deling, 'deel van' met elkaar in verband brengen	– breuken, decimale getallen, percentages en verhoudingen in elkaar omzetten	– omgekeerd evenredig
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	– weten wat 'in verhouding hetzelfde' betekent en hiermee rekenen, bijvoorbeeld 'in dezelfde verhouding vergroten'	– verhoudingen, breuken, decimale getallen en procenten met elkaar in verband brengen in andere domeinen
	Weten waarom	**Weten waarom**
	– kennis van getalsystemen: $\frac{1}{4}$ kan wel als eindig decimaal getal geschreven worden en $\frac{1}{3}$ niet	– uitbreiding kennis van getalsystemen

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
C Gebruiken	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
– In de context van verhoudingen berekeningen uitvoeren, ook met procenten en verhoudingen	– formele rekenregels hanteren – bepalen op welke schaal iets getekend is	
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	– rekenen met percentages boven de 100 – vierde evenredige berekenen – verhoudingen toepassen bij het oplossen van problemen – berekeningen met een groeifactor / vermenigvuldigingsfactor of percentage uitvoeren bijvoorbeeld samengestelde interest en exponentiële groei; of bij: 19% erbij en 25% eraf – verhoudingen in de meetkunde gebruiken	
	Weten waarom	**Weten waarom**
	– (wiskundig) redeneren in situaties waarin percentages of verhoudingen voorkomen	– relatie leggen met verhoudingen binnen algebra en meetkunde – (wiskundig) redeneren in situaties waarin percentages of verhoudingen voorkomen

NB. 2S omvat de inhouden van 1S, 3S omvat de inhouden van 2S

Verhoudingen – 16 en 17-20 jaar – streef

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
A Notatie, taal en betekenis	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
– Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken		– omgekeerd evenredig
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	– adequate (wiskunde)taal en notaties lezen en gebruiken. Ook de notatie 3 : 5 voor 'drie van de vijf leerlingen'	– verhouding relateren aan lineair verband
	Weten waarom	**Weten waarom**
	– gebruik maken van de begrippen *absoluut* en *relatief* bij het rekenen met procenten	

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
B Met elkaar in verband brengen	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
– Verhouding, procent, breuk, decimaal getal, deling, 'deel van' met elkaar in verband brengen	– breuken, decimale getallen, percentages en verhoudingen in elkaar omzetten	– omgekeerd evenredig
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	– weten wat 'in verhouding hetzelfde' betekent en hiermee rekenen, bijvoorbeeld 'in dezelfde verhouding vergroten'	– verhoudingen, breuken, decimale getallen en procenten met elkaar in verband brengen in andere domeinen
	Weten waarom	**Weten waarom**
	– kennis van getalsystemen: $\frac{1}{4}$ kan wel als eindig decimaal getal geschreven worden en $\frac{1}{3}$ niet	– uitbreiding kennis van getalsystemen

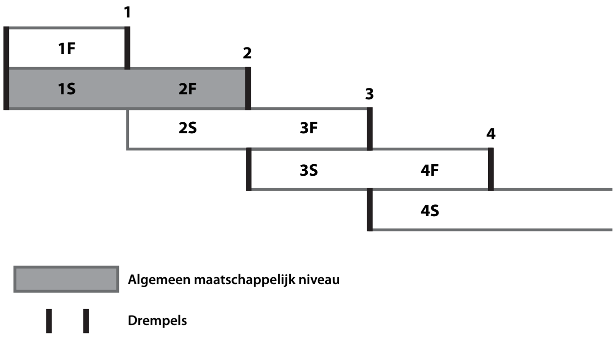
16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
C Gebruiken	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
– In de context van verhoudingen berekeningen uitvoeren, ook met procenten en verhoudingen	– formele rekenregels hanteren – bepalen op welke schaal iets getekend is	
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	– rekenen met percentages boven de 100 – vierde evenredige berekenen – verhoudingen toepassen bij het oplossen van problemen – berekeningen met een groeifactor / vermenigvuldigingsfactor of percentage uitvoeren bijvoorbeeld samengestelde interest en exponentiële groei; of bij: 19% erbij en 25% eraf – verhoudingen in de meetkunde gebruiken	
	Weten waarom	**Weten waarom**
	– (wiskundig) redeneren in situaties waarin percentages of verhoudingen voorkomen	– relatie leggen met verhoudingen binnen algebra en meetkunde – (wiskundig) redeneren in situaties waarin percentages of verhoudingen voorkomen

NB. 2S omvat de inhouden van 1S, 3S omvat de inhouden van 2S

Bron: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008), Over de drempels met rekenen, Enschede, SLO

Vakinhoud 12 - Van Rekenen naar Algebra 2

REFERENTIEKADER



Inleiding

Er zijn didactisch lijnen te trekken van rekenen op de basisschool naar algebra in het voortgezet onderwijs. Het produceren van formules start vanuit manipulaties met hele en gebroken getallen.

Na deze bijeenkomst kan de student
- diverse verbindingen zien tussen rekenen en algebra.

Programma bijeenkomst
- Instapproblemen
- Nabespreking zelfstudie les 13

Instapproblemen

1. Bewijs de regel: delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde. Is je bewijs te begrijpen door een leerling van het vwo? En van het havo? Pas je bewijs zo nodig aan.

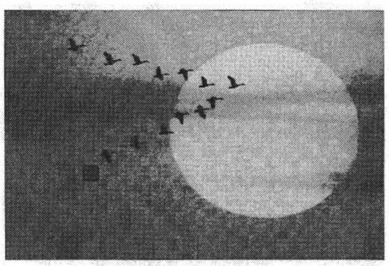
2. Bewijs met behulp van het rechthoekmodel:
a. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
c. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

3. 2 x 2 = 2 + 2 en ook 5 x 1 ¼ = 5 + 1 ¼ . Zijn er andere getallenparen, die bij vermenigvuldiging en bij optelling dezelfde uitkomst geven? Zie je een verband verschijnen? Kun je een formule vinden? Heb je hiermee alle mogelijke tweetallen, die met elkaar vermenigvuldigd en bij elkaar opgeteld dezelfde uitkomst geven?

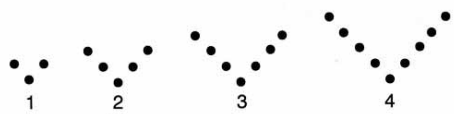
4. Maak de onderstaande werkbladen

Letterpatronen (I)

Een V-formatie in de lucht...

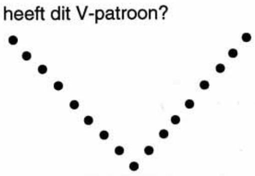


V-formaties met stippen:



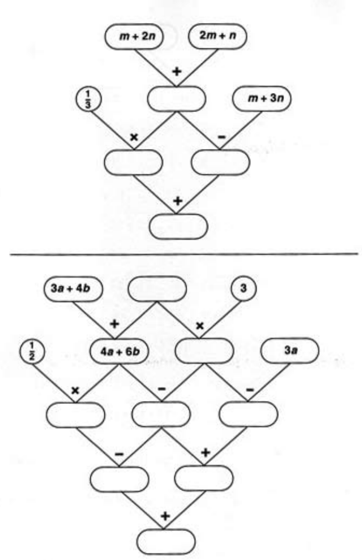
Op het plaatje zie je de eerste vier V-patronen. Elk patroon heeft een rangnummer. Hieronder zie je een V-patroon met 17 stippen.

- Welke rangnummer heeft dit V-patroon?

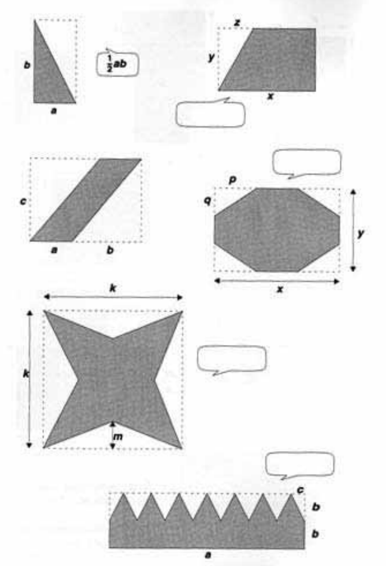


- Hoeveel stippen heeft het V-patroon met rangnummer 85?
- Bestaat er een V-patroon met 35778 stippen? Waarom?
- Bedenk een regel om bij een gegeven rangnummer het aantal stippen van het V-patroon te vinden.
- Geef die regel ook in formulevorm; gebruik hierbij de letters *n* en *V* (*n* = rangnummer, *V* = aantal stippen)

Rekenen met formules (II)



Oppervlakkige algebra (IV)



Bron afbeeldingen: Kindt, M. (2003), Oefeningen in Algebra, Utrecht, FI

Nabespreking instapproblemen

Nabespreking zelfstudie les 13

College

naar aanleiding van kennisbron: **algebra in de schoolwiskunde**, kennisbank> didactische thema's> soorten variabelen.

BLOK 2

Oefenen, onderhoud en zorg

Oefenen, onderhoud en zorg - inleiding

Wat is leren?

in de verschillende onderwijskundige handboeken wisselen de omschrijvingen van het begrip leren met de jaren. Als je iets ten minste 24 uur later nog terug kunt vertellen (Sousa), als er een blijvende verandering in je gedrag optreedt tengevolge van nieuwe kennis (Boekaerts en Simons), of het proces van construeren van kennis en vaardigheden op basis van reeds aanwezige kennis (Glaser). Alle drie de omschrijvingen hiervoor passen binnen de theorie van het constructivisme die in de onderwijskundige wereld inmiddels breed ondersteund wordt. Kort gezegd: kennis maak je uiteindelijk zelf uit het mengsel van de dingen die je al weet en nieuwe informatie.

Vier verschillende niveaus binnen dit leren zijn te noemen: onthouden, begrijpen, integreren en toepassen.

Onthouden

Het basisniveau. Per slot begint het allemaal daarmee. Al het denken is gebaseerd op iets, dat je weet en daarvoor moet je het eerst onthouden. Als leerlingen leerstof circa vierentwintig uur nadat het behandeld is, nog weten zonder dat ze er in de tussentijd iets mee gedaan hebben, mag je ervan uitgaan dat ze het onthouden hebben, dat het in het lange termijn geheugen zit.

Begrijpen

Zolang leerlingen dingen precies zo teruggeven als ze het hebben opgenomen mag je betwijfelen of het echt begrepen is. Niet voor niets vragen we zo vaak in proefwerken 'zeg in eigen woorden...'. Leren gaat in beelden en in taal. Het 'je eigen maken' slaat ook op er je eigen taal van maken. Iets begrijpen wil zeggen: het op een goede manier in eigen woorden kunnen weergeven.

Integreren

Men zegt wel dat alle essentiële dingen geleerd worden tussen ons eerste en derde levensjaar. Daarna leren we alleen nog maar bij. We hebben die boom immers al lang gezien, alleen leren we dan later dat het een boom heet, nog later dat het een beuk is, dan weer dat het een groene plant is en uiteindelijk wellicht ook nog dat fotosynthese een belangrijk proces bij groene planten is. Kennis wordt steeds verder uitgebreid. Integreren wil zeggen dat je de nieuwe kennis aan laat sluiten bij die dingen die je al weet. Je zou kunnen zeggen: in het goede vak weten op te bergen.

Toepassen

In onderwijskundige kringen vindt men dat er geen sprake van leren is als er niets toegepast kan worden. Wat moet je met die kennis als je er uiteindelijk niets mee kunt doen? Onder toepassing verstaan we de verworven kennis in een nieuwe, niet geoefende situatie gebruiken. Als je iets dat je geleerd hebt kunt toepassen, heb je het goed geleerd. In de praktijk wordt dit nog wel eens verward met oefenen.

Oefenen en onderhoud van opgedane vaardigheden speelt bij de verschillende niveaus van leren een belangrijke rol. In een aantal bijeenkomsten gaan we hierin op in. Verschillende werkvormen passeren de revue.

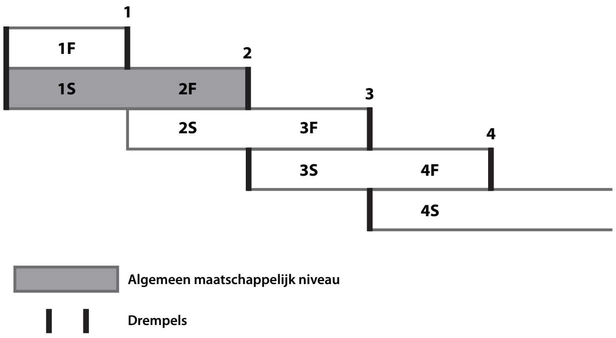
Twee bijeenkomsten hebben de rekenmachine als onderwerp. Het apparaatje speelt een heel eigen rol als oefenhulpmiddel en heeft veel toepassingsmogelijkheden.

Onder het kopje **zorg** komen de volgende onderwerpen aan de orde: rekenachterstand, rekenprobleem, rekenstoornis, dyscalculie, signaleren-diagnosticeren-handelen-evalueren, leerbehoefte en motivatie.

De cursisten gaan steeds in de eigen onderwijspraktijk met de aangesneden onderwerpen en behandelde routines aan het werk.

Oefenen 1 - Werkvormen (1)

REFERENTIEKADER



Inleiding

Al vanaf de fase waarin jonge kinderen rekenen leren is het verzorgen van oefenprogramma's een didactische taak van de leerkracht. Voor alle leerlingen is het van belang dat ze tijdens het opdoen van kennis en vaardigheden aandacht besteden aan het oefenen. Dit inoefenen gebeurt op een toegesneden manier, zoals dat ook gebeurt bij bijvoorbeeld het oefenen van de opslag bij volleybal,
Bij de bijeenkomsten van Oefenen, onderhoud en zorg zullen verschillende werkvormen centraal staan.

Programma

- Instap1: rijtje van 5
- Instap2: vier stellingen over oefenen
- Theorie: waar gaat men bij het oefenen vanuit? De twee hoofdvormen van oefenen
- Plenair een voorbeeld bespreken
- Discussie in groepjes over inventarisatie, realisatie en optimalisatie
- Practicum: het uitwerken van 6 opdrachten
- Toelichting stage opdrachten

Instap: rijtje van 5

Het volgende rijtje ontstaat door twee getallen willekeurig te kiezen en de volgende steeds te laten ontstaan door de som van de twee voorgaande buren:

2 - 4 - 6 - 10 - 16 --> het eindgetal is hier 16.
Maak nu zelf binnen 2 minuten een rijtje van 5 met als eindgetal 2010.
Zet je rijtje op het bord.

Instap: vier stellingen

Reageer op elk van de volgende stellingen met behulp van een vijfpuntschaal
(0= geheel niet mee eens; 5= helemaal mee eens).

- "Bij het oplossen van reken- en wiskundige vraagstukken is alleen inzicht nodig."
- "Oefenen is nodig om vaardigheden te automatiseren, en automatiseren maakt dan nieuwe inzichten mogelijk."
- "Alleen voor zwakkere rekenaars is oefenen noodzaak."
- "Het voorbeeld van bovenstaand rijtje van 5 is geen oefenvorm, maar behoort tot het probleemoplossend bezig zijn."

Plenair volgt een terugblik op de verschillende motivaties van gemaakte keuzes.

Theorie

Het goed verzorgen van oefenprogramma's is een van de didactische taken van de leerkracht.
In het oefenen komen veel aspecten van het onderwijzen en leren samen: kennis, vaardigheden, inzichten en creativiteit.

We onderscheiden twee vormen van oefenen, namelijk het inoefenen en het onderhouden.

1. Het **inoefenen** (ook wel "gericht oefenen" genoemd) volgt direct op aangeboden vaardigheden.
   Als voorbeeld moet je dan denken aan het automatiseren dan wel memoriseren van de basisvaardigheden tot twintig, en de tafels van vermenigvuldigen. Ook het inoefenen van bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras, of het werken met formules.
   Inhoud en vorm van deze oefenvormen worden door de leraar (en het leerboek) vastgesteld en voorgestructureerd, en de opgaven zijn gesloten.
2. Het **onderhouden**, waardoor eerder verworven kennis en bijbehorende vaardigheden regelmatig aan de orde komen. Er kan contextrijk of geïntegreerd geoefend worden. De term "geïntegreerd" zou je kunnen gebruiken voor productief oefenen: de combinatie van oefenen en probleemoplossen. Een kenmerk is nog dat deze manier van aanbieden veel indirecter en opener is. Er wordt ook meer initiatief van de leerling verwacht. (Treffers, 1999)

Onderstaande opdracht komt uit een wiskundeboek van het VMBO-tl.
Tot welke categorie van oefenen zal deze behoren?

Discussie - overleg (in groepjes)

1. (inventarisatie) Welke oefenvormen gebruik je zelf als docent / student tijdens je lessen?

2. (realisatie) Het regelmatig inzetten van verschillende oefenvormen en het verminderen van het aantal lesuren is in tegenspraak met elkaar. Welke mogelijkheden zien jullie om hiermee om te gaan?

3. (optimalisatie) Probeer schematisch (een tekening op een A4tje) weer te geven hoe tijdens het oefenen de samenhang is tussen de volgende drie onderdelen van onderwijzen en leren: **motivatie, inzicht en vaardigheden**. Hang jullie weergave op aan het bord.

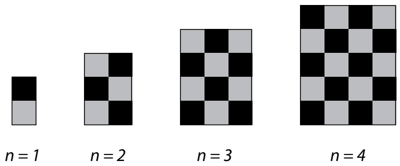
Practicum (in groepjes)

1. Los onderstaande vragen - 14 t/m 17 - op.
   (bron: kennisbank)

2. Deze opdracht zou je kunnen zien als een oefenvorm van het geïntegreerd oefenen. Geef eens aan hoe inzicht en vaardigheden zich verhouden tot deze oefenvorm.

PATROON VAN ZWARTE EN GRIJZE VIERKANTJES

Hieronder zie je de eerste vier figuren uit een reeks. De figuren hebben een patroon van zwarte en grijze vierkantjes. Het rangnummer van elk figuur is aangegeven met de letter *n*.



14 -> Teken de figuur met rangnummer $n = 5$

15 -> Hoeveel grijze vierkantjes heeft de figuur met rangnummer $n = 8$?
Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

16 Een blad roosterpapier is 40 vierkantjes breed en 56 vierkantjes hoog. Met de vierkantjes op dit blad wordt een figuur uit de reeks getekend met een zo groot mogelijk rangnummer *n*.
-> Bereken hoeveel vierkantjes van dit blad niet gebruikt worden. Schrijf je berekening op.

Er bestaat een verband tussen het totaal aantal vierkantjes *a* van een figuur uit de reeks en zijn rangnummer *n*. De formule voor dit verband is:

$$a = n^2 + n$$

17 -> Bereken het rangnummer *n* van de grootste figuur met minder dan 2000 vierkantjes.
Schrijf je berekening op.

Practicum - vervolg (in groepjes)

Elk groepje krijgt 20 verschillende opdrachten waarin geoefend wordt.

3. Categoriseer elk van de opdrachten.

4. Maak de oefenopdracht.

5. Geef bij elke oefenvorm de benodigde inzicht en vaardigheden aan.

6. Maak als groepje een top-5.

Plenair een inventarisatie van elk groepje

Stage - opdrachten 'oefenen'

1. Inventariseer op je (stage-)school bij twee verschillende leerkrachten/collega's gebruikte oefen opdrachten. Neem deze mee naar de volgende bijeenkomst.

2. Stel een lijstje van one-liners op om zo bij je collega's enthousiasme te kweken voor het inzetten van oefenvormen in hun lessen. Zo'n lijstje kan er als volgt uitzien:

   - **Het langetermijngeheugen van de mens is onuitputtelijk.**

   - **Het kortetermijnwerkgeheugen is beperkt (vier à acht feiten zijn mogelijk).**

   - **Begrippen uit het langetermijngeheugen halen is makkelijk.**

   - **Nieuwe begrippen het geheugen inpompen gaat echter zeer moeizaam.**

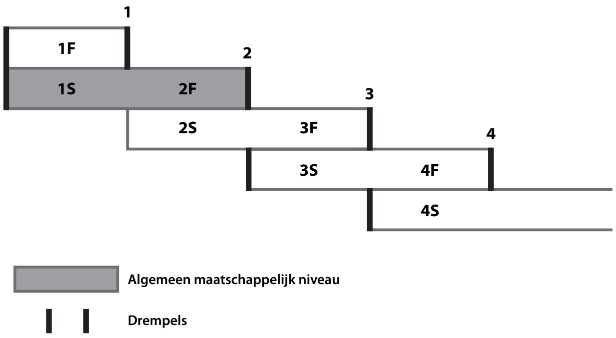
   - **Vandaar: oefenen, oefenen, oefenen!**

Literatuur

Voor het automatiseren van rekenprocedures, het memoriseren van rekenfeiten en het consolideren van een en ander, is regelmatig oefenen onontbeerlijk. Bij het oefenen hangen structurering, automatisering en memorisering sterk samen. Door structuur aan te brengen kan memorisering ontstaan, en door bepaalde gememoriseerde basiskennis en geautomatiseerde basisvaardigheden kunnen weer grotere structuren groeien. Ten behoeve van het inoefenen, consolideren en toepassen van basale rekenvaardigheden en rekenfeiten kunnen verschillende oefenvarianten worden gebruikt, zoals gericht oefenen, speels oefenen en productief oefenen (Treffers & De Moor, 1990; Nelissen, 1990; Treffers e.a., 1989; 1999; Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001; Menne & Veenman, 1997; Menne, 2001; Gelderblom, 2009).

Oefenen 2 - Werkvormen (2)

REFERENTIEKADER



Programma

- Instapprobleem: het multiplicatief vermogen van een getal in werkvorm duo-rekenen
- Bespreking van de huiswerkopdracht via duo-interview
- De zeven basisstrategieën waarmee je elke onderwijssituatie aan kunt
- Toelichting op de werkvorm denken-delen-uitwisselen
- Toelichting op de werkvorm check-in-duo's
- Toelichting huiswerkopdrachten oefenen 3.

Doelen

- Kennis hebben van een viertal werkvormen tijdens een reken-wiskundeles;
- Praktisch werken met twee werkvormen;
- Herhaling van de zeven basisstrategieën

Instapoefening: het multiplicatief uithoudingsvermogen van een getal (= m.u.)

Kies een willekeurig getal en vermenigvuldig de cijfers. Herhaal dit met het resultaat en blijf daarmee doorgaan totdat een getal van precies één cijfer is bereikt.
Het aantal stappen dat nodig is heet het 'Multiplicatief uithoudingsvermogen' van het getal.
(uit Wells,*Woordenboek van Merkwaardige* en *Eigenaardige getallen*)

Voorbeeld: het m.u. van 3216
stap 1: 3 x 2 x 1 x 6 = 36
stap 2: 3 x 6 = 18
stap 3: 1 x 8 = 8
Dus het multiplicatief uithoudingsvermogen van 3216 is 3.

Los nu eerst individueel de volgende opdrachten op:

- Bepaal het m.u. van:
  39 = 77 = 56 = 679 = 63 = 6788 = 23456 = 68889 = 1234567 =
- Wat is het kleinste getal van twee cijfers met multiplicatief uithoudingsvermogen van 1?
- Verzin een getal van 8 cijfers met m.u. van 1.
- Zoek een getal groter dan 39 met m.u. van 3;

***Nu in tweetallen via de werkvorm* duo -rekenen**
Bespreek in tweetallen de gemaakte opdrachten, vervolgens wordt onder leiding van de docent kort plenair met alle tweetallen teruggeblikt:

- A lost de sommen op en B probeert nu vanuit zijn observatie zicht te krijgen hoe A het gedaan heeft. Hij overlegt met A dan zijn idee. (B moet er dus achter komen hoe A het gedaan heeft);
- Korte nabespreking (plenair) met alle B's.

Bespreking stageopdracht van de eerste bijeenkomst via een werkvorm
De stageopdracht vanuit de vorige bijeenkomst 'oefenen' luidde:
Inventariseer op je (stage)- school bij twee verschillende leerkrachten / collega's gebruikte oefenopdrachten. Neem deze mee naar de volgende bijeenkomst.

***Bespreek in tweetallen deze inventarisaties via de werkvorm* duo- interview**
A vertelt aan B;
B vertelt aan A;
Plenair worden nu kort de resultaten van de stageopdrachten verteld, maar A vertelt wat B verteld heeft en omgekeerd.

Zeven basisstrategieën (theoretisch kader)

Directe instructie - vragen stellen - onderwijsleergesprek - zelfstandig werken -samenwerkend leren - vragend helpen - een verhaal vertellen.

Bovenstaande opsomming noemt zeven basisstrategieën waarmee je vrijwel elke onderwijssituatie aankunt. Het zijn strategieën; dat wil zeggen dat er meer achter zit dan een simpel techniekje. Allemaal vragen ze om gericht mee te oefenen om ze je eigen te maken. Ze worden hieronder in vogelvlucht besproken en door de docent kort toegelicht. In de boeken van Ebbens (APS) e.a. komen ze met achtergronden uitgebreid aan de orde.

Directe instructie
Directe instructie is de lesopbouw gericht op kennisoverdracht. Het is een soort basismodel voor lessen ontwikkeld door Madelon Hunter. Het omvat:
- Start: met aandacht richten op doelen
- Instructie: de introductie van de nieuwe lesstof
- Check: controle of de instructie is overgekomen
- Zelf/samenwerken: geleid oefenen met de nieuwe stof
- Afronden: heeft iedereen de lesdoelen gehaald.

Vragen stellen
In de klas worden in elke les talloze vragen gesteld. De techniek van het vragen stellen zodat iedereen zichtbaar betrokken is, is wezenlijk voor het effectief leren in de klas van alle leerlingen. Vragen behoren zo te zijn dat:
- iedereen nadenkt en daarvoor tijd heeft
- iedereen een antwoord heeft
- er denktijd is
- leerlingen risico's durven te nemen.

Bron
Zie voor verdere verdieping onder de Kennisbank wiskunde/rekenen **Werkvormen- Vragen stellen**.

Onderwijsleergesprek
Dit is misschien wel de lastigste strategie om in de klas vorm te geven. Hoe laatje dertig beweeglijke leerlingen tegelijkertijd gericht over een onderwerp nadenken? Daarvoor is onder andere nodig:
- goed voorbereide vragen
- antwoorden kunnen doorspelen naar klasgenoten
- heel goed weten wat je ermee wilt
- de rode draad vasthouden
- meedenken met de gedachten van leerlingen.

Bron
Zie voor verdere verdieping onder de Kennisbank wiskunde/rekenen **Werkvormen- Onderwijsleergesprek**.

Zelfstandig werken
Onder zelfstandig werken verstaan we dat leerlingen, los van de docent, tenminste circa twintig minuten zelf aan het werk kunnen zijn zonder doorlopend steun of controle van de docent nodig te hebben.
Een vorm van uitgestelde aandacht. Om dat te kunnen moeten leerlingen weten:
- wat ze moeten doen
- hoe ze dat moeten doen
- waar hulp verkrijgbaar is
- hoeveel tijd ze er voor hebben
- wat er met het resultaat gaat gebeuren
- wat ze moeten doen als ze klaar zijn.

Samenwerkend leren
Dat is iets anders dan groepswerk. Heel vaak wordt in de klas gezegd 'je mag' of 'je moet' het samen doen. Samenwerkend leren gaat verder. Het is een strategie die leerdoelgericht samenwerken structureert zodat:
- iedereen in de groep meedoet
- iedereen aangesproken kan worden op de leerdoelen
- er interactie plaatsvindt
- er sprake is van gericht werken aan sociale vaardigheden.

Bron
Verdere informatie bij de kennisbank Wiskunde/rekenen onder het zoekwoord op “Samenwerkend leren”.

Vragend helpen
De hulpstrategie die meer op coachen lijkt. Helpen met vragen in plaats van antwoorden betekent:
- helder inzicht in denkstappen verstopt in de leerstof
- de leerling laten denken in plaats van jezelf
- de leerling laten praten in plaats van jezelf
- alleen hoogstnodige informatie kernachtig weergeven.

Bron
Zie voor verdere verdieping onder de Kennisbank wiskunde/rekenen **Begeleiden van leerlingen - de kunst van het vragen stellen.**

Een verhaal vertellen
Vertellen is waarschijnlijk de oudste en meest gebruikte onderwijsstrategie. Met een goed verhaal is niets mis. Goede verhalen zetten mensen aan het denken, geven beelden, raken je en blijven lang hangen.
Maar let daarbij wel op de volgende punten:
- maak het niet te lang
- vertel beeldend en varieer je stem
- denk aan een goede opbouw en gebruik korte directe zinnen.

Er volgt een korte toelichting door de docent op bovenstaande zeven onderwijsvormen.
Als voorbereiding voor de volgende bijeenkomst van de werkvormen:
denken-delen-uitwisselen en check in duo's,volgt nu een toelichting door de docent.

Werkvorm: denken-delen-uitwisselen

- De docent stelt een vraag aan alle cursisten.
- De cursisten krijgen de tijd om (in stilte) over die vraag na te denken (*Denken*).
- Vervolgens bespreken de cursisten, in tweetallen, hun antwoorden (*Delen*).
- De docent vraagt willekeurig enkele cursisten naar hun antwoord (*Uitwisselen*).

Werkvorm: Check in duo's

Structuur

Individueel

De docent zorgt ervoor dat elke leerling eerst individueel aan de opgaven werkt. Dit kan dus ook het huiswerk zijn. Er vindt pas uitwisseling plaats als beide leerlingen van een duo de opdracht(en) af hebben.

Check in duo's
Elke leerling vergelijkt de eigen uitkomsten of antwoorden met die van een medeleerling. Aangezien er maar één goed antwoord mogelijk is, moeten de leerlingen het eens worden. Bij verschillende antwoorden moeten ze elkaar uitleggen hoe ze aan hun antwoord gekomen zijn, waar ze het antwoord gevonden hebben.

Check met ander duo
Eventueel worden de antwoorden nog een keer vergeleken met die van een ander duo. Ook hier gaat het weer om de bespreking van onderling verschillende antwoorden.

Check in de klas
De docent gaat na over welke opgave(n) verschillende antwoorden blijven bestaan en bespreekt deze met de klas. Eventueel volgt een opsomming van alle juiste antwoorden. Na verloop van tijd zal deze 'service' afgebouwd kunnen worden, omdat zowel docent als de leerling er op vertrouwen dat het nakijken in duo's goed is verlopen. De docent loopt in geval van twijfel een controlerondje door de klas.

Toelichting
De werkvorm check in duo's is vooral geschikt als je snel en efficiënt de antwoorden wilt checken op vragen waarop maar één antwoord het juiste is. Dit kan bijvoorbeeld het geval zijn bij het maken van oefensommen, bij meerkeuzevragen of spelling- en grammaticaopdrachten.

De werkvorm is geschikt voor langere en voor kortere opdrachten die vooral gericht zijn op beheersing van de stof. (Voor vragen en opdrachten die vooral gericht zijn op inzicht zijn andere werkvormen meer geschikt).

Bij het nakijken van (huiswerk)opdrachten kan het gebruik van de werkvorm effectief zijn. De docent hoeft niet alle opdrachten meer te bespreken. De uitleg kan beperkt worden tot die antwoorden waarover verschil van inzicht blijft bestaan.

Voorbeeld
Controleer in tweetallen de huiswerkopgaven. Als je verschillende antwoorden hebt, leg je elkaar om beurten uit hoe je aan je antwoord gekomen bent en/of waar je jouw antwoord gevonden hebt. Er kan maar een antwoord goed zijn. Kom je er samen niet uit, dan mag je na een teken van mij deze opgaven bespreken met het duo dat achter je zit. De vragen waar jullie dan nog niet uitkomen zullen we naderhand met z'n allen bespreken.

Praktijkopdrachten ‘oefenen’

1. Hanteer bij jouw eerstvolgende reken-wiskundeles een werkvorm waarmee je vandaag in de cursus geoefend hebt. Vraag een collega en/of coach om feedback en regel dat er een kort video-opname van gemaakt kan worden. Neem de feedback, jouw eigen reflectie en de opname mee naar de volgende bijeenkomst oefenen.

2. Je maakt voor jouw school een eerste aanzet van een rekenbeleidsplan. Heb je in je beleidsplan opgenomen hoe je het oefenen gaat neerzetten? Denk er ook aan hoe jij je reken-wiskundecollega’s gaat instrueren en eventueel coachen. Neem deze aspecten mee naar de volgende zorgbijeenkomst.

3. In bijlage drie is een lijst opgenomen met stellingen over ‘leren’. Kies een willekeurige (geen reken-wiskunde) collega uit en vraag of deze de lijst wilt beoordelen. Onafhankelijk van deze collega vul jij de lijst ook in en neem de resultaten mee naar de volgende bijeenkomst ‘oefenen’.

4. Maak het Bartjens Rekendictee 2009 en laat een collega dit ook maken.

Bijlage 1

Toelichting op de werkvorm denken-delen-uitwisselen
Deze werkvorm kan op veel plaatsen in de les gebruikt worden waar je normaal met traditionele vraagtechnieken zou werken.

De werkvorm denken-delen-uitwisselen is vooral geschikt voor opdrachten waarvoor verschillende antwoorden goed zijn of waarvoor de antwoorden elkaar aanvullen.

Zo kan deze werkvorm goed gebruikt worden om voorkennis te activeren. Essentieel is dat leerlingen tijd krijgen om eerst zelf na te denken over de gestelde vraag. Voor eenvoudige denkvragen is tenminste tien seconden denktijd nodig. Het formuleren van doordachte antwoorden vraagt al snel enkele minuten. Laat het opschrijven, dat helpt de aandacht te richten.

Na een teken van de docent kunnen de leerlingen hun antwoorden meedelen aan hun buurman of buurvrouw. Soms is het nodig dat de docent dit structureert door eerst alle 'raamkantleerlingen' hun antwoord te laten mededelen en daarna alle 'deurkantleerlingen'. De docent zou in het begin zelf het moment van wisselen kunnen aangeven.

Na de bespreking in tweetallen vraagt de docent willekeurig aan leerlingen naar hun antwoord. Daarbij kunnen ook steeds andere leerlingen worden uitgenodigd om te reageren. Hierdoor kan de uitwisseling het karakter van een leergesprek krijgen.

De werkvorm denken-delen-uitwisselen creëert in de lessen de ruimte tot denken, maakt het denken van de leerlingen 'zichtbaar' en vergroot de individuele aanspreekbaarheid.

Voorbeeld
Ik heb een vraag. Schrijf voor jezelf het antwoord op. Je hebt daar twee minuten voor. Niet met elkaar overleggen, tot ik een seintje geef. Als ik een seintje geef vertel je aan je buurman of -vrouw welk antwoord jij opgeschreven hebt. Luister goed naar elkaar, misschien word je op een idee gebracht. Je mag je eigen antwoord nog veranderen. Tenslotte zal ik een paar leerlingen vragen naar hun antwoord. De vraag luidt....

Bijlage 2

Toelichting op de werkvorm check in duo's
De werkvorm check in duo's is met name geschikt als je snel en efficiënt de antwoorden wilt checken op vragen waarop maar één antwoord het juiste is. Dit kan bijvoorbeeld het geval zijn bij het maken van oefensommen, bij meerkeuzevragen of spelling- en grammaticaopdrachten.
De werkvorm is geschikt voor langere en voor kortere opdrachten die vooral gericht zijn op beheersing van de stof. Voor vragen en opdrachten die vooral gericht zijn op inzicht zijn andere werkvormen meer geschikt.
Bij het nakijken van (huiswerk)opdrachten kan het gebruik van de werkvorm effectief zijn. De docent hoeft niet meer alle opdrachten te bespreken; de uitleg kan beperkt worden tot die antwoorden waarover verschil van inzicht blijft bestaan.

Voorbeeld
Controleer in tweetallen de huiswerkopgaven. Als je verschillende antwoorden hebt, leg je elkaar om beurten uit hoe je aan je antwoord gekomen bent en/of waar je jouw antwoord gevonden hebt. Er kan maar één antwoord goed zijn. Kom je er samen niet uit, dan mag je na een teken van mij deze opgaven bespreken met het duo dat achter je zit. De vragen waar jullie dan nog niet uitkomen zullen we naderhand met z'n allen bespreken.

Bijlage 3

Leren is...

1. **Waar of niet waar?**
   Je hersenen werken als een soort kluis. Wat er eenmaal in zit gaat er nooit meer uit.

2. **Waar of niet waar?**
   Als je iets 24 uur nadat je het geleerd hebt nog weet, is dat een aanwijzing dat het goed is opgeslagen in je langetermijngeheugen.

3. **Waar of niet waar?**
   Tien is een goed getal om aan te houden als je informatie aanbiedt. De meeste mensen kunnen tien blokjes informatie goed overzien.

4. **Waar of niet waar?**
   De werking van de hersenen laat zich goed vergelijken met de werking van een computer.

5. **Waar of niet waar?**
   Je wordt geboren met de hersenen waarmee je het moet doen. Er vindt nauwelijks meer verandering plaats.

6. **Waar of niet waar?**
   Luisteren en lezen zijn twee effectieve leermethoden.

7. **Waar of niet waar?**
   Kennis is niet over te dragen.

8. **Waar of niet waar?**
   Emoties zijn de sterkste remmer en stimulans van het leren.

9. **Waar of niet waar?**
   Tachtig procent van het voor het proefwerk geleerde, belandt met het proefwerk in de prullenbak.

10. **Waar of niet waar?**
    De eerste tien minuten van de les zijn het meest effectief voor het leren.

bron APS - met toestemming

Bijlage 4

Het rekendictee - 2009

1. **Mexicaanse griep**
   Als 24 artsen in 20 uur 5000 mensen kunnen inenten tegen de Mexicaanse griep, hoeveel tijd hebben dan 30 artsen nodig om 12.500 mensen in te enten?

   40 uur

2. **Alcohol en politiek**
   Hero Brinkman vult een vat met 100 liter wijn, gedeeltelijk met wijn van 2 euro per liter en gedeeltelijk met wijn van 3 euro per liter. De wijn heeft een totale waarde van 230 euro. Hoeveel liter wijn van 3 euro per liter zit er in het vat?

   30 liter

3. **Doodskist**
   Een kartonnen doodskist met een oppervlakte van 9 m^2 kost € 24,96 aan karton. Goochelaar Hans Klok wil later begraven worden in een kartonnen kubus en slechts € 4,16 aan karton uitgeven.
   Hoe lang zijn de ribben van deze kubus in centimeters? (Laat plakranden buiten beschouwing)

   50 cm

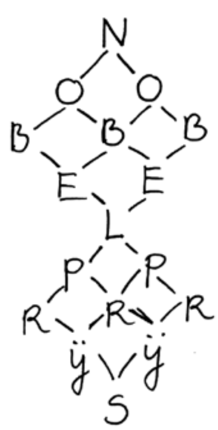
4. **Vrijdag de dertiende**
   Vorige week - 13 november 2009 - was het vrijdag de dertiende. Wanneer was het de voorlaatste keer dat het vrijdag de dertiende was? Noteer het nummer van de maand.

   3

5. **Minister Donner**
   Minister Donner fietst om 8 uur naar zijn werk. Hij rijdt gemiddeld 12 km/uur. Zijn vrouw ziet dat hij zijn broodtrommel vergeten is en brengt hem in de auto de trommel na. Ze vertrekt om 8.20 uur.
   Als ze hem heeft ingehaald, geeft ze de trommel en keert zonder tijdverlies weer om. Om 8.30 uur is ze weer thuis. Hoe hard reed ze gemiddeld?

   60 kilometer per uur

6. **Nobelprijs voor Obama**
   Obama belt zijn Michelle dat hij de Nobelprijs heeft gewonnen. Ondertussen schrijft hij bijgaand letterschema op zijn kladblok. Op hoeveel verschillende manieren kan hij het woord NOBELPRYS hierin lezen?



   36 manieren

7. Kaal
Hoeveel is 256 x 257 groter dan 255 x 258?

2

8. Sterren
In de Amerikaanse vlag staan 50 sterren. Die zijn geordend in horizontale rijen van twee lengtes: afwisselend een lange en een korte rij. De twee lengtes verschillen slechts 1 ster. De bovenste en de onderste rij zijn beide 'lang'. Het aantal lange rijen is 1 minder dan het aantal sterren in een lange rij. Hoeveel rijen zijn er?

9 rijen

9. Olympische winterspelen
Mark Tuitert rijdt de 500 meter in pakweg 35 sec., Marianne Timmer doet er afgerond 40 sec. over. Hoeveel meter voorsprong moet Mark aan Marianne geven zodat ze gelijk kunnen starten en ook gelijk kunnen finishen? Rond je antwoord af in hele meters.

63 meter

10. Het klimaat
Beau van Erven Dorens en Winston Gerschtanowitz delen 323 led-lampen uit in een supermarkt. Ze moeten ze eerlijk verdelen onder de aanwezigen. Iedereen krijgt meer dan 1 lamp. Ze houden 18 lampen over. Hoeveel mensen waren er?

61 mensen

11. Mozambique
Maurice de Hondt heeft 104 mensen naar hun mening gevraagd over het vakantieressort van Prins Willem-Alexander in Mozambique. Eén-zevende deel van de mannen en één-achtste deel van de vrouwen was voor de bouw van de villa. Hoeveel mannen zijn er ondervraagd?

56 mannen

12. Burgemeester
Ex-burgemeester Vreeman van Tilburg schrijft 8 sollicitatiebrieven en adresseert de enveloppen. Helaas stopt zijn secretaresse de brieven lukraak in de enveloppen. Hoe groot is de kans (uitgedrukt in procenten) dat er precies 7 brieven in de juiste envelop komen? Tel hier √1 bij op.

8 procent

13. Verliefd
Wesley is stapel op Yolanthe. Bij de juwelier liggen zes sieraden die respectievelijk €21, €23, €25, €27, €31 en €34 kosten. De 1e week koopt Wesley hiervan voor een 2x zo groot bedrag als de 2e week. Na 2 weken heeft hij één sieraad nog niet gekocht. Hoe duur is dat sieraad?

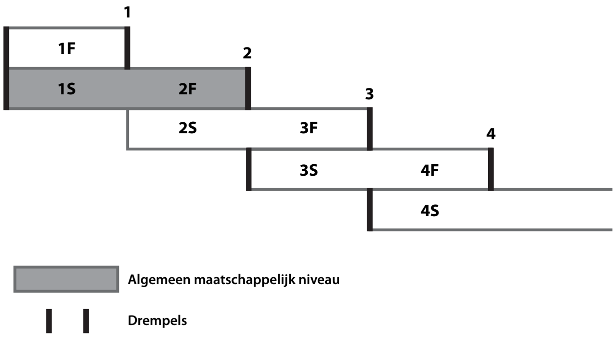
€23,-

14. K3
De leeftijd van K3:
Josje Huisman is 23 jaar.
Karen Damen is 35 jaar.
Kristel Verbeke is 33 jaar.
Hoeveel jaar geleden waren de leeftijden van Josje en Karen samen anderhalf keer de leeftijd van Kristel?

1*7 jaar geleden*

Oefenen 3 - Inoefenen en het rekenbeleidsplan

REFERENTIEKADER



Programma

- Instapprobleem: stappenplan bij een wiskundeprobleem
- Bespreking van de huiswerkopdracht over de stellingen die gaan over 'leren"
- Bespreking van de verschillende videofragmenten van opgenomen lessen over 'inoefenen'
- Bespreking in groepjes van de verschillende onderdelen uit het rekenbeleidsplan

Doelen

- Mogelijkheden onderzoeken van de bruikbaarheid van een stappenplan bij het oplossen van een wiskundig probleem
- Bewustwording over verschillende visies over 'leren'
- Elkaars les bekijken en van positieve feedback verzorgen
- Werken aan rekenbeleidsplan

Instapprobleem: (bron Wiskunde olympiade 2009)

Bram heeft muntjes van 5 cent, 10 cent, 20 cent en 50 cent, van elk minstens één.
In totaal heeft hij 9 muntjes en samen zijn ze € 2,10 waard.
Hoeveel muntjes van 20 cent heeft hij?

Een oplossing via 'trial and error' is voor een aantal leerlingen mogelijk, maar het gaat er bij het oplossen van dit soort problemen vooral om dat de leerling een stappenplan gaat gebruiken.
De aardigheid in het oplossen komt juist bij de leerling als het niet via 'proberen' opgelost wordt maar via denkkracht.

Probeer samen met een andere cursist een stappenplan op te stellen.
De eerste twee stappen zouden kunnen zijn:

Stap 1
Maak een soort schema (visualisatie) van het probleem en probeer alvast iets met willekeurig gekozen getallen ….. (tabel met 5 kolommen zou hierbij kunnen: 4 voor de muntsoorten en een voor het totaalbedrag)

Stap 2
Is het mogelijk om het probleem eenvoudiger te maken? Dat lukt hier wel, want er staat dat er minstens van elk soort één aanwezig is. Dus minimaal één muntstuk van 5 cent, minimaal één van 10 cent, enzovoort. Het probleem wordt nu na deze transformatie:
Bram heeft 5 muntstukjes enzovoort……….

Maak jullie stappenplan verder af; de docent zal na afloop de verschillende stappenplannen bespreken.

Inventarisatie van de resultaten over de stellingen over het 'leren' (plenair)

(zie nogmaals de stellingen op volgende pagina)
Is het zo dat de gekozen antwoorden door de verschillende collega's afhangen van het vak wat zij geven?

Leren is...

1. **Waar of niet waar?**
   Je hersenen werken als een soort kluis. Wat er eenmaal in zit gaat er nooit meer uit.

2. **Waar of niet waar?**
   Als je iets 24 uur nadat je het geleerd hebt nog weet, is dat een aanwijzing dat het goed is opgeslagen in je lange termijn geheugen.

3. **Waar of niet waar?**
   Tien is een goed getal om aan te houden als je informatie aanbiedt. De meeste mensen kunnen tien blokjes informatie goed overzien.

4. **Waar of niet waar?**
   De werking van de hersenen laat zich goed vergelijken met de werking van een computer.

5. **Waar of niet waar?**
   Je wordt geboren met de hersenen waarmee je het moet doen. Er vindt nauwelijks meer verandering plaats.

6. **Waar of niet waar?**
   Luisteren en lezen zijn twee effectieve leermethoden.

7. **Waar of niet waar?**
   Kennis is niet over te dragen.

8. **Waar of niet waar?**
   Emoties zijn de sterkste remmer en stimulans van het leren.

9. **Waar of niet waar?**
   Tachtig procent van het voor het proefwerk geleerde, belandt met het proefwerk in de prullenbak.

10. **Waar of niet waar?**
    De eerste tien minuten van de les zijn het meest effectief voor het leren.

Elkaars reken-wiskunde lessen (opgenomen lessen) bekijken en via een kijkwijzer beoordelen

Uitwisseling van de verschillende rekenbeleidsplannen in kleine groepjes: hoever ben je al?

Waarschijnlijk is op je school besloten om iets aan het rekenen te gaan doen.

De kans is dan groot dat jij de kartrekker bent. Om een rekenplan op te stellen zul je dat in ieder geval samen met andere collega's en directieleden van je school moeten doen. Het rekenplan zal een breed gedragen plan gaan worden.

Het is verstandig om een werkgroepje rekenen te gaan formeren (denk aan een klein groepje van drie tot vijf personen). Of het alleen wiskundedocenten of ook docenten van andere vakgroepen zijn, is jouw keuze. Denk daar eerst over na.
Voor het goed kunnen functioneren van deze werkgroep is het belangrijk de plaats en status van de werkgroep rekenen helder te hebben en met anderen te communiceren. Creëer een breed draagvlak.

Eventueel kun je na verloop van tijd een klankbordgroepje van collega's formeren. Dit groepje kan bestaan uit collega's van alle vakgroepen.

Bedenk voor de volgende bijeenkomst jouw eerste stappen van je rekenplan en hoe breed deze wordt. Stel een checklist op die gebruikt kan worden bij het ontwikkelen van een rekenbeleidsplan op jouw school. Neem dan ook mee welke publicaties belangrijk zijn voor jou voor het maken van dit plan. Denk ook aan de instroom (gesprekken met bovenbouw basisschool) en uitstroom (coördinator van een mbo-opleiding).

Bestudeer de stappen uit Logical Framework Approach.

Huiswerk
Zie bijlage 1. Vul eerst zelf deze lijst in. Kun je nog een tiende (sterk) idee toevoegen?

Neem een collega in gedachten - die je goed kent - en vul de lijst ook voor hem of haar in.
Laat dan ook deze lijst door die collega invullen.

Neem de lijst mee naar de volgende bijeenkomst.

Bijlage 1

Welke van negen onderstaande ideeën passen het best bij jouw stijl van lesgeven?

1. **Het gaat niet om de voortgang, maar om de vooruitgang.**
   Opvallend veel (geobserveerde) lessen kennen het patroon: 'Waar waren we? Bij 12? Dan gaan we verder bij 13. Pieter, lees jij eens de vraag voor'. In zo'n les kan de leerling niet anders dan de docent volgen (of lastig worden), want waar het dit uur naar toe moet is veel leerlingen niet helder.
   Jouw tekst: "Als dit uur straks de moeite waard is geweest hebben we voorUITgang geboekt. Ik beoog dat jullie aan het eind van dit uur meer weten van/beter zijn in ... en dat doen we door eerst... en dan ...".

2. **Een goed frontaal verhaal moet, en kan zelfs nog aan kracht winnen...**
   De goede, bevlogen verhalen waarbij de klas geboeid luistert mogen niet uit het onderwijs verdwijnen. Een goed verhaal mag lang duren. En de kracht van het betoog neemt toe als je leerlingen ertoe zet het verhaal nog in de les, en dus in jouw aanwezigheid, te verwerken.
   Jouw tekst: "Ik vertel jullie zo een verhaal/ik leg jullie zo iets uit. Terwijl ik praat maak je aantekeningen (tekst, pijlenschema's, matrices) en als ik klaar ben krijg je vijf minuten om in volledige stilte je aantekeningen tot een kernachtig betoogje om te vormen. Schrijf leesbaar, want ik loop rond en wil over je schouder kunnen lezen wat er in je hoofd gebeurt. Daarna laat ik één of twee leerlingen de kern van mijn betoog/verhaal in eigen woorden presenteren".

3. **Stilte moet.**
Sommige leerlingen kunnen met muziek aan denken, sommigen als er gefluisterd wordt, maar de meeste leerlingen zeggen dat ze voor echt- nadenken stilte nodig hebben. Jouw tekst: "Jongelui, jullie gaan de komende vijftien minuten opdrachten maken. De eerste acht minuten wil ik niemand horen - en ik zal ook doodstil zijn - en de volgende zeven minuten mag je overleggen met je buurman. Ik geef aan wanneer er acht minuten voorbij zijn".

4. **Herhaal een vraag van een leerling niet.**
Leerlingen raken eraan gewend dat de docent de vraag van een medeleerling wel herhaalt. Anticipeer op een vinger door zo ver mogelijk van de leerling weg te lopen waardoor hij wel harder, duidelijker zal moeten praten. Als een leerling de vraag niet (goed) gehoord heeft is nog een mogelijkheid: "Wil je de vraag even herhalen want hij heeft het niet verstaan". Maar als duidelijk is dat het niet-verstaan niet aan de vragensteller lag, maar aan een slecht luisterende medeleerling is dit niet aan de orde.

5. **Laat leerlingen zichzelf bij SO's en proefwerken beoordelen.**
Zet bij een SO of proefwerk hoeveel punten voor iedere vraag te behalen zijn en geef aan het eind de leerlingen de opdracht hun eindcijfer te schatten door zichzelf vraag voor vraag te beoordelen. Wijkt het cijfer van de leerling maximaal een half punt af van het cijfer van de docent, dan krijgt de leerling er een vol punt bij. Niet gratis, maar voor de vaardigheid 'inschatten hoe goed ik ben' en deze vaardigheid - reflecteren - is van groot belang voor de ontwikkeling van iedere lerende.

   In een vmbo2-klas kregen in september vier leerlingen er een punt bij. Bij de eindtoets in juni kreeg bijna de helft er een punt bij, terwijl bij de anderen het verschil tussen hun en het cijfer van de docent veel kleiner was geworden dan in het begin van het jaar.

6. **Werkwijzers kennen keuzevrijheden.**
Een dichtgetimmerde werkwijzer is als een montageinstructie: 'doe dit, doe dan dat, doe dan zus en vervolgens zo en u houdt een bureautje over'. Het zet niet aan tot zelf denken maar tot volgend onderwijs. Het motiveert zelden: veel leerlingen laten de werkwijzer in hun tas zitten. Ze hebben er niets mee. Het heeft dan ook weinig met zelfstandig leren te maken. In een werkwijzer die beoogt bij te dragen aan het ontwikkelen van zelfstandigheid horen - bij onderwerpen waar dat mogelijk is - keuzemogelijkheden. Die kunnen te maken hebben met de inhoud, de wijze van aanpak en de vorm van het eindproduct. Dit kan bijvoorbeeld een spreekbeurt, een posterpresentatie, PowerPoint-presentatie, een werkstuk of een dossier zijn. Een zelfstandige is pas zelfstandig als hij keuzes mag maken. "Ik zet jullie zo zelfstandig aan het werk met 4 t/m 9", is taalkundig maar ook onderwijskundig gezien onzin.

7. **Spiekbriefje toegestaan bij proefwerken (niet bij reproductiegerichte andere toetsen).**
Surveilleren tijdens een toets, kijken of er geen boeken 'handig' liggen, of er spiekbriefjes zijn, of er illegaal overleg is, hoort bij ons werk. Maar als leerlingen een spiekbriefje maken gebruiken ze het nauwelijks, want een goede samenvatting maken = leren. Idee: Sta leerlingen toe een spiekbriefje van het formaat 10 x 10 cm te gebruiken. Maak een toets met nadruk op begrips- en toepassingsvragen (Hogere Orde Denken), aangezien dat productief denken bevordert. Vraag bij het teruggeven van de toets welke rol het spiekbriefje heeft gespeeld.

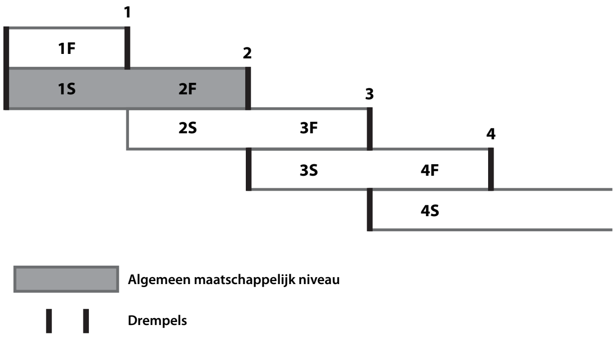
8. **Reageer niet op vingers; dat noemen we uitgestelde aandacht.**
Leerlingen hebben, als ze aan het werk zijn, de neiging snel te zijn met het opsteken van een vinger. Ze willen vaak graag vlot bediend worden en als het te lang duurt kijken ze soms heel narrig. Van denklui gemaakte (?) leerlingen wordt niemand beter.
Jouw tekst: "Als je iets niet begrijpt, benut je eerst je tafelgenoten/buurman. Ik loop rond en je mag mij pas wat vragen als ik binnen een meter van je verwijderd ben. Tot die tijd werk je gewoon door en ga je niet zitten wachten. Het is mogelijk dat ik je doorstuur naar een medeleerling, aan wie ik de aanpak van jouw probleem al heb uitgelegd". De ervaring leert dat veel problemen verdwenen zijn tegen de tijd dat je in de buurt komt.

9. **Bovenbouwers kijken toetsen van onderbouwers na**.
Veel docenten worden niet vrolijk van nakijken. Reproductiegerichte onderbouwtoetsen zijn goed na te kijken door bovenbouwleerlingen. Koppel daarbij een bepaalde bovenbouwgroep aan een onderbouwklas. Voordelen: de bovenbouwleerlingen herhalen op een geactiveerde manier stof die ze eigenlijk behoren te kennen ("Is dit nou wel goed, even overleggen"), voor de onderbouwers krijgen de bovenbouwers een gezicht (zeker als de bb'er z'n naam eronder moet zetten), de docent heeft minder nakijkwerk maar zal wel enkele leerlingen te woord moeten staan die vinden dat iets onterecht is fout gerekend. Vooral voor talendocenten biedt deze aanpak verlichting.

10. **Aan collega's weg te geven idee:**

Oefenen 4 - Bronnen

REFERENTIEKADER



Inleiding

Deze bijeenkomst gaat over oefenen gericht op bronnen. Er zijn veel bronnen waaruit je kan putten om je rekenlessen vorm te geven. De vraag is: hoe en wanneer gebruik ik nu bronnen?

Na deze bijeenkomst kan de student

Materiaal uit verschillende bronnen benutten om een reken-wiskundeles te verbreden en verdiepen.

Programma bijeenkomst

- Bekijken van verschillende reken-wiskundetijdschriften
- Bekijken van verschillende digitale bronnen.
- Verschillen in het onderwijs

Instapprobleem

We maken met elkaar een inventarisatie van de verschillende bronnen die er op het gebied van rekenen-wiskunde zijn. We maken een mindmap waarbij we ook aangeven waar je de verschillende bronnen voor gebruikt.

Doelen

Studenten kunnen een les vormgeven door middel van het gebruik verschillende bronnen.
Bronnen

Tijdschriften

We bekijken verschillende reken-wiskundetijdschriften. Onder andere: Volgens Bartjens, Panama-Post, Euclides.
In groepen gaan jullie de verschillende tijdschriften bekijken. Beantwoord daarbij de volgende vragen:
- Zie je geschikte materialen?
- Welke tijdschriften gebruik je nu al en waarom?

Digitale bronnen

We bekijken met elkaar Wikiwijs en de Kennisbanken Rekenen en Wiskunde

Rapporten en onderzoeken

Er zijn verschillende onderzoeken die ‘iets’ over het reken-wiskundeonderwijs zeggen.
We bespreken de verschillende rapporten:
TIMMS, PPON en KNAW.
Bekijk de meest recente onderzoeken. Schrijf hierover een reflectie voor je portfolio.

Effectief omgaan met verschillen in het onderwijs

We bespreken het lesmodel gebaseerd op convergente differentiatie en verlengde instructie uit het boek “Effectief omgaan met rekenproblemen” van Gert Gelderblom.

Automatiseringsoefening 5 minuten	
Groepsinstructie 15 minuten	
Zelfstandig werken 15 minuten	**Verlengde instructie +** **Begeleide verwerking** 15 minuten
Servicerondje 10 minuten	**Zelfstandig werken** 10 minuten
Zelfstandig werken **Feedback** 10 minuten	
Afsluiting 5 minuten	

Opdracht

In tweetallen ga je een les vormgeven met behulp van een artikel én een digitale bron. Deze les geef je vorm door middel van het lesmodel gebaseerd op convergente differentiatie en verlengde instructie.
Deze les voer je op je school uit. Neem je gegeven les inclusief reflectie mee naar de volgende les.
De volgende vragen komen in de reflectie aan bod:

- Wat is het positieve aspect aan ons ontwerp?
- Wat is het negatieve aspect aan ons ontwerp?

Voeg deze les aan Wikiwijs toe.

Presentatie

De ontworpen les presenteren jullie aan het eind van de bijeenkomst.

Onderzoekopdracht / thuisopdracht behorende bij deze bijeenkomst

De uit te voeren les en de bijbehorende reflectie daarbij.

Bijlagen

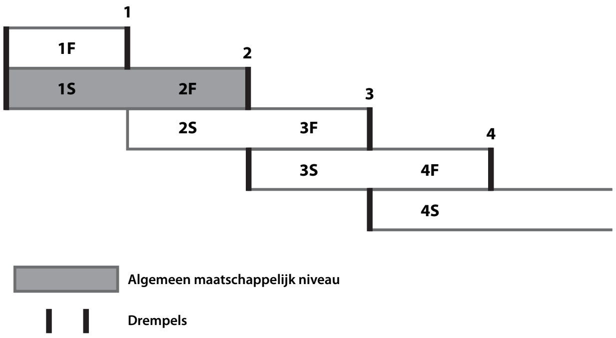
\-

Artikel (en)

\-

Oefenen 5 - Zakrekenmachine (1)

REFERENTIEKADER



Inleiding

Deze bijeenkomst gaat over het gebruik van zakrekenmachines (zrm) in het basis- en voortgezet onderwijs. In twee bijeenkomsten wordt geprobeerd om verschillende mogelijkheden van het gebruik van de zrm in het onderwijs weer te geven. Van groot belang is het vormen van een visie door de leraar op het gebruik van het rekenapparaat in zijn onderwijs.

Programma bijeenkomst

- Instapdiscussie: standpuntbepaling over het gebruik van de zrm
- Practicum: het gebruik van de rekenamchine bij rekenopgaven
- Overzicht van de verschillende functies van het gebruik van de zrm in het onderwijs
- Vanuit de meegebrachte reken-wiskundemethode wordt een inventarisatie gemaakt van opgaven waarbij de zakrekenmachien gebruikt wordt; (mogelijk kan dit onderdeel ook in de volgende bijeenkomst uitgevoerd worden)
- Aanbevelingen voor het gebruik van de zrm in het PO
- Het formuleren (voorlopig) van aanbevelingen voor het gebruik van de zrm in het VO
- Eigen onderzoek naar de voorrangsregels van bewerken bij samengestelde sommen (dit onderdeel krijgt een vervolg in de tweede bijeenkomst)

Instapdiscussie

Het maken van een staartdeling door de leerling kost veel tijd in het basisonderwijs. Daarbij is het maken van delingen in het VO al helemaal verdwenen.

Als een leerling de volgende som correct kan schatten, mag hij bij deze sommen altijd met hulp van de zrm de som uitrekenen. Veel extra instructietijd komt daarvoor vrij.

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} \; ; \; a_3 = \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}} \; ; \; a_4 = \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}}$$

Practicum

1. Maak in dertig seconden zoveel mogelijk sommen. Je mag een rekenmachine gebruiken.

4 x 9 =	10 x 8 =
4 x 50 =	8 x 7 =
2 x 7 =	16 x 15 =
3 x 14 =	9 x 85 =
12 x 12 =	12 x 24 =
56 x 7 =	56 x 14 =
6 x 45 =	0,6 x 4,5 =
3 x 14 =	60 x 7 =
2 + 3 x 4 =	9 - 4 : 2 =
3 x 4 + 5 =	30 - 4 x 5 =
67 x 2 - 2 =	67 - 2 x 2 =

2. Maak de sommen uit het eerste rijtje met behulp van de zrm. De tweede rij moet uit het hoofd.
   Welke regels/eigenschappen gebruik je?

156 x 3 =	157 x 3 =
193 x 5 =	192 x 5 =
186 x 5 =	186 x 15 =
6 x 37 =	12 x 37 =
102 x 102 =	1,02 x 1,02 =

3. Vul de juiste cijfers in. Je mag de rekenmachine gebruiken.
   (• staat voor één cijfer):
   56 x 2 • = 1 • • 8
   3 • x 73 = • 7 0 1
   81 x 2 • = • • 2 0
   • 9 x 23 = 1 5 8 •
   Ontwerp zelf twee opgaven voor je buurman/vrouw.

4. Vul op de plaatsen van de rondjes in: +, -, x of ÷
   Controleer het antwoord met de rekenmachine.
   (17 • 5) • 8 = 77
   (28 • 11) • 17 = 1
   2 • (215 • 17) = 464
   27 • (36 • 18) = 675
   Ontwerp zelf twee opgaven voor je buurman/vrouw.

5. Help, mijn rekenmachine is kapot. De keer-toets werkt niet meer!
   Bereken 124 x 56 door toch je rekenmachine te gebruiken.

6. Het is niet te geloven, nu is ook nog de deel-toets stuk!
   Bereken 345 : 12 op deze rekenmachine.

7. Reken de volgende sommen uit op je zrm en geef het antwoord weer in een streepbreuknotatie:

   $^1/_2 \times {}^1/_2 =$

   $1^1/_2 \times 1^1/_2 =$

   $2^1/_2 \times 2^1/_2 =$

Welk patroon ontdek je in de antwoorden? Ga met de rij door tot $12^1/_2 \times 12^1/_2 =$

Aanbevelingen voor het gebruik van de zrm in het PO

- De rekenmachine zou in groep zes kunnen worden geïntroduceerd, wanneer de basisvaardigheden veilig gesteld zijn.
- Het verdient aanbeveling om instructie te geven aan de totale groep en gebruik te maken van één soort machine.
- Er wordt gestart met eenvoudige activiteiten.
- De rekenmachine wordt niet gebruikt voor het uitrekenen van rijtjes cijferopgaven.
- De nadruk ligt op het opnieuw bewustmaking van de structuur van getallen en de eigenschappen van de bewerkingen.
- Schattend rekenen krijgt veel aandacht.
- Het uiteindelijke doel is dat de leerlingen op den duur een zodanige houding ontwikkelen dat ze zelf kunnen beslissen of ze voor een bepaalde berekening louter uit het hoofd rekenen, een schatting maken al of niet met behulp van de zrm, op papier uitrekenen of een mengvorm toepassen.

Vier verschillende soorten functies bij het werken met de zrm

Als onderzoeksfunctie, als didactische functie, als rekenhulpmiddel en als spelletjes-generator.

Aanbevelingen voor het gebruik van de zrm in het VO

(Maak in tweetallen een lijst van aanbevelingen. Neem deze mee naar de tweede bijeenkomst van de zakrekenmachine).

Onderzoekje over de voorrangregels bij samengestelde sommen (eventueel als thuiswerk voor de volgende bijeenkomst)

1. Bereken zonder rekenmachine: 20 – 6 : 2 x 3 =
   Bereken het nogmaals op je rekenmachientje van je mobiel. Zet je antwoord en merk van je mobieltje op het bord. Verklaar ten slotte de resultaten.
2. Nu voor de opgaven: 10 – 2 x 5 = ; 10 x 12 : 2 x 12 =
3. Formuleer nu zo helder mogelijk hoe de regel voor de verschillende bewerkingen luidt. Het moet in duidelijke leerlingentaal.
4. Kijk bij de Kennisbank Wiskunde de volgende paragraaf: Notaties en volgorde van bewerkingen
   Zijn de voorrangsregels daar correct geformuleerd? Komen ze overeen met wat jij opgeschreven had? In de laatste paragraaf wordt ingegaan op het noteren van een berekening en daar wordt ook een voorbeeld van gegeven.
5. Speel onderstaand spel met gebruikmaking van je rekenmachientje:

Naar de 1

Je speelt dit spel in je eentje met een rekenmachine.
Gooi 3 keer met een dobbelsteen. Noteer de drie worpen naast elkaar in het venster van je rekenmachine.
Zo onstaat een getal van drie cijfers. Met dit getal mag je steeds naar keuze een van de volgende berekeningen uitvoeren:

- 1 optellen (+1)
- 1 aftrekken (-1)
- met 2 vermenigvuldigen (x2)
- door 3 delen (:3)

Probeer in zo weinig mogelijk stappen op 1 uit te komen.

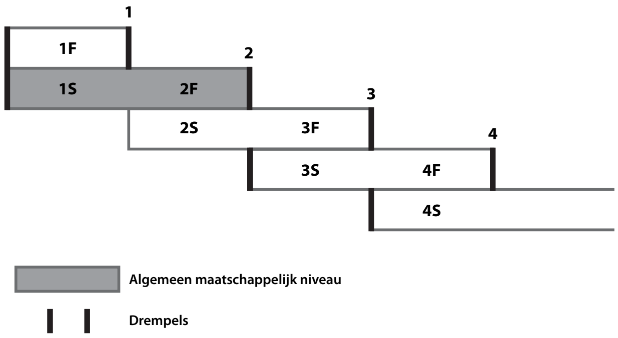
Voorbeeld: je gooit met de dobbelstenen: 3, 1 en 6
Het getal op je rekenmachine wordt: 316
Stap 1: 316 -1 = 315
Stap 2: 315 : 3 = 105
Stap 3: 105 : 3 = 35
Stap 4: 35 + 1 = 36
Stap 5: 36 : 3 = 12
Stap 6: 12 : 3 = 4
Stap 7: 4 - 1 = 3
Stap 8: 3 : 3 = 1

Kan het korter?

Bron: www.volgens-bartjens.nl

Oefenen 6 - Zakrekenmachine (2)

REFERENTIEKADER



Inleiding

Deze bijeenkomst is een vervolg op de eerste bijeenkomst over het gebruik van de zakrekenmachine in het basis- en voortgezet onderwijs.
In de uitwerking van de kerndoelen voor het voortgezet onderwijs en de examenprogramma's voor het voortgezet onderwijs is vastgelegd dat leerlingen de rekenmachine op een verstandige manier moeten kunnen gebruiken bij het oplossen van wiskundige en rekenkundige problemen. In deze bijeenkomst staat vooral het gebruik van dit hulpmiddel in het VO centraal.

Programma bijeenkomst

- Instapdiscussie: standpuntbepaling over het gebruik van de zrm in het VO
- Twee instap-rekenmachine opgaven voor de discussie
- Aanbevelingen voor het gebruik van de zrm in het VO (door de cursisten ingebracht)
- Practicum: opgaven waarbij de zakrekenmachine gebruikt wordt
- Het selectief gebruik van de rekenmachine (plenair)
- Onderzoeksopdracht: het gebruik van de zakrekenmachine in methodes

Instapdiscussie

“ In het voortgezet onderwijs mogen de leerlingen vanaf de eerste les bij alle vakken, en dus ook bij wiskunde, hun rekenmachine gebruiken”

Reageer in tweetallen op deze stelling.

Formuleer een nieuwe stelling waar jullie beiden geheel achter staan.

Twee instapsommen

1. Je mag alleen deze knoppen gebruiken:
   7 = + x :
   Maak nu op je machine het getal 22.
   Ben deed het in tien stappen: 7 : 7 + 7 + 7 + 7 =
   Lies deed het in 8 stappen 77 + 77 : 7 =
   Speel het spel nu zelf. In hoeveel stappen kun jij het?

2. Bereken met je rekenmachine; wat valt op?

- 465 mensen worden in bussen vervoerd,
  in elke bus gaan 52 mensen;
  hoeveel bussen moet je bestellen?
- superlange-afstandsloop: 465 km
  gelopen in 52 uur. Hoeveel km per uur?
- 465 bonbons worden in dozen van 52
  bonbons gedaan. Hoeveel volle dozen?

Aanbevelingen voor het gebruik van de zrm in het VO

- ………
- ……….
- ……….
- enz.

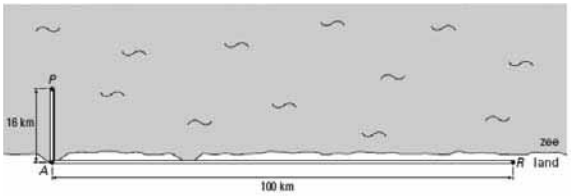
Practicum

1. Op 31-12-2004 had een dorp 3500 inwoners. In 2005 nam het inwoneraantal af met 7 %.
   In 2006 nam het inwoneraantal af met 3 %.
   a) Bereken met een rekenmachine het inwoneraantal op 31-12-2006.
   b) Weet je zeker dat je antwoord goed is? Hoe kun je dat controleren?
   c) Vergelijk met medecursisten de manier waarop je de berekening op de rekenmachine hebt uitgevoerd. Wie heeft het kleinste aantal toetsaanslagen? Kan het met nog minder?
   d) Op welke verschillende manieren is het antwoord te berekenen met de rekenmachine. Welke manier geeft de kleinste kans op fouten?
   e) Het antwoord is ook zonder rekenmachine te berekenen. Heb je dan minder kans op fouten?

2. Maak met behulp van de rekenmachine opgave 25 van het examen vmbo gt 2006

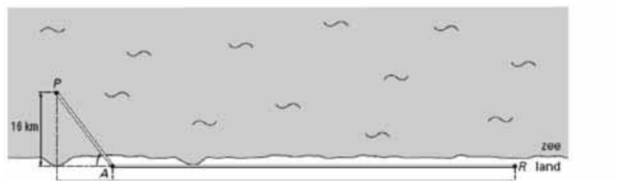
Op een olieplatform wordt naar olie geboord. De olie wordt door een pijpleiding naar de raffinaderij vervoerd. Het aanleggen van een pijpleiding kost veel geld. Een kilometer op het vasteland kost 1,4 miljoen euro en in de zeebodem twee maal zo veel. Het is dus belangrijk om zo weinig mogelijk pijpleiding in zee te leggen.

Onderstaande schematische tekening geeft het bovenaanzicht in een bepaald gebied weer. Men heeft hier zo min mogelijk pijpleiding in de zeebodem gelegd. Punt *P* is hierin het platform en punt *R* is de raffinaderij. De maten in km staan erbij.



Bereken de totale kosten in miljoenen euro voor het leggen van de pijpleiding zoals hierboven getekend. Schrijf je berekening op.

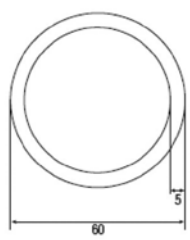
Vanwege de bodemgesteldheid in dit gebied is het raadzaam om het gedeelte van de pijpleiding in zee niet loodrecht op de kustlijn aan te leggen.
Hieronder is de nieuwe situatie getekend. De aangegeven hoek bij *A* moet tussen 50^0 en 60^0 liggen.



Laat met een berekening zien dat iin deze nieuwe situaties de hoek *A* moet tussen 50^0 en 60^0 ligt.

In bovenstaande tekening is de lengte van de pijpleiding op het land 88 km.
Bereken in miljoenen euor de kosten van het gedeelte pijpleiding dat in zee ligt.
Schrijf de berekening op.

Vanwege milieueisen mag er niet meer dan 200.000 liter olie in 1 kilometer pijpleiding zitten.
De pijpleiding staat altijd vol met olie. De pijpleiding heeft een buitendiameter van 60 cm en de wanddikte is 5 cm. Zie onderstaande tekening.



Bereken in hele liters hoeveel olie er in een pijpleiding van 1 km lengte zit.
Schrijf je berekening op.

Besteed aandacht aan de volgende vragen:

a) In de opgave wordt verlangd dat je de berekening opschrijft. Wat zou je opschrijven? Doe je dit voor of nadat je de berekening op de rekenmachine uitgevoerd hebt?
b) Hoe kun je nagaan of je bij het intypen van de berekening fouten hebt gemaakt?
c) Ben je er zeker van dat het antwoord goed is? Hoe kun je dat controleren?
d) Op welke verschillen manieren is het antwoord te berekenen? Welk manier geeft de kleinste kans op fouten?

3. Welke van de volgende beweringen zijn waar, voor elk getal a (behalve voor a = 0)?

$10a \prod 2a = 5$

$10a \prod 2a = 5a$

$10a \prod 2a = 5a^2$

$$\frac{10a}{2a} = 5$$

$$\frac{10a}{2a} = 5a$$

Het selectief gebruik van de rekenmachine (plenair)

Zie hiervoor de paragraaf Selectief gebruik van de rekenmachine in de Kennisbank Wiskunde.
Bij de inleiding kunnen de aandachtspunten in deze paragraaf behandeld worden:

- Praktische problemen
- Onderhoud en uitbreiding van de rekenvaardigheden
- De rekenmachine leren bedienen
- Wanneer zet je de rekenmachine in?
- Noteren van een berekening

Bij de inleiding kan teruggegrepen worden op de ervaringen van studenten met de gemaakte instapsommen.

Onderzoeksopdracht / thuisopdracht behorende bij de rekenmachine-bijeenkomsten

Deze opdracht wordt in tweetallen uitgevoerd. Één student doet de opdracht voor groep 7 en 8 in het PO en de andere student doet de opdracht voor de klas 1 en 2 in het VO.

Analyseer de leerboeken rekenen of wiskunde op de volgende punten

- Waar wordt in het leerboek expliciet aandacht besteed aan de bediening van de rekenmachine?
- Waar verwacht je problemen van leerlingen met de voorrangsregels voor samengestelde berekeningen?
- Waar wordt in het leerboek expliciet aandacht besteed aan het selectief gebruiken van de rekenmachine?
- Bij welke paragrafen of opgaven zou je in de les aandacht willen besteden aan het leren bedienen en het met inzicht gebruiken van de rekenmachine? Hoe?
  Geef hierbij een toelichting en besteed in het bijzonder aandacht aan de vraag hoe je leerlingen leert een berekening te noteren.
- Zoek een opgave - gaande over het gebruik van de zakrekenmachine - die sterk is. En zoek een opgave die duidelijk zwakker is en mogelijkerwijs weggelaten kan worden.

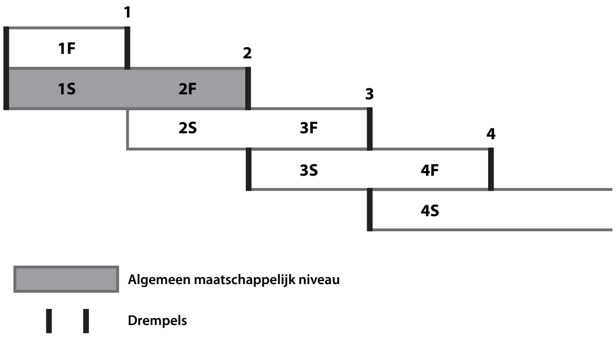
Bronnen

Voor gebruik van de rekenmachine in het VO: Kennisbank Wiskunde, thema **Rekenmachine**.
Voor gebruik van de rekenmachine in het PO: **Kerndoel 31 met voorbeelden in TULE**. Bestudeer daar ook de onderdelen **Doorkijkje, Wat doet de leraar** en **Wat doen de kinderen.**
Een voorbeeld van het gebruik van de rekenmachine in het po in de schoolboeken: Kennisbank Wiskunde, **Uitbreiding vaardigheid rekenmachine.**
Voor het reken in het algemeen in het PO: **Kennisbank Rekenen**.
Voor het rekenen in het algemeen in het VO en het PO: Kennisbank Wiskunde thema **Rekenen in de schoolwiskunde.**

Oefenen 7 - Zorg

Rekenachterstand, -problemen, -stoornis en dyscalculie. Hoogbegaafdheid

REFERENTIEKADER



Inleiding

Deze bijeenkomst gaat over het belangrijke onderscheid tussen achterstand, problemen en stoornis bij rekenen; de discussie en het nieuwe landelijke protocol over dyscalculie komt aan de orde en de studenten gaan met leerlingen met rekenproblemen aan het werk

Programma

1. Nakijken van door leerlingen gemaakt werk, analyseren van de fouten
2. Hoorcollege over rekenachterstand, -problemen, -stoornis, dyscalculie en hoogbegaafdheid ; signaleren, diagnosticeren, handelen, evalueren en diagnostisch gesprek
3. Onderzoeksopdracht

Doelen

De student:
- kent de verschillen tussen rekenachterstand, -problemen en stoornis/dyscalculie
- is op de hoogte van de discussie over dyscalculie en kent het nieuwe landelijke protocol
- weet hoe je een diagnostisch gesprek met leerlingen moet voeren en hoe je daaruit conclusies kunt trekken over een aanpak van eventuele problemen
- oefent zich in het voeren van diagnostische gesprekken
- weet dat leerlingen met rekenachterstand vaak weinig gemotiveerd zijn voor rekenen en dat het belangrijk is te benadrukken waar ze goed in zijn, om van daaruit nieuwe ontwikkeling uit te lokken en in gang te zetten.

Instapopdracht

Zoek een verklaring voor de fouten in elk rijtje

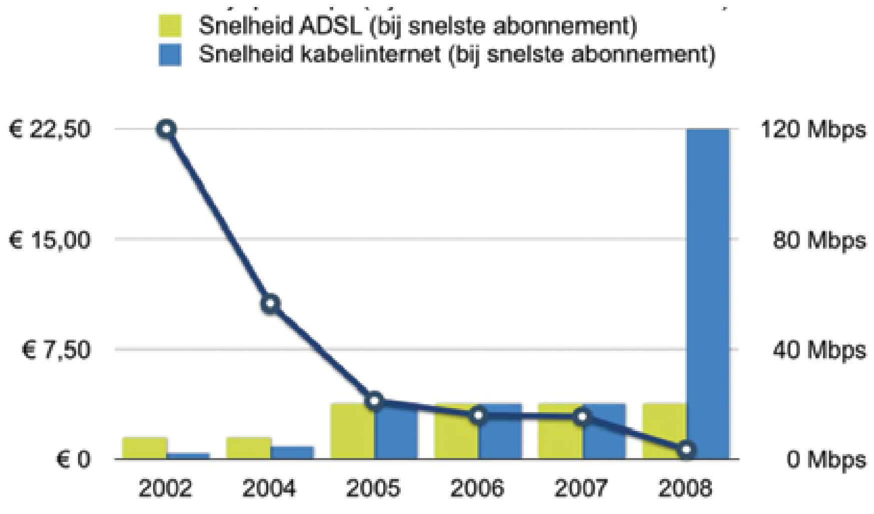
1. 64 – 25 = 49	2. 260 – 50 = 310	3. ${}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{4} = {}^{1}/_{12}$
83 – 36 = 57	340 – 90 = 260	${}^{1}/_{6} + {}^{3}/_{4} = {}^{22}/_{24}$
57 – 23 = 34	470 – 80 = 310	${}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{6} = {}^{8}/_{12}$
94 – 17 = 87	160 – 80 = 80	${}^{1}/_{5} + {}^{3}/_{10} = 1\ {}^{10}/_{15}$
47 – 9 = 38	540 – 60 = 480	${}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{10} = {}^{12}/_{20}$
62 – 35 = 37	480 – 90 = 410	${}^{1}/_{2} + {}^{2}/_{5} = {}^{9}/_{10}$

Hoorcollege

In dit hoorcollege komen achtereenvolgens aan bod:
- de verschillen en overeenkomsten tussen over rekenachterstand, -problemen, -stoornis, dyscalculie
- begeleiding van leerlingen met achterstand, problemen of een geconstateerde stoornis
- de jongste ontwikkeling op het gebied van dyscalculie, waaronder het in februari '10 te verwachten landelijk protocol dyscalculie
- kenmerken van hoogbegaafdheid en begeleiding van hoogbegaafden
- sdhe (signaleren, diagnosticeren, handelen en remediëren; vh: sdre, r: remediëren)
- kenmerken van een diagnostisch gesprek.
- plezier in rekenen

Bronnen

"Rekenen in het voortgezet onderwijs", Hoogland e.a.(2009), APS; "Dyscalculie in discussie", Dolk e.a. (2006), Assen, Van Gorcum; "Leerlingenzorg in het basisonderwijs" Maas, A. e.a. (2007), Heeswijk-Dinter, Esstede;"Kwantiwijzer", Van den Berg e.a., (1990?),Tilburg, Zwijsen; "Rekenonderzoek in de praktijk", Borghouts, C. (2000);…..



Bron: http://www.hoogbegaafdvlaanderen.be/01_Hoogbegaafd/hoeveel.html

Onderzoeksopdracht

Volg een leerling uit je klas (PO of VO), die moeite heeft met rekenen. Kijk ook zijn schriftelijk werk na. Interpreteer zijn fouten. Voer op basis hiervan een diagnostisch gesprek volgens 'het rekenprotocol' met deze leerling. Probeer te achterhalen wat de oorzaak van zijn fouten is en breng in kaart wat hij wel goed kan. Begeleid deze leerling enige tijd: laat hem zoveel mogelijk met de klas meedoen, ondersteun hem waar nodig. Als je hem ook andere oefeningen dan zijn klasgenoten laat doen, stel hem dan vrij van goed gekozen klassikale opdrachten die voor hem niet noodzakelijk zijn. Uiteindelijk doel is dat hij zelf-vertrouwen op rekengebied terugkrijgt en plezier in rekenen. Deze opdracht kan ook met een groepje leerlingen met vrijwel hetzelfde rekenprobleem uitgevoerd worden.
Neem voor de volgende bijeenkomst het ingevulde protocol van je afgenomen rekengesprek(ken) mee. Maak regelmatig reflectieverslagen. Neem het protocol en de reflectieverslagen op in je portfolio.

Alternatief: doe vergelijkbaar begeleidingswerk met een hoogbegaafde/rekensterke leerling uit je klas. Probeer via gesprekken achter zijn manier van denken en leren rekenen te komen. Zorg dat deze leerling kan werken op zijn niveau en met zijn ontwikkelingsmogelijkheden.

Literatuur

(zie onder programma, punt 2)

Oefenen 7 - Zorg

Bijlage 7.1

Henk Logtenberg

Protocol 'Rekenges

Een leerling kan je veel vertellen over zijn rekenproblemen

Welke ondersteuning en instructie heeft een leerling met rekenproblemen nodig? Hoe eerder en beter dat duidelijk is, hoe sneller en effectiever je als leerkracht met zo'n leerling aan de slag kunt gaan. Door op de juiste manier met een probleemleerling in gesprek te gaan kan het kind zelf een bijdrage leveren aan beter inzicht in zijn rekenproblemen en -mogelijkheden.
Henk Logtenberg heeft samen met drie studenten van de Windesheim Opleidingen Speciale Onderwijszorg het Protocol 'Rekengesprek' ontwikkeld. Door dit protocol te volgen, kan de leerkracht snel en effectief inzicht krijgen in de pedagogische en didactische problematiek van leerlingen met rekenproblemen.

Voor wie zijn de rekengesprekken?

Het leerlingvolgsysteem voor rekenen-wiskunde brengt de potentiële uitvallers aan het licht, de zwakste 25% van de klas. Een deel van deze leerlingen is weer op het goede spoor te krijgen door te differentiëren in het onderwijs, een aanpak binnen de klas. Voor de rest, de leerlingen met ernstige rekenproblemen, de zwakste 10%, is een individuele aanpak vereist.
Bij de ontwikkeling van het Protocol 'Rekengesprek' hebben wij ons gericht op de zwakste 10% van de leerlingen. Dit zijn zwakke tot zeer zwakke leerlingen met een Cito E-score, leerlingen die gebaat zijn bij extra individuele instructie door een leerkracht en/of remedial teacher. Hoe kun je door een goed rekengesprek te voeren, zo precies mogelijk in beeld krijgen wat deze kinderen kunnen op het gebied van rekenen-wiskunde en hoe ze tegen het vak aankijken? Het protocol biedt aanknopingspunten.
De rekengesprekken kunnen door de leerkracht en/of de remedial teacher worden afgenomen, binnen of buiten de klas. Dit hangt af van wat op school mogelijk en gebruikelijk is.

Het rekengesprek duurt ongeveer 20 tot 30 minuten, en het is ontwikkeld voor leerlingen met rekenproblemen in de leeftijdsgroep van 9 tot 12 jaar in het Primair Onderwijs. In de praktijk blijkt dat het breder inzetbaar is. Het is succesvol toegepast bij leerlingen in het Primair Onderwijs vanaf groep 5, in het Voortgezet Onderwijs tot en met de eerste twee leerjaren én in het Speciaal Onderwijs bij leerlingen met een IQ van boven de 70 en een redelijke mondelinge uitdrukkingsvaardigheid.
Het Protocol 'Rekengesprek' is bedoeld als een aanvullend instrument voor rekeninterventies, niet als vervangend instrument voor uitgebreid diagnostisch onderzoek. Het rekengesprek levert informatie op waar volgende rekeninterventies mede op gebaseerd kunnen worden.

In het Protocol 'Rekengesprek' staat de inbreng van de leerling centraal.

FRANK ROOSENDAAL

Luister naar de leerling

Het uitgangspunt van het protocol is dat de leerlingen zelf in een rekengesprek een belangrijke informatiebron kunnen zijn voor het stellen van diagnoses en het opstellen van een passend handelingsplan.
Uit nationale en internationale literatuur blijkt dat leerlingen te weinig benut worden als bron van informatie bij (reken) interventies. Rekers en Harinck (2004) valt het op, dat een meerderheid van de remedial teachers (rt'ers) het kind niet betrekt bij het opstellen van handelingsplannen. Ze onderzoeken niet wat het kind zelf als probleem ervaart en hoe het tegen de problemen en de voorgestelde oplossingen aankijkt. Kaplan (2000) merkt op, dat we bij de rekenproblemen van de leerlingen méér moeten kijken vanuit het perspectief van de leerlingen. Volgens Buschman (2001) zijn gedragsaspecten en karaktertrekken als geduld, volharding en een positieve kijk, van groot belang op rekenprestaties. Onderzoek dus hoe het daarmee staat. Ginsburg (1997) geeft aan dat het rekengesprek een goed middel is om inzicht te krijgen in het functioneren van het individuele kind, waardoor de kans op een succesvolle aanpak van de rekenproblemen stijgt.

Het rekengesprek

Een belangrijke bron voor de ontwikkeling van het Protocol was het boek van Delfos (2005), 'Luister jij wel naar mij?' Daaraan ontleende we het begrip 'empowerment van de leerling'. In een rekengesprek kan de leerling zelf een actieve rol hebben en een belangrijke bijdrage aan de communicatie leveren. Als het schoolse rekenproces stagneert is de leerling zelf de eerste expert die daar een visie op heeft. Om het rekenproces weer op gang te brengen of beter te laten verlopen, is het belangrijk om in een gesprek ruimte te bieden aan die visie. Wat zijn de mening en gevoelens van de leerling zelf? Hoe kijkt hij zelf tegen het rekenprobleem aan?

Om een rekengesprek goed te laten verlopen moet wel aan een aantal voorwaarden worden voldaan. De leerkracht

prek'

dient een sfeer te creëren van vertrouwen, waarin warmte, respect, echtheid, acceptatie en belangstelling voor de leerling onmisbaar zijn. De grondhouding van de leerkracht moet zijn: informatie uit het kind zélf laten komen. Daarnaast zijn kennis en inzicht in de ontwikkelingsfase van de leerling en de aard van communiceren met leerlingen van belang. Bovendien moet de leerkracht beschikken over kennis van en inzicht in de onderhavige rekenproblematiek.

Delfos adviseert om te zorgen voor het juiste *gesprekskader.* Om te zorgen dat het rekengesprek werkelijk gaat lopen moet de leerkracht *de taal van het kind spreken*, het gesprek moet plaats vinden in een geschikte ruimte en op een manier waarbij de leerling zich op zijn gemak voelt. Het kan binnen of buiten plaatsvinden, zittend, wandelend, spelend, enzovoort. In het gesprek staan mening, gevoelens en informatie van het kind zelf centraal.

Het rekengesprek bestaat uit vijf fasen: voorbereiding, introductie, de startvraag, de romp en de afronding. In de handleiding bij het Protocol worden bij alle vijf de onderdelen aanwijzingen en suggesties gegeven voor de uitwerking. Zo staan er bij de romp acht sub-items, en is elk sub-item voorzien van concrete vragen.
Enkele voorbeelden:
Sub-item 'algemeen': Wat is voor jou belangrijk om goed te kunnen rekenen?
Sub-item 'gevoel': Wat heb je bij het maken van sommen wel eens heel erg leuk gevonden?
Sub-item 'sommen': Wat voor sommen doe je graag?
Sub-item 'manier van rekenen': Hoe reken jij het liefst?
Sub-item 'plek': Op welke plek kun jij het beste rekenen?
Enzovoort.
Het is belangrijk dat de leerkracht open vragen stelt en doorvraagt op reacties van de leerling. Ook het parafraseren is belangrijk. De leerkracht herhaalt in eigen woorden wat de leerling op een vraag geantwoord heeft en vraagt of het klopt. Dit confronteert de leerling met zijn eigen uitspraken en zet hem opnieuw aan het denken. Vooraf en tijdens het gesprek moeten de bedoelingen van het gesprek duidelijk zijn. De leerkracht heeft de input van de leerling nodig om hem beter te kunnen helpen, maar de leerling mag ook zwijgen.

Protocol
Het pakket Protocol 'Rekengesprek' bestaat uit vier onderdelen: handleiding, protocol, notatieformulier en samenvattingsformulier.
In de handleiding zijn de aanleiding, het doel, de uitgangspunten en instructies voor het rekengesprek geformuleerd. In het Protocol zelf worden, zoals eerder aangegeven, de vijf basisonderdelen van het gesprek uitgewerkt. Tijdens het gesprek kan de leerkracht reacties van de leerling en opmerkingen van zichzelf op het notatieformulier noteren.
Het samenvattingsformulier bestaat uit vijf blokken. In de eerste drie blokken kan de leerkracht de ervaringen van de leerling, de motivatie van de leerling én het beeld dat de leerling heeft van rekenen samenvatten. Op basis van deze samenvatting kan de leerkracht een soort mini-theorie formuleren over de behoeftes van de leerling betreffende ondersteuning en instructie, waarop de vervolg-rekeninterventies gebaseerd zullen zijn. De mini-theorie is een veronderstelling gebaseerd op de uitkomsten van het rekengesprek, ervaring en literatuur. Op basis van de mini-theorie kan de leerkracht in het vierde blok hulpvragen van de leerling formuleren. Bijvoorbeeld: 'De leerling heeft instructie, opdrachten, activiteiten, feedback nodig bij …' In het vijfde blok kan de leerkracht nog aanvullende opmerkingen verwerken naar aanleiding van het gesprek.


FRANK ROOSENDAAL

Een ontspannen sfeer tijdens een rekengesprek is erg belangrijk.


FRANK ROOSENDAAL

Laat de leerling eens een voorbeeldsom opschrijven die hij of zij graag doet.

Tijdens het praktijkonderzoek en de toepassing van het Protocol krijg ik door middel van video-opnamen en presentaties van studenten een indruk van het werken met het Protocol 'Rekengesprek'. Wat opvalt is, dat leerkrachten creatief zijn in het vinden van oplossingen om leerlingen tijdens het gesprek met iets bezig te laten zijn. Je ziet leerlingen enthousiast bouwen met blokken, tekenen en kleuren of samen met de leerkracht een spelletje Memory spelen. Tussen het bouwen, tekenen en spelen door stelt de leerkracht de vragen (waarbij zo nu en dan het spel even wordt stil gelegd). Doordat de leerlingen met iets bezig zijn, wat hun aandacht vangt, leidt dit de aandacht wat af, van het voor hen soms zo beladen onderwerp 'rekenen'.
In de vervolg-rekeninterventies zie ik de uitkomsten van het rekengesprek terugkomen. Leerlingen werken aan een speciaal voor hen ontworpen boerderij-, paarden- of voetbalspel. Doordat de rekenproblematiek verweven is met het interessegebied van de leerlingen gaan de leerlingen spelenderwijs met de rekenproblemen aan de gang. De motivatie van de leerling groeit, omdat er speciaal iets voor hem of haar gemaakt is. De leerkracht gaat op in het groeiende enthousiasme van de leerling en blijft dóór-ontwikkelen, totdat er een compleet spel ontstaat dat perfect passend is bij de problematiek van de leerling.

Fragment uit het logboek van Henk van Logtenberg, initiatiefnemer van het Protocol 'Rekengesprek'

Resultaten

Uit ons kleinschalig praktijkonderzoek (meervoudige casestudy) blijkt, dat de rekenresultaten van leerlingen die een rekengesprek hebben gehad en waarvan de uitkomsten toegepast zijn in vervolg-rekeninterventies (bij het type sommen dat problemen oplevert) 25% méér stijgen, dan de resultaten van leerlingen waarbij de vervolg-rekeninterventies niét gebaseerd zijn op een rekengesprek.
Ook hebben de leerlingen die een rekengesprek hebben gehad veel meer waardering voor de vervolg-rekeninterventies dan leerlingen die niet zo'n rekengesprek hebben gehad. De Windesheim OSO-studenten die werken met het Protocol 'Rekengesprek' zijn zeer positief over hun ervaringen. Ze geven aan dat het Protocol lijn en structuur in het gesprek brengt en dat de spraakzaamheid van de leerling stijgt als hij tijdens het gesprek ergens mee bezig is (bouwen, tekenen en kleuren, samen een spelletje doen). Wel dient er in de romp van het gesprek meer ruimte te worden gereserveerd voor de diagnostische analyse van het rekenprobleem. Dit kun je aanpassen door samen met de leerling een rekenprobleem te analyseren al dan niet met gebruikmaking van rekenmateriaal.

Omdat de vervolg-rekeninterventies dankzij de opbrengst van het rekengesprek méér afgestemd kunnen worden op de totale rekenproblematiek én de interesses van de leerlingen zie je het enthousiasme van de leerlingen voor het rekenen groeien. Het enthousiasme van de leerkrachten groeit evenredig mee. Zie het verslag in het kader.

Bij een rekengesprek wordt denkwerk verricht

Het voeren van een rekengesprek vereist veel aandacht en concentratie van de leerkracht. Dat bleek onder andere tijdens een presentatie van een video-opname van een rekengesprek aan vakcollega's. Toen hen na afloop gevraagd werd wat ze hadden waargenomen bij het kind tijdens het rekengesprek zei een van hen: 'Ik heb de leerling alleen nog maar horen hoesten!' Dat de introverte leerling langzaam aan het ontdooien was tijdens het rekengesprek, begon te praten over rekenen en betrokken was geraakt bij het rekenprobleem, was de collega kennelijk ontgaan.
Bij een rekengesprek activeer je het rekendenkwerk van de leerling én mobiliseer je de eigen krachten van de leerling om zodoende tot een verfijnde afstemming te komen bij vervolg-rekeninterventies bij leerlingen die specifieke ondersteunings- en instructiebehoeften hebben. Dat vraagt van de leerkracht niet alleen open oren en ogen, maar vooral ook een open vizier! Een leerling kan je heel veel leren over zijn persoonlijke rekenproblemen!

FRANK ROOSENDAAL

In het gesprek moet ook voldoende ruimte zijn om het rekenprobleem te analyseren.

U kunt het Protocol 'Rekengesprek' downloaden op www.volgens-bartjens.nl.

Met dank aan: Linda Plat, Marga de Ruijter en Corien Springer (Voltijdstudenten, Windesheim Opleidingen Speciale Onderwijszorg)

De auteur is werkzaam als opleider en onderwijsontwikkelaar bij Windesheim Opleidingen Speciale Onderwijszorg

Literatuur

Buschman, L. (2001). 'Using student interviews to guide classroom instruction.' In: ***Teaching Children Mathematics****, volume 8, number 4, 222 – 227.*
Delfos, M. (2005). ***Luister jij wel naar mij?*** *Amsterdam: Uitgeverij SWP.*
Ginsburg, H.P. ***Entering the child's mind.*** *New York (US): Cambridge University Press*
Kaplan, R.G., King, B., Dickens, N. & Stanley, V. In: ***Teaching Children Mathematics****, february 2002, p. 406 – 411.*
Rekers, M. & Harinck, F. (2004). 'Remedial Teaching: een kwestie van planmatig handelen. Of niet?' In: ***Tijdschrift voor Remedial Teaching.*** 12 (3), 4 – 10.
Struiksma, A.J.C. (2005). ***Organisatorisch Continuüm voor de zorgroute van leerlingen met leesproblemen en dyslexie.*** 's Hertogenbosch: Masterplan Dyslexie.

Oefenen 7 - Zorg

Bijlage 7.2

Pagina 1

Protocol rekengesprek

Empowerment bij Rekengesprekken

Pedagogisch-didactische fijn-afstemming bij leerlingen met Rekenproblemen in het Primair Onderwijs van 9 – 12 jaar.

"Want je denkt pas als je praat. Denken in je eentje kan niet, denken is een gesprek voeren"

Linda Plat, Marga de Ruijter en Corien Springer
(Voltijdstudenten, Windesheim Opleidingen Speciale Onderwijszorg);
Henk Logtenberg
(Reken-wiskunde docent, Windesheim Opleidingen Speciale Onderwijszorg)
Zwolle, april 2007.

Protocol rekengesprek

Voorbereiding

- Gespreksruimte regelen (binnen / buiten / klaslokaal / RT-ruimte / speellokaal / …)
- Benodigdheden (opname-apparatuur / spelmateriaal / …)
- Tijd inplannen
- Afspraak maken met leerkracht en kind
- Topics voorbereiden
- Gegevens bekijken van vorig diagnostisch gesprek.
- Vertrouwensband opbouwen met leerling
- Voorbereiden van de gesprekstechnieken: doorvragen, samenvatten, open vragen stellen, enz.

Introductie

- Doel: Ik wil graag weten wat jij van het rekenen vindt, zodat ik je goed kan helpen op een manier die het beste bij jou past.
- Wat ga je met de informatie doen: Ik ga de informatie die jij geeft gebruiken om jou te helpen met rekenen.
- Tijdsduur: 20 tot 30 minuten

Startvraag

- Waar denk jij aan bij het woord: rekenen?

Romp

- gevoel
  - Hoe is het voor je om sommen te maken die je heel makkelijk vindt?
  - Hoe is het voor je om sommen te maken die je heel moeilijk vindt?
  - Wat heb je bij het maken van rekensommen wel eens heel erg leuk gevonden?

- algemeen
  - Wat vind jij van rekenen in de klas?
  - Waarvoor is leren rekenen nodig?
  - Waarvoor wil jij rekenen leren?
  - Wat is voor jou belangrijk om goed te kunnen rekenen?

- sommen
  - Wat voor sommen doe je graag?
  - Wat vind je makkelijk en wat vind je moeilijk bij het rekenen?
  - Wat voor sommen vind jij moeilijk en makkelijk?

- manier van rekenen
  - Hoe reken je het liefst?
  - Wat voor materiaal gebruik je het liefst?

- plek
  - Op wat voor plek kun jij het beste rekenen?

- hulp
  - Waar wil jij graag bij geholpen worden?
  - Wat voor hulp zou je willen?
  - Op welke manier?
  - Wat kun je al en wat zou je willen leren?
  - Wat voor hulp krijg je nu? Hoe vind je dat?
  - Heb je wel een iets geleerd, wat je toch heel erg moeilijk vond om te leren?
  - Hoe is je dit dan toch gelukt?
  - Heb je wel eens sommen gemaakt, die je eerst niet snapte, maar waarbij het je toch gelukt is om ze te maken?
  - Hoe kwam dat dan? (waardoor?)

- de leraar
  - hoe vind je dat je huidige meester/juf je helpt bij rekenen?
  - Hoe was dat bij een vorige juf of meester?
  - Waarmee heeft een meester of juf je wel eens heel goed geholpen bij rekenen?

- interesse
  - Waar ben jij in geïnteresseerd en hoe zouden we dat kunnen gebruiken bij het rekenen?

<u>Afsluiting</u>

- Samenvatting geven van het gesprek
- Wat wil jij nog zeggen over het rekenen?
- Terugkoppeling + aangeven wat het vervolg van het gesprek is, wanneer zie je elkaar weer?

Pagina 4

Notatieformulier rekengesprek

Startvraag	Opmerkingen
Waar denk jij aan bij het woord rekenen?	

Gevoel	Opmerkingen
Hoe is het voor je om sommen te maken die je heel makkelijk vindt?	
Hoe is het voor je om sommen te maken die je heel moeilijk vindt?	
Wat heb je bij het maken van rekensommen wel eens heel erg leuk gevonden?	

Algemeen	Opmerkingen
Wat vind jij van rekenen in de klas?	
Waarvoor is leren rekenen nodig?	
Waarvoor wil jij rekenen leren?	
Wat is voor jou belangrijk om goed te kunnen rekenen?	

Sommen	Opmerkingen
Wat voor sommen doe je graag?	
Wat vind je makkelijk en wat vind je moeilijk bij het rekenen?	
Wat voor sommen vind jij moeilijk en makkelijk?	

Manier van rekenen	Opmerkingen
Hoe reken je het liefst?	
Wat voor materiaal gebruik je het liefst?	

Plek	Opmerkingen
Op wat voor plek kun jij het beste rekenen?	

Hulp	Opmerkingen
Waar wil jij graag bij geholpen worden?	
Wat voor hulp zou je willen?	
Op welke manier?	
Wat kun je al en wat zou je willen leren?	
Wat voor hulp krijg je nu? Hoe vind je dat?	
Heb je wel een iets geleerd, wat je toch heel erg moeilijk vond om te leren?	
Hoe is je dit dan toch gelukt?	
Heb je wel eens sommen gemaakt, die je eerst niet snapte, maar waarbij het je toch gelukt is om ze te maken?	
Hoe kwam dat dan? (waardoor?)	

De leraar	Opmerkingen
Hoe vind je dat je huidige meester/juf je helpt bij rekenen?	
Hoe was dat bij een vorige juf of meester?	
Waarmee heeft een meester of juf je wel eens heel goed geholpen bij rekenen?	

Pagina 6

Interesse	Opmerkingen
Waar ben jij in geïnteresseerd en hoe zouden we dat kunnen gebruiken bij het rekenen?	

Slotvraag	Opmerkingen
Wat wil jij nog zeggen over het rekenen?	

Pagina 7

Samenvatting notaties rekengesprek

Ervaringen van het kind

Motivatie van het kind

Beeld wat het kind heeft van rekenen

Hulpvraag
Dit kind heeft…

- *instructie nodig…*
- *opdrachten nodig…*
- *activiteiten nodig…*
- *feedback nodig…*

Eventuele aanvullingen naar aanleiding van het gesprek

Handleiding

Aanleiding rekengesprek / motivatie

Leerlingen krijgen op verschillende scholen op verschillende manieren (reken)begeleiding. Maar, is dit altijd een manier van begeleiden die bij de leerling past? Bij het rekenen spelen vaak meer aspecten dan alleen het formele rekenen een rol. Om de reguliere gang van zaken te volgen (signalering, diagnostisering, remediëring) laten we als leerkrachten bepaalde onderdelen nog wel eens liggen (gevoelens, mening van de leerling), die ook van belang kunnen zijn voor leerlingen met rekenproblemen.
Alle leerlingen zijn verschillend en hebben andere pedagogische en didactische ondersteuningsbehoeften. Vaak wordt hier te weinig rekening mee gehouden. In het Rekengesprek onderzoek je *hoe de leerling tegen het rekenen aankijkt* en *waarbij en hoe de leerling graag geholpen zou willen worden*, *daarbij rekening houdend met de deskundigheid van de leerling*.
Door middel van het rekengesprek probeer je achter de behoeftes en interesses van de leerlingen te komen om de begeleiding hierop af te stemmen.

Doel / doelgroep

Volgens Logtenberg (2006) is de bedoeling van het Rekengesprek het stagnerende schoolse rekenproces bij de leerling een extra impuls te geven om weer op gang te komen en/of beter te laten verlopen. Het gesprek heeft als doel om achter de meningen en gevoelens van de leerling te komen maar ook om informatie van de leerling zelf te krijgen m.b.t. het rekenprobleem (Delfos, 2005).
Ook heeft het rekengesprek tot doel om vervolginterventies in te kunnen zetten (Logtenberg, 2006).

De doelgroep is leerlingen met rekenproblemen in het primair onderwijs in de leeftijd van 9 tot 12 jaar. Omdat in deze leeftijdsgroep vaak expliciet rekenproblemen in de basisvaardigheden naar voren komen. De cognitieve ontwikkeling in deze leeftijdsperiode neemt toe waardoor de leerling beter kan aangeven hoe zijn rekenprocessen verlopen.

Uitgangspunten

Het gaat om de actieve rol die de leerling zelf kan hebben en de actieve input die de leerling in het Rekengesprek heeft, kortom: *empowerment van de leerling* (Logtenberg, 2006). In het Rekengesprek willen we de leerling de kans geven om van zijn eigen professionaliteit gebruik te maken.

Ontwerpen van het Rekengesprek

Naar aanleiding van bovenstaande uitgangspunten van het Rekengesprek zijn wij bezig geweest met het ontwerpen van het Protocol Rekengesprek. Na het bestuderen van de literatuur hebben we gekeken wat de leerling en RT'er belangrijk vinden om terug te zien in het Rekengesprek. Aan de hand hiervan hebben we het Rekengesprek ontwikkeld. Het ontworpen Rekengesprek hebben we in de praktijk gebracht bij zes leerlingen met rekenproblemen. Rekening houdend met de uitkomsten van het Rekengesprek hebben we RTsessies gehouden met deze leerlingen. Hieruit kunnen we concluderen dat de leerlingen de RT-sessies hebben gewaardeerd.

Rekengesprek

Instructies rekengesprek

Voorbereiding
Tijdens het Rekengesprek dien je rekening te houden met de ondersteuningsbehoeften van de leerling. Dit betekent dat je gebruik maakt van de input van de leerling betreffende plaats, tijd en de manier waarop het gesprek

plaatsvindt. Het is daarom van belang dat je voor het gesprek weet hebt van deze behoeften van de leerling. Voor het houden van het Rekengesprek is het belangrijk om de gesprekspunten goed in je op te nemen.

Introductie
Het is voor de leerling belangrijk om het doel van het gesprek goed voor ogen te hebben zodat ze weten waarom dit gesprek plaatsvindt en waar ze aan toe zijn. Het is fijn voor de leerling om te weten wat je met de informatie die zij geven gaat doen. Het is ook goed om dit aan de leerling door te geven (Delfos, 2005).

Startvraag
Door middel van de startvraag lok je een reactie bij de leerling uit en kom je direct tot de kern van het gesprek.

Romp
Net zoals in het menselijk lichaam de romp zeer belangrijke organen bevat is ook in het Rekengesprek de romp een belangrijk onderdeel. In de romp komen de volgende topics naar voren: gevoel, algemeen, sommen, manier van rekenen, plek, hulp, de leraar en interesses. De topics staan in deze volgorde in het protocol, maar hoeven niet in deze volgorde behandeld te worden.

Afsluiting
In de samenvatting geef je kort de belangrijkste punten uit het gesprek aan, hierdoor laat je de leerling weten dat hij gehoord wordt. Het kan zijn dat bepaalde onderwerpen tijdens het Rekengesprek niet aan bod zijn gekomen, waar de leerling wel iets over kwijt had gewild. In de afsluiting geef je de leerling hier nog gelegenheid voor. Volgens Delfos (2005) moet aan het eind van het gesprek aandacht worden besteed aan vragen en emoties die het gesprek heeft opgeroepen. Het is de bedoeling dat het kind een gesprek met een positief gevoel afsluit. Als dat niet zo lijkt te zijn, is het gesprek nog niet afgelopen. Migchelbrink (2006) zegt dat je er van bewust moet zijn dat belangrijke dingen soms pas gezegd worden als het gesprek formeel al beëindigd is.

Registratie rekengesprek

Instructies registratie
De registratieformulieren wijzen zich in principe vanzelf. De belangrijke punten die in het gesprek naar voren komen kun je op het notatieformulier invullen. In het samenvattingsformulier kun je per topic de uitkomsten nog eens in het kort weergeven. De onderwijsbehoeften van de leerling zijn belangrijk, daarom zijn de hulpvragen in het samenvattingsformulier een aanknopingspunt om hier over na te denken. Deze onderwijsbehoeften bepalen welke hulp nodig is (Pameijer & Van Beukering, 2006).

Afsluitend

Ten slotte wijzen wij op het belang van het gebruik van het Rekengesprek voor de leerling om te leren in een krachtige leeromgeving én voor de leerkracht om optimaal te kunnen voldoen aan de onderwijsbehoeften van het kind.

Literatuurlijst

Logtenberg, H. (2006). *Empowerment bij rekeninterventies*. Zwolle: Afstudeerproject, Opleiding HKP/Master of Education.
Delfos, M.F. (2005). *Luister jij wel naar mij?* Amsterdam, SWP
Migchelbrink, F (2006). *Praktijkonderzoek in zorg en welzijn*. Amsterdam: SWP
Pameijer. N. & Beukering, T. van (2006). Handelingsgerichte diagnostiek en handelingsgericht werken: een werkkader voor de remedial teacher (1). *Tijdschrift voor Remedial Teaching, 2006/4*

Colofon

Uitgave
Open Universiteit
Ruud de Moor Centrum voor professionalisering van onderwijsgevenden
Maart 2010

Bezoekadres
Valkenburgerweg 177
6419 AT Heerlen
T 045 - 576 22 22

Postadres
Postbus 2960
6401 DL Heerlen

Tekst
Dédé de Haan
Jan Haarsma
Frank van Merwijk
Gé Nielissen
Henk Staal
Nathalie de Weerd

Redactie
Gé Nielissen

Bureauredactie
John Arkenbout

Oplage
200 exemplaren

Vormgeving
Visuele Communicatie Open Universiteit

Exemplaren van deze publicatie kunnen worden besteld bij
Open Universiteit
Secretariaat Ruud de Moor Centrum
Postbus 2960
6401 DL Heerlen
T 045 - 576 29 61
F 045 - 576 27 82

Ook kan de volgende site worden geraadpleegd
www.ou.nl/RdMC