



Vorig jaar is de ‘Kennisbasis Rekenen-Wiskunde voor de Lerarenopleiding Basisonderwijs’ verschenen, samengesteld door ELWIER / Panama in opdracht van de HBO-raad (2009). De opleiding staat nu voor de vraag hoe de kennisbasis te implementeren en hoe na te gaan of studenten de beoogde kennis hebben verworven. Er ligt uiteraard ook een taak voor ontwikkelaars van opleidingsmaterialen. Wij zijn als auteurs van een nieuwe serie boeken voor de pabo (‘Rekenen-wiskunde in de praktijk’ (2010, in voorbereiding)) bezig dergelijke materialen te ontwerpen. In een van de delen geven we een overzicht van de didactiek door beoogde kerninzichten van leerlingen uit te werken en in te bedden in onderwijssituaties. Kerninzichten zijn inzichten die essentieel zijn voor het verwerven van rekenen-wiskunde, zoals bijvoorbeeld vastgelegd in de kerndoelen of referentieniveaus. Zonder deze kerninzichten stagneert het leerproces. Een voorbeeld van een dergelijk kerninzicht is het inzicht dat procenten een verhouding van 1 op 100 weergeven.

We stelden onszelf de ontwikkelvraag hoe de uitgangspunten en de inhoud van de kennisbasis een plaats te geven in ons werk. We formuleerden daartoe eisen die zijn afgeleid van de visie en de inhoud die de kennisbasis weergeeft. Kenmerkend voor de kennisbasis is bijvoorbeeld dat deze niet exemplarisch is opgezet, voor ons een aanwijzing om voor een zo ‘dekkend’ mogelijke aanpak te kiezen. Andere elementen die richting geven aan ons werk waren: de vier in de kennisbasis verwerkte vakdidactische competenties, in het bijzonder leerprocessen en niveauverhoging bij kinderen, samenhang tussen mathematiseren en didactiseren en maatschappelijke relevantie van rekenen-wiskunde.

Een opbrengst van onze pogingen beschrijven we hier. De tien opgaven voor het domein ‘procenten’ dekken in onze ogen de bovengenoemde vakdidactische competenties, in de zin dat doordinking van de hier gestelde problemen studenten noodzakelijkerwijs kennis laat verwerven die onderliggend is voor deze competenties. Met andere woorden: met het doorwerken van deze opgaven werken studenten aan het verwerven van de kennisbasis voor de procenten, zij het dat we door de beperking tot procenten de noodzakelijke samenhang tussen procenten, verhoudingen, breuken en kommagetallen niet optimaal kunnen tonen.

De kennisbasis bestaat voor het domein procenten uit drie paragrafen (pag.27-29). De paragraaf ‘Kennis van procenten’ beschrijft de betekenis van het redeneren en rekenen met, en de wiskundetaal bij procenten. De paragraaf ‘Kennis voor het onderwijzen van procenten’ gaat over de betekenis en het gebruik van procenten, over modelgebruik en schema’s en over oplossingsprocessen en niveauverhoging. De derde en laatste paragraaf, ‘Maatschappelijke relevantie, verstrengeling en samenhang procenten’, gaat in op de verstrengeling van het domein procenten met andere domeinen in rekenen-wiskunde en het gebruik van procenten bij andere vak- en vormingsgebieden.

Onderstaande opgaven en bijbehorende overwegingen laten iets zien van onze eigen zoektocht. We stellen ze daarom graag ter discussie.

Tien opgaven over procenten

1. Voordeel

‘Vijf halen, vier betalen’. De leerlingen mogen uitzoeken welk percentage korting erbij hoort (fig1).



figuur 1

- Welke oplossingen verwacht je van leerlingen uit de bovenbouw?
- Welk misverstand verwacht je dat er bij sommige kinderen ontstaat? Welk model kan helpen kinderen inzicht te geven en welke vragen zou je willen stellen om het inzicht te bevorderen?

2. Kortingen

- a Ik heb 180 euro voor een bureaustoel betaald, met 40% korting. Wat was de oorspronkelijke prijs van de stoel (fig.2)? Probeer deze opgave met en zonder model of tabel op te lossen.



figuur 2

- b Ik koop schoenen die 98 euro kosten. Aan de kassa betaal ik tot mijn verrassing € 73,50. Hoeveel procent korting kreeg ik op deze schoenen (fig.3)?



figuur 3

- c Beschrijf drie verschillende oplossingen om 15% van € 240 uit te rekenen.

3. Prijsvergelijking

Super AHOI beweert: 'Wij zijn 25% goedkoper dan Super De Bonk'. Super De Bonk reageert: 'Onzin, het scheelt 20%, maar wij hebben weer andere kaas die stukken goedkoper is dan bij AHOI' (fig.4).



figuur 4

- a Analyseer dit probleem. Vraag je af wat hier speelt en welke inzichten hier nodig zijn om de situatie te doorgronden.
b Geef een mogelijke dialoog tussen twee leerlingen van groep 8 die enthousiast met dit probleem aan de slag gaan.

4. Rente op rente

Je hebt op 1 januari € 6533,95 op de bank voor vijf jaar vastgezet tegen een rente van 4%. Met hoeveel procent is dat spaarbedrag na vijf jaar toegenomen?

- a Beredeneer: meer of minder dan 20% of precies 20%?
b Gebruik een zakrekenmachine om het exacte percentage te vinden.
Tip: Denk aan het operator-aspect van procenten.

5. BTW

Guus Meeuwis - NW8 Tour

Een jongensdroom ging in vervulling. Het nieuwe album van Guus Meeuwis 'NW8' is namelijk opgenomen in de legendarische *Abbey Road studio's* in Londen.

Op zijn achtste cd toont Guus meer dan ooit zijn vakmanschap als zanger én ook als songwriter. De liedjes van dit album vormen de basis van zijn nieuwe theatertour. Meeuwis blijft zich ontwikkelen en de afgelopen jaren wordt steeds duidelijker hoe veelzijdig deze muzikant is (fig.5).

Theater Carré in Amsterdam heeft ruim 1700 plaatsen.

| uitverkocht | aanvang | prijzen |
|---|-----------|-------------------|
| | 20.00 uur | van € 20 tot € 33 |
| Gezellig eten in Carré voorafgaand aan de avondvoorstelling? Klik hier | | |
| <small>De prijzen zijn exclusief € 1,- tbv het restauratiefonds van Carré</small> | | |

figuur 5

- a Maak een schatting van de gemiddelde opbrengst per voorstelling voor de Nederlandse schatkist, met 6% BTW op de toegangskaarten.
b Ontwerp een opdracht voor leerlingen van eind groep 7 rond het onderwerp BTW en vertel erbij welk niveau van oplossen je wenselijk acht voor leerlingen van de bovenbouw.

6. Toename en afname

Je vriendin beweert dat jouw loon na 10% loonsverlaging en daarna 10% loonsverhoging weer op het oorspronkelijke bedrag terug is. Klopt dat?

- a Wat denk jij:
– ze heeft gelijk, of
– liever eerst 10% verlaging daarna verhoging, of
– liever eerst 10% verhoging daarna verlaging?
Wat is de redenering bij jouw keuze?
b Wat is hier volgens jou de kern van de problematiek?
c Welke vragen zou je stellen aan leerlingen (uit groep 7) die niet in staat blijken om aan dit probleem te beginnen?

7. Foto in- en uitzoomen

Van een foto in jouw computerbestand wil je een klein en een groot formaat hebben. Je zoomt daartoe eerst in op 50% en drukt de foto af en daarna zoom je 150% uit en drukt de grote foto ook af.

- a Wat is de percentuele afname, respectievelijk toename van de hoeveelheid fotopapier ten opzichte van de originele foto?
- b Vind je dit een geschikt probleem om aan de orde te stellen in groep 8? Onderbouw je conclusie met argumenten en alternatieven.

| Soort drank | Hoeveelheid drank | Percentage alcohol | Pure alcohol cc (ml) | Pure alcohol in mg (sm 0,8, dus 1 ml \cong 0,8 mg) |
|------------------------|-------------------|--------------------|----------------------|--|
| Bier (standaardglas) | 250 cc | ?? % | 12,5 cc | $12,5 \times 0,8 = 10$ mg |
| Wijn (standaardglas) | 100 cc | 12% | ?? cc | ?? |
| Sterke drank (st glas) | 35 cc | ?? % | 12,25 cc | ?? |
| Mixdrank uit flesje | ?? cc | 5,6% | 15,4 cc | ?? |

figuur 7

8. Niveaus in probleemsituaties

Onderstaande probleemsituaties verschillen in niveau wat betreft het inzicht dat vereist is in verhoudingen en procenten. Zet de opgaven in volgorde van laag naar hoog niveau en beredeneer waarom je het probleem die plaats in de ordening wilt geven.

- a Wat is het voordeligst: 5 zakjes bugles (elk 125 gram inhoud) met 25% korting, 5 zakjes voor de prijs van 4 of 5 zakjes voor de gewone prijs met elk een extra inhoud van 25 gram?
- b Een korting van 25% is hetzelfde als een kwart korting.
- c Hoe reken je 27% van € 683 uit met de zakrekenmachine?
- d 19% BTW van € 550 is ongeveer een vijfde deel en dat is € 110; eigenlijk 1% minder, dus $110 - 5,50 = 104,50$.
- e Uit het hoofd: 37,5% van € 32 is € .. ?
- f Zaterdag is de neerslagkans 50%, zondag 20%. In het weekend is er dus 70% kans op regen.
- g We gaan een overzicht maken van de percentages die de 5 partijen in onze groep 8 hebben gekregen in deze verkiezingsronde. Hoe zullen we dat in een duidelijke tekening weergeven?
- h 200% van € 28,50 is €
- i De computer *downloadt* een document. Ongeveer welk percentage is al binnen (fig.6)?



figuur 6

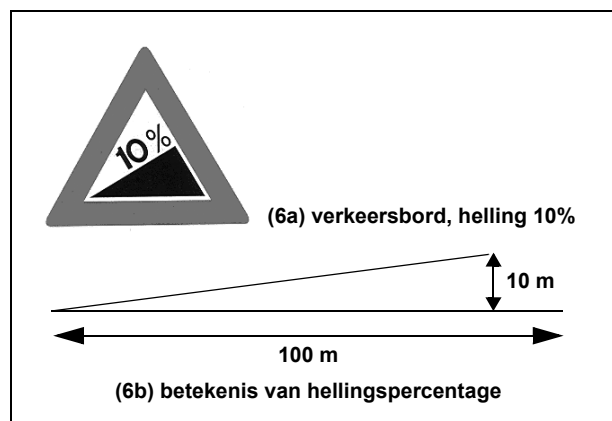
- j Uit het hoofd: is 33% van € 660 meer of minder dan 40% van € 550?
- k De inflatie, de waardevermindering van het geld, was in 2008 en 2009 respectievelijk 2,5 en 1,2%. Wat is er met de waarde van mijn spaarbedrag (€ 7000 tegen 4% rente per jaar) gebeurd in die twee jaar?
- l In de Verkeerswet staat dat iemand die meer dan 0,5 promille alcohol in zijn bloed heeft, niet aan het verkeer mag deelnemen (dus ook niet op de fiets of de brommer). De hoeveelheid alcohol in het bloed, het bloedalcoholgehalte (BAG), wordt uitgedrukt in promillages. Een promillage van 0,5 wil zeggen dat 1 cc

(= 1 milliliter) bloed een halve milligram pure alcohol bevat. Dit percentage bereik je al na het drinken van twee glazen alcohol in een uur.

Bepaal de ontbrekende getallen en bereken het percentuele verschil tussen de twee dranken met naar verhouding de minste en de meeste alcohol (fig.7).

9. Hellingspercentages

Percentages worden ook gebruikt om aan te geven hoe steil een helling is. Een hellingspercentage van 10% betekent dat de helling over elke 100 meter, horizontaal gemeten, 10 meter in hoogte stijgt (fig.8a en 8b).



figuur 8a en 8b: tien procent hellingspercentage

- a In Wales zijn weggetjes waar hellingen van 25% voorkomen. Ze worden wel de *Devil's staircase* (trappenhuis van de duivel) genoemd. Hoe ziet de bijbehorende driehoek (vergelijk figuur 8b) er uit?

- b Stel je voor een helling waarbij elke 4 meter (horizontaal) een stijging van 3 meter betekent. Teken de bijbehorende driehoek en reken uit wat het hellingspercentage is.
- c Zoek in het geval van de helling bij vraag b. uit, hoeveel meter je stijgt als je een weg ('de schuine zijde' van de driehoek) aflegt van 550 m.
Tip: het getal van de ontbrekende schuine zijde in de drie verhoudingsgetallen van de hellingsdriehoek kun je vinden door de stelling van Pythagoras te gebruiken ($c^2 = a^2 + b^2$), waarin c het getal is dat hoort bij de schuine zijde.

10. Gemiddeld verbruik

Naomi discussieert met haar medestudent Boris over het gemiddelde benzineverbruik van een auto die bergopwaarts een verbruik heeft van 1 op 10 en dezelfde weg terug 1 op 16. Boris denkt dat het gemiddelde verbruik over de totale afstand (heen en terug) 1 op 13 is. Naomi trekt zijn conclusie in twijfel en beweert dat het totale benzineverbruik ruim 5% minder is dan Boris veronderstelt.

- a Neem een standpunt in. Kies een voorbeeld aan de hand waarvan je kunt laten zien hoe het zit, met een uitleg die ook voor leerlingen van groep 8 te begrijpen is.
- b Bedenk een soortgelijke opgave die wat eenvoudiger is en zou kunnen dienen als voorbereiding op dit probleem.

Reflectie

Bij de constructie van de opgaven lieten we ons allereerst leiden door wat gepubliceerd is over de pabo gerelateerde referentieniveaus 1 en ten dele 2 en 3S (Expertgroep Doorlopende leerlijnen, de 'Commissie Meijerink', 2008, 2009) en de uitwerkingen ervan in de kennisbasis voor de lerarenopleiding Basisonderwijs (ELWIJER / Panama, 2009). In het bijzonder waren voor ons de vier in de kennisbasis beschreven vakdidactische competenties (pag.8 en 9) nuttige richtlijnen.

De kennis en vaardigheden op referentieniveau 1 en 2 (bo t/m mbo 3) komen in alle opgaven vaak impliciet aan de orde. Het gaat dan om de leerstof van de basisschool die studenten (uiteraard) zelf moeten beheersen ten behoeve van het (leren) onderwijzen. Neem bijvoorbeeld de relatief eenvoudige opgave 1 ('Vijf halen, vier betalen').

De student moet om te beginnen zelf die opgave vlot kunnen oplossen (referentieniveau 1S; competentie 1), dat wil zeggen: inzien dat je 1 op de 5 korting krijgt (en niet 1 op de 4), weten dat de verhouding 1 op 5 of de breuk $\frac{1}{5}$ gelijkwaardig is aan $\frac{20}{100}$ deel ofwel 20 procent. Verder moet de student meerdere, ook foutieve oplossingen van kinderen paraat hebben en modellen kennen om kinderen inzicht te geven en hen leren redeneren over deze kortingsproblematiek 'van ... voor'. Het mathemati-

seren is hier het vertalen van de voordeelsituatie naar procentaantal en didactiseren komt bijvoorbeeld naar voren bij het gebruik van de procentenstrook met passende vraagstelling. Ze gaan hier hand in hand. Dat moet uiteindelijk leiden tot het realiseren van niveauverhoging (referentieniveau 1 en 3S; competentie 3 en 4). De maatschappelijke relevantie spreekt voor zich; in dit geval gaat het om het juist en vlot kunnen interpreteren van een aanbieding in een advertentie. Omgekeerd moet de student ook in staat zijn om dergelijke contexten te ontwerpen om betekenis te geven aan de samenhang tussen verhoudingen, breuken en procenten (referentieniveau 3S; competentie 2).

Het voorgaande maakt duidelijk dat opgave 1 een beroep doet op een breed spectrum van vak- en vakdidactische kennis en ook het hoogste beroepsspecifieke referentieniveau bereikt. Dat geldt ook voor de andere negen opgaven, ze verschillen echter in niveau en gebruik van vak- en vakdidactische kennis- en vaardigheidsaspecten.

Ten eerste betreft dat de betekenis van procenten, zich manifesterend in verschijningsvormen van procenten als deel van een totaal (opgave 1, 2, 3, 8 en 10) of als toe- en afname (opgave 4, 5, 6, 7, 8 en 9).

Ten tweede gaat het om specifieke aspecten van het standaardiseren op honderd, zoals de procenten-asymmetrie (opgave 3 en 6) of het optellen of aftrekken van percentages van eenzelfde totaal (opgave 6 en 8f; deze opgaven vooral als non-voorbeelden).

Een derde aspect betreft de specifieke rekenaanpakken met procenten, van handig rekenen, al dan niet met breuken, verhoudingen of kommagetallen (opgave 2, 5a, 8a, b, e, h, j en 1 en 10), tot het gebruikmaken van percentages als vermenigvuldigfactor (opgave 4, 6 en 8c en k; eventueel met behulp van rekenmachine) en de 1 procentregel (opgave 4 en 8c).

Referentieniveau 3S en de competenties 2 tot en met 4 komen vooral in beeld bij de opgaven waar studenten kennis van modellen en schema's moeten inzetten en waar ontwerpactiviteiten van hen worden gevraagd (opgave 1b, 3b, 5b, 6c, 7b, 8g en 10).

De ontwerpactiviteiten en de reflectieve notities (opgave 1b, 3, 5b, 6b en 7b) tonen het gewenste hbo-niveau. Dat geldt ook het gebruik van vakspecifieke kennis die niet direct een toepassing kent in de basisschool, maar wel geacht wordt tot het kennisrepertoire van de leraar basisonderwijs te behoren. Een voorbeeld daarvan is het begrip inflatiepercentage (opgave 8k).

Hiervoor is al genoemd de aandacht voor de samenhang van het domein procenten met de domeinen verhoudingen, breuken en (komma)getallen. Ook kennis en vaardigheid met betrekking tot de verstrengeling van procenten met andere domeinen is voor de student van belang. In opgave 7 komt de relatie procenten en oppervlakte aan orde, in opgave 9 met meetkunde. Opgave 8g suggereert het gebruik van het cirkeldiagram voor pro-