Hoe Juliette en Jonas leren rekenen

Appels en peren - naar Hans Freudenthal

W. Uittenbogaard

Tijdens de 25ste Panama-conferentie bracht J. van de Craats zijn visie rond het realistisch reken-wiskundeonderwijs naar voren. Hoewel Van de Craats positieve kanten aan het moderne reken-wiskundeonderwijs ziet, blijkt hij er ook veel kritiek op te hebben. In zijn ogen leren kinderen tegenwoordig slecht rekenen, onder meer omdat er veel oplossingsstrategiëen naast elkaar worden aangeboden.
In dit artikel worden enkele kanttekeningen bij het betoog van Van de Craats geplaatst: hij baseert zijn uitspraken op oppervlakkige, onvolledige en eenzijdige percepties en laat duidelijk merken geen weet te hebben van onderzoek en ontwikkelwerk van reken-wiskundeonderwijs in de afgelopen dertig jaar.

1 Een geruchtmakende lezing

Op donderdag 18 januari jongstleden hield J. van de Craats op de 25ste Panamaconferentie een lezing onder de titel 'Mythen in de rekendidactiek'.[1] De tekst van deze lezing zal ik in dit artikel steeds als referentie gebruiken. Van de Craats begon zijn verhaal met de opsomming van positieve bijdragen in de laatste 25 jaar van het onderzoek- en ontwikkelwerk ten behoeve van de reken-wiskundedidactiek. Daarna veranderde zijn stijl en uitte hij scherpe kritiek op onderdelen van de moderne reken-wiskundedidactiek, met het *Leitmotiv:* 'Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen'. In onderstaand betoog kan de lezer kennis nemen van zijn standpunten.

Laat ik beginnen met de positieve kanten van het realistisch reken-wiskundeonderwijs die Van de Craats in zijn plenaire lezing aansnijdt. Positief te waarderen aan de moderne rekendidactiek is volgens hem het volgende:
- veel aandacht voor rekenopgaven uit de dagelijkse praktijk;
- mooie realistische voorbeelden;
- uitdagende rekenpuzzels;
- in deze didactiek komen leuke rekenprojecten voor;
- opvallend is de aantrekkelijke vormgeving.

Van de Craats is in Nederland en daarbuiten een gerenommeerd wiskundige, die zich behalve met zijn vak, de zuivere wiskunde, ook bezighoudt met het onderwijs in de wiskunde, meestal voor het voortgezet onderwijs. Dat doet hij al zijn hele leven, gezien zijn bijdragen aan veel bijeenkomsten en conferenties over wiskundeonderwijs. Ik was altijd buitengewoon onder de indruk van zijn betrokkenheid, zijn gedreven presentaties en zijn zorgen over het wiskundeonderwijs.
Dat was een belangrijke reden om hem aan te bevelen als plenair spreker op onze conferentie in januari dit jaar. Ik heb met veel genoegen naar zijn lezing geluisterd. Hij deed het weer als vanouds: gedreven en duidelijk. Zijn kritische opmerkingen over de hedendaagse rekendidactiek waren echter niet mals:
- er is te weinig systematisch oefenmateriaal en daardoor raakt het nodige oefenen in het slop;
- er worden verschillende oplossingsmethoden door elkaar heen aangeboden, waaronder veel 'hapsnapmethoden';
- leerlingen kunnen daardoor geen zelfvertrouwen opbouwen;
- de realistische aanpak is daardoor rampzalig voor matige en zwakke leerlingen.

2 Leren met inzicht

Het voornaamste punt in het betoog van Van de Craats is dat hij zich opwerpt als pleitbezorger van traditionele cijferalgoritmen en zich keert tegen het kolomsgewijs rekenen dat in de huidige, moderne didactiek de plaats heeft ingenomen van die traditionele cijferalgoritmen.
In de wiskunde en dus ook in het wiskundeonderwijs, is het zoeken naar patronen, regelmatigheden, regels, allerlei verkortingen en ook algoritmen, essentieel. Hoe korter of vlugger, hoe beter. Daar is natuurlijk niets tegen. Dat is in mijn ogen ook de zoektocht die we met kinderen zouden moeten gaan. Met alle kinderen! Ieder naar zijn of haar vermogen; zo ver als je kunt komen. Maar niet met onbegrepen regels; wel met behoud van inzicht.

Eerst een voorbeeld uit mijn eigen onderwijspraktijk, waarmee ik duidelijk wil maken hoe er met onbegrepen regels wordt gerekend. Althans, als het over breuken gaat. Tijdens een les voor eerstejaars pabo-studenten schrijf ik op het bord:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} =$$

en vraag studenten om dat op te lossen. Er zijn er altijd wel enkelen die 'gelijknamig maken' roepen. En zo komt er op het bord te staan:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{10}{15} \times \frac{12}{15} = \frac{120}{15} = 8.$$

Dat '= 8' voeg ik er meestal aan toe. Bij de stemming over de vraag of dit antwoord juist is, blijkt meestal ongeveer de helft van de studenten vóór. Nogal wat studenten twijfelen aan het antwoord van $\frac{8}{15}$ dat zij hadden. Dat lijkt zo simpel. Dat kan niet goed zijn. Daar sta je dan als opleider. Ook mijn reactie 'Hoeveel zou $\frac{2}{3}$ van 80 cent zijn?', helpt weinig studenten verder.

A. Dowker (1992) beschrijft hoe zij een stuk of tachtig wiskundigen kale opgaven voorlegt die door te schatten kunnen worden opgelost. Bijna alle geïnterviewden passen een manier toe, die Van de Craats 'hapsnap' noemt; vrijwel niemand gebruikt voor het oplossen een traditioneel algoritme. Een half jaar later legt ze de helft van haar onderzoeksgroep nog een keer dezelfde problemen voor. Iedereen doet het weer met een hapsnapmethode, maar een groot deel van de groep gebruikt nu een geheel andere strategie. Is dit exclusief voorbehouden aan wiskundigen, aan experts dus, of is het een geschikte kijk op de onderwijsdidactiek voor alle kinderen?

Van de Craats heeft in mijn ogen niet goed begrepen wat we onder cijferen zouden moeten verstaan. Onze traditionele cijferalgoritmen voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen hebben, als ultieme verkortingen, hun uiteindelijke vorm gekregen in de zeventiende eeuw, vooral ten behoeve van de handel. Een eeuw geleden hebben we die algoritmen onderwerp gemaakt van ons onderwijs. Met het oog op later ...

3 Verschillen

In het betoog van Van de Craats wordt niettemin het cijferen onder de loep genomen. Cijferen is een van de strategieën die je kunt inzetten om een rekenkundig of wiskundig probleem op te lossen. Laten we de vermenigvuldiging 27×37 eens als voorbeeld nemen. Dat doen Van de Craats en ik uit het hoofd. We weten immers dat $3 \times 37 = 111$ en maken van die kennis gebruik. Dus 27×37 is 9 keer zoveel: 999. Veel mensen moeten dit echter met een algoritme oplossen. Zoiets moet je op voorhand goed leren, volgens het betoog van Van de Craats. Laat ik een paar voorbeelden uit mijn eigen ervaringen nemen. Van de Craats' voorbeelden komen daarna.

Eerste voorbeeld: 80 : 2,75 =

Van de Craats lost dit waarschijnlijk op door deeltal en deler te vergroten met een factor 100 en de opgave op te lossen door het traditionele deelalgoritme toe te passen. Nog een keer hetzelfde probleem:

> Juf heeft voor een handenarbeidles stukjes touw nodig van 2 meter 75. Zij heeft een bol van 80 meter. Hoeveel stukken kan zij daaruit halen?

Het bovenstaand probleem komt uit de laatste Cito PPON-peiling einde basisonderwijs 2004. De goedscore van dit probleem is ongeveer 10 procent. Bedroevend laag eigenlijk.

Op verkenning in de basisschool

Ik heb bovengenoemd probleem aan vele kinderen in de basisschool voorgelegd. Alle kinderen die in dit probleem een deling herkenden en begonnen aan 80 : 2,75, konden dat niet tot een goed einde brengen. Hoe zou Van de Craats ze dat willen leren? Waarschijnlijk kiest hij toch voor een aanpak met het deelalgoritme. Hij zegt in zijn lezing immers: 'Voor elk van de vier hoofdbewerkingen is er één universeel werkend recept.' 'Was het leven maar zo eenvoudig', is mijn reactie.
Nu naar de kinderen die het probleem wel konden oplossen. Jordi zegt:

> 1 keer is 2,75; 2 keer is 5,5; 4 keer is 11 meter. Dan is 28 keer 77 meter. Eén keer meer is minder dan 80 meter. 29 stukken, dus.

Eva redeneert als volgt:

> Ik doe even alsof de juf 90 meter heeft en dat de stukken 3 meter lang zijn.'

Oei, denk je dan. In een deling, zowel deeltal als deler veranderen. Dat kan haast niet goed aflopen. Maar Eva vervolgt:

> Nou, dat zijn dan 30 stukken, maar de stukken zijn niet 3 meter lang, maar 2,75 meter. Dat scheelt dus 30 keer een kwart meter, dat is 7 meter 50. Maar de juf heeft geen 82,50 meter. Dus dan één stuk minder. 29 stukken dus.

Wout redeneert als volgt:

> 10 stukken is 27,50 meter, 20 stukken is 55 meter, even denken … 30 stukken is 82,50 meter. Eén stuk minder dus.

Tweede voorbeeld: 7 + 8 =

Ik heb twee jaar in New York gewerkt en gewoond om daar mee te helpen een nascholingsprogramma rekenen-wiskunde voor leerkrachten van de basisschool op te zetten. Van de Craats zou zich daar in het walhalla voelen. Amerika, het algoritmeland bij uitstek, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld dat ik vaak heb ervaren! Ik legde kinderen uit groep 3 dit probleem voor: 'Weet je hoeveel 7 plus 8 is? Bijna altijd was hun reactie als volgt: 'Ik zet het eerst even onder elkaar':

$$\begin{array}{l} 7 \\ \underline{8\ } + \end{array}$$

Dan vervolgden ze met:

> Seven plus eight is 15, put down the 5, carry the 1, 1 down: 15.

Natuurlijk heb ik halverwege hun liedje vaak 'stop' geroepen en gevraagd: 'Ben je al klaar?' Nee, niet klaar, eerst het liedje afmaken. Dat hadden ze zo geleerd.
Het was voor veel kinderen een openbaring, dat je halverwege al klaar was. Je hoeft het 'liedje' niet helemaal af te maken. Sterker nog: helemaal niet te maken.

Derde voorbeeld: 2003 – 1998 =
Het goede antwoord is 5, want 2 + 3 = 5. Klaar! Maar helaas niet voor Amerikaanse kinderen. Zij denken: even lenen bij de buren, die ook niks hebben. Dan maar lenen bij hun buren. En nog een keer. Met enig geluk wordt het antwoord 5. 'Voor alle bewerkingen één strategie, geen hapsnapmethode', zegt Van de Craats. Dit zou betekenen dat hij dit type opgaven onder elkaar zou willen laten zetten en met behulp van de traditioneel bekende cijferalgoritme zou willen laten oplossen.

Vierde voorbeeld: 200 × 200 =
Amerikaanse leerlingen zeggen: 'Heeft u ook een zakrekenmachine?' Mijn reactie is dan: 'Nee, maar kun je het wel oplossen?' De kinderen zijn dan geneigd te zeggen: 'Dan heb ik papier en pen nodig.' En daar gaan we dan weer:

$$\begin{array}{l} 200 \\ \underline{200\ } \times \end{array}$$

0 keer 0, is dat 1 of 0? En dan 0×2? Met alle moeite komt er 40.000 uit, terwijl je boerenverstand zegt: een vier met vier nullen, klaar! Dit waren vier kleine voorbeelden, van elk van de hoofdbewerkingen één. Hapsnap of algoritmisch?

4 De tijd staat niet stil ...

In de afgelopen 35 jaar zijn we bezig geweest om over de positie van hoofdrekenen en cijferen na te denken. Hoofdrekenen, wat vroeger 'uit' je hoofd rekenen was, heeft plaats gemaakt voor rekenen 'met' je hoofd. Eventueel met meer of minder tussenantwoorden of op papier als je wilt. Er blijft wel een stukje 'uit je hoofd' over, zoals 7 + 8 en 7×8. Dat zou een leerling echt uit het hoofd moeten kennen. Gememoriseerde kennis dus. Het cijferen, dat we vroeger leerden onder het motto: vlug, foutloos, voor later ... heeft in de tegenwoordige tijd z'n betekenis goeddeels verloren. Er is bijvoorbeeld geen beroep meer waar je het nog voor zou moeten kunnen. En het toepassen van een algoritme is ook geen wiskunde! Bovendien, de oude cijferalgoritmen hebben niet veel betekenis voor het wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs of voor later. In de woorden van Van de Craats: de doorstroomrelevantie van deze leerstof is niet groot.

5 Geschiedenis

In de jaren zeventig, in onze zoektochten naar een betere didactiek, hielden we ons al bezig met dat cijferen. Vooral ook omdat het daar in de basisschool niet al te best mee ging. We waren ook op zoek naar nieuwe inhouden. Met wisselend succes. Toch liet het traditionele cijferen ons niet los. Al in 1971 verscheen 'Cijferen anno 2000', een leerstofpakket voor de Pedagogische Akademie, met veel aandacht voor mechanische en elektrische rekenmachines. Met een voorwoord van H. Freudenthal. Het zou interessant zijn de hele inleiding hier te citeren. Maar dat kan niet. Daarom een enkele uitspraak uit dit voorwoord:

> In het algemeen werd in de lagere scholen weinig tijd besteed aan de introductie van een algoritme op inzichtelijk niveau. Het accent kwam te liggen op inoefening van de mechanismen.

In de jaren zeventig verschenen er, in de IOWO-tijd toen Freudenthal de leiding had over het instituut dat nu zijn naam draagt, verschillende publicaties over het cijferen.[2]
Deze publicaties kwamen uit als afleveringen van het tijdschrift 'Wiskobasbulletin', dat een oplage van ongeveer tienduizend stuks had.
In de jaren tachtig begon de vakgroep OW&OC, de voorloper van het huidige Freudenthal Instituut, met een serie onderzoekspublicaties. De eerste hiervan had de titel 'Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas'. Ook hieruit een kort citaat. Aan de orde is de vraag of er een slechtste of beste methode is om te leren cijferen.

> ... over het slechtste kan weinig misverstand bestaan. Dit is het mechanistische cijferonderwijs. Deze werkwijze blijkt immers weinig effectief te zijn en een op 'trucs' gerichte anti-wiskundige attitude te bevorderen. Inzicht is dus geboden. Maar over de precieze vormgeving daarvan bestaat geen eenstemmigheid. (pag.236)

In de jaren tachtig kwamen er reken-wiskundemethoden als 'Rekenen en Wiskunde', 'Rekenwerk' en 'De wereld in getallen' op de markt, die de opbrengsten van al dat onderzoek min of meer vorm gaven in hun methodiek. Ook werkten we in het zogenaamde 'Zwaluwproject' aan

een nascholingscursus bij de methode ‘Rekenen en Wiskunde’ om het cijferen nog eens goed voor het voetlicht te brengen. Een van de interessante ontwikkelingen vormde in die tijd het beeldplaatproject. Daarin werden voorbeelden gegeven van het oplossingsgedrag van leerlingen en van lessen in de hoofdbewerkingen. Uit die tijd is ook de ‘Ouderavond’, een les over delen volgens de ‘hapmethode’. Het lijkt erop dat Van de Craats, getuige zijn lezing op de Panama-conferentie, de ontwikkelingen in de tijdsspanne 1970-2007 niet heeft gevolgd. Nu zijn kleinkinderen op de basisschool zitten, verbaast hij zich echter over alle veranderingen die er in die 35 jaar hebben plaats gevonden.
Bij het totstandkomen van de TAL-brochure ‘Kinderen leren rekenen’, hebben we ons nogmaals het hoofd gebogen over dat traditionele cijferen. Dat heeft in die publicatie geleid tot een vernieuwde aanpak: het kolomsgewijs rekenen. Dit betekent dat er voorstellen werden gedaan voor algoritmen, die min of meer in de plaats kwamen van die traditionele algoritmen. De voorstellen zijn eigenlijk niet naar míjn zin. Er wordt in mijn ogen nog veel te veel aandacht aan het cijferen geschonken. We zouden met veel minder toe kunnen. Met boerenverstand, met ‘rijgen’ en als je verstandig gebruik maakt van een rekenmachientje, hoef je helemaal geen andere of betere algoritmen te leren. Toch kun je dat kolomsgewijs rekenen wel veel nageven. Van links naar rechts, grote happen eerst. Niet tegen de leesrichting in en veel mogelijkheden tot meerdere of mindere verkortingen. In mijn ogen zeker niet als opstap naar de traditionele algoritmen. Daar maak je het alleen nog maar moeilijker mee.

6 Opa vertelt

Ik zat als kind op een lagere school in een volksbuurt in Amsterdam. ‘Opleidingsschool voor hbs en gymnasium’ stond er (en staat er nog, hoewel het gebouw een andere bestemming heeft gekregen) in tegeltjes op de gevel van het schoolgebouw. Ik zat met ongeveer vijftig leerlingen in een klas, drie rijen van dubbel acht of negen. Ik bewaar daar dierbare herinneringen aan. Los van de verveling, die er ook voorkwam, was er de uitdaging. Het was natuurlijk niet eenvoudig om alle kinderen op hun wenken te bedienen. Adaptief onderwijs noemen we dat nu.
Wij hadden drie rijen met banken. De raamrij: ‘Koningsburg; de middenrij ‘Middelburg’ en de gangrij ‘Domburg’. Zo is het nooit gezegd, maar zo was het wel. Ik heb altijd in ‘Koningsburg’ gezeten. De leerlingen uit die rij mochten wel eens naar buiten kijken. Ik bewaar zoveel dierbare herinneringen aan al mijn meesters en juffen van de basisschool. Daar heb ik al die algoritmen geleerd. Voor later ...
Van de Craats zal ongeveer in dezelfde tijd hetzelfde rekenonderwijs hebben genoten als ik. Hij leerde die algoritmen natuurlijk ook. Dat geldt vast niet voor al mijn en zijn klasgenoten. Van de Craats heeft natuurlijk ook altijd in ‘Koningsburg’ gezeten. En hij denkt dat dit gewoon was, wat het zeker niet is.

Terug naar de basisschool

Alle kinderen in groep 4, die nog geen enkele ervaring hadden met onder elkaar zetten, die ik rekenopgaven als 230 + 140, 234 + 145, maar ook aftrekkingen als 270 – 140 gaf, rekenden van links naar rechts. Soms splitsen, lang niet altijd. Altijd rekenend van links naar rechts. Grote happen eerst, de leesrichting volgend. Logisch! Natuurlijk zouden we in de didactiek hierbij aan moeten sluiten.
Nu naar de voorbeelden die Van de Craats liet zien. Hij sprak over gruwelvoorbeelden. Deze voorbeeldopgaven komen uit zijn lezing op de Panama-conferentie. Hij gaf vier voorbeelden, de eerste over het kolomsgewijs optellen:

$$\begin{array}{r l} 78{,}12 & \\ 13{,}34 & \\ 142{,}57 & \\ 92{,}63 & \\ \underline{104{,}89} & + \end{array}$$

Hier zou ik, zo mogelijk, alle kinderen van de basisschool willen leren hoeveel het ongeveer is.
Zeg maar 140 + 100 + 90 + 90 en dan nog wel 10 (1 + 2 + 2 + 4 en de rest) meer. Dus ongeveer 240 + 90 → 330 → + 90 → 420 → + 10 → 430. Dat hoeft dus niet onder elkaar. Leer kinderen in zo’n geval op tijd een rekenmachientje te gebruiken. Niemand in deze wereld doet een dergelijke opgave nog met pen en papier. Dus geen tijd inruimen voor het beheersen van een cijferalgoritme (ook niet kolomsgewijs), waarmee deze opgave opgelost kan worden.
Wat het nog erger maakt is dat Van de Craats het meest verkorte traditionele algoritme vergelijkt met het minst verkorte algoritme van kolomsgewijs optellen. Dat is appels met peren vergelijken! Dan lijkt het wel erg! Hij zou oog moeten hebben voor leerlingen, die het op de meest verkorte wijze kunnen oplossen, naast leerlingen die een paar tussenstappen extra nodig hebben. En dat is wel het gros van de leerlingen; altijd zo geweest! (Zie ook PPON, 2005).

Voorbeeld 2: kolomsgewijs aftrekken

$$\begin{array}{r l} 413{,}92 & \\ \underline{376{,}75} & – \end{array}$$

Hier zou ik wensen dat alle leerlingen zouden zeggen: 24 + 13 = 37, eerst van 376 naar 400, dan nog 13 tot 413. We zouden ze moeten leren om het zo te doen. Eerst kijken naar de getallen en dan je strategie bepalen. Misschien dat sommige leerlingen ook nog zouden inzien dat

24 + 13 echt goed is omdat 0,92 – 0,75 nog een rest oplevert. Ik weet zeker dat Van de Craats dit oplost door: 24 + 13 + 0,17 = 37,17. Dat hij het zo doet, wordt ingegeven door de getallen van deze opgave. Bij andere getallen kiest hij een andere strategie. Het parool is dus: niet alle leerlingen over één kam scheren en één standaardoplossing klaar hebben (Dowker, 1992).

Voorbeeld 3: kolomsgewijs vermenigvuldigen

$$\begin{array}{r} 345 \\ \underline{729}\times \end{array}$$

Dit is inderdaad een voorbeeld om van te gruwen. Dit reken je toch uit met behulp van een rekenmachientje, zou ik willen zeggen. We gaan tegenwoordig toch geen twee getallen van drie cijfers meer algoritmisch op papier vermenigvuldigen. Wat nog wel kan is een schattende aanpak: de uitkomst ligt in de buurt van de helft van 700 × 700. 7 × 7 = 49. Dus 25 met vier nullen: 250.000. Een kwart miljoen. Ook hier vergelijkt Van de Craats weer appels met peren. Hij vergelijkt de niet-verkorte kolomsgewijze aanpak met het meest verkorte traditionele algoritme.
Hij geeft ook nog een voorbeeld (het vierde) van een deling: 83218 : 37 = , weer een voorbeeld met te grote getallen. Natuurlijk is de hapmethode niet zo efficiënt als de staartdeling, maar deze deling los je natuurlijk veel eenvoudiger op met een rekenmachientje. We kunnen een deel van de kinderen ook nog leren hoe je met een machientje de rest bepaalt. Van de Craats noemt de hapmethode onsystematisch. De bedoeling van de aanpak is juist wel gericht op een systematiek, namelijk die van ‘grote happen eerst’. Hij zegt over de staartdeling dat het een recept is dat iedereen kan leren en begrijpen.
Was dat maar waar! Dan was de hierboven geschetste zoektocht van al die jaren niet nodig geweest. Een van de argumenten om het cijferen te verbeteren was immers de situatie in het rekenonderwijs van de jaren vijftig en zestig van de vorige eeuw. De onderwijsresultaten met betrekking tot het cijferen van toen waren niet al te best. Verbeteringen werden door de meeste onderwijzers gewenst en omarmd. Er zijn geen argumenten voor de traditionele staartdeling, zoals eerder al werd opgemerkt in de onderzoekspublicatie van het OW&OC.
Van de Craats heeft het steeds over docentenwijsheid. Hij bedoelt daarmee, ben ik bang, veelal zijn eigen docentenwijsheid. Hij zou toch ook oog moeten hebben voor de schoolmeesterswijsheid van anderen, die in al die jaren aan verbetering van het reken-wiskundeonderwijs hebben gewerkt, denk ik dan.
En tegen Daan en Sanne zou ik willen zeggen: niks meer over rekenen aan opa vragen. Die helpt jullie van de regen in de drup. Ik wil jullie wel ‘handig rekenen’ leren, in een klasje met Juliette en Jonas.

Noten

1 Zijn powerpointpresentatie is, evenals de tekst die hij uitsprak, te bekijken op: http://staff.science.uva.nl/~craats/#panama
2 Leerplanpublikatie 6 ‘De abacus’ (over cijferend optellen en aftrekken), leerplanpublikatie 10 ‘Cijferend vermenigvuldigen en delen’ en leerplanpublikatie 11 ‘Gevarieerd oefenen’.

Literatuur

Dekker, A., H. ter Heege & A. Treffers (z.j.). *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas.* Utrecht: OW & OC.
Dolk, M.L.A.M. & W.Uittenbogaard (1989). De ouderavond. *Willem Bartjens, 9*, 14-20.
Dowker, A. (1992). Computational Estimation Strategies of Professional Mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1), 45-55.
Feijs, E., K. Gravemeijer, E. de Moor, W. Uittenbogaard (1987). *Cijferen 1 tot en met 6.* Experimenteel cursusmateriaal voor nascholing van het basisonderwijs. Utrecht: OW&OC.
Freudenthal, H. (1984). *Appels en peren - wiskunde en psychologie.* Apeldoorn: Walraven.
Galen, F.H.J. van & M.L.A.M. Dolk (1991). *Interactieve video in de nascholing rekenen-wiskunde.* Utrecht: Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen (CD-beta Press).
Goffree, F., W. Aarts, J. Eilander, D. Karman, H. Meyer, D. Oort, P. Scholten & A. Treffers (1971). *Cijferen Anno 2000.* Experimentele uitgave van de commissie Modernisering Leerplan Wiskunde.
Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buys & A. Treffers (eds.) (1999). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen Bovenbouw Basisschool.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Jansen, J., F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *PPON (periodieke peiling van het onderwijsniveau). Balans (32) van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4.* Arnhem: Cito.
Jong, R. de (ed.) (1977). De abakus. *Wiskobas-Bulletin, 6*(4), Utrecht: IOWO.
Koersen, W. & W. Uittenbogaard (2006). Cijferen, hoe nu verder? *Tijdschrift voor reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 25*(4), 46-50.
Moor, E. de (1980). Gevarieerd rekenen. *Wiskobas-Bulletin, 9*(1/2/3). gevarieerd rekenen. Utrecht: IOWO.
Treffers, A. (ed.) (1979). Cijferend vermenigvuldigen en delen. *Wiskobas-Bulletin, 8*(5/6). Utrecht: IOWO.
Uittenbogaard, W. (1986). Uitleggen en uitleggen is twee. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 4*(4), 41-42.
Uittenbogaard, W. (2007). Een zakje appels ... Voorbereidingen van een meester. *Volgens Bartjens..., 26*(3), 23-23.

At the 25th Panama conference mathematician J. van de Craats presented his ideas on realistic mathematics education in a keynote speech. Although Van de Craats recognizes some positive aspects of modern mathematics education, he is rather critical of the situation. He claims students in primary school receive poor teaching in arithmetic nowadays, as many problem solving strategies are presented alongside to each other. This article comments on Van de Craats' arguments: he bases his statements on superficial, incomplete, and one-sided perceptions and clearly shows he lacks knowledge of research and developmental work on mathematics education over the last thirty years.