



# Intuïtie: over intuïtie en probleemoplossen<sup>1</sup>

J.M.C. Nelissen  
Flsme, Universiteit Utrecht

*Het begrip intuïtie spreekt tot de verbeelding, maar roept ook vragen op. In dit artikel wordt het standpunt verdedigd dat de tegenstelling tussen intuïtie en cognitie een onvruchtbare en zelfs valse tegenstelling is. Intuïtie wordt niet beschouwd als soort zesde zintuig, maar als een menselijke activiteit die verbonden is met kennis, een activiteit die zich met name manifesteert bij het oplossen van problemen. Er worden twee vormen van intuïtie onderscheiden, namelijk primaire of horizontale intuïties die verbonden zijn met alledaagse ervaringen en impliciet leren. Secundaire of verticale intuïties daarentegen komen vooral voort uit expliciet leren.*

*Processen van intuïtie worden in psychologische zin beschouwd als het direct doorzien van structuur of Gestalt. Deze processen zijn nauw verweven met cognitie en kennisstructuren, ze verlopen doorgaans spontaan en bewust of ze zijn door reflectie bewust te maken. Dagelijkse ervaringen (common sense) en de daarop gebaseerde intuïties blijken vaak een goed startpunt bij het oplossen van problemen, maar het komt ook voor dat deze onvoldoende of geen perspectief bieden.*

*Het begrip intuïtie speelt ook een rol in de filosofie van de wiskunde, met name in het 'intuitionisme' van Brouwer. In die stroming worden axioma's als onvolledig beschouwd, in tegenstelling tot in het formalisme van Hilbert. Dat betekent dat de zoektocht naar geldige (wiskundige) kennis, volgens Brouwer, niet primair een deductief logisch redeneren op basis van axioma's is, maar een menselijke, betekenisvolle denkactiviteit die nooit eindigt.*

*In het reken-wiskundeonderwijs kunnen intuïtieve processen worden gestimuleerd. Leerlingen moeten ervaren dat het leren van rekenen-wiskunde niet slechts betekent dat formules en regels moeten worden geleerd en toegepast. Ze moeten ook leren dat, om problemen op te lossen, gebaande paden soms moeten worden verlaten. Dat moet je durven en dat betekent dat intuïtie niet alleen is verbonden met cognitie maar ook met emotie en creativiteit.*

He that trusteth in his own heart is a fool.  
Proverbs 28:26 (Myers, 2002)

## 1 Inleiding: intuïtief, planmatig en geautomatiseerd handelen

Bij het oplossen van problemen op het gebied van rekenen-wiskunde kan aan verschillende strategieën de voorkeur worden gegeven. Om te beginnen kan een probleem intuïtief worden benaderd. Dat houdt meestal in dat men spontaan explorerend, zonder vooraf een werkplan op te stellen, aan de slag gaat. Het probleem wordt verkend, er worden beelden gevormd, ook wel probleemrepresentaties genoemd (Heller c.s., 1984) en daarmee wordt geëxperimenteerd. Dit intuïtieve proces is gebaseerd op reeds verworven, 'gecompacte' en geactualiseerde kennis.

Het kan echter ook gebeuren dat de probleemoplosser er - om welke reden dan ook - de voorkeur aan geeft wél vooraf een handelingsplan (en op basis daarvan eventueel een probleemrepresentatie) op te stellen en dat systema-

tisch te volgen. Zulk een aanpak typeren we dan niet als intuïtief. Polya (1962) zou in dit geval waarschijnlijk spreken van *successive approximation*, een aanpak die weliswaar gekenmerkt wordt door systematiek, maar ruimte laat voor zoekprocessen met een heuristisch *trial and error* karakter.

Het wiskundig denken kan echter ook automatisch verlopen, dat wil zeggen dat in zo'n geval een vertrouwde en geëigende procedure of strategie soepel en routinematig wordt uitgevoerd. Dat geschiedt op grond van kennis en ervaring. Hoewel er sprake is van spontane, vlotte en impliciete handelingsprocessen, spreken we in dit verband niet van intuïtief maar van geautomatiseerd handelen. Dat doen we omdat er geen sprake is van een probleem zodat men, zonder noemenswaardige reflectie, gewoon weet hoe gehandeld moet worden. Hoewel er, evenals bij intuïtieve processen, geen handelingsplan vooraf wordt bedacht, noemen we dit niet intuïtief maar geautomatiseerd handelen omdat er immers geen probleem hoeft te worden opgelost en er dus geen sprake is van zoeken naar nieuwe aanpakken en denkwegen.

In dit artikel wordt aandacht besteed aan intuïtie voornamelijk in de context van probleemoplossen. De reden daarvoor is dat intuïtieve processen vooral in deze con-

text worden opgeroepen en betekenis hebben. Het oplossen van problemen is niet denkbaar zonder kennis en als een essentieel kenmerk van intuïtie wordt dan ook de verwevenheid met (wiskundige) kennis gezien (zie ook Myers, 2002, Bowers e.a., 1990, Van Hiele, 1997).

Intuïtie, wat is dat? Van het begrip intuïtie zijn vele omschrijvingen en benaderingen bekend. In dit artikel wordt het standpunt ingenomen dat intuïtie zowel verbonden is met kennis en cognitie als met emotie, zij het op geheel verschillende manieren. Er wordt aandacht besteed aan de vraag hoe intuïties ontstaan en of we te maken hebben met bewuste dan wel onbewuste processen. Voorts wordt bepleit (in het voetspoor van onder andere Van Hiele, 1997) de functie van intuïtie op te vatten als het doorzien van structuren of patronen. Dit proces kan verklaren waarom intuïtie zo nuttig is bij het oplossen van problemen. Maar zijn intuïties altijd ondersteunend of kunnen ze ook belemmerend werken? Ook op deze vraag wordt ingegaan. Tot slot wordt geschetst hoe men zich het intuïtief denken tijdens het probleem oplossen in fasen kan voorstellen en wordt bepleit intuïtie te stimuleren bij alle leerlingen door ze te laten ervaren hoe ongebaande paden betreden kunnen worden.

---

## 2 Intuïtie als denkproces

Wat wordt bedoeld met intuïtie? In de ‘Dikke Van Dale’ kan men lezen dat intuïeren betekent: ‘als bij intuïtie ervaren’. Bij intuïtie vinden we vervolgens: ‘door onmiddellijke innerlijke aanschouwing verkregen voorstelling; onmiddellijke, niet op begripsdenken en redenering berustende overtuiging van waarheid’. De Latijnse oorsprong van het begrip *intueo*’ betekent aandachtig beschouwen (soms wordt ook verwezen naar ‘intuéri: overwegen) waarmee is aangegeven dat er sprake is van een actief proces.

De kernbegrippen uit de omschrijving van ‘Van Dale (‘onmiddellijk’, ‘aanschouwing’, ‘voorstelling’) in combinatie met het Latijnse ‘aandachtig beschouwen’, evenals de gedachte dat intuïtie niet berust op expliciet redeneren, leveren interessante bouwstenen op voor de assemblage van een werkommschrijving van intuïtie. Welnu, processen van intuïtie worden in dit artikel opgevat als actieve denkprocessen - het zijn *ways of knowing* (Claxton, 2000) - en die worden gekenmerkt door een snel aftasten en exploreren van denkwegen en strategieën. Dat exploreren is mogelijk doordat gebruik wordt gemaakt van reeds verworven, sterk gecompacte kennis. Er is hier sprake van een ‘onmiddellijke activiteit’, maar die berust niet op een impulsief en lukraak raad- of gokproces. Op basis van de gecompacte kennis weet de probleemoplosser in grote lijnen in welke richting gezocht moet worden en welke kennis ter zake doet en aange-

sproken kan worden. De Duitse denkpsycholoog Selz (1924) kenmerkt de sturing waarop zo’n zoekproces steunt als ‘anticiperende tendens’ en de psycholoog Fischbein (1975) bedoelt hetzelfde als hij wijst op ‘anticiperende intuïtie’. Terwijl intuïtie niet goed denkbaar is zonder (wiskundige) kennis, is ook het omgekeerde waar, namelijk dat intuïtie ‘the first and fundamental basis (is) of knowledge’ (Sinha, 1988:5). Dat zien we bijvoorbeeld in het werk van Descartes, zegt Sinha, al beschouwde Descartes zelf intuïtie trouwens als een soort geschenk van God (Claxton, 2000). Intuïtie kan het leren van rekenen-wiskunde een stuk vindingrijker, creatiever en interessanter maken. Probleemoplossen vraagt om experimenteren, hypothesen opwerpen, gissen, zoeken en het verkennen van niet-conventionele denkwegen. Zulke denkprocessen zijn nooit volledig te plannen, ze verlopen grotendeels intuïtief. Door intuïtie durft men zich aan routines te onttrekken en te zoeken naar originele oplossingen. Intuïtie geeft het (wiskundig) denken elegantie. De wiskundige Wilder (in Burton, 2004) drukt deze gedachte als volgt kernachtig uit:

Without intuition, there is no creativity in mathematics (but) the intuitive component is dependent for its growth on the knowledge component (pag.74)

Intuïtieve besluiten worden vaak genomen zonder expliciete redenering. Men gaat aan de slag zonder dat vooraf alle mogelijk te nemen denkstappen zijn overwogen en doorlopen. Groeneveld (2006) ziet intuïtie als een manier van denken, gericht op het verkrijgen van inzichten die direct evident zijn, maar niet zonder meer ‘met behulp van argumenten kan worden beschreven’ (p.31). Een intuïtief denkproces is niet sterk gebonden aan spelregels, of, zoals Sfard (2002) het typeert, gaat het om ‘reasons without rules’. Een intuïtief begrip zegt ze: ‘... is most helpful in discovering theorem’ (pag.95).

---

## 3 Ontwikkeling van intuïtie

Het is mogelijk, gelet op de ontstaanswijze, een onderscheid te maken in twee verschillende vormen of niveaus van intuïtie. Om te beginnen ontstaan intuïties spontaan uit ervaringen in de leefwereld, los en onafhankelijk van systematische instructie. De ervaring (of kennis) waar deze intuïties op stoelen, ook wel ‘practical wisdom’ genoemd (Furlong, 2000), vindt men al bij Aristoteles als phronesis. Intuïties worden gevormd, zeggen Davis en Hersh (1985), uit alledaagse ervaringen die worden opgedaan, bijvoorbeeld op het gebied van getallen. Uit die ervaringen ontwikkelen zich allerlei voorstellingen. We hebben intuïtie, omdat we uit ervaring voorstellingen van wiskundige ‘objecten’ vormen, zeggen deze onderzoekers. Deze intuïties, die vooral stoelen op impliciet leren, heeft de psycholoog Fischbein (1975) getypeerd als pri-

maire intuïties. Freudenthal ondersteunt - in een voorwoord van Fischbeins boek - deze gedachte. Hij licht toe dat bijvoorbeeld de verwerving van getalbegrip wordt voorafgegaan door het opdoen van dagelijkse ervaringen met hoeveelheden. Aansluitend bij het onderscheid in horizontaal en verticaal mathematiseren, dat in de theorie van realistisch reken-wiskundeonderwijs wordt gemaakt, kan ook gekozen worden voor de termen horizontale en verticale intuïtie. Het horizontaal mathematiseren staat voor het 'wiskundig organiseren van de ervaren werkelijkheid' (Gravemeijer, 2005). Die dagelijkse ervaring levert echter tegelijkertijd de bouwstenen voor de primaire of horizontale intuïties, die vervolgens weer een functie hebben (impliciet, maar soms ook expliciet) bij het wiskundig organiseren van de werkelijkheid.

Aan zulke ervaringsprocessen refereert trouwens ook Pinker (2002), bekend van de 'Language instinct'. Volgens Pinker wordt het verwerven van bijvoorbeeld inzichten in de chemie en biologie voorafgegaan en ondersteund door *intuitive physics*. Vervolgens ontstaan, wat Fischbein noemt, de secundaire intuïties. Deze intuïties worden gevormd in systematisch onderwijs en nu is vooral sprake van expliciet leren en probleem oplossen. We kunnen ook spreken van verticale intuïtie, aansluitend bij het verticale mathematiseren en daaronder wordt verstaan: 'Het (verder) wiskundig organiseren van de eigen wiskundige activiteit' (Gravemeijer, 2005). De verticale intuïties spelen - op hoger niveau dan de horizontale intuïties - een belangrijke rol bij het oplossen van wiskundige problemen.

---

## 4 Intuïtie van jonge kinderen

Intuïtieve processen verlopen doorgaans spontaan, snel, direct, automatisch en soms (deels) niet bewust. Daardoor onderscheidt intuïtie zich van andere mentale processen die steunen op analyse, reflectie, systematiek en het overwegen van denkwegen. Uit onderzoek blijkt (Gopnik c.s., 1999) dat zeer jonge kinderen tot opvallende cognitieve prestaties in staat zijn, terwijl er van analyse, reflectie etc. nog nauwelijks sprake is. Hun gedrag is immers grotendeels spontaan, niet gepland en niet intentioneel. Kunnen we het gedragsrepertoire van jonge kinderen dan typeren als intuïtief? Die vraag is moeilijk te beantwoorden, want verticale intuïties konden zich nog niet ontwikkelen terwijl horizontale intuïties nog in een ontluikend, pril stadium verkeren. Kinderen van enkele dagen oud zijn, zo blijkt uit experimenten (Gopnik c.s., 1999), in staat om menselijke bewegingspatronen te onderscheiden van niet-menselijke, mechanische bewegingspatronen. Ze herkennen gezichten en gezichtsuitdrukkingen en imiteren die zelfs (bijvoorbeeld tong uitsteken). Ze imiteren ook handelingen die volwassenen met voorwerpen uitvoeren, bijvoorbeeld met een

beker, een potlood of met een mobieltje (ze drukken bijvoorbeeld de hoorn tegen hun oor). Kinderen leren dus, zoals ook Vygotskij steeds benadrukte, door nabootsen. Echter, dat imiteren zélf leren ze niet door imiteren; ze imiteren immers niet het imiteren. Het gedrag dat zeer jonge kinderen leren door nabootsen (zoals: hoorn tegen het oor) is geen intuïtie, maar het imiteren zelf berust wél op intuïtie. Er is sprake van intuïtie in die zin dat het imiteren op spontane en 'natuurlijke' wijze verloopt. Deze intuïtie is echter niet verbonden met ervaring of verworven kennis (zoals dat in latere stadia het geval is), maar met aangeboren mogelijkheden. Zo zijn jonge kinderen 'van nature' ook nieuwsgierig, ze experimenteren en onderzoeken, ze testen hypothesen, net als wetenschappers zeggen Gopnik c.s. Ze zijn vaak zelfs even geconcentreerd en gedreven als wetenschappers. Geen wonder dat kinderen ons verbazen, meent Pinker (2002), kinderen zijn immers toegerust met intuïties. 'They emerge early in life', ze zijn verbonden met netwerken in de hersenen en bestaan uit 'different sets of genes' (pag.219). Pinker verklaart intuïtie in feite vanuit een evolutionair gezichtspunt. Hij onderscheidt een aantal intuïties die hij typeert als 'core intuïties', zoals gevoel voor ruimte, getal, taal, biologie, en dergelijke. Deze spelen evolutionair een cruciale rol en behoren tot de genetische toerusting.

---

## 5 Intuïtie: bewust of onbewust?

Het lijkt niet erg zinvol intuïtie als een soort alternatief zintuig te beschouwen waarop we blindelings kunnen vertrouwen. Het bekende adagium van Pascal (1670) 'Le coeur a ses raisons que la raison ne connaît pas' kan dan ook enige discussie oproepen. Nu weten velen uit eigen ervaring dat, wanneer er een probleem moet worden opgelost, er niet voortdurend volgens een vooraf uitgekend stappenplan systematisch te werk wordt gegaan. Ook op het gebied van rekenen-wiskunde is dat niet het geval. Wiskundigen gaan vaak, zonder lang na te denken, puttend uit ervaring onmiddellijk aan de slag. Zo'n proces van probleem oplossen, kan gezien worden als een spontaan, automatisch, sterk verkort en doorgaans bewust verlopend mentaal proces.

Omdat denkactiviteiten vaak spontaan en snel op gang komen, doen ze sterk denken aan intuïtief verlopende processen: 'In this sense', zegt Gregory (1987, pag.389), 'almost all judgments and behavior are intuitive.' Vermoedelijk rekent Gregory geautomatiseerde processen hier tot intuïtieve processen. De vraag echter in welke mate intuïtieve processen bewust of onbewust zijn, is aanleiding geweest tot discussie. Niet alleen onder wiskundigen, zoals blijkt uit een publicatie van Groeneveld (2006) waarin hij verslag doet van een studie naar het werk van (onder andere industrieel) ontwerpers. Groene-

veld schrijft dat tijdens het ontwerpen intuïtie functioneert als een proces waarin 'diepere onbewuste lagen van het bewustzijn' (pag.31) betrokken zijn (dit roept echter de vraag op wat er in het bewustzijn dan onbewust kan zijn). Ook de psycholoog Dijksterhuis (2007) stelt dat intuïtie voortkomt uit het onbewuste. De Moskouse psycholoog Krutetskii (1976) besteedt aandacht aan deze kwestie in een vergelijkende analyse van de opvattingen van Poincaré en Hadamard over de aard van wiskundige creativiteit. Krutetskii meent, Hadamard volgend, dat creatieve processen deels onbewust verlopen, waarna een combinatie van ideeën *subconscious* worden en een deel daarvan weer bewust. Terwijl Poincaré meent dat creatieve processen stelen op gevoel (*aesthetic instinct*), vraagt Hadamard zich af wat nou eigenlijk onder de term 'onbewust' wordt verstaan.

De overgang van onbewust naar bewust verloopt in werkelijkheid dermate snel, veelvuldig, continue en spontaan dat het moeilijk vast te stellen is wanneer processen onbewust dan wel bewust zijn. Met andere woorden, het intuïtieve en het discursieve denken, in de termen van Krutetskii, zijn activiteiten die voortdurend met elkaar verweven raken. Een vergelijkbaar onderscheid wordt wel gemaakt in intuïtieve en reflectieve processen, zie bijvoorbeeld Olive en Steffe (2002). Intuïtief worden structuren zichtbaar, zeggen zij, die vaak echter nog niet geordend zijn. Door reflectie worden deze structuren (ook wel *maps schemas* of *networks* genoemd) explicieter en krachtiger.

---

## 6 Intuïtie versus kennis

Intuïtie wordt ook wel beschouwd als een zelfstandig vermogen dat heel sensitief weet te opereren. Daardoor zouden inzichten worden gegenereerd die verborgen blijven voor de andere zintuigen die kennelijk grofmaziger werken. 'Intuïtief leren' zou dan ook iets heel anders zijn dan 'gewoon leren' en geen wonder dat voorstanders van het 'nieuwe leren' dit 'intuïtieve leren' zo'n warm hart toedragen. Zo meent de nieuw-leerder Kok (2003) bijvoorbeeld dat het 'nieuwe intuïtieve denken' veel krachtiger is dan het 'oude, rationele denken'.

Er springen nu twee misverstanden in het oog. Het eerste misverstand luidt dat intuïtie iets heel anders is dan rationaliteit en cognitie. Intuïtie zou de rationaliteit kunnen, en soms zelfs moeten, vervangen. Intuïtieve processen raken emotioneel immers 'heel de mens'. Dankzij de intuïtie zou de mens kunnen putten uit in diepere lagen van de geest schuilende energiebronnen. Het tweede misverstand luidt dat het intuïtieve leren (denken) beter is dan rationeel leren (denken), met andere woorden, intuïtie is beter dan logisch denken en rationaliteit.

Zoals de nieuw-leerders de intuïtie warm omarmen, benadrukken anderen weer eenzijdig de betekenis van de

ratio, aldus eenzelfde tegenstelling construerend tussen intuïtief en rationeel. *Measurement, justification and accountability* is het enige dat nog telt, kritiseert Claxton (2000) deze opvatting. Groeneveld (2006) becommentarieert zulk een instrumentalistisch *problem solving* denken in de ontwerpkuude waarin de intuïtieve, unieke werkwijze van de ontwerper aan de aandacht ontsnapt. Het continue samenspel 'tussen het intuïtieve en het rationele' ziet Groeneveld als de motor van ontwerpprocessen (pag.101).

De stelling dat intuïtie iets geheel anders en ook beter is dan rationaliteit en kennis lijkt me aanvechtbaar. Deze gedachte komt voort uit het creëren van valse tegenstellingen tussen intuïtie en kennis. Dat gebeurde onlangs opnieuw in een publicatie van Gladwell (2007) waarin de stelling wordt verdedigd dat niet kennis maar onbevangenheid de sleutel is voor intuïtie en dat intuïtie het best functioneert zonder de ballast van rationele kennis. In plaats van valse tegenstellingen te creëren, is het zinvoller de relatie tussen: 'articulate/rational/explicit and inarticulate/intuitive/implicit ways of knowing and learning', te onderzoeken en te exploreren, zo bepleiten zeggen Atkinson en Claxton (2000, pag.1).

Intuïtie is niet in tegenspraak met het denken, integendeel het maakt daar juist deel van uit. Dat bleek ook uit een serie interviews die Burton (2004) met 70 wiskundigen voerde. Ruim 90 procent van die wiskundigen beschouwde intuïtie als: 'an important feature of the way in which they worked on their mathematical problems' (pag.76).

---

## 7 Intuïtie zonder kennis

Mensen worden aangespoord, soms in therapeutische context, meer te vertrouwen op hun intuïtie. De verschillende visies op intuïtie zijn hierbij erg uiteenlopend, maar een gemeenschappelijk kenmerk is wel dat intuïtieve processen onafhankelijk zouden functioneren van kennis en rationaliteit. Zo wordt er aanbevolen onze intuïtie "vrij te maken" en het contact met onze 'innerlijke intuïtieve bronnen' te verstevigen. Intuïtie kan ook worden ontwikkeld, bijvoorbeeld door 'geleide meditatie' en 'oefening met energie'. We moeten leren onze 'intuïtieve geest' aan te spreken en we moeten durven luisteren naar onze 'intuïtieve stem'. Intuïtie is een 'nieuwe werkelijkheid' en gaat bovendien samen met leiderschap. Intuïtie wordt soms voorgesteld als 'een vijfde dimensie' of als een nieuw, 'zesde zintuig'. Sommige auteurs beschouwen dat zintuig bovendien als een typische vrouwenzaak. Intuïtie wordt graag gezien als een bovenmenselijke, onfeilbare ingeving of geassocieerd met een passief, comfortabel meedrijven op het 'gevoel'.

Hoe effectief de therapieën zijn waarbij wordt uitgegaan van bovenstaande gedachten over intuïtie (en natuurlijk

is het ieders goed recht om zulke gedachten uit te spreken) weet ik niet, maar uit het voorgaande is wel duidelijk geworden dat in dit artikel voor een andere benadering is gekozen. Voor sommige wetenschappelijk onderzoekers echter komt het begrip intuïtie op die manier in een troebel vaarwater terecht, vanwege de 'claims for its validity that seem grandiose or mystical' (Claxton, 2000; pag.49).

Hoe we van dat zesde zintuig profiteren tijdens het probleem oplossen is vooralsnog een vraag. Zelden wordt er een verband gelegd tussen intuïtie en het oplossen van wiskundige problemen. Daarvoor moeten we serieuze(re) bronnen raadplegen en dan blijkt helaas dat dit zesde zintuig niet altijd erg betrouwbaar is, zoals de Amerikaanse auteur Paulos (1989) aan de hand van vele voorbeelden illustreert. Paulos beschrijft hoe mensen op grond van hun gevoel (intuïtie) gebeurtenissen graag toeschrijven aan geheimzinnige krachten. Toeval wordt ten diepste gewantwoord. Paulos maakt duidelijk - op basis van berekeningen - dat de kans dat zich bepaalde gebeurtenissen voordoen, tegen veler verwachting in, soms groot is. Begrippen als toeval en kans, zo laat Paulos zien, zijn intuïtief moeilijk te vatten.

## 8 Intuïtie en inzicht in structuur

Op grond van georganiseerde kennis en rijke ervaring ontstaan succesvolle intuïties. Dank zij deze *repository of experience*, zoals Myers (2002) zegt, weet een expert intuïtief hoe hij of zij dient te handelen. Myers:

Through experience we gain practical intuition - subtle, complex, ineffable knowledge that aids our problem solving. (pag.51)

Experts weten echter veel meer dan beginners, zegt Myers en hij illustreert dat met een onderzoek van de bekende psycholoog Herbert Simon. Daaruit bleek dat amateurschakers een handjevol patronen (stellingen) uit hun hoofd weten, gevorderde schakers ongeveer duizend en meesterschakers zo'n slordige vijftigduizend. Op grond van zulke gegevens concludeert Myers: 'Intuition is nothing more and nothing less than recognition'. Inzicht in 'structuren' speelt bij die herkenning een cruciale rol. In de wiskunde, zegt Fischbein, is intuïtie nauw verweven met cognitieve activiteiten en met voorstellingen en begripsmatige kennis. Er bestaat geen tegenstelling tussen intuïtie en kennis (logisch denken). Dit is ook de opvatting die doorklinkt in het werk van Van Hiele (1997). Kinderen denken volgens van Hiele aanvankelijk 'non-verbaal' en deze manier van denken karakteriseert hij als 'intuïtief denken'. Hij wijst erop dat, zoals ook Piaget stelde, kinderen denken vóórdat ze hebben leren spreken en dus, zegt Van Hiele, denken die kinderen non-verbaal.

Maar ook volwassenen denken non-verbaal en dat doen ze vaak in situaties waarin direct en snel beslissingen (moeten) worden genomen. Dan wordt doorgaans niet (verbaal) geredeneerd maar worden slagvaardig conclusies getrokken. Dat gebeurt non-verbaal, we kunnen volgens Van Hiele ook zeggen: intuïtief. We herkennen direct een goede vriend(in) of een situatie, maar als we in woorden precies moeten beschrijven hoe die vriend(in) eruit ziet of als we een situatie moeten beschrijven, is dat erg lastig (de lezer probeert maar eens te beschrijven hoe zijn partner eruit ziet). Volgens Van Hiele worden zaken die we intuïtief kennen, gekarakteriseerd door samenhang die de kenmerken van een structuur vertoont.

Structuur is iets dat wij zelf zien en dus construeren. Op grond van kennis en ervaring zien we (vaak) onmiddellijk een bepaalde structuur; denk weer aan de schaakmeester die direct een patroon onderkend in de opstelling van schaakstukken. Intuïtie is kennen en is een vorm van non-verbaal denken, benadrukt Van Hiele.

In veel beroepen is direct reageren in een probleemsituatie van groot belang. Zo is het onmiddellijk zien van *Gestalt* volgens Dolk (1997) een essentieel kenmerk van het gedrag van leraren. Zij zijn voortdurend bezig met het maken van, zo menen Brown en Coles (200):

... rapid, subtle decisions about how to respond to the dynamic, complex environment that classrooms constitute'. (pag.165).

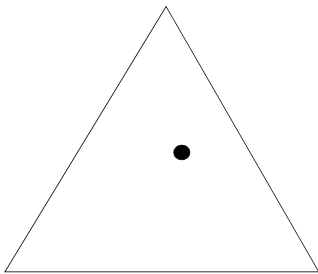
Zij spreken over de *intuitive practitioner* en die reageert in praktijksituaties als het ware in een flits, intuïtief op probleemsituaties (zie Eraut, 2002). Daartoe zijn (ervaren) leraren in staat, omdat zij problemen beoordelen op basis van een geïdentificeerde *Gestalt* die zij, zegt Dolk, vervolgens steeds beter leren structureren (zie ook Burton (2004) die als de essentie van intuïtie *making connections* beschouwt). In meerdere publicaties wordt ervoor gepleit in de lerarenopleiding niet alleen aandacht te besteden aan kennis en vaardigheden (zoals reflectie). Atkinson en Claxton (2000, pag.10) waarschuwen tegen zulk een *narrow, competency-based approach*. Leraren zijn niet voortdurend bezig zich rationeel te verantwoorden op basis van reflectie, maar moeten wel voortdurend spontaan en direct reageren op steeds veranderende onderwijssituaties. Daarom pleiten zij voor erkenning van het grote belang van zowel intuïtie als reflectie. Intuïtief denken is verbonden met 'structuur', zo stelde Van Hiele. Dat is ook gebleken uit onderzoek van Bowers c.s. (1990;74) die intuïtie typeren als 'a preliminary perception of coherence (pattern, meaning structure)'. Zij vonden dat accurate, intuïtieve ingevingen bij probleemoplossers verbonden waren met 'coherenties' of structuren. Die structuren functioneerden in eerste instantie impliciet als *tacit knowledge*. Vergelijk Myers (2002), die *tacit knowledge* beschouwt als een essentieel kenmerk van intuïtieve expertise. Geleidelijk aan echter konden mensen, in het onderzoek van Bowers c.s., op basis van die structuren expliciete representaties con-

struieren. Dat gebeurde bijvoorbeeld in de vorm van het bedenken van een hypothese voor de oplossing van een probleem.

Samengevat berusten intuïtieve denkprocessen gericht op het oplossen van problemen in essentie op het herkennen en/of construeren van structuur, zo blijkt uit onderzoekspublicaties van onder andere Myers, Simon, Van Hiele, Bowers en Dolk. Het is natuurlijk wel zo dat indien een persoon, die een probleem moet oplossen op een gebied waarvan hij of zij onvoldoende kennis heeft, spontaan op basis van horizontale intuïties te werk moet gaan en in die gevallen is herkenning van structuur niet steeds gegarandeerd.

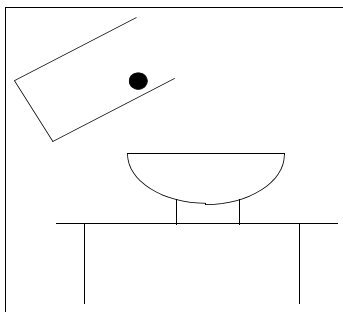
## 9 Intuïtie: blokkade en steun

In het algemeen is het zo dat intuïtie het leren en denken zowel kan ondersteunen als blokkeren. Dit is in sterke mate afhankelijk van thematiek en vakgebied. De Britse psycholoog Myers (2002) presenteert een uitvoerig overzicht van onderzoeken die zijn verricht naar zowel de krachten als de risico's (*powers and perils*) van intuïtie. Bij figuur 1 werd de vraag gesteld: 'How far up this triangle is the dot?'



figuur 1: driehoek

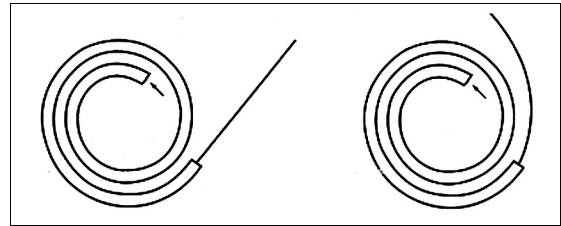
De punt is exact halverwege de driehoek, maar het gevoel van velen zegt dat het punt boven het midden ligt. Bij de figuur 2 luidde de vraag (een typische Piaget-proef) om met een lijn aan te geven hoe de oppervlakte van het water in het glas staat als het glas in het bokaal wordt overgegoten (bij de punt beginnen).



figuur 2: oppervlakte water

Ruim 40 procent van de proefpersonen (studenten) dacht dat dit een lijn is die enigszins schuin naar boven loopt (correct is een horizontale lijn).

Bij figuur 3 luidde de vraag hoe de baan van een kogel is die de winding, die plat op een tafel ligt, verlaat.



figuur 3: een kogelbaan

De helft van de ondervraagde studenten was van mening dat de kogel een draaiende baan vervolgt, terwijl dat een rechte is. De ruimte ontbreekt om meer resultaten van onderzoeken te bespreken, maar Myers' conclusie luidt dat op bepaalde gebieden (zie boven enkele voorbeelden op het gebied van de natuurkunde en mechanica) mensen er intuïtief ver naast kunnen zitten, terwijl op andere gebieden (sociale omgang en sport bijvoorbeeld) de intuïtie vaak een redelijk betrouwbare steun en raadgever is. Myers beschrijft bovendien nog welke processen een bedreiging (*deadly sins* zegt Myers) zijn voor de vorming van betrouwbare intuïties, zoals overwaardering van eigen inzicht, steeds zoeken naar bevestiging van eigen ideeën, enzovoort.

## 10 Intuïtionisme

Zoals bekend, is het 'intuïtionisme' een stroming in de filosofie van de wiskunde waarmee de naam van de wiskundige Brouwer onlosmakelijk is verbonden. Brouwer keert zich met het intuïtionisme tegen het formalisme, dat stelt dat de 'werkelijke wiskunde', zegt Van Dalen (2001) ongrijpbaar is, zodat het werk van wiskundigen in essentie bestaat uit een spelen van een spel met symbolen. Echter:

Brouwer wilde de wiskunde opbouwen uit bouwstenen die ons denken levert, niet een spelletje met axioma's doen. (Van Dalen, 2001, pag.264).

Brouwer beschouwt de wiskunde als een menselijke constructie. In het intuïtionisme komen, zoals we zien, geen psychologische kwesties aan de orde (hoe ontstaan intuïties, in welke mate zijn ze bewust, wat is de relatie met cognitie?), maar wiskundige. Een van de kernvragen luidt op welke mathematische uitgangspunten en inzichten aanspraak op geldige kennis kan worden gedaan. In zijn inaugurale rede typeerde Brouwer (1912) zijn denken als 'Neo-Intuitionisme' met als belangrijk

kenmerk, noteert Van Dalen (pag.147) ‘de oer-intuïtie’. Brouwer poneert de stelling dat ‘het (Franse) Intuitionisme en het (vooral Duitse) formalisme, hoewel ze scherp tegenover elkaar staan, zich op één punt kunnen vinden: van een exacte geldigheid der wiskundige wetten als natuurwetten kan geen sprake zijn. Hoe bestaat die dan wel?’ ‘De intuitionist zegt: in het menselijk intellect, de formalist: op papier’ (Brouwer, 1912; pag.7). En: ‘Wiskundige exactheid ligt voor de formalist in de wijze der relatieseriën’. Dat zijn echter ‘betekenisloze relatieseriën’, aldus Brouwer (pag.9). Hij ziet de wiskunde niet als logisch spel met axioma’s, maar als zinvolle mathematische menselijke activiteit.

Het werk van Brouwer is door Davis en Hersh (1985), getypeerd als constructivisme, vergeleken met de platonische en de formalistische grondslagen in de wiskunde. Een centrale vraag luidde wat de betekenis is van intuïtie in deze drie denkrichtingen. Zij menen dat de moeilijkheid in de platonische en formalistische richtingen om te zien wat intuïtie is, voortkomt uit de eis dat wiskunde een onfeilbaar systeem is. Volgens de platonist zijn ‘ideeën’ (ook wiskundige) onveranderlijk, eeuwig en ultiem waar. Volgens de formalist is wiskunde een spel met denkgeregels. Deze staan in principe als zodanig niet ter discussie en bovendien genereren ze ware kennis. Brouwer beschouwt daarentegen ‘all axiomatizations of intuïstic logic te be incomplete’ concludeert Ernest (1991, pag.12). De zoektocht naar geldige kennis eindigt daarom nooit en kan ook niet eindigen omdat, zoals Gödel aantoonde, met axioma’s geen volledig systeem kan worden gedefinieerd, zoals de formalist Hilbert beoogde. Ook Ernest (pag.11) rekent Brouwer trouwens tot de constructivisten: ‘The best known constructivists are the intuitionists L.E.J. Brouwer (1913) and A. Heyting (1931, 1956)’.

Axioma’s schieten te kort, we worden in de wiskunde geconfronteerd met een *loss of certainty*, zegt Kline (1980). Hoe krachtig een formeel bewijs dan ook is, voor een wiskundige betekent dit weinig als het resultaat *doesn’t make sense intuitively*’ (pag.313). De vooraanstaande wiskundige Hardy bestempelde bewijzen, zegt Kline, al in 1928 zelfs als *theoretical flourishes*.

Al deze onzekerheid over de rol van de logica, neemt overigens niet weg, dat logisch redeneren een krachtig wapen is en moet blijven tegen ongebreidelde intuïtieve speculaties, tegen de *fallability of intuition* (Claxton, 2000). Hersh (1997) beschouwt intuïtie en logica dan ook niet als tegenstellingen. Hij meent dat met het begrip intuïtie is geïndiceerd dat er sprake is van een op redelijke gronden gebaseerd vermoeden, maar tevens dat dit vermoeden *candidate (is) for proof* (pag.62).

Speculerend over de vraag naar de aard van het vermogen (de aanleg) van geniale wiskundigen, bespreekt Möbius (1900) de betekenis van het begrip ‘instinct’, we zouden nu waarschijnlijk zeggen: intuïtie. Dat functioneert niet ‘schlechtweg blind’ en instemmend citeert Möbius (niet

die van de bekende band) Voltaire, die meende dat ‘... bei den Werken des Genius alles Wirkung des Instinctes sei’. Dat ‘alles’ lijkt me trouwens fors bemeten. Overigens, zegt Ernest, kampt het intuitionisme met een probleem, namelijk hoe ‘different intuitions of basic truths will coincide’. De ‘oer-intuïtie’ (*primordial intuition*) is immers subjectief, niet inter-subjectief en daarom als zodanig geen zekere fundering voor ware wiskundige kennis.

## 11 Intuïtie en het oplossen van reken-wiskundige problemen

Het hangt veelal af van de ervaringen die kinderen in hun eigen leefwereld al dan niet hebben opgedaan of intuïties tijdens het oplossen van rekenwiskundige problemen als ondersteunend of als blokkerend kunnen worden beschouwd?

Laten we een bekend voorbeeld bekijken, namelijk de experimenten die Piaget deed naar de zogenoemde conservatie van inhoud. Hij gebruikte twee glazen water, een hoog smal glas en een breed laag glas. Het smalle glas is gevuld met water. Terwijl het kind toekijkt, wordt het water in het brede glas overgegoten. Het water staat daarin nu lager. De vraag aan het kind is of er nu evenveel, meer of minder water is. Veel kinderen van zo rond de vijf jaar (of jonger) menen dat er minder water in dat brede glas zit. Deze kinderen worden perceptueel misleid door de verschillende vormen van de twee glazen. Dit experiment werd herhaald met kinderen uit een gemeenschap van pottenbakkers. Deze kinderen waren in hun leefwereld zo vertrouwd geraakt met de inhoud van potten met een verschillende vorm dat ze op basis van ervaring, de horizontale intuïtie, direct doorhadden dat er sprake was van evenveel water, terwijl andere kinderen dat probleem niet oplosten.

De horizontale en/of verticale intuïties kunnen bij het oplossen van problemen tekortschieten. Bijvoorbeeld op het gebied van de breuken. Dat is vaak een lastig onderwerp omdat kinderen breuken (blijven) zien als gehele getallen. Daarom, zo denken ze, is  $\frac{3}{9}$  meer dan  $\frac{1}{3}$ . Op het gebied van waarschijnlijkheid, kans en toeval schieten horizontale intuïties vaak te kort. Zo menen leerlingen soms dat de juf veel vaker een zes met een dobbelsteen kan gooien dan een kind. Paulos (1989) heeft in vele mooie voorbeelden laten zien hoe de horizontale intuïties op dit gebied tekort kunnen schieten. Evenwel overigens, doet Fischbein verslag van onderzoek waarin werd vastgesteld dat jonge kinderen (vijf jaar) spontaan onderscheid zagen tussen gebeurtenissen die zich noodzakelijk (denk aan verjaardag) en gebeurtenissen die zich toevallig voordeden (oma tegenkomen in een winkel). Positieve en negatieve gehele getallen. ‘Nul is niets’. Hoeveel is  $2 - 2$ ? Dat is 2. Niet 0? Nee, want nul dat is

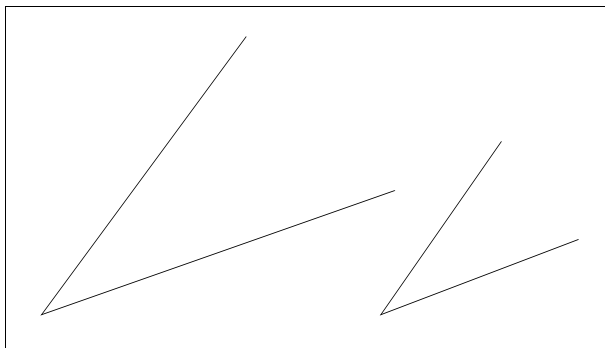
niets, geen getal. En: ‘Hoe kan ik nou min drie fietsen hebben?’, vroeg een kind zich eens verbaasd af.

Op de vraag of er een (aller)grootste getal is, zullen veel kinderen een bevestigend antwoord geven. Het systeem van getalnotaties beschouwen kinderen soms als additief:  $100 + 20 = 10020$ . Ook op het gebied van de meetkunde ontwikkelen zich soms inadequate horizontale intuïties. Een bekend probleem dat Wittgenstein vaak zijn in zijn seminars aan zijn gehoor voorlegde, is het volgende:

Stel ik span een touwtje om de aarde. Ik knip het door en zet er een meter tussen. Hoever komt dan dat touwtje, als ik het weer span, los van de aarde?

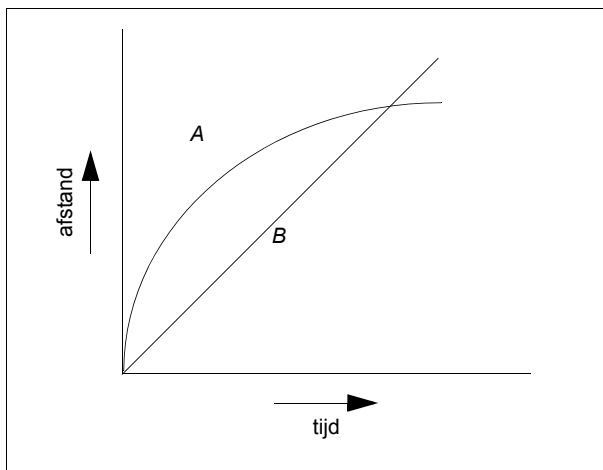
Veel kinderen (én ook vaak volwassenen) zullen spontaan antwoorden dat dit vrijwel niets of hooguit een fractie van een millimeter is. Tot veler verbazing is het echter ruim zestien centimeter.

Op de vraag welke van de twee onderstaande hoeken het grootst is, zullen veel kinderen de linker aanwijzen, omdat ze spontaan het tussen de hoeken liggende gebied als het grootste ervaren (fig.4).



figuur 4: hoeken

Het interpreteren van grafieken. We kijken naar de grafische weergave van het verloop van een hardlooppwedstrijd (fig.5).



figuur 5: grafiek

We zien dat *A* weliswaar een vliegende start maakt, maar door *B* na bepaalde tijd wordt ingehaald. Leerlingen echter menen vaak dat op het punt waar de lijnen elkaar kruisen, *A* tegen *B* aanbotst. Ze vatten de lijnen, die de relatie tussen afstand en tijd weergeven, op als de concrete routes die de lopers afleggen. Horizontale intuïties kunnen in het reken-wiskundeonderwijs blokkerend werken, zoals uit onderzoek is gebleken, maar ook ondersteunend. Uit onderzoek bleek dat informele werkwijzen worden opgeroepen, bijvoorbeeld:

- als spelletjes met de dobbelsteen worden gespeeld;
- als eerlijk moet worden verdeeld;
- bij het maken van sprongen op de lege getallenlijn;
- bij het werken met structuren (5 en 10) en als bij het aftrekken met tekorten moet worden gewerkt:  $(223 - 16 \div 200, 20 - 10, 3 - 6 \diamond 3$  afhalen en dat levert 3 tekort op en die 3 moeten nog van de 20 worden afgetrokken).

## 12 Probleem oplossen en intuïtie in fasen

In de literatuur over het oplossen van problemen wordt steeds op het belang gewezen van verschillende fasen die dat proces kenmerken. Die fasen zijn (a) het begrijpen van het probleem; in deze fase wordt het probleem onderkend en wordt aan een probleemrepresentatie gewerkt die de basis is voor een globaal oplosplan; (b) het werken aan de oplossing; belangrijk in deze fase is het dat de probleemoplosser op zijn activiteiten reflecteert; (c) het beslissen over het resultaat; de probleemoplosser vraagt zich onder meer af of het probleem naar tevredenheid is opgelost of dat (een andere keer) wellicht andere stappen moeten worden overwogen. (Elshout-Mohr, 1987).

Uitgaande van dit algemene schema van probleem oplossen, wordt nu nagegaan wat de betekenis is van intuïtie tijdens die processen.

Wanneer in de eerste fase een probleem wordt onderkend, wordt een notie gegenereerd waardoor inzicht in het type probleem ook een type oplossing suggereert, stelt Polya (1962); deze notie is sterk intuïtief. In deze eerste fase komen probleemrepresentaties tot stand en dat betekent dat er beelden (schema's, modellen, patronen) worden opgeroepen. Dat proces is te begrijpen vanuit de opvatting dat intuïtie in essentie bestaat uit het direct doorzien van structuur (Van Hiele, 1997) en *Gestalt* (Dolk, 1997). Waar het volgens Polya echter vooral op aankomt is de 'intuitive grasp of the situation, a little bit of a bright idea' (pag.24). Polya laat hier echter direct een waarschuwend geluid op volgen: 'Bright ideas are rare'. Hoe het ook zij, het voordeel van een intuïtieve en spontane probleemaanpak is dat de slagvaardigheid wordt gestimuleerd en het denken gemobiliseerd.



‘The role of intuition is to prepare action’ zeggen Brown en Coles (2000;173). Ook in de theorie van Skemp (1973) wordt het proces van probleem oplossen op intuïtief niveau gestart en Van Hiele (2002) spreekt in zijn niveautheorie van *visual level*. Intuïtie bevordert het nemen van initiatieven zodat zich creatieve en onverwachte ideeën kunnen vormen en niet zo snel de beperking wordt ondervonden van een keurslijf van routines (zie ook Rumco c.s. 1999). Niemand minder dan Poincaré, zegt Rumco, meende dan ook dat we door logica bewijzen leveren, maar dat het ontdekken op intuïtie stoelt. Intuïtie stimuleert het nemen van initiatieven omdat intuïtie veelal gepaard gaat met ‘an *emotional involvement on the part of the knower*’ (Claxton, 2000, pag. 40; curs. JN).

In een tweede fase van het proces van probleemoplossen kunnen dan experimenten plaatsvinden. Er worden denkwegen verkend, een handelingsplan bedacht, zo nodig tussenstappen bedacht en er worden ideeën bediscussieerd en uitgetoet. Vervolgens kan in de derde fase aan de oplossing van het probleem worden gewerkt.

In deze derde maar ook in een vierde fase kunnen de intuïties die spontaan werden opgeroepen, kritisch worden bekeken. Volgens verschillende onderzoekers wordt een intuïtief oordeel dat tot stand komt op basis van (visuele) structuren, achteraf verhelderd en bevestigd door ‘discursief denken’ (Van Hiele, 1997, Krutetskii, 1976). Intuïtieve processen, zegt Krutetskii verwijzend naar de Amsterdamse psycholoog Révész, verlopen sterk verkort en veel sneller dan processen van discursief denken. Een intuïtief tot stand gekomen diagnose of denkweg, zal men achteraf willen analyseren op grond van - ook voor anderen - overtuigende argumenten. Indien deze intuïties de toets der kritiek kunnen doorstaan, worden ze in een vijfde fase toegevoegd aan de ‘mentale gereedschapskist’. Ze gaan onderdeel uitmaken van het rationeel-planmatig denken en handelen. Zo leert een kind op basis van zo’n kritische terugblik dat het bijvoorbeeld inderdaad goed is om:

- een schema te maken;
- een probleem te vereenvoudigen;
- een schatting te maken;
- na te gaan of zo’n soort probleem al eens eerder is opgelost;
- te reflecteren op verschillende aanpakken.

## 13 Samenvattend besluit

‘Intuïtie is dus in wezen iets heel eenvoudigs en heel goed te begrijpen’, zegt Van Hiele (1997, pag.74). ‘Zij sluit direct aan bij het non-verbale denken dat wij voortdurend doen.’ Zij is bovendien vervlochten met de ervaring en kennis die zowel spontaan als systematisch wordt ver-

worven. Intuïtief denken - de *horizontale* en vooral de verticale intuïtie - kan gestimuleerd worden in het onderwijs. Brawn (2000) beantwoordt de vraag *tuition for intuition* dan ook met een aantal nuttige suggesties voor het stimuleren van intuïtie van studenten, zoals:

- het gezamenlijke, kritisch bespreken van elkaars intuïties;
- analyse van en vertrouwd raken met het idee dat er vaak meerdere aanpakken van en oplossingen voor een probleem zijn.

Nieuwe problemen worden vaak intuïtief aangepakt en daarom is intuïtie een onmisbare basis voor *transfer*, dat wil zeggen: toepassen én exploreren van reeds verworven inzichten (Nelissen, 2007). Intuïties moeten daarom *flexible and adaptable* zijn in nieuwe situaties (Brown & Cole, 2000). Intuïtie steunt op ervaring en is een manier van kennen die ‘can be *developed* as a result of experience’ (Claxton, 2000, pag.47; curs.JN). Maar die ervaring moet dan niet eenzijdig het karakter hebben van een voortdurend herhalen van dezelfde routines (Brawn, 2000). Omgekeerd is voor het ontwikkelen en/of verwerven van wiskundige inzichten intuïtie weer onontbeerlijk. Men kan zich dat proces als volgt denken. Wanneer men intuïtief (zoekend, experimenterend) een probleem tracht op te lossen, zal men, achteraf kritisch en reflectief willen terugblikken op de betekenis van de intuïtieve aanpak. Indien het probleem naar wens is opgelost, kan deze intuïtie worden geïntegreerd in het bestaande kennisbestand. Het aldus verrijkte kennisbestand wordt daardoor weer een krachtiger voedingsbodem voor het ontstaan van nieuwe intuïties. We zien dat intuïtie en kennisconstructie kunnen worden beschouwd als complementaire, cyclisch verlopende processen.

Intuïtie is niet een vijfde dimensie of een zesde zintuig, het is een mentale vaardigheid die in probleemgericht en interactief onderwijs kan worden ontwikkeld. Intuïtie is echter niet enkel verbonden met cognitie maar ook met creativiteit en emotie. Leerlingen moeten ervaren en leren dat intuïtie zich kan manifesteren in allerlei, niet puur rationele, vormen: bijvoorbeeld als beeld, vermoeden, fantasie, hypothese, impuls en emotie. Op basis van intuïtie - en niet door het strikt volgen van standaardprocedures - zullen leerlingen het durven om gebaande paden te verlaten en risico’s te nemen. ‘Without intuition, there is no creativity’, zo citeerde ik Wilder. Niet alleen de excellente leerlingen zouden het (leren) nemen van zulke risico’s moeten ervaren, maar *alle* leerlingen. Zodat zich een basis van zelfvertrouwen ontwikkelt die noodzakelijk is om de eigen intuïtie te durven aanspreken en om ongewenste routines te kunnen vermijden. Met dat laatste is uiteraard niet bedoeld dat routines als zodanig ongewenst zijn. Rekenen-wiskunde leren is voor een deel het automatiseren van nuttige kennis, waar we voortdu-

rend veel gemak van ondervinden. In de inleidende paragraaf werd al een onderscheid gemaakt tussen intuïtieve processen en geautomatiseerde processen. Er is sprake van intuïtie wanneer het handelen wordt opgeroepen door een probleem en niet als een geautomatiseerde, vertrouwde handeling wordt uitgevoerd. In beide gevallen is er echter sprake van handelen dat verkort, direct en zonder expliciete planning en reflectie plaatsvindt.

Intuïtie als mathematisch-cognitief proces wordt door veel auteurs opgevat en verklaard als het (plotseling) zien van structuur (samenhang, *Gestalt*). Een *Gestalt* heeft betekenis en die betekenis doorzien we doorgaans onmiddellijk. Intuïtie is 'the act of grasping the meaning' zegt Bruner (in Brown & Coles, 2000), zich ook wel manifesterend als de bekende *aha-Erlebnis* - zonder en zelfs vóórdat dat we daarvoor een passende of sluitende redenering hebben opgezet. Ik heb intuïtief zo'n idee dat intuïtieve processen voor het oplossen van reken-wiskundige problemen van bijzondere betekenis zijn.

## Noot

- 1 Met dank aan P. en M. Kindt voor hun opbouwende commentaar op een eerdere versie van dit artikel.

## Literatuur

- Atkinson, T. & G. Claxton (2000) (eds.). *The Intuitive Practitioner*. Buckingham: Open University Press.
- Brawn, R. (2000). The formal and the intuitive in science and medicine. In: T. Atkinson & G. Claxton (eds.) *The Intuitive Practitioner*. Buckingham: Open University Press, 149-165.
- Brown, L. & A. Coles (2000) Complex decision making in the classroom: the teacher as an intuitive practitioner. In: T. Atkinson & G. Claxton (eds.). *The Intuitive Practitioner*. Buckingham: Open University Press, 165-182.
- Bowers, K.S., G. Regher, C. Balthazard & K. Parker (1990). Intuition in the context of discovery. *Cognitive Psychology*, 22, 72-110.
- Brouwer, L.E.J. (1912). *Intuitionisme en formalisme*. Amsterdam (inaugurale rede).
- Claxton, G. (2000). The anatomy of intuition. In: T. Atkinson & G. Claxton (eds.) *The Intuitive Practitioner*. Buckingham: Open University Press, 32-53.
- Burton, L. (2004). *Mathematicians as Enquirers. Learning about learning Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Dalen, D. van (2001). *L.E.J. Brouwer 1881 – 1966, Een biografie*. Amsterdam: Bert Bakker.
- Davis, P.J. & R. Hersch (1985). *Erfahrung Mathematik*. Stuttgart/Basel: Birkhäuser Verlag.
- Elshout-Mohr, M. (1987). Het oplossen van problemen. In: P. Span, J.M.C. Nelissen, H.F. Pijning & C. Dietvorst (red.) *Onderwijzen en leren. Een onderwijspsychologische basis voor het handelen op school*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: Routledge Farmer.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht/Boston: D.Reidel Publishing Company.
- Hiele, P.M. van (1997). *Structuur*. Zutphen: Thieme.
- Hiele, P.M. van (2002). Similarities and Differences between the Theory of Learning and Teaching of Skemp and the Van Hiele Levels of Thinking. In: D. Tall & M. Thomas, M. (eds.). *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics. A tribute to Richard Skemp*. Flaxton/Australia: Post Pressed.
- Krutetskii, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago/London: The University of Chicago Press.
- Dolk, M.L.A.M. (1997). *Onmiddellijk onderwijsgedrag over denken en handelen van leraren in onmiddellijke onderwijs-situaties*. Utrecht: XXXXX (proefschrift).
- Dijksterhuis, A. (2007). *Het slimme onbewuste, denken met gevoel*. Amsterdam: Bert Bakker.
- Eraut, M. (2002). Menus for Choosy diners. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 8(3), 371-379.
- Furlong, J. (2000). Intuition and the crisis in teacher professionalism. In: T. Atkinson & G. Claxton (eds.) *The Intuitive Practitioner*. Buckingham: Open University Press, 15-32.
- Gladwell, M. (2007) *Intuïtie - De kracht van het denken zonder erbij na te denken*. Amsterdam: Uitgeverij Contact.
- Gopnik, A., A.N. Meltzoff & P.K. Kuhl (1999). *The scientist in the crib*. New York: Harper Perennial.
- Gregory, R.L. (ed.) (1987). *The Oxford Companion to the Mind*. Oxford/New York: Oxford University Press.
- Gravemeijer, K. (2005). Revisiting: mathematics education revisited. In: H. ter Heege, T. Goris, R. Keijzer & L. Wesker (red.). *Freudenthal 100, Utrecht*: Freudenthal Instituut.
- Groeneveld, R. (2006). *De innerlijke kracht van de ontwerper. De rol van intuïtie in het ontwerpproces*. Rotterdam: Veenman Drukkers.
- Heller, J.L. & F. Reif (1984). Prescribing effective human problemsolving processes: Problem Description in Physics. In: L.B. Resnick, J.H.Larkin, & R.C.Anderson (eds.). *Cognition and Instruction*. 1(2), 177-216.
- Hersch, R. (1997). *What is mathematics, really?* London: Jonathan Cape.
- Kline, M. (1980). *Mathematics. The loss of certainty*. New York: Oxford University Press.
- Kok, J. (2003). *Talenten transformeren. Over het nieuwe leren en nieuwe leerarrangementen*. Eindhoven: Fontys Hogescholen.
- Möbius, P.J. (1900). *Ueber die Anlage zur Mathematik*. Leipzig: Verlag von Johann Ambrosius Barth.
- Myers, D.G. (2002). *Intuition. Its powers and perils*. New Haven & London: Yale University Press.
- Nelissen, J.M.C. (2007). Recent onderzoek naar transfer. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(1), 24-32.
- Olive, J. & L. Steffe (2002). Schemes, Schemas and Director Systems. In: D. Tall & L. Thomas (eds.). *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics*. Flaxton, Australia: Post Pressed, 97-135.
- Poulos, J.A. (1989). *Ongecijferdheid*. Amsterdam: Bert Bakker.
- Pascal, R. (1670). *Penseés*.
- Pinker, S. (2002). *The blank Slate. The modern denial of human nature*. London: Penguin Books.
- Polya, G. (1962.) *Mathematical Discovery, (1)*. New York/London: John Wiley and Sons. Inc.
- Rumco, M.A. & S.O. Sakamoto (1999). Experimental Studies of Creativity. In: R.J.Sternberg (ed.). *Handbook of Creativity*

- ty. 62-93.
- Selz, O. (1924) *Die Gesetze der productiven und reproductiven Geistestätigkeiten*. Bonn: Cohen.
- Sfard, A. (2002). Thinking in Metaphors and metaphors for thinking. In: D. Tall & L. Thomas (eds.). *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics*. Falxton/Australia: Post Pressed. 79-97.
- Sinha, C. (1988). *Language and Representation*. New York/London: Harvester Wheatsheaf.
- Skemp R.R. (1973). *Wiskundig denken*. Utrecht: Het Spectrum, Aula.
- Tall, D. & M. Thomas (2002). *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics. A tribute to Richard Skemp*. Flaxton/Australia: Post Pressed.

*The concept of intuition has always drawn attention and stimulated the imagination, but evoked a lot of doubt and criticism, as well. In this article, the idea is defended that there is no point in creating a contradiction between intuition and cognition, because this contradiction is contra productive. Intuition is considered as a human activity that is closely connected with knowledge and that emerge during problem solving. We discern and discuss two levels of intuition, and the process of intuitive thinking is characterized in psychological terms as an immediate grasping of the meaning of a structure or Gestalt. Intuition may support, as well as thwart, the learning process. In mathematics education daily life based experience (common sense) is in most cases a good starting point for the teaching process, but it also can happen that intuition - based on common sense - towards the acquisition of mathematical insights.*

*The concept of intuition plays a central role in the 'intuitionism' of Brouwer. In Brouwer's view, axioms are seen as incomplete, and this means that the search for valid and true knowledge cannot be viewed as just a game of logical rules, but as a never ending human activity. Intuition can and should be supported in interactive mathematical education, because mathematics is not just a case of learning to apply standard rules and procedures. Students should be encouraged to explore unknown and unfamiliar problems. Hence, intuition is connected, not just with cognition and knowledge, but also with daring the unfamiliar, emotion and creativity.*