

Een van de onderzoeken die gemeld zijn in de oratie van Jan van Maanen is *Het gebruik van tools in een innovatief leerarrangement voor wiskunde*. In dit artikel beschrijven **Michiel Doorman, Peter Boon, Paul Drijvers en Sjef van Gisbergen** de oriënterende activiteiten van een lessenserie over het functiebegrip.

‘Het ligt aan de belminuten hoeveel eruit komt’

Inleiding

In een 2HV-klas van het St. Gregoriuscollege te Utrecht werken leerlingen aan een – voor u – bekend probleem. Gegeven zijn twee telefoonabonnementen. Gevraagd wordt welk abonnement het meest aantrekkelijk is bij een bepaald belgedrag. Het is een opdracht in een serie van drie die bedoeld zijn als instap voor een lessenserie over het functiebegrip. Tijdens de klassikale bespreking van de uitwerkingen van de leerlingen horen we het volgende:

Khalid: ‘Het ligt aan de belminuten hoeveel eruit komt.’

De docent herhaalt dit voor de klas: ‘Dus je hoeft iedere keer alleen dit bordje (IN) te veranderen en dan weet je de kosten.’

Rogier: ‘Je kunt bij dat bordje ook a invullen, dan heb je de formule.’

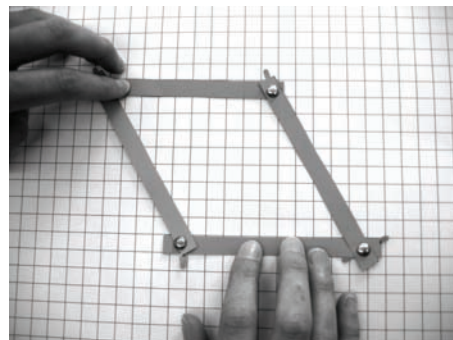
Dit was precies het type opmerkingen waarop we gehoopt hadden, maar dit resultaat werd niet eenvoudig bereikt. Met dit artikel proberen we inzicht te geven in de worstelingen die voorafgingen aan de ogenschijnlijk eenvoudige en voor de hand liggende conclusie van Rogier. Het zal blijken dat Khalid en Rogier het nut en doel van de pijlenkettingen zagen dankzij de organisatie van hun berekeningen. We beschrijven hoe instapproblemen aanleiding zijn tot het denken over afhankelijkheidsrelaties in samenhang met het ontwikkelen van de pijlenkettingrepresentatie.

Drie activiteiten

Vorig jaar is een onderzoek gestart naar het ontwikkelen van het functiebegrip met behulp van computeractiviteiten¹. Voor dit onderzoek is een lessenserie ontwikkeld. De lessenserie start met een oriëntatie op verschijnselen waarin samenhang tussen grootheden een rol speelt. De relatie tussen deze grootheden is wiskundig te beschrijven en dat helpt bij begrijpen van het proces en bij het doen van voorspellingen. De oriënterende activiteiten zijn zo gekozen dat leerlingen zelf keuzes dienen te maken bij het benoemen van de variabelen die een rol spelen en bij het beschrijven van de afhankelijkheid.

De eerste activiteit gaat over een *vierhoek*. De verbindingen in de hoekpunten zijn flexibel. Daardoor kun je de vierhoek bewegen. Elk groepje krijgt zo’n vierhoek en ruitjespapier. De vraag is eerst om te bepalen bij welke standen de oppervlakte 50 cm^2 is.

De vervolgvraag betreft de manier waarop de oppervlakte van de vierhoek verandert tijdens het bewegen. Bij het beschrijven van die verandering kunnen leerlingen een schema of tekening maken. Tot slot wordt gevraagd hoe het met de omtrek zit.



In de tweede activiteit vergelijken leerlingen twee *belabonnementen*:

- TomSoms: abonnementskosten per maand € 7,50 en kosten per belminuut 25 cent. De eerste dertig belminuten zijn gratis.
- TomVaak: abonnementskosten per maand € 22,50 en kosten per belminuut 15 cent. De eerste tachtig belminuten zijn gratis.

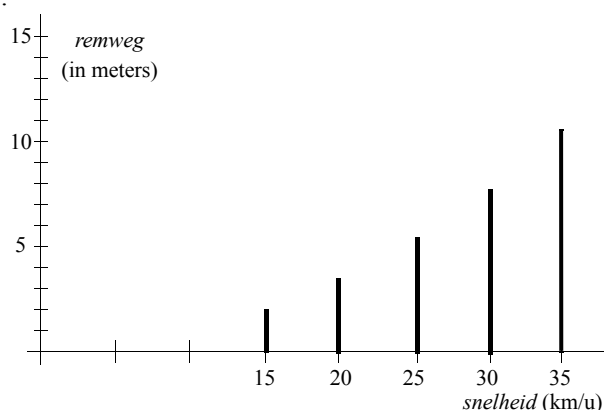
De vraag is nu eerst om te bepalen wanneer het verstandig is over te stappen van het ene naar het andere abonnement. Vervolgens wordt ook hier gevraagd om in beeld te brengen hoe de telefoonkosten variëren als je meer of minder belt.

De derde en laatste activiteit betreft de manier waarop de lengte van de *remweg* van een scooter afhangt van de snelheid. Bij verschillende snelheden is de remweg gemeten. De resultaten zijn gegeven in een tabel en een grafiek.





snellheid (km/u)	remweg (m)
15	1,9
20	3,4
25	5,4
30	7,7
35	10,5
40	13,7



De vraag is om te voorspellen hoe lang de remweg is van een scooter die 60 km/u rijdt. Tot slot vragen we *hoe* die remweg verandert als de snelheid toeneemt.

Verwachtingen

Verwachtingen les 1: de activiteiten

Wat waren onze verwachtingen bij deze activiteiten? De eerste verwachting klinkt misschien wat plat, maar is wel essentieel voor een instapprobleem: leerlingen kunnen een begin maken met de opdrachten. Met de kennis die ze hebben, kunnen ze voldoende ver komen om enerzijds tevreden te zijn over hun resultaten en anderzijds aan te voelen dat ze er nog niet zijn, dat het probleem dieper gaat en dat uitbreiding van kennis nodig/handig is bij het oplossen van het gestelde probleem. Die aspecten maken het niet eenvoudig om goede instapproblemen te ontwikkelen.

Bij het probleem van de *vierhoek* verwachten we dat leerlingen ervaren dat de oppervlakte op een of andere manier afhankelijk is van het schuiven en draaien. Doordat ze daarbij zelf variabelen kiezen, moeten ze die afhankelijkheid expliciet maken. We verwachten dat leerlingen – bij het kiezen van variabelen en tijdens het schuiven – bespreken hoe de oppervlakte verandert als de onafhankelijke variabele (hoogte, hoek, ...) varieert. Deze dynamiek kunnen ze op verschillende manieren in beeld brengen.

Bij de opdracht over de *beltarieven* verwachten we dat de leerlingen zullen herkennen dat er sprake is van een berekening met een bepaalde volgorde van bewerkingen. Het

herhalen van die berekening bereidt voor op het idee van een machientjes-benadering met behulp van pijlenkettingen. Deze activiteit onderscheidt zich daarmee van de andere twee en biedt mogelijkheden voor de docent om te reflecteren op het nut van overzichtelijke rekenprocedures bij het werken met afhankelijkheidsrelaties.

De bedoeling van de laatste activiteit, die van de *remweg*, is om de aandacht te richten op het gebruik van tabel en grafiek. We veronderstellen dat de docent met de uitwerkingen van de leerlingen ook het nut hiervan bij de andere twee problemen kan bespreken.

Verwachtingen les 2: de presentaties

Het huiswerk voor de tweede les is om in groepjes de antwoorden op posters te schrijven, waarna de leerlingen hun uitwerkingen voor de klas kunnen presenteren.

We verwachten hierbij dat de groepjes de problemen op verschillende manieren hebben aangepakt. Deze verscheidenheid in antwoorden maakt discussie mogelijk en zinvol. Dankzij de inbreng van de leerlingen kan de docent de aandacht richten op keuzes van (onafhankelijke) variabelen, op de aard van de afhankelijkheid en op wiskundige manieren van beschrijven. De veronderstelling is dat leerlingen hierbij inzicht ontwikkelen in het redeneren met en in de samenhang tussen onafhankelijke en afhankelijke variabelen. Die ontwikkeling gaat weer in wisselwerking met een (wiskundige) taalontwikkeling en het gebruik van tabellen en grafieken.

We hebben de docent dan ook gevraagd alert te zijn op taalgebruik als ‘hangt af van’, ‘als de ene zus verandert dan gaat de andere zo’. Centrale vragen in de discussie zijn: Hoe ‘werkt’ het? Wat weet je al? Hoe hangt dat andere hiervan af? Wat is een geschikte manier om dat te beschrijven? Hoe kun je daarmee voorspellen?

We veronderstellen dat het lukt om met zo’n discussie te motiveren dat pijlenkettingen handig gereedschap zijn om berekeningen te organiseren, dat het nuttig is om daarmee vertrouwd te raken en er meer over te weten te komen. Dit is dan tevens de voorbereiding op het gebruik van tabellen en grafieken en op de computeractiviteiten met het applet *Algebrapijlen*.

Ervaringen

Les 1

Tijdens deze les volgen we twee groepjes. We noemen ze even de groep Daan en de groep Khalid. De docent introduceert eerst de drie opdrachten en de beoogde werkvorm.

De jongens van groep Daan zijn van plan om te beginnen met de opdracht over de beltarieven. Ze pakken hun rekenmachines en lezen de informatie. Een van hen vraagt naar die abonnementskosten van € 7,50: ‘Mag je die al direct rekenen of pas na dertig minuten?’ Ze nemen veel tijd om uit te zoeken wat ze met de verschillende getallen in de tekst moeten doen. Het aantal belminuten wordt niet

gezien als begin van een berekening. Eigenlijk zijn ze aan het rekenen zonder dat er duidelijk sprake is van invoer-uitvoer. Regelmatig vertellen ze elkaar hun veronderstellingen om de opdracht helder te krijgen. Steeds duidelijker wordt dat de keuze voor een aantal belminuten een eerste stap is in een berekening.

Daan: 'Als je dus 30 minuten belt, dan ...'

Zijn buurman neemt het over: 'Als je minder dan 30 minuten belt, dan heb je alleen abonnementskosten.'

Ze vertellen af en toe aan elkaar wat ze op de rekenmachine hebben uitgerekend. De berekeningen worden echter niet opgeschreven, waardoor het lastig is om daar een patroon in te herkennen.

De docent komt langs en kijkt hoe ver ze zijn. Ze merkt dat de jongens nog niet zo opschieten en verduidelijkt de tweede vraag: 'Je moet net doen alsof je aan andere mensen laat zien wat er gebeurt: *als je meer belt, dan ... of als je minder belt, dan ...*' De jongens kijken neutraal. De docent vertrekt naar een ander groepje dat om aandacht vraagt. Nadat de docent vertrokken is, begint één van de jongens aan de poster en schrijft: 'abonnement TomSoms 7,50 per maand.' Maar hoe verder?

Ondertussen werkt de groep Khalid ook aan de belabonnementsen. Ze lezen de opdracht en de eerste vraag: wanneer is TomVaak goedkoper?

Khalid begint: 'Laten we eerst kijken wat 1 ... of 10 minuten kost.'

Max, na nog een keer lezen: 'Kunnen we niet beter met 100 beginnen?'

Vervolgens verdelen ze de taken: Khalid gaat rekenen voor TomSoms en Max voor TomVaak. Rogier kijkt toe. Alle drie hebben ze een rekenmachine voor hun neus.

Max: '100 geeft € 25,50.'

Rogier luistert en merkt dan op: 'Probeer ook even bij 95.'

Na een tijdje ontdekken ze dat het verschil tussen TomSoms en TomVaak varieert. De discussie wordt heftiger en ze praten door elkaar. Ieder is nu met een eigen berekening bezig zonder de anderen te volgen.

Khalid: 'Als je 90 doet...'

Max schrijft op: 100 → € 25,50 en 101 → ... en dan roept hij: 'Bij 103! De ene geeft € 25,75 en de andere € 25,50.'

Max probeert uit te leggen hoe hij aan 103 komt en waarom dit resultaat het antwoord op de vraag is.

Rogier en Khalid luisteren niet. Ze zijn bezig met hun eigen berekeningen. Het is nu echt ieder voor zich.

Dan roept Khalid: 'Bij 105 wordt het gelijk!'

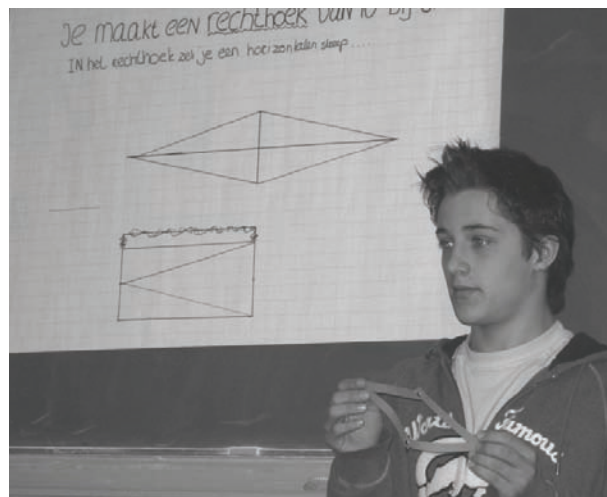
Max had het even opgegeven, maar veert nu op: 'Oké, dus het is bij 106.'

Khalid: 'Hoe weet je dat? Eerst controleren.' Rogier en Khalid controleren of bij 106 belminuten inderdaad TomVaak goedkoper wordt dan TomSoms.

J: 'Hij kan gelijk hebben...'

Uiteindelijk vinden ze alledrie dat het antwoord op de eerste vraag 106 moet zijn. Dan gaat de bel.

Helaas lukt het niet de meeste leerlingen aan alledrie de opdrachten te laten werken. Huiswerk voor de volgende

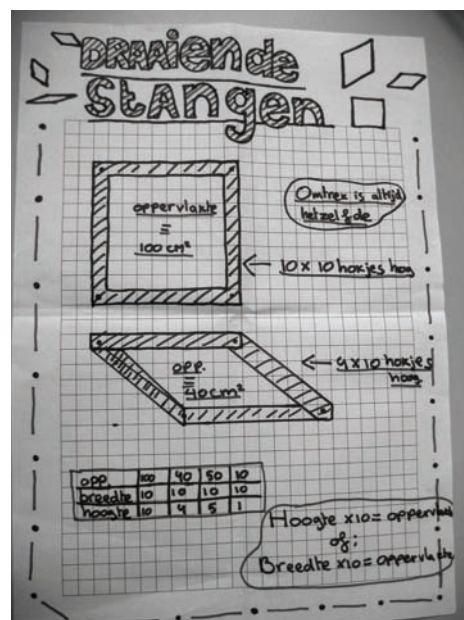


keer is beperkt tot het afronden van de poster met de opdracht waarmee ze bezig waren.

Les 2

De les begint met de presentaties van de posters. Een groepje dat bezig is geweest met de *vierhoek* komt naar voren. De poster wordt op het bord geplakt. De jongens beschrijven hun aanpak voor het zoeken naar de stand van de vierhoek met een oppervlakte van 50 cm^2 . Ze leggen uit hoe bij een specifiek geval de oppervlakte te bepalen is door de vierhoek te splitsen en de delen te verleggen, een aanpak die we niet hadden verwacht.

De jongens zijn door deze benadering niet aan de dynamiek in het probleem toegekomen. De docent vraagt aan een ander groepje dat met de vierhoek bezig is geweest hoe zij het hebben aangepakt.

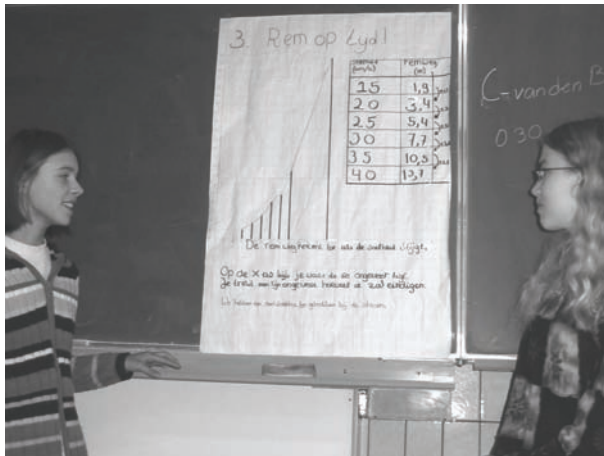


Twee meisjes komen naar voren om hun aanpak te vertellen. Zij hebben juist wel die dynamiek onderzocht en een tabel gemaakt van hoogte en oppervlakte: 'De hoogte is het aantal rijtjes en per rijtje heb je steeds tien hokjes. Je

krijgt dus oppervlakte 50 met hoogte 5: 5 rijtjes van 10.' De docent: 'Kunnen we nu ook iets voorspellen over de oppervlakte als ik iets met de hoogte doe?'

Maarten: 'Hij wordt kleiner als je hem zo schuift.' Hij laat zien hoe dit gebeurt als je hem platter maakt. Het is niet helemaal duidelijk of 'hoogte' hier dezelfde betekenis heeft als bij de meisjes. Tijdens het schuiven beweegt hij tegenoverliggende hoekpunten naar elkaar. Je zou dan ook de lengte van die diagonaal als onafhankelijke kunnen nemen.

Nu de *remweg* van de scooter. Een groepje meisjes komt naar het bord.



Op hun poster staat: 'De remweg neemt toe als de snelheid stijgt.' Wellicht dankzij de presentatie van de opdracht is voor hen direct duidelijk om welke variabelen het hier gaat. Het benoemen van variabelen en de organisatie van gegevens is al gebeurd.

De docent stimuleert de leerlingen om iets meer te zeggen over hun bevindingen. Eén van de meisjes antwoordt dat de remweg steeds sneller toeneemt, er komt steeds meer bij.

De docent: 'Precies, niet iedere keer komt er hetzelfde stukje bij. En hoe zie je dat in de grafiek?'

Het meisje: 'De grafiek gaat steeds steiler omhoog.'

Maarten protesteert vervolgens tegen de meetwaarden. Die remwegen kloppen volgens hem niet. Ze zijn te lang.

De docent: 'Korter? Wat zou er dan veranderen in de grafiek? Ga eens even naar het bord en laat zien hoe die lijn dan zou lopen.'

Maarten loopt naar het bord en beweegt met zijn vinger vanaf het zelfde beginpunt onder de andere grafiek langs. De docent bevestigt de aanpak en herhaalt nog eens dat een grafiek onder een andere grafiek kan lopen. Dan wil ze de bevindingen bij de drie opdrachten gaan samenvatten. Een groepje jongens is echter nog onderling aan het overleggen. Jim kijkt naar de verschillen tussen de achtereenvolgende remwegen. Die verschillen worden steeds groter en als je daar dan weer de verschillen van weet, dan kan je de volgende stap uitrekenen.

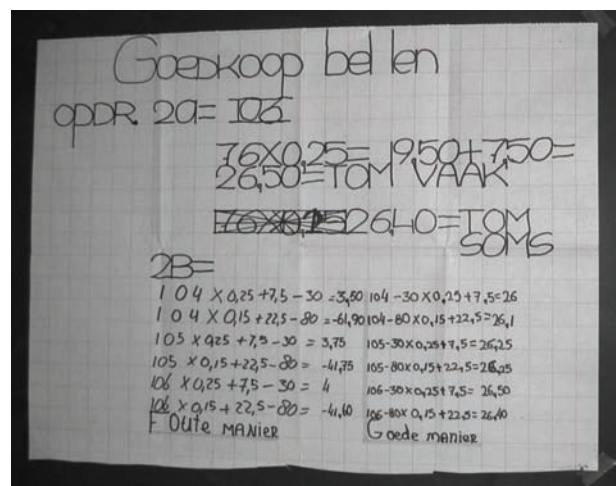
Een leuk moment waarbij de tabel de docent een dienst bewijst. De context nodigt uit tot verdieping en de repre-

sentaties spelen daarbij een rol. De opmerking van Maarten is aanleiding voor het schetsen van een alternatieve relatie tussen snelheid en remweg in de grafiek. Jim gebruikt een patroon in de tabel om de samenhang tussen snelheid en remweg precieser te beschrijven.

De docent vat samen wat de bedoeling was bij deze activiteit: afhankelijkheid, het gebruik van grafiek en tabel, extrapoleren om te voorspellen.

Om de overstap naar pijlenkettingen te kunnen maken worden de posters over de *belabonnementen* als laatste besproken.

Het groepje jongens dat we de eerste les observeerden, is niet verder gekomen dan de titel en houdt zich stil. De docent nodigt de groep Khalid uit om naar het bord te komen. De berekeningen van de kosten staan onder elkaar: een rijtje op een foute manier en een rijtje op een goede manier. Dankzij de rijtjes is duidelijk een patroon in de berekeningen te zien. Het aantal belminuten varieert en dat geeft variërende totale kosten.



Eén van de jongens, Khalid, vertelt. De docent schrijft de bewerkingen na elkaar op het bord.

Khalid: 'Wij hebben dat niet met losse stapjes opgeschreven, maar achter elkaar.'

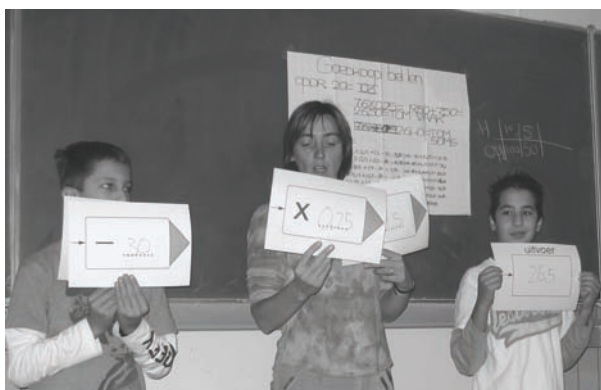
De docent grijpt dit aan voor de overgang naar pijlenkettingen en pakt een paar bordjes die we van tevoren gemaakt hadden. Hierbij verwijst ze alvast naar het type pijltjes dat de leerlingen morgen bij de computer ook zullen zien. Ze toont een paar bewerkingen. Het groepje jongens moet proberen om de pijlenketting te maken die bij hun berekening hoort. Docent: 'Stel dat jullie de machines programmeren.'

De docent legt uit wat het gemak is van zo'n ketting in een fabriek. Je kunt hem telkens opnieuw gebruiken. En vervolgens reageert Khalid zoals aan het begin van dit artikel beschreven is:

Khalid: 'Het ligt aan de belminuten hoeveel eruit komt.'

De docent herhaalt dit voor de klas: 'Dus je hoeft iedere keer alleen dit bordje (IN) te veranderen en dan weet je de kosten.'

Rogier: 'Je kunt bij dat bordje ook *a* invullen, dan heb je de formule.'



De pijlenketting verschijnt voor het bord.

Conclusies

Opvallend bij de activiteit over de *belabonnementen* is dat tijdens het herkennen en het benoemen van de onafhankelijke variabele de organisatie van de gegevens van belang is. Het groepje Daan is tijdens de eerste les niet ver gekomen doordat een systematische werkwijze ontbrak. Het groepje dat hun aanpak presenteerde, is de berekeningen onder elkaar gaan schrijven. De leerlingen hebben meer grip op het rekenproces gekregen en gezien dat ‘belminuten’ de startwaarde van de berekeningen is (de onafhankelijke variabele).

Bij de activiteit met de *vierhoek* viel iets anders op. De jongens die als eerste presenteerden zijn niet aan de dynamiek toegekomen. Ze hebben hun onderzoek gericht op het redeneren met symmetrie bij één specifiek geval. De meisjes kwamen wel aan die dynamiek toe dankzij het ontdekken van de rijtjes en de hoogte als ‘sturende’ (onafhankelijke) variabele. De tabel ondersteunde dit inzicht en illustreerde de afhankelijkheidsrelatie die ze gevonden hadden.

Bij de activiteit over de *remweg* zijn tabel en grafiek gegeven. Daar is het redeneren met remweg als onafhankelijke dan ook geen probleem. De keuze van de variabelen is voor hen al gemaakt. Hadden we dat ook bij de andere twee activiteiten moeten doen? Onze indruk is dat juist die worstelingen voor de leerlingen van belang waren om

te ervaren dat een systematische werkwijze helpt.

De ruimte in de activiteiten veroorzaakt een variëteit in de uitwerkingen. Die variëteit maakt het voor de docent mogelijk om de beoogde wiskundige aspecten te bespreken en voort te bouwen op de inbreng van de leerlingen. Die variëteit zorgt echter ook voor uitwerkingen waarvan niet direct duidelijk is of en hoe die te gebruiken zijn in de lessen. Het is niet altijd even makkelijk om dan in de lespraktijk de juiste beslissingen te nemen.

We concluderen dat deze drie contexten een geschikte instap vormen voor het onderzoeken van afhankelijkheidsrelaties. Het herkennen en benoemen van variabelen in die relaties is niet altijd vanzelfsprekend. De pijlenketting kan een middel zijn voor het organiseren van berekeningen en een opstap vormen voor meer algemene beschrijvingen als functies.

In de volgende lessen gaan de leerlingen werken met de computer. Activiteiten met het applet *Algebrapijlen* zijn bedoeld om leerlingen te ondersteunen bij het ontwikkelen van inzicht in pijlenkettingen, tabellen en grafieken voor het beschrijven van afhankelijkheidsrelaties. Hoe dat verliep? De gegevens uit het eerste experiment zijn we nog aan het analyseren. Bovendien gaan we dit schooljaar nog een keer experimenteren met een aangepaste lessenserie. In een volgend artikel zullen we ervaringen uit deze experimenten gebruiken in de hoop dat we dan beter zicht kunnen geven op de mogelijkheden van de computer bij het ontwikkelen van inzicht in het functiebegrip.

*Michiel Doorman, Peter Boon,
Paul Drijvers, Sjoukje van Gisbergen,
Freudenthal Instituut*

Volgend jaar willen we het experiment herhalen met gereviseerde materialen en een grotere groep scholen.

Bent u geïnteresseerd?

Stuur dan een e-mail naar: prootool@fi.uu.nl.

Noten

- [1] Dit onderzoek wordt gesubsidieerd door de Programmaraad OnderwijsOnderzoek van NWO onder nummer 411-04-123.