

Greep krijgen op de toetsing van de Kennisbasis rekenen-wiskunde

R. Keijzer, F. Garssen & A. Peijnenburg
Hs. iPabo Amsterdam/Alkmaar / Stenden Hs. Assen &
Fontys Pedagogische opleidingen 's-Hertogenbosch

De implementatie van de 'Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo' moet onder meer bezien worden in het kader van de aankomende landelijke toetsing van deze kennisbasis. Opleiders maken zich zorgen om deze toetsing, omdat hen het gevraagde niveau en de aard van de vragen onvoldoende helder is.

Dit artikel bespreekt vijf vrijgegeven toetsopgaven van deze kennisbasistoets. Een analyse van reacties van lerarenopleiders leert dat een van de vrijgegeven opgaven, namelijk die rond het rekenen met binaire getallen, behoorlijk wat vragen oproept. Die hebben voor een deel te maken met de bruikbaarheid van deze kennis binnen het beroep van leraar basis-onderwijs en voor een ander deel met kennis en vaardigheden van opleiders zelf.

1 Inleiding

Het implementeren van de 'Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo' (kortweg Kennisbasis) vraagt een behoorlijke investering van de lerarenopleidingen. Studenten die in september 2011 aan de opleiding begonnen, zullen in 2013 of 2014 moeten laten zien dat zij een voldoende kennisbasis verworven hebben om de toets voldoende te scoren. Op dat moment krijgen zij namelijk de landelijke kennistoets voorgelegd, waarmee nagegaan wordt of zij greep hebben op de wiskundekennis die de Kennisbasis vraagt. Juist dit element van de Kennisbasis roept discussie op bij opleiders, omdat niet helder is welke vaardigheid studenten bij de toets precies moeten tonen (Kool, 2011; Lit, 2011; Lit, 2010; Van Dam-Schuringa & Terlouw, 2012).

Om opleiders meer zicht te geven op de inhoud en het niveau van de toets, werden in 2010 twaalf opgaven vrijgegeven, die daarop zelf onderwerp van discussie werden. In die discussies tijdens een studiedag voor opleiders in november 2010 kwam onder andere naar voren dat:

- men bij verschillende opgaven het nut niet herkende voor het beroep van leraar basisonderwijs,
- men verschillende kanttekeningen had bij de gebruikte formuleringen;
- een aanzienlijke groep opleiders aangaf zichzelf onvoldoende geëquipeerd te voelen om de wiskunde onder de opgaven aan studenten te leren - bijvoorbeeld omdat zij hier zelf moeite mee hebben.

Deze bijdrage gaat over enkele vrijgegeven items voor de kennisbasistoets. We presenteerden vijf nieuwe opgaven tijdens een opleidersdag voor lerarenopleiders rekenen-wiskunde in november 2011. We bespreken vier van deze opgaven in paragraaf 3. Het bespreken van deze opgaven leerde dat slechts een van de vijf opgaven daadwerkelijk tot discussie leidde, namelijk de vraag het decimale getal 25 te schrijven als binair getal. We gaan specifiek op deze opgave in. Dit doen we in paragraaf 4.

Dit artikel vervolgt in paragraaf 5 met een beschrijving van de werkwijze van de itemconstructeurs bij het onderbouwen van de items en een aanpalende analyse welke eisen de beoogde vaardigheden stelt aan het opleidings-onderwijs. In een afsluitende paragraaf brengen we de reacties van opleiders en de onderbouwingen met elkaar in verband.

2 Achtergrond

Leraren hebben kennis nodig om hun onderwijs vorm te geven. Dit is de gedachte die geleid heeft tot de opdracht kennisbases samen te stellen. Bij het samenstellen van de Kennisbasis is, in het verlengde van de opdracht, gekozen voor het benadrukken van de wiskundige kennis van studenten (Van Zanten, 2010). Dit werd op zijn beurt ingegeven door de maatschappelijk onrust rond het vak rekenen-wiskunde op de lerarenopleiding basisonderwijs en de vaststelling dat de aandacht voor de inhoud van het vak rekenen-wiskunde voor het verschijnen van de Kennisbasis gering was (KNAW, 2009).

Echter leraren hebben veel meer kennis nodig dan rekenwiskundige kennis. En hoewel er aanwijzingen zijn dat een behoorlijke vakinhoudelijke kennis bijdraagt aan de kwaliteit van het door de leraar te verzorgen onderwijs, wordt de kwaliteit daarvan evenzeer bepaald door andere soorten kennis, attitudes van leraren en persoonlijke voorkeuren en de manier waarop deze kennis, vaardigheden en attitudes verworven worden (Putnam & Borko, 2000; Mandeville & Liu, 1997; Van der Sandt, 2007). Hoewel de constructieopdracht luidde items te maken rond wiskundige kennis, als beschreven in de Kennisbasis, is bij de itemconstructie zeker rekening gehouden met het idee dat een leraar meer nodig heeft dan vak-kennis. We vonden daarvoor ook aangrijpingspunten in de Kennisbasis zelf, waar staat geschreven dat de Kennisbasis gezien kan worden als operationalisering van de professionele gecijferdheid van de leraar (Van Zanten, e.a., 2009; Oonk, Van Zanten & Keijzer, 2007). We vonden een verdere operationalisering bij Ball e.a. (2008), die als kennis van de leraar rond het vak rekenen-wiskunde onderscheiden:

- *subject matter knowledge*, namelijk *common content knowledge* (wiskunde die je dagelijks nodig hebt), *horizon content knowledge* (wiskunde in verlengde van basisschool, maar op een hoger niveau) en *specialized content knowledge* (kennis specifiek voor de leraar);
- *pedagogical content knowledge*, namelijk *knowledge of content and students* (kennis van het vak met het oog op leren van leerlingen), *knowledge of content and teaching* (kennis van het vak met het oog op onderwijzen) en *knowledge of content and curriculum* (kennis van onderwijsmaterialen en leerlijnen).

De opleidingen hebben de taak in al deze richtingen bij studenten kennis te ontwikkelen. Dat biedt hen ook de mogelijkheid om samenhang te creëren bijvoorbeeld tussen kennis van de wiskunde, inzicht in wiskundige structuren, visies op het leren en onderwijzen van kinderen. De Kennisbasis heeft een smallere scope, want daarin gaat het bijvoorbeeld niet om kennis van onderwijsmaterialen en ook niet om het helpen van leerlingen met problemen. De scope van de kennisbasistoetsing is nog beperkter. De toets richt zich louter op de kenniselementen, die Ball e.a. benoemen als *subject matter knowledge*.

3 Aanpak opleider en kennis en vaardigheden van studenten

We vroegen opleiders tijdens de werkgroep van 11 november 2011 om vijf opgaven te maken en om aan te geven welke kennis en vaardigheden de opgaven van studenten vragen. Tot slot vroegen we de opleiders de moeilijkheid van de opgaven in te schalen. Ze konden aangeven of ze de opgaven voor studenten die drie jaar zijn voorbereid op de kennisbasistoets ‘makkelijk’, ‘drempel’ of ‘moeilijk’ vonden, waarbij met ‘drempel’ bedoeld wordt dat de opgaven nog net haalbaar zijn voor studenten die de toets voldoende gaan scoren. De opgaven werden voorgelegd aan in totaal 78 opleiders. We vroegen hen de opgaven op te lossen in dezelfde tijd, namelijk twee minuten per opgave, die hiervoor op termijn aan studenten gegeven wordt.

Figuur 1 geeft een overzicht van de goedscores van de deelnemers aan de werkgroep, waarbij moet worden aan-

opgave	1		2		3		4		5	
deelnemers	78	%	78	%	78	%	78	%	78	%
gemaakt	78	100,0	67	85,9	77	98,7	73	93,6	75	96,2
niet gemaakt	0	0,0	11	14,1	1	1,3	5	6,4	3	3,8
goed	76	97,4	51	65,4	76	97,4	65	83,3	57	73,1

figuur 1

getekend dat daar waar de goedscores worden aangegeven als percentage, het totaal aantal opleiders dat heeft deelgenomen aan de werkgroep als uitgangspunt is genomen. Met andere woorden: niet gemaakte opgaven zijn hierbij als fout aangemerkt.

We bespreken in deze paragraaf vier van de vijf opgaven, omdat deze tot aanzienlijk minder discussie leidden dan de vijfde. Deze vijfde opgave - met het volgnummer 2 - valt ook in het overzicht op. Relatief veel opleiders kozen ervoor deze opgave niet te maken. Slechts ruim 65 procent van de opleiders gaf het correcte antwoord. Een meerderheid van de opleiders vond deze opgave moeilijk voor studenten. Ook opgave 5 wijkt wat af in het overzicht in figuur 1. Deze opgave leidde echter niet tot discussie. Uit de besprekingen leerden we dat de opleiders de opgave niet echt moeilijk vonden, namelijk minder moeilijk dan een ‘drempelopgave’. We vermoeden dat de beperkte tijd die opleiders kregen om de opgaven te maken hier parten speelde. Ze kwamen wellicht niet aan opgave 5 toe.

In de nu volgende bespreking van opgave 1, 3, 4 en 5 beschrijven we eerst voor iedere opgave de aanpak van de opleiders. Daarna laten we zien hoe moeilijk opleiders de opgave voor studenten inschatten. Dit doen we door

middel van een getal, en wel op de volgende wijze. Wanneer alle opleiders een opgave makkelijk vinden voor hun studenten, dan geven we dit aan met het getal '0'. Op dezelfde wijze geven we een drempelopgave de waarde '1' en een moeilijke opgave het getal '2'. Omdat we gemiddelden uitrekenen, is het getal dat de moeilijkheid aangeeft in het algemeen geen geheel getal. Bijvoorbeeld de moeilijkheid van de boven beschreven opgave 2 heeft in de ogen van de opleiders een moeilijkheid van 1,55 en is in de ogen van opleiders gemiddeld genomen een redelijk moeilijke opgave. De moeilijkheidsgraad van opgave 5 is 0,72. Deze opgave is daarmee een opgave die gemiddeld als iets minder moeilijk gezien wordt dan een zogenoemde drempelopgave. We geven bij de opgaven ook een spreidingsmaat aan. We doen dit door middel van het vermelden van de standaarddeviatie (*sd*). In het algemeen ligt zo'n 70 procent van de waarden tussen het gemiddelde min de standaarddeviatie en het gemiddelde plus de standaarddeviatie.

Bij opgave 2 is de standaarddeviatie bijvoorbeeld 0,694. Dit betekent dat ongeveer 70 procent deze opgave inschat tussen $1,55 - 0,694 (= 0,856)$ en $1,55 + 0,694 (= 2,244)$. Deze meerderheid vindt dit dus een moeilijke opgave (2) of een op drempelniveau (1). De opdracht die we de opleiders ook meegeven is het beschrijven van de kennis en vaardigheid die studenten nodig hebben voor de opgave in kwestie.

Opgave 1

De eerste opgave op het opgavenblad dat wij opleiders voorlegden richt zich op inzicht in de effecten van de bewerking vermenigvuldigen en de plaatswaarde van cijfers in het antwoord van een vermenigvuldiging.

Opgave 1: Cijfer en antwoord

Welk cijfer staat er in de uitkomst van 877651×76523 = op de positie van de *tientallen*?

Vrijwel alle opleiders maakten deze opgave goed en zij ervoeren deze ook vaak als gemakkelijk voor studenten of zagen in deze opgave een typische drempelopgave (moeilijkheidsgraad 0,61; *sd* 0,62). In figuur 2a en 2b geven we de twee meest gekozen aanpakken weer. De aanpak in figuur 2a is korter dan die in 2b.

We zagen dat enkele opleiders die startten met de minder verkorte variant nog tijdens het rekenwerk de meer efficiënte aanpak zagen. Vrijwel alle opleiders wisten aan te geven welke kennis en vaardigheden studenten nodig hebben om dit probleem op te lossen.

Veel opleiders noteerden hier verschillende zaken. In totaal 73 keer gaven zij aan dat de student hier inzicht in het getalsysteem moet tonen en moet ontdekken dat het niet nodig is de hele som uit te rekenen. Verder werd 57 keer genoteerd dat het hier ging om het tonen van vaardigheid in het cijferend vermenigvuldigen.

Voorale opleiders die ervoor kozen de opgave cijferend aan te pakken, noteerden dit op hun blad. Opleiders die

kozen voor de efficiënte aanpak van figuur 2a noteerden in het algemeen dat studenten inzicht moeten tonen in het getalsysteem.

Handwritten calculation for figure 2a: $3 \times 5 = 15$, $1 \times 2 = 2$, and a final result of 17 with a circled 7.

2a

Handwritten calculation for figure 2b: Long multiplication of 877651 by 76523, with a circled 7 and an arrow pointing to it.

2b

figuur 2a en 2b

Opgave 3

Bij opgave 3 op het blad voor de opleiders gaat het om het omzetten van een kommagetal in een breuk. Het gevraagde antwoord is de noemer van deze breuk, wanneer deze zo veel mogelijk vereenvoudigd is.

Opgave 3: Getal in noemer

Van het kommagetal 0.0215 wordt een breuk gemaakt. Deze breuk wordt vervolgens zoveel mogelijk vereenvoudigd.

Wat is de noemer van deze vereenvoudigde breuk als de boven genoemde stappen wiskundig correct zijn uitgevoerd?

Net als opgave 1, ervoeren de aanwezige opleiders deze opgave niet als moeilijk voor studenten, maar ook niet als erg makkelijk. De moeilijkheidsgraad van deze opgave is 0,5 (*sd* 0,64), waarmee die precies midden tussen 'makkelijk' en 'drempel' scoort. De opleiders maakten de opgave in het algemeen zelf ook goed.

Het vertalen van het kommagetal in een breuk kan bijvoorbeeld gebeuren door het kommagetal te herschrijven als $\frac{215}{10000}$.

De teller en de noemer zijn beide een veelvoud van 5. Dat betekent dat beide gedeeld kunnen worden, $\frac{43}{2000}$. Het getal 43 is een priemgetal en daarom is 2000 de noemer van de meest vereenvoudigde breuk.

Deze aanpak werd door veel opleiders gekozen en om dit te kunnen moet je:

- van een kommagetal een breuk kunnen maken met als noemer een macht van 10;
- de rekenregel voor gelijkwaardige breuken kennen: onder en boven de breukstreep vermenigvuldigen met of delen door eenzelfde getal;

- deelbaarheid door 5 herkennen in eerste teller of noemer;
- na deling vaststellen dat 43 en 2000 onderling ondeelbaar zijn en dat is zeker het geval als 43 een priemgetal is.

Wanneer we de opleiders vragen welke kennis en vaardigheden dit van studenten vraagt, brengen zij de volgende vijf punten naar voren. De genoemde punten komen grofweg overeen met de boven genoemde.

- decimale getallen kunnen omzetten in breuken (43 keer genoemd);
- kunnen vereenvoudigen (36 keer genoemd);
- weten wat teller/noemer is (19 genoemd);
- deelbaarheid (18 keer genoemd) en priemgetallen (11 keer genoemd).

Opgave 4

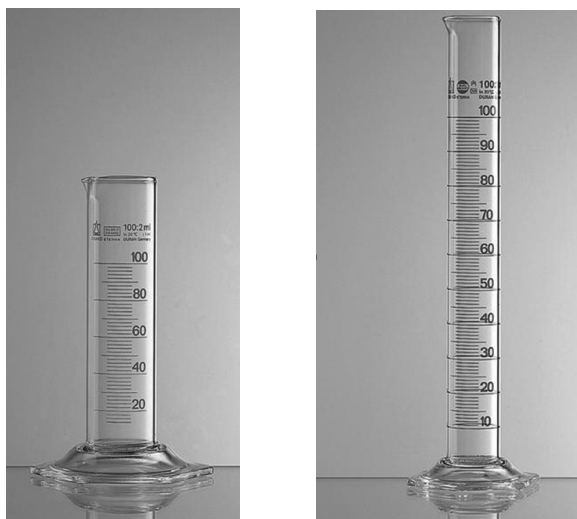
De vierde opgave komt uit het domein ‘meten’. Hier gaat het om het doorzien van relaties tussen inhoud, oppervlakte en hoogte.

Opgave 4: Maatcilinders

In een maatcilinder met een diameter van 5 cm staat het water 20 cm hoog.

Het water uit deze maatcilinder wordt overgegoten in een maatcilinder met een diameter van 10 cm.

Hoe hoog staat het water in de grote maatcilinder (fig.3).



figuur 3

In dit geval wordt de diameter verdubbeld. Dat betekent dat de oppervlakte van het grondvlak vier keer zo groot wordt. De inhoud kan berekend worden via ‘oppervlakte grondvlak’ keer ‘hoogte’. De inhoud blijft gelijk en dus is de hoogte in de tweede cilinder een vierde van dat van de eerste, 5 cm.

Veel opleiders ervoeren dit als een redelijk moeilijke opgave. De moeilijkheidsgraad is 1,49 (sd. 0,64). Dit

houdt waarschijnlijk verband met de aanpakken die we bij opleiders zelf zagen. Vrijwel alle opleiders vonden hier een correct antwoord, maar een enkeling ging daarbij niet te werk als boven aangegeven - een aanpak die we kunnen typeren als ‘met inzicht, zonder veel rekenwerk’. Deze opleiders berekenden de inhoud via de inhoudsformule voor een cilinder om de twee situaties vervolgens met elkaar te verbinden. We kregen overigens ook de indruk dat er opleiders waren die deze minder efficiënte aanpak kozen om het aanvankelijke antwoord te controleren.

Om de efficiënte aanpak te kunnen gebruiken, moet je op verschillende manieren relaties tussen inhoud, oppervlakte en lengte doorzien. Met name is het inzicht in de kwadratische vergroting bij oppervlakte van belang. Voor de minder efficiënte aanpak is het nodig dat de student de formules voor de inhoud van een cilinder kent (of razendsnel afleidt).

We zagen dat de door opleiders omschreven benodigde kennis aansloot bij de door hen zelf gekozen aanpak. Een aantal van 45 opleiders gaf aan dat bij deze opgave inzicht nodig is in de vergrotingsfactor bij lengte, oppervlakte en inhoud. Bijna eenzelfde aantal opleiders (44) gaf aan dat studenten de bij deze situatie passende formules moeten kennen. Zes opleiders losten het probleem op door gebruik te maken van een vergelijking (fig.4). Zij gaven ook aan dat de opgave dit van studenten vraagt.

$$\text{Inhoud} = \pi r^2 \times h \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi \cdot 2,5^2 \times 20 \\ \pi \cdot 5^2 \times h \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} h = \frac{6,25 \times 20}{25} \\ h = 5 \text{ cm} \end{array} \right.$$

figuur 4: uitwerking opleider bij opgave 4

Opgave 5

Opgave 5: Procenten

Na een prijsverhoging van 9% werd de nieuwe prijs van een artikel € 11,99.

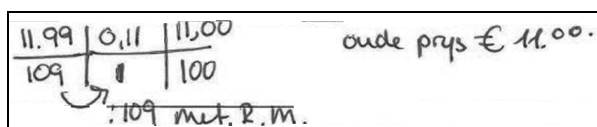
Wat was de prijs voor de prijsverhoging?

Gebruik uw telefoon als rekenmachine.

De laatste opgave in de serie van vijf die aan opleiders werd voorgelegd, veroorzaakte aanvankelijk enige verwarring. De opgave vraagt om het gebruik van een rekenmachine. Dit was zo gekozen, omdat het gebruik van de rekenmachine ook in de Kennisbasis is vastgelegd. Bij digitale afname van het item verschijnt er dan een rekenmachine in beeld of kan de student die via een knop snel bereiken. Omdat de opgaven op papier aan de opleiders werden voorgelegd, lasen zij in de tekst dat het de bedoeling was de mobiele telefoon als rekenmachine te gebruiken. Enkele opleiders vonden het vreemd dat studenten tijdens de toets over een mobiele telefoon mochten beschikken. Andere opleiders vonden de aanwijzing voor het gebruik van de rekenmachine vreemd, omdat zij het idee hebben dat studenten dit zonder reken-

machine moeten kunnen aanpakken. We gaven eerder aan dat veel opleiders deze opgave niet goed maakten, maar dat ze deze toch niet al te moeilijk inschatten voor studenten (moeilijkheidsgraad is 0,72 met een *sd* van 0,65). We vermoeden dat opleiders het antwoord nogal eens haastig hebben ingevuld. We concluderen daarom voorzichtig dat verschillende opleiders hier in tijdnood kwamen.

Het met een rekenmachine oplossen van dit probleem vraagt dat het getal 11,99 gezien wordt als 109 procent, waarbij de oude prijs (100 procent) uitgerekend wordt door 11,99 te delen door 1,09. Een rekenmachine leent zich goed om deze deling snel en foutloos uit te rekenen. Aan de antwoorden van de opleiders zagen we dat zij in een enkel geval een tussenstap hebben gezet (fig.5). Verder brachten opleiders als het gaat om kennis en vaardigheden van studenten de meer algemene aanduidingen: redeneren (43 keer), procenten en procentrekenen (34 keer) en rekenmachine (9 keer) naar voren.



figuur 5: uitwerking opleider bij opgave 5

4 Binaire getallen

Slechts een van de gepresenteerde opgaven riep behoorlijk wat discussie op. Dat was een opgave waarin we vroegen het decimale getal 25 te schrijven als binair getal.

Opgave 2

Het decimale getal 25 wordt in het binaire stelsel geschreven als ...

Bij het samenstellen van de opgaven verwachtten we niet dat deze opgave tot discussie zou leiden. Het gaat immers om een opgave die rechtstreeks uit de Kennisbasis is afgeleid. Daarin worden in paragraaf 2.2.2 verschillende talstelsels besproken, waaronder het binaire stelsel, en wordt vervolgens gesteld:

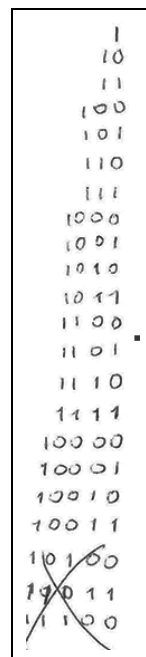
De startbekwame leerkracht (...) is op de hoogte van de overeenkomsten en verschillen tussen de verschillende getalsystemen. Hij/zij overziet de specifieke eigenschappen van een systeem en heeft inzicht in het decimaal positioneel getalsysteem.

en ook:

Verder is een startbekwame leerkracht in staat om getallen die zijn weergegeven in een ander talstelsel om te zetten in het decimale talstelsel en omgekeerd.

(Van Zanten e.a., pag.52-53)

Het ligt voor de hand om een dergelijke aanwijzing in de Kennisbasis te operationaliseren in een vraag om een getal in het ene getallenstelsel om te rekenen naar een getal in een ander getallenstelsel. Verschillende mondelinge reacties van deelnemers ondersteunen deze redenering. Zicht op getallenstelsels verdiept kennis van het decimale getallenstelsel en het proberen te doorgronden van verschillende stelsels maakt studenten bewust van de moeilijkheden die kinderen kunnen ervaren (Goffree, 1979). Een tweetal opmerkingen die deelnemers spontaan noteerden op het uitgedeelde werkblad wijzen ook in deze richting. Een van de aanwezigen schrijft dat hij of zij hiermee met eerstejaars aan de slag is gegaan en dat ze dit snel leerden. Een ander verwijst naar vergelijkbare opgaven voor groep 8 in de methode 'Pluspunt'.



figuur 6: aanpak bij het omzetten decimaal getal 25 in binair getal

Dat neemt niet weg dat een aanzienlijk aantal aanwezigen onze keuze voor deze opgave niet zo voor de hand liggend vond. Ze reageerden tijdens de werkgroep en noteerden - ongevraagd - hun mening op het werkblad. Daar lasen we over deze opgave:

- Leuk als extra.
- Dit is voor mij niet de essentie; het is niet betekenisvol.
- Ik heb geen idee wat een binair stelsel is.
- Het oplossen van een dergelijke opgave vraagt oefening en vaardigheid.
- Dit is niet gewoon 'moeilijk' maar 'zeer moeilijk' of zelfs 'te moeilijk'.
- Dit vraagt veel oefening.
- Ik heb dit zelf nooit gedaan, maar is wel gemakkelijk te leren. Ik vraag me wel af wat het nut hiervan is?
- Dit is heel moeilijk als dit niet onderwezen is.

- Dit toetst onnuttige kennis, maar misschien haalbaar als we er onderwijstijd in steken.
- Dergelijke leerstof krijgen de studenten nu (nog) niet.
- Ik los dit op door binair te tellen (fig.6).
- Als je dit weet, dan is het niet moeilijk.
- Waarom zit dit in de toets?
- Dit moet ik zelf nog leren.
- Dit is makkelijk als de kennis aanwezig is.
- Dit is totaal onbelangrijk.

We zochten naar mogelijke verklaringen voor deze negatieve reacties. Die zijn in onze ogen nogal verschillend van aard en daarom formuleren we de verklaringen hier als hypothesen, die telkens een of enkele reacties raken.

score opleiders	goed	fout	niet gemaakt
%	65	21	14
omschrijving kennis en vaardigheden	overeenkomstig ontwerpers	niet overeenkomstig ontwerpers	niet ingevuld
%	61	29	10
aangegeven moeilijkheidsgraad	makkelijk	drempel	moeilijk
%	11	23	66

figuur 7: overzicht opgave 2 aan de hand van reacties opleiders (in procenten)

- 1 Opleiders schrikken van deze opgave, want deze leerstof is niet ingebed in het opleidingsonderwijs dat nu op de rails gezet wordt.
- 2 Opleiders verzetten zich tegen deze opgave, omdat onderliggende kennis in hun ogen moeilijk kan worden aangebracht bij studenten.
- 3 Opleiders weten niet hoe je dit aan studenten moet onderwijzen en welke kennis en vaardigheden dit van studenten vraagt.
- 4 Opleiders schrikken, omdat ze zelf onvoldoende in staat zijn om deze opgave te maken.
- 5 Opleiders verzetten zich tegen deze opgave, omdat de getoetste kennis weinig van doen heeft met door hen beoogde beroepsvaardigheden.
- 6 Opleiders verzetten zich tegen deze opgave, omdat ze niet begrijpen en/of inzien wat de getoetste kennis van doen heeft met beoogde beroepsvaardigheden.

De antwoordbladen die de opleiders invulden bieden informatie om enkele van deze hypothesen verder te analyseren. Dit geldt overigens niet voor hypothese 1, 5 en 6. Die kunnen we niet onderbouwen met getalsmatige informatie. Dat lukt wel voor de overige drie hypothesen. We vroegen de opleiders immers ook om bij deze opgave zelf een oplossing te geven. We vroegen hen verder kennis en vaardigheden van studenten te omschrijven en aan te geven hoe moeilijk ze de opgave vonden.

Figuur 7 geeft een overzicht. Dit overzicht over opgave 2

geeft in ieder geval aanwijzingen voor de geldigheid van hypothese 2, 3 en 4, voor ongeveer een derde van de opleiders. Dit deel van de opleiders maakt de opgave namelijk zelf fout of beantwoordt de vraag niet. Hetzelfde deel van de opleiders geeft daarnaast de vaardigheid van studenten niet correct weer.

Wanneer we via een regressieanalyse deze gegevens verder onderzoeken, blijkt dat de kwaliteit van het gegeven antwoord een voorspeller is van de aangegeven moeilijkheidsgraad van de opgave (significant, $p = .002$). Anders gezegd, opleiders die de opgave fout maken, schatten ook in dat de opgave moeilijk zal zijn voor studenten. Dit vormt een aanwijzing voor hypothese 4.

We gingen met een regressieanalyse ook na of er een ver-

band is tussen de aangegeven moeilijkheid van de opgave (voor studenten) en het correct aangeven van vaardigheden van studenten. Die relatie is er wel, maar die is niet significant ($p = .1$). Er zijn aanwijzingen dat opleiders die deze opgave moeilijk vinden voor studenten, minder goed in staat zijn om de benodigde kennis en vaardigheid van studenten correct aan te geven. Dit doet vermoeden dat er een verband is tussen hypothese 2 en 3.

Ook de analyse van reacties op de in 2010 vrijgegeven opgaven toont een dergelijk beeld. Toen bleek dat veel opleiders opgaven waar zij zelf mee worstelden, typeerden als moeilijk haalbaar op de opleiding. We merkten toen dat het vooral opleiders zonder specifieke wiskundige achtergrond zijn die op een dergelijke manier worstelen met de Kennisbasis (Keijzer, 2011a).

5 Kennis en vaardigheden

De operationalisering van de Kennisbasis, om deze aldus toetsbaar te maken lag bij het team dat de items construeerde (Keijzer, 2011a). Dat maakte dat dit ontwikkelteam een systematische werkwijze moest ontwikkelen om tot een dergelijke operationalisering te komen. In verschillende slagen werd de Kennisbasis bewerkt tot een matrix (fig.8) met vijftien cellen, die telkens staan voor

specifiek te toetsen onderdelen. Deze matrijs en de uitwerking ervan wordt toegelicht in de zogenoemde syllabus rond de toetsing, waarvan tijdens de opleidersdag in november een eerste versie is verspreid (10vdl, 2011). In deze paragraaf werken we voor een cel in de matrijs, namelijk ‘gehele getallen, wiskunde op eigen niveau’, uit hoe de Kennisbasis is geoperationaliseerd. We doen dit aan de hand van een serie items die in het najaar van 2011 ontwikkeld zijn.

Bij het maken van de opgaven laten de ontwikkelaars van de toetsvragen zich inspireren door de tekst van de Kennisbasis en door hun eigen ervaringen met studenten. Ze nemen in deze overweging mee dat studenten veelal meer tijd krijgen om de Kennisbasis te verwerven dan tot voor kort het geval was (KNAW, 2009; Keijzer, 2010; Keijzer, 2011b).

Met dit in het achterhoofd maakt de ontwikkelgroep opgaven bij de verschillende domeinen. Bij iedere opgave wordt vervolgens aangegeven:

De bijlage bij dit artikel (pag.22) geeft de beschrijvingen van kennis en vaardigheid bij items uit enkele series opgaven rond ‘gehele getallen, wiskunde op eigen niveau’, zoals die in het najaar van 2011 ontwikkeld zijn. De Kennisbasis laat zien dat het bij ‘gehele getallen, wiskunde op eigen niveau’ gaat om betekenis van getallen, kenmerken van het getalsysteem, redeneren en rekenen met gehele getallen en wiskundetaal (pag.51-54). Deze indeling is herkenbaar bij de gekozen explicitering van de Kennisbasis. Studenten moeten tijdens de toetsing tonen dat ze flexibel en algoritmisch kunnen rekenen en daarbij in alle gevallen inzicht in de getallen en de bewerkingen kunnen tonen. Ze moeten daarnaast kennis van deelbaarheid kunnen tonen. Tot slot moeten zij in de toets laten zien dat ze greep hebben op positionele en additieve getallenstelsels. Onderdeel van deze greep op positionele getallenstelsels is dat studenten iets weten van het binaire stelsel, namelijk hoe het opgebouwd is, hoe getallen binnen dit stelsel corresponderen met decimale getallen en hoe binnen dit stelsel in eenvoudige gevallen gerekend wordt.

	wiskunde op eigen niveau	wiskunde specifiek voor de leraar	wiskunde in de maatschappij
gehele getallen	gehele getallen, wiskunde op eigen niveau	gehele getallen, wiskunde specifiek voor de leraar	gehele getallen, wiskunde in de maatschappij
breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen	breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen, wiskunde op eigen niveau	breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen, wiskunde specifiek voor de leraar	breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen, wiskunde in de maatschappij
meten	meten, wiskunde op eigen niveau	meten, wiskunde specifiek voor de leraar	meten, wiskunde in de maatschappij
meetkunde	meetkunde, wiskunde op eigen niveau	meetkunde, wiskunde specifiek voor de leraar	meetkunde, wiskunde in de maatschappij
verbanden	verbanden, wiskunde op eigen niveau	verbanden, wiskunde specifiek voor de leraar	verbanden, wiskunde in de maatschappij

figuur 8: matrijs met vijftien specifiek te toetsen onderdelen van de Kennisbasis

- of die ingeschat wordt als ‘makkelijk’, ‘drempel’ of ‘moeilijk’;
- welke tijd studenten nodig hebben om de vraag te maken (vgl. Van Dam-Schuringa & Terlouw, 2012);
- op welke pagina in de Kennisbasis de kennis en/of vaardigheden zijn aangeduid;
- hoe de opgave kan worden ingedeeld volgens de taxonomie van Bloom (1974): ‘kennis’, ‘inzicht’ of ‘toepassing’;¹
- of een student gebruik mag maken van een zakrekenmachine;
- welke kennis en vaardigheden de opgave van studenten vraagt.

De gemaakte opgaven worden vervolgens getoetst aan de perceptie van een medeontwikkelaar.

6 Conclusie en discussie

In september 2011 begonnen vele studenten aan de opleiding tot leraar basisonderwijs. Zij moeten de komende tijd onder meer de Kennisbasis voor rekenen-wiskunde verwerven. Die zal in 2013 of 2014 getoetst worden en het wordt daarom hoog tijd om opleiders en via hen de studenten helderheid te verschaffen over de inhoud van de toetsing. Dit artikel verschaft deze helderheid op enkele details. Het geeft enig zicht op welke toetsitems studenten kunnen verwachten als het gaat om opgaven die het eigen niveau van de studenten toetsen.

We doen overigens meer in deze bijdrage. We tonen niet alleen exemplarische opgaven van de kennisbasistoets, maar gaan ook na hoe opleiders deze opgaven inschatten.

We merken, anders dan een jaar eerder, dat opleiders rekenen-wiskunde vier van de vijf opgaven wel zien zitten (Keijzer, 2011a). Ze kunnen er redelijk zelf mee overweg en de opgaven worden niet als zeer moeilijk ervaren voor de studenten. Dat ligt anders voor een van de opgaven die verschillende opleiders te moeilijk vinden voor de studenten en waar ze anderszins vaak de zin niet van zien. De negatieve reacties op deze opgave vragen om een nadere analyse. Hoe kan het gebeuren dat een opgave die vrijwel letterlijk beschreven staat in de Kennisbasis, door opleiders toch niet geaccepteerd wordt als voor de hand liggende operationalisering van die Kennisbasis?

We formuleerden hypothesen die reacties van opleiders wellicht verklaren. Voor enkele van deze hypothesen vinden we aanwijzingen in het werk van de opleiders. We vermoeden dat de reacties op de opgave rond binaire getallen onder meer verklaard kunnen worden uit de vaardigheid van opleiders om hiermee te rekenen. Maar er zijn ook andere verklaringen mogelijk, die meer gelegen zijn in het ontwikkelde programma dat niet in binaire getallen voorziet, het beroepsperspectief of het leren van studenten.

Het verschil in reacties van lerarenopleiders basisonderwijs tussen de twee momenten van vrijgeven van opgaven voor de kennisbasistoets doet ons vermoeden dat opleiders meer greep op de toets beginnen te krijgen of in ieder geval gewend raken aan het niveau ervan.

Dat betekent overigens niet dat er niet meer helderheid nodig is. Die zal op korte termijn gegeven worden in een syllabus, die beschrijft wat er precies getoetst wordt. We toonden deze operationalisering voor een deelaspect van de toetsing, namelijk 'gehele getallen, wiskunde op eigen niveau'. We beschrijven in de bijlage bij dit artikel kennis en vaardigheden van studenten voor dit deelaspect. We denken dat een dergelijke toegespitste beschrijving van kennis en vaardigheden van studenten aan opleiders extra houvast biedt om een gedegen, mede vanuit de toetsing, onderbouwd programma te ontwikkelen.

We spreken dan ook de wens uit dat een dergelijke uitwerking voor de gehele Kennisbasis rekenen-wiskunde op korte termijn beschikbaar komt in de eerder genoemde syllabus, opdat zowel opleiders als studenten weten waar ze aan toe zijn als zij zich voorbereiden op de kennisbasistoets.

Noot

- 1 Kennis kan op verschillende manieren getypeerd worden. De opdrachtgever gaf itemontwikkelaars de opdracht hier

de taxonomie van Bloom te gebruiken. Die is weliswaar niet modern, maar - in de ogen van de opdrachtgever - wel eenvoudig van opzet en daarom inzichtelijk voor gebruikers van de toets.

Literatuur

- 10vdl (2011). *Syllabus toetsing rekenen-wiskunde*. Den Haag: HBO-raad (eerste versie).
- Ball, D.L., M.H. Thames & G. Phelps (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.
- Bloom, B.S. (1974). *Taxonomy of educational objectives: the classification of educational goals*. New York: McKay.
- Dam-Schuringa, L. van & B. Terlouw (2012). Kennisbasis als fundament voor de opleiding. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 31(1), 23-29.
- Goffree, F. (1979). *Leren onderwijzen met Wiskobas: onderwijsontwikkelingsonderzoek 'wiskunde en didactiek' op de pedagogische academie*. Utrecht: Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs.
- Keijzer, R. (2010). Stand van zaken bij rekenen-wiskunde en didactiek op de lerarenopleiding basisonderwijs. *Tijdschrift voor Hoger Onderwijs*, 28(1), 31-45.
- Keijzer, R. (2011a). Toetsing kennisbasis. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 30(1), 16-27.
- Keijzer, R. (2011b). Tijd voor de kennisbasis rekenen-wiskunde. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 30(3), 20-27.
- KNAW (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.
- Kool, M. (2011). Borging van de kennisbasis rekenen-wiskunde op de pabo. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 30(1), 28-32.
- Lit, S.A. (2010). Kennis en kwaliteit: een kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 29(1), 32-35.
- Lit, S.A. (2011). Kennisbasis en kwaliteitsverhoging. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 30(1), 33-35.
- Mandeville, G.K. & Q. Liu (1997). The effect of teacher certification and task level on mathematics achievement. *Teaching and Teacher Education*, 13(4), 397-407.
- Onk, W., M.A. van Zanten & R. Keijzer (2007). Gecijferdheid, vier eeuwen ontwikkeling - perspectieven voor de opleiding -. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(3), 3-18.
- Putman, R.T. & H. Borko (2000). What Do New Views of Knowledge and Thinking Have to Say About on Teacher Learning? *Research. Educational Researcher*, 29(1), 4-15.
- Sandt, S. van der (2007). Research Framework on Mathematics Teacher Behaviour: Koehler and Grouws' Framework Revisited. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 3(4), 343-350.
- Zanten, M.A. van, F. Barth, J. Faarts, A. van Gool & R. Keijzer (2009). *Kennisbasis Rekenen-Wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs*. Den Haag: HBO-raad.
- Zanten, M.A. van (2010). De kennisbasis rekenen-wiskunde voor pabo's - ontwikkelingen en overwegingen. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 29(1), 3-16.

Kennis en vaardigheden van studenten bij ‘getallen, wiskunde op eigen niveau’

(NB: Deze lijst is samengesteld aan de hand van enkele series opgaven die in het najaar zijn ontwikkeld en is mogelijk niet representatief voor de toetsing van ‘getallen, wiskunde op eigen niveau’.)

Rekenen met getallen (tientallig stelsel)

- Gebruikmaken van overeenkomsten en verschillen tussen twee vermenigvuldigopgaven om het verschil tussen twee producten vast te stellen.
- In een situatie eigenschappen van bewerkingen herkennen: associatieve eigenschap, distributieve eigenschap, commutatieve eigenschap.
- Gebruikmaken van eigenschappen van bewerkingen bij het uitrekenen
- Deling of vermenigvuldiging volgens standaardprocedure of handig uitrekenen.
- Kunnen verklaren hoe het optelalgoritme, het aftrekalgoritme en het vermenigvuldigalgoritme werkt.
- Effecten van vermenigvuldigingen kunnen inschatten, bijvoorbeeld op grond van de grootte van de uitkomst en het laatste cijfer.
- Weten of kunnen achterhalen welke bewerkingen met rekenmachine passen bij situaties waarin getallen voorkomen.
- Regelmaat herkennen in een getallenrij en die handig gebruiken bij berekeningen (waarbij eerst zo nodig herordend wordt).
- Betekenis van rest bij een staardeling kennen en dit kunnen gebruiken.
- Deelbaarheidseigenschappen van getallen doorzien in relatie tot verschillende bewerkingen.
- Gebruikmaken van eigenschappen van getallen bij het rekenen.
- Orde van grootte bepalen en gebruiken bij het rekenen met getallen, bijvoorbeeld bedenken of een antwoord een getal in duizenden geeft of in miljoenen.
- Kennis van kwadraten tonen.
- Situatie herkennen als combinatorische situatie en daarmee rekenen.

Deelbaarheid

- De deelbaarheid van een getal door een ander getal kunnen toetsen door gebruik te maken van de factoren van het tweede getal.
- Gebruikmaken van deelbaarheidskenmerken van ‘deelbaar door 2’ en ‘deelbaar door 3’
- Inzien dat wanneer een getal deelbaar is door andere getallen, dat het dan ook deelbaar is door de *kgv* van deze andere getallen.
- Weten hoe je van een getal kunt bepalen of het een priemgetal is.
- Getallen in eenvoudige gevallen ontbinden in priemfactoren.

Getalstelsels

- Toepassen schrijfwijze Romeinse cijfers tot duizenden.
- Eenvoudige sommen maken in het binaire stelsel.
- Herkennen (andere) positionele getallenstelsels en in eenvoudige gevallen getallen in een dergelijk getallenstelsel kunnen omrekenen naar het decimale stelsel.

The implementation of the ‘Knowledge of mathematics for primary teacher education’ must be considered in the context of the forthcoming national assessment of this knowledge base. Teacher educators are concerned about this national test, because they lack a clear overview of the level and nature of the questions.

This article discusses five test items from this knowledge base that have been published. An analysis of teacher educator responses shows that one item, namely the one about calculating with binary numbers, raises a number of questions. These questions have partly to do with the usefulness of this knowledge for primary teachers, but also concern the skills of trainers themselves.