

Zelfstandig leren doe je niet alleen

R. Dekker & M. Elshout-Mohr
ILO, Universiteit van Amsterdam

1 Inleiding

'Zelfstandig leren', 'leren leren', 'studiehuis', het zijn woorden die op dit moment de komende vernieuwingen in de tweede fase van het voortgezet onderwijs begeleiden. Het oefent op velen een sterke aantrekkingskracht uit dat leerlingen zelfstandiger aan het werk zullen worden gezet en meer verantwoordelijkheid zullen gaan dragen voor het eigen leren (Veugelers & Zijlstra, 1995). Ook de toenemende aandacht voor algemene vaardigheden, die onder andere tot uiting komt in de advies-examenprogramma's voor havo en vwo, spreekt mensen aan. Dat bleek bijvoorbeeld op de landelijke studiedag (in 1995) voor wiskundeleraren die georganiseerd was rond het thema 'zelfstandig studeren'. Deze trok onverwacht veel belangstelling.

In zijn openingslezing waarschuwde Vermunt overigens voor een te grote voortvarendheid in het uitvoeren van plannen. Hij benadrukte het verschil tussen zelfstandig leren en zelfstandig werken. Bij *zelfstandig leren* zijn oriënterende, uitvoerende en regulerende leerfuncties overgedragen aan de leerlingen (zie ook Boekaerts & Simons, 1993). Bij *zelfstandig werken* is dit in mindere mate het geval: de leerfuncties zijn door de onderwijsgevers niet echt overgedragen, maar zitten verpakt in het studiemateriaal en de werkwijzers. Dit laatste is bijvoorbeeld te zien in de schoolboeken die zijn ontwikkeld voor wiskunde in de basisvorming. Daarin wordt de leerstof stapsgewijs aangeboden en er zijn zoveel opdrachten, samenvattingen en zelftoetsen in opgenomen dat men zou kunnen spreken van een 'papierdocent' die de zorg voor een aantal leerfuncties van de 'fysieke docent' heeft overgenomen (zie bijvoorbeeld 'Moderne wiskunde' - 6e editie). Vooral omdat blijkt dat dit type leerboek onder docenten populair is, is het van belang er de aandacht op te vestigen dat deze vorm van zelfstandig werken niet gelijk gesteld kan worden met zelfstandig leren. Zelfstandig werken kan onder bepaalde omstandigheden een stap vormen op weg naar zelfstandig leren (Elshout-Mohr & Stawski, 1995), maar dit hoeft niet altijd zo te zijn.

Ook in de vakbladen is inmiddels de discussie over de invulling van zelfstandig leren in het wiskundeonderwijs op gang gekomen (zie o.a. Hoogland, 1995). Daar-

bij komen nu ook zeer kritische geluiden naar voren (Bos, 1996).

De gegeven waarschuwingen maken pijnlijk duidelijk dat onvoldoende bekend is wat zelfstandig leren precies inhoudt en hoe docenten deze vorm van leren zo kunnen stimuleren dat leerlingen niet alleen actief aan het werk zijn, maar ook de diepte in gaan. Wat zijn passende opdrachten, hoe dient de leeromgeving te worden ingericht en hoe valt het proces te begeleiden? Op deze vragen zullen wij ingaan aan de hand van een procesmodel dat wij ontwikkeld hebben. Het wordt in de komende paragrafen kort geschetst en verantwoord. Daarna volgt een bespreking van de praktische bruikbaarheid van het model.

2 Het procesmodel

Met de trend naar zelfstandig leren in het wiskundeonderwijs is er een hernieuwde aandacht voor het leren van wiskunde in kleine groepen. Ook internationaal is deze belangstelling groeiende. We gaan daar in de volgende paragraaf op in. In veel onderzoek naar het leren van wiskunde in kleine groepen wordt bij de analyses van de ontwikkeling van de wiskundige discussie tussen leerlingen (mathematical discourse) vaak verwezen naar het werk van Lakatos (1976). In deze analyses missen we echter het accent op de voortgang in het leren van de individuele leerling. Onderbelicht blijft welke processen noodzakelijk worden geacht om niveauverhoging tot stand te brengen, in die zin dat de leerling blijk geeft van een toenemende mate van 'verwiskundigen' of mathematiseren van begrippen, vaardigheden en redeneringen.

In het procesmodel dat door ons is ontwikkeld op basis van onze onderzoekservaring en onze gemeenschappelijke belangstelling voor individuele leerprocessen, sluiten we aan bij bestaande literatuur. We stellen echter het leerproces van de individuele leerling centraal. Het model is bedoeld om aan te geven hoe niveauverhoging tot stand kan komen door leerlingen zelfstandig te laten leren aan de hand van een opdracht. Voor leerlingen uit de brugklas die men grafieken wil leren maken zou die opdracht bijvoorbeeld kunnen zijn:

Maak een grafiek waarin je laat zien hoe de afstand die je aflegt als je 's ochtends naar school gaat groter wordt.

In het procesmodel gaan wij ervanuit dat leerlingen individueel zelfstandig kunnen leren, maar ook in samenwerking in tweetallen of kleine groepen.

Kernactiviteiten

Het procesmodel hebben we opgebouwd rond vier kernactiviteiten:

- tonen;
- uitleggen;
- verantwoorden;
- reconstrueren.

Met *tonen* bedoelen we het tonen of vertellen van eigen werk ('to show or tell'). Met *uitleggen* wordt bedoeld het uitleggen van eigen werk, bijvoorbeeld door het vertellen van de gedachtengang die ertoe geleid heeft ('to explain or clarify'). Het *verantwoorden* betreft het eigen werk, de eigen werkwijze of de eigen uitleg, bijvoorbeeld door met behulp van wiskundige begrippen of op basis van een wiskundige redenering aan te tonen dat het werk klopt ('to justify'). Het *reconstrueren* (= het opnieuw construeren) heeft betrekking op het eigen werk, de werkwijze, de uitleg of de verantwoording. In de reconstructie kan niveauverhoging zichtbaar worden. Daarvan is sprake als het nieuwe product een meer wiskundige onderbouwing heeft, of als er complexere begrippen of relaties worden gelegd dan in het oorspronkelijke product. Het resultaat van de reconstructie kan desgewenst opnieuw worden *getoond* en daarmee is de cyclus die deze vier activiteiten met elkaar vormen rond.

De vier kernactiviteiten die stuk voor stuk in de literatuur beschreven zijn hebben de volgende kenmerken:

- 1 Ze zijn goed observeerbaar in het uitwendige gedrag.
- 2 Ze kunnen optreden bij een leerling die individueel werkt, maar de kans dat zij optreden wordt vergroot als leerlingen tijdens het werken aan de opdracht met elkaar communiceren.
- 3 Ze vervullen een functie in het leerproces en dragen bij tot de toename in wiskundige kennis of vaardigheden.
- 4 Ze zijn beïnvloedbaar door didactische maatregelen, zoals de aard van de opdracht en de begeleiding die de docent aan leerlingen geeft.

De vier kernactiviteiten worden gedemonstreerd in het volgende (gereconstrueerde) voorbeeld van een situatie waarin een leerling (Anna) ze uitvoert.

Anna en Ben werken aan de hierboven beschreven opdracht. Na enige tijd kijkt Ben op en zegt: 'Wat doe jij? Hoe heb jij het?'

Anna *toont* haar werk en *legt uit*: 'Kijk, ik heb het zo gedaan, want in het begin ga ik langzaam, dus dan begint de grafiek laag en gaat dan langzaam omhoog.' Aansluitend

vraagt zij: 'Heb jij jouw grafiek ook zo laten beginnen?'

Ben laat zien hoe hij begonnen is: 'Ik heb het anders gedaan. Ik dacht dat je bij nul moest beginnen en dat het dan gewoon een rechte lijn werd. In het begin fiets ik ook langzaam, maar ik weet niet hoe je dat.... Maar wat jij daar hebt, dat klopt toch niet?'

Anna legt haar eigen werk uit en probeert het te *verantwoorden*: 'Ja, maar als je langzaam rijdt, groeit de afstand langzaam, dus de grafiek gaat dan langzaam omhoog.... Wacht even,... dat klopt niet helemaal. Ik moet hem inderdaad wel bij nul laten beginnen, want in het begin heb je nog niets afgelegd. Maar het wordt géén rechte lijn, want ik rijd niet de hele weg in één tempo. Dus dat moet ik zo....' Anna *reconstrueert* het eigen werk en komt tot de conclusie dat zij haar grafiek kan verbeteren.

In principe kan een leerling die individueel aan een opdracht werkt alle kernactiviteiten uitvoeren. Anna (uit het bovenstaande voorbeeld) kan het werk aan zichzelf tonen. Zij kan voor zichzelf nagaan hoe het tot stand is gekomen en of het verantwoord kan worden. Op basis van een kritische beschouwing van het eigen werk, kan zij tot bijstelling besluiten van het product of de gedachtengang. Het volgen van deze stappen vereist van een leerling echter veel zelfsturing. In de uitwisseling met de medeleerling Ben komen de kernactiviteiten waarschijnlijk op een meer vanzelfsprekende manier aan de orde. Daarom zijn in het procesmodel naast kernactiviteiten ook interactieve (of communicatieve) activiteiten opgenomen. Deze noemen we de procesbegeleidende activiteiten.

De sturing en verrijking van het proces door onderlinge communicatie

Een medeleerling kan het tonen uitlokken door het stellen van vragen als: 'Wat heb jij? Hoe zit jij te denken?' Hij kan tot uitleggen stimuleren door het getoonde product of de gevolgde gedachtengang niet meteen te begripen ('Hoe kom je daarbij? Ik snap het niet. Waarom doe je dat zo?') en hij kan aanzetten tot verantwoording door kritiek te tonen ('Dat is niet goed hoor, dat klopt eigenlijk niet'). Blijkt de verantwoording niet te lukken dan vormt dat aanleiding tot reconstructie van het getoonde werk of de gegeven uitleg. De aanwezigheid van de ander (die de kritiek heeft geleverd en gehoord heeft hoe de verantwoording faalt) kan ertoe bijdragen dat de kritiek niet wordt genegeerd.

Elke medeleerling, of elk groepje medeleerlingen kan Anna in principe op de bovengenoemde *procesmatige* manier stimuleren tot het uitvoeren van de vier kernactiviteiten en hetzelfde geldt voor een docent die de rol van coach op zich neemt. In het geval waarin Anna en Ben (en eventueel nog andere medeleerlingen) werken aan dezelfde opdracht, kan Anna niet alleen procesmatig, maar ook *inhoudelijk* plezier hebben van activiteiten van Ben (en de anderen). Voor Anna kan het eigen oplossingsproces worden aangevuld of verrijkt door te kijken naar het werk dat Ben (of een andere medeleerling) toont, door Ben te vragen om uitleg, door kritiek te

leveren op Bens werk en door kritisch te volgen of de verantwoording die Ben geeft hout snijdt. Ook kunnen de leerlingen op een gegeven moment samen op zoek gaan naar nieuwe deeloplossingen of naar een uitleg of verantwoording van een voorliggend product of een gedeelde gedachtengang.

treden. A moet bijvoorbeeld nadenken over eigen werk om passend te kunnen reageren op B's vraag om het werk uit te leggen en ook moet hij nadenken over wat B hem uitlegt om eventuele kritiek op het getoonde te kunnen formuleren. Figuur 1 is in drie delen uiteen te leggen. Het eerste deel betreft het *tonen* en *uitleggen*.

A en B werken aan dezelfde wiskunde-opdracht. Hun werk is verschillend.		
A werkt	<i>wat doe je? wat heb je? wat denk jij?</i>	B werkt
A vraagt B werk te tonen	<i>wat doe je? wat heb je? wat denk jij?</i>	B vraagt A werk te tonen
A wordt zich bewust van eigen werk		B wordt zich bewust van eigen werk
A toont eigen werk	ik heb dit... ik doe dit... ik zit zó te denken...	B toont eigen werk
A wordt zich bewust van B's werk		B wordt zich bewust van A's werk
A vraagt B werk uit te leggen	<i>waarom doe je dat zo? hoe kom je daarbij?</i>	B vraagt A werk uit te leggen
A denkt na over eigen werk		B denkt na over eigen werk
A legt eigen werk uit	ik doe dit zo, omdat ... ik denk zo, omdat ...	B legt eigen werk uit
A denkt na over B's werk		B denkt na over A's werk
A bekritiseert B's werk	<i>maar dat is toch niet goed, want...</i>	B bekritiseert A's werk
A denkt na over B's kritiek		B denkt na over A's kritiek
A verantwoordt eigen werk	ik dacht dat ik het wél goed had, omdat...	B verantwoordt eigen werk
A denkt na over verantwoording		B denkt na over verantwoording
A bekritiseert eigen werk	<i>oh nee, het klopt toch niet, want...</i>	B bekritiseert eigen werk
A reconstrueert eigen werk	ik kan het beter zó doen...	B reconstrueert eigen werk

vet: kernactiviteiten
standaard: mentale activiteiten
cursief: procesbegeleidende activiteiten

figuur 1: procesmodel (R. Dekker & M. Elshout-Mohr, 1996)

In het procesmodel dat geschetst wordt in figuur 1 is uitgegaan van de situatie waarin twee leerlingen A en B in interactie met elkaar werken aan een complexe opdracht. In dat geval kunnen de kernactiviteiten bij beide leerlingen als het ware in symmetrie optreden. Deze kernactiviteiten zijn vetgedrukt. Aangegeven is ook dat beide leerlingen elkaar procesmatig en inhoudelijk stimuleren door het stellen van vragen en het kritisch beschouwen van elkaars werk. Deze activiteiten zijn, voorzover zij goed observeerbaar zijn, cursief gedrukt. In de middelste kolom van de figuur staan voorbeelden van de opmerkingen en vragen waarmee de leerlingen de communicatie op gang houden. Voorts zijn in het model een aantal mentale activiteiten opgenomen, waarvan wordt verondersteld dat zij bij leerlingen op-

A en B stimuleren elkaar tot deze activiteiten door het stellen van vragen. Door de wederkerige relatie krijgen A en B niet alleen de kans eigen werk te tonen maar zien zij ook elkaars werk en nemen zij kennis van elkaars uitleg. Het tweede deel betreft het *verantwoorden*. A en B stimuleren elkaar tot deze activiteit door het geven van kritiek op elkaars werk of gedachtengang. A en B nemen niet alleen kennis van de eigen verantwoording, maar ook van die van de ander. Het derde deel betreft het *reconstrueren*, het identificeren van zowel passende (consistente) als niet passende (conflicterende, anomale) uitkomsten of redeneringen en het opbouwen van nieuwe constructies (reconstructies, verbeteringen van eigen werk of gedachtengang).

Het procesmodel uit figuur 1 kan worden beschouwd als

het basismodel. Het omvat de kernactiviteiten, de mentale activiteiten, de procesbegeleidende activiteiten en de inhoudelijke uitwisseling. Het is het meest rijke model waarop allerlei verschransingen mogelijk zijn. Het basismodel geldt namelijk alleen als leerlingen onder gunstige condities interacteren tijdens het zelfstandig leren aan de hand van een daartoe geschikte opdracht. Wij komen daar nog op terug. Werkt een leerling individueel dan geldt het model nog maar ten dele: er blijft een groot aantal componenten (waaronder alle cursief gedrukte componenten) leeg, tenzij de leerling deze voor zichzelf vervult. Het leeg blijven van componenten heeft, volgens het model, onvermijdelijk ook zijn weerslag op de mentale activiteiten die verwacht mogen worden. Ook in andere gevallen kunnen componenten van het procesmodel leeg blijven. Dit zal bijvoorbeeld het geval zijn als leerling A samenwerkt met een leerling B die niet op gang kan komen met de gegeven opdracht, als beide of een van beide leerlingen zozeer geïnvolveerd raken in het eigen oplossingsproces dat zij geen belangstelling meer tonen voor de ander, of als de opdracht zo gemakkelijk is dat A en B het snel eens zijn over de juiste oplossing, uitleg en verantwoording. Door het basismodel als maatstaf (procesmodel) te gebruiken, kunnen verschillende leeromstandigheden waaronder leerlingen zelfstandig leren onderling worden vergeleken. Dit levert een goede basis voor vergelijkend onderzoek en voor onderzoek naar de relatie tussen leeromstandigheden en leereffect. Op dit moment is er in het gepresenteerde model nog geen plaats ingeruimd voor de begeleidende docent. Op die rol gaan we in nadat we de relatie van het procesmodel met onderzoek besproken hebben.

3 Relatie met onderzoek

Het procesmodel heeft relaties met bevindingen en theoretische noties uit allerlei onderzoek naar het leren van wiskunde in kleine groepen. De belangrijkste overeenkomsten zijn:

- 1 De veronderstelling dat de vier kernactiviteiten de basis vormen van niveauverhoging van het wiskundig denken.
- 2 De veronderstelling dat de interactie tussen leerlingen (zoals het stellen van vragen die tot uitleg of verantwoording nopen) de kans vergroot dat de kernactiviteiten worden uitgevoerd.
- 3 De veronderstelling dat ook de inhoudelijke uitwisseling (zoals het vergelijken van eigen werk met dat van een ander) het leerproces bevordert.

De eerste veronderstelling kan worden beschouwd als een uitwerking van de stelling dat reflectie een grote rol speelt bij het leren van wiskunde. Kilpatrick (1985) heeft in zijn lezing voor het vijfde International Con-

gress for Mathematics Education de rol van reflectie in het wiskundeonderwijs belicht en verbanden gelegd met de hernieuwde aandacht voor reflectie in de psychologie, nu onder de naam metacognitie. In zijn lezing verwijst hij naar het vrij radicale standpunt van Freudenthal die stelt dat de wiskunde zelf in hoge mate reflectie op de eigen activiteiten en die van anderen is en dat het een belangrijke vraag is hoe reflectie op de eigen wiskundige activiteiten in het wiskundeonderwijs gestimuleerd kan worden. Freudenthal zelf is van mening dat dit gedaan kan worden door het leren van wiskunde te laten plaatsvinden in kleine heterogene groepen, waarbij leerlingen elkaars activiteiten kunnen observeren en door elkaar uitleg te geven over de eigen activiteiten zullen gaan nadenken. De lesstof moet daartoe wel geschikt zijn, dat wil zeggen niet voorgestructureerd maar juist problematisch (Freudenthal, 1978, 60-63).

In het procesmodel dat wij voorstellen kiezen wij met opzet voor een opsomming van vier kernactiviteiten die in principe ook door een individueel werkende leerling kunnen worden uitgevoerd. Aan het vergelijken van eigen activiteiten met die van anderen, kennen wij eveneens een rol toe, maar die staat iets minder centraal. De vier onderscheiden kernactiviteiten zijn echter wel typische reflectie-activiteiten, in de zin die Freudenthal en anderen aan dat begrip geven. De leerling die eigen werk toont neemt afstand en maakt het eigen werk en denkproces tot object van beschouwing. Door het uit te leggen wordt de leerling zich bewust van de toegepaste (wiskundige) begrippen en principes en deze kunnen nog worden uitgewerkt en verbeterd als gevolg van pogingen om verantwoording af te leggen.

Dekker (1991) heeft in haar proefschrift deze ideeën van Freudenthal verder uitgewerkt en onderzocht bij leerlingen van twaalf en dertien jaar. Naast uitleggen als middel om het nadenken over eigen activiteiten te stimuleren, noemt Dekker ook 'elkaars werk bekritisseren' (Dekker, 1995). Zowel uitleggen als bekritisseren ziet zij als middelen om het redeneren op gang te brengen: 'ik heb het zo, omdat ...' en 'dat is niet goed, want...'. De bevindingen uit het proefschrift vormen de basis voor de tweede veronderstelling dat de procesbegeleidende (interactieve) processen in hoge mate bepalend zijn voor het optreden en de kwaliteit van de kernactiviteiten. Leerlingen die de communicatie met de medeleerling niet willen verbreken, stimuleren elkaar door vragen en kritiek tot nadenken en redeneren. Antwoorden op vragen als: 'Hoe zit jij te denken?' of 'Waarom heb jij dit zo?' en 'Waarom denk jij dat dit zo moet, terwijl het volgens mij anders zou moeten?', hebben zij niet paraat. Zij moeten ze nog construeren, zoekend naar bruikbare woorden en beschrijvingen. De bewustwording van toegepaste (wiskundige) begrippen en principes komt hierdoor beter op gang en wordt waarschijnlijk ook verder doorgevoerd dan wanneer een leerling individueel werkt (en verantwoording aflegt aan zich-

zelf). De derde veronderstelling dat leerlingen die aan eenzelfde opdracht werken elkaar ook inhoudelijk op ideeën kunnen brengen en dat de onderlinge vergelijking van de verschillende producten en werkwijzen een belangrijke rol kan spelen in de bewustwording van wiskundige begrippen en principes, is ook in het werk van Dekker heel duidelijk terug te vinden. Het gegeven is dan ook in elk van de drie delen van het procesmodel terug te vinden. Het onderling vergelijken wordt echter eerder gezien als een welkome hulp bij het tot stand brengen van niveauverhoging dan als een onmisbare schakel. Dit hangt samen met ons uitgangspunt dat niveauverhoging in principe ook mogelijk is in omstandigheden waarin onderling vergelijken niet mogelijk is. Het procesmodel heeft een cyclisch karakter, zoals past bij elk model waarin reflectie wordt gezien als de motor van niveauverhoging. De aard van de cycli die leerlingen doorlopen is ons echter duidelijker geworden op basis van case-studies waarvan wij er hier enkele willen noemen.

Wistedt (1994) laat het belang van tonen, uitleggen en beredeneren van de eigen aanpak zien aan de hand van een case-study waarin vier leerlingen van 11 jaar samenwerken aan een open wiskundige opdracht die enerzijds aansluit op hun voorkennis, maar anderzijds uitdagend is, omdat de leerlingen nog geen weet hebben van de wiskundige begrippen en principes waar zij bij de uitvoering van de opdracht op zullen stuiten. In eerste instantie interpreteert elke leerling de opdracht op een eigen wijze, afhankelijk van de voorkennis en eigen ervaring. Gaandeweg gaat echter elk van hen (met uitzondering van een leerling die eigenlijk helemaal niet op gang komt) beter zien wat er binnen het kader van de opdracht allemaal valt te doen, te leren en te ontdekken. Daarbij volgen leerlingen soms een tijdlang vooral een eigen spoor, of zij gaan een poosje gelijk op met een of meer anderen uit de groep. Het is daarbij voor hen van belang om hun gedachten en invallen aan anderen voor te leggen en uit te leggen. Daartoe moeten zij het intrapersoonlijke (binnen de persoon beleefde) begrip uitwerken tot iets waarvan ook de medeleerlingen inzien wat het inhoudt en hoe of waarom het zou kunnen bijdragen tot het zingeven aan de opdracht en aan het uitvoeren ervan. Dit noodzaakt leerlingen tot articulatie en draagt bij tot reflectie en verdere ontwikkeling van de gedachten in de vorm van redeneringen en het formuleren van nieuwe regels voor de uitvoering van de opdracht (of een verbijzondering van de aanvankelijke regels). Zo kan de gedachte om een opdracht op een bepaalde manier te gaan benaderen of er een bepaald probleem in te zien volgens Wistedt in veel gevallen beter worden beschouwd als een uitkomst van een fase van werken aan het probleem dan als een gegeven van waaruit de leerling het werk start.

Balacheff (1991) vestigt naar aanleiding van zijn onder-

zoek met leerlingen van dertien en veertien jaar, meer dan Wistedt, de nadruk op het belang van momenten waarop er een tegenstelling is tussen leerlingen in hun aanpak of oplossing van een wiskundig probleem. Als een leerling merkt dat de eigen aanpak of oplossing ter discussie wordt gesteld, is verantwoording (justifying) vereist van eigen werk en gedachtengang. Ook moet er onderhandeld worden, bijvoorbeeld aan de hand van voorbeelden en tegenvoorbeelden. Door leerlingen met elkaar aan opdrachten te laten werken, biedt men hen een goede kans om te stuiten op contradicties die direct aansluiten bij hun eigen werk en uitleg. Die directe aansluiting vormt een belangrijke voorwaarde voor het met succes kunnen oplossen van de contradicties (zie ook Chinn & Brewer, 1993). Is dit eenmaal gebeurd dan ligt de weg open voor het verder werken aan de opdracht vanuit een nieuwe uitgangspositie.

Yackel, Cobb en Wood (1991) tonen aan de hand van enkele case-studies dat het uitleggen van eigen werk (of de eigen gedachten) en het vergelijken van verschillende, niet overeenkomstige, werkwijzen ook voor jonge leerlingen van zeven en acht jaar een functie kunnen vervullen in het leerproces. In een van de cases legt leerling A bijvoorbeeld aan een medeleerling B uit waarom haar (*B*'s) oplossing voor een probleem niet klopt en tijdens het geven van die uitleg construeert A een meer uitgewerkte en beter verwoordbare conceptualisering (en uitleg) van de eigen (correcte) oplossing. In een tweede case analyseren twee leerlingen C en D, met aanmerkelijk succes, in welk opzicht twee werkwijzen van elkaar verschillen en hoe het komt dat de werkwijzen niet beide tot hetzelfde (goede) antwoord leiden. Ook simpeler vormen van profijt hebben van elkaars werk komen voor. In een van de cases, gebeurt het dat een toevallig door A genoemd getal een medeleerling B over een dood punt in het proces heen helpt en nieuwe perspectieven biedt voor het vinden van een oplossing.

Uit de case-studies komt naar voren dat er een variëteit aan mogelijke cycli is. Deze kunnen klein zijn en beperkt blijven tot een deel van het procesmodel, maar leerlingen kunnen ook de volledige sequentie van de vier kernactiviteiten een of meer keren doorlopen. Uitgaande van het procesmodel zou voorspeld kunnen worden dat het proces voor een leerling optimaler is naarmate hij of zij meer kernactiviteiten onderneemt en naarmate de volgorde waarin dit gebeurt beter in overeenstemming is met het model. Onderzoek naar deze voorspelling is gepland, maar in deze bijdrage nog niet aan de orde. Wel willen wij in de komende paragrafen aandacht besteden aan de maatregelen die docenten kunnen nemen om te bevorderen dat leerlingen individueel en in kleine groepen zelfstandig leren volgens (delen van) het procesmodel.

4 Didactische maatregelen ter bevordering van niveauverhoging

In het al eerder genoemde project van Yackel, Cobb en Wood (1991) is veel aandacht besteed aan de beschrijving van de extra leermogelijkheden (learning opportunities) die leerlingen hebben als zij met elkaar samenwerken aan wiskundige opgaven, aangezien het project tot doel had na te gaan wat voor leerlingen de voordelen zouden kunnen zijn van samenwerken aan opdrachten. Ook werd onderzocht welke didactische maatregelen leerlingen stimuleren om optimaal gebruik te maken van de extra leermogelijkheden die het samenwerken biedt. Om praktische redenen beperkten de onderzoekers het empirische deel van hun onderzoek tot werken in tweetallen.

De conclusies betreffen de aard van de opdrachten, de instructies (gedragsregels) die leerlingen krijgen en de beloningsstructuur. Ten aanzien van de opdrachten wordt gesteld dat de opgaven uitdagend moeten zijn voor leerlingen en aanleiding moeten geven tot verschillende oplossingen en benaderingswijzen. Wat betreft de gedragsregels wordt aanbevolen de leerlingen te laten werken volgens de volgende afspraken:

- 1 Er wordt samengewerkt om tot oplossingen te komen.
- 2 Het is belangrijker om tussenstappen of tussenoplossingen te begrijpen en te kunnen verantwoorden dan om tot een correcte oplossing van het gestelde probleem te komen.
- 3 Het is belangrijker om door te gaan op een interessant deelprobleem, dan om zoveel mogelijk opgaven af te krijgen.
- 4 Binnen de subgroep (het tweetal) moet consensus worden nagestreefd.

Ook over de beloningsstructuur die het meest geschikt zou zijn om de leerlingen optimaal gebruik te laten maken van de extra leermogelijkheden die het samenwerken biedt, doen Yackel c.s. enkele interessante uitspraken. Zij concluderen uit het project dat het van belang is dat leerlingen niet worden beloond voor het samenwerken op zich en evenmin voor groepsresultaten. De deelnemers moeten echter wel verantwoordelijk worden gesteld voor het werken volgens de bovengenoemde vier afspraken.

Hoe algemeen geldend de bovenstaande conclusies zijn, is nog een open vraag. Met name op het punt van het belonen van samenwerking zijn er verschillende meningen. Wel willen wij naar voren brengen dat het procesmodel een goed analysekader biedt. Het vormt de basis voor het interpreteren van uitkomsten van onderzoek en voor het doen van (toetsbare!) voorspellingen over de wijze waarop nieuwe didactische ingrepen het procesverloop en het optreden van de kernactiviteiten zouden

kunnen beïnvloeden. Zo kunnen wij bijvoorbeeld aan de hand van het procesmodel, het belang begrijpen van de eerste gedragsregel van Yackel c.s. en het belang onderstrepen van de tweede en de derde gedragsregel. Naarmate leerlingen beter samenwerken en meer worden aangemoedigd om ook hun tussenoplossingen te verantwoorden en om interessante deelproblemen uit te diepen, neemt de kans toe dat zij de hele cyclus (tonen, uitleggen, verantwoorden en reconstrueren) doorlopen en daarmee niveauverhogend bezig zijn. Het streven naar consensus, de vierde gedragsregel uit het genoemde rijtje, zou kunnen werken als een extra impuls voor leerlingen om elkaars werk aandachtig te bekijken en er vragen over te stellen als ze het niet snappen of twijfelen aan de juistheid van bepaalde redeneringen (zie ook Yackel & Cobb, 1996). In dat geval valt ook van die gedragsregel een positief effect te verwachten, vooral wanneer het nadenken over het werk en het bekritisieren ervan gaandeweg meer het karakter krijgt van nadenken over en verantwoorden van een gezamenlijke (en dus in zekere zin ook eigen) oplossing. Een voorspelling die we - op basis van het model - kunnen doen omtrent de wenselijkheid van het beoordelen van individuele leerlingen op een groepsproduct is dat dit een positief effect zal hebben op niveauverhogend leren in groepjes leerlingen, die zich goed kunnen houden aan de gedragsregels en een negatief effect in groepjes, die dat nog niet kunnen. Bij leerlingen die minder geoefend zijn, zal het streven naar samenwerking en consensus (ook ten aanzien van tussenproducten en juistheid van redeneringen) waarschijnlijk niet sterk genoeg zijn om het te winnen van de drang om met een goed product te voorschijn te komen ('Als we maar eerst een goede oplossing hebben, dan hebben we tenminste een goed cijfer....').

Praktisch gezien kan worden gesteld dat er bij de inrichting van de leeromstandigheden een aantal manieren zijn om te bevorderen dat leerlingen niveauverhogend bezig zijn. Het is van belang dat leerlingen instructies krijgen die bevorderen dat zij de tijd nemen om de vier kernactiviteiten uit te voeren en dat zij passend beloond worden als zij zich daarvoor inzetten. Het aangrijpen van de kans om een probleem uit te diepen, vereist behoorlijk wat inspanning, maar is waarschijnlijk een essentiële voorwaarde voor het beoogde leerproces aangezien niveauverhoging een proces is dat bijna per definitie moeilijk is. Bereiter (1986) spreekt in dit verband zelfs van de leerparadox. Daarmee brengt hij tot uitdrukking dat het in zekere zin paradoxaal is dat een leerling die (nog) niet beschikt over cognitieve structuren van het vereiste niveau toch (en dan nog wel zelfstandig of in samenwerking met leerlingen van het eigen niveau) de stap kunnen maken naar de hogere meer complexe (wiskundige) structuren.

Het op gang brengen van de samenwerking kan worden gerealiseerd door goede afspraken en een goede belo-

ningsstructuur. Voor het op gang houden van niveauverhogende samenwerking is waarschijnlijk noodzakelijk dat leerlingen al doende intrinsieke belangstelling krijgen voor elkaars werk, uitleg en redeneringen. Hier kunnen de omstandigheden op worden ingericht door het geven van de juiste opdrachten en het vormen van goede combinaties van leerlingen. De opdrachten dienen open en complex genoeg te zijn om tot verschillende oplossingen te leiden en de leerlingen dienen voldoende aan elkaar gewaagd te zijn om tot ideeën te komen die voor de ander(en) interessant zijn. Ook met variabelen als graag met elkaar willen samenwerken kan rekening worden gehouden, als dat tenminste betekent dat leerlingen gemakkelijk belangstelling voor elkaars werk en gedachtengang kunnen opbrengen. Om de inhoudelijke uitwisseling op gang te brengen dient de voorkeur te worden gegeven aan opdrachten waarbij leerlingen iets moeten construeren, een zichtbaar product (zoals bijvoorbeeld een grafiek) moeten maken (zie ook Dekker, 1993). Eventuele verschillen vallen dan snel op en lokken vragen uit als: 'Laat eens zien? Wat heb jij? Hoe kom je daaraan?' Daarmee wordt dan de motor van het reflectie/interactie/uitwisselingsproces gestart.

5 De rol van de docent

Wat kan de docent doen om niveauverhoging bij zelfstandig lerende leerlingen te bevorderen? Zoals al aangegeven is het construeren of kiezen van passende opdrachten uiterst belangrijk. Ook moet voor een gunstig werkklimaat worden gezorgd door leerlingen vertrouwd te maken met gedragsregels. Voorbeelden van gedragsregels die gelden voor het samen zelfstandig leren zijn in het voorgaande al genoemd. Ook voor leerlingen die individueel zelfstandig aan opdrachten werken kunnen dergelijke regels worden opgesteld. De regels 2 en 3 die door Yackel c.s. zijn geformuleerd zijn bijvoorbeeld onverminderd van kracht voor de individueel werkende leerling.

Verder moet de beslissing worden genomen of er in groepen wordt geleerd of individueel. Vooral voor jonge kinderen is individueel leren waarschijnlijk minder geschikt als werkvorm in dienst van niveauverhoging, omdat het voor hen lastig is om (geheel op eigen gelegenheid) voldoende afstand te nemen van eigen werk en het kritisch te beschouwen. Bij hen is individueel werken beter geschikt voor het inoefenen van vaardigheden dan voor niveauverhogend leren. Bij oudere leerlingen kunnen individuele sessies en groepssessies worden afgewisseld.

Over de voor- en nadelen van een bepaalde groepssamenstelling (homogeen of heterogeen) is al veel gediscussieerd. Daar gaan we hier nu niet op in. Wat de

groepsgrootte betreft spelen organisatorische kwesties natuurlijk een rol. Werken in tweetallen is vaak gemakkelijk te organiseren, maar heeft uiteraard als nadeel dat leerlingen erg afhankelijk van elkaar zijn. In het procesmodel is sprake van een grote afhankelijkheid tussen A en B, Anna en Ben uit het eerste voorbeeld. Wat de een doet (bijvoorbeeld tonen) of vraagt (bijvoorbeeld: 'Hoe kom je daaraan?') heeft directe gevolgen voor de activiteiten en mentale processen. Bestaat de groep echter uit meer personen (Anna en verschillende B's) dan is de afhankelijkheid geringer. Terwijl Barbara beredeneert wat volgens haar niet klopt in Anna's gedachtengang kan Ben al meeluisterend een koppeling maken tussen zijn eigen werk en eerdere opmerkingen die over tafel zijn gegaan. Deze grotere vrijheid kan ervoor pleiten om leerlingen ook in groepjes van drie of vier aan niveauverhogingsopdrachten te laten werken.

Verder zijn er nog de rollen van de docent als coach en beoordelaar. Bij het nadenken over de invulling kan het opnieuw zinvol zijn om een onderscheid te maken in het begeleiden van de kernactiviteiten en de overige activiteiten. Wat de kernactiviteiten betreft kan de docent erop letten of het leerlingen lukt om hun werk uit te leggen en te verantwoorden en of zij al doende een aantal voor hen nieuwe begrippen en principes ontwikkelen die wiskundig van aard zijn (en die hen zullen helpen om de stap te maken naar het gebruik van al bestaande, door andere ontwikkelde wiskundige begrippen). In een case-study met eerstejaars wiskundestudenten van Pijls en Dekker nemen de begeleiders bijvoorbeeld regelmatig de taak op zich om vaktermen in te brengen in een discussie waarin de leerlingen zelf wat blijven hangen in het gebruik van eigen termen, die tijdens het tonen en het geven van de eerste uitleg zijn ontstaan (zie Pijls, 1996). Ook bij het vinden van een hogere conceptuualisering die de brug moet slaan tussen twee gedachtengangen of benaderingswijzen, blijken docenten leerlingen dikwijls een duwtje in de juiste richting te willen geven. Soms heeft die coaching succes, soms ook niet. De mate van succes (met of zonder hulp van de docent) kan in de uiteindelijke beoordeling van wat de leerlingen geleerd hebben tot uitdrukking komen. Afzonderlijk aandacht verdient verder de coaching en beoordeling op het punt van het onderling communiceren tussen leerlingen (als zij in groepjes werken) of de coaching in het kritisch beschouwen van eigen werk (bij de individueel lerende leerlingen). Uit het procesmodel kunnen de aandachtspunten worden afgelezen. Er moet van worden uitgegaan dat elke leerling A behoefte heeft aan een B (een medeleerling, A zelf of een docent die als coach optreedt) die hem of haar de juiste vragen stelt (zie middelste kolom) en niet met halve antwoorden genoegen neemt. Leerlingen die - individueel of in groepjes werkend - goed in de eigen behoefte (aan een B) en die van anderen voorzien, zijn goed in staat tot zelfstandig leren, hetgeen in hun beoordeling tot uiting kan worden gebracht.

6 Discussie

In de inleiding van dit artikel werd gesignaleerd dat leerlingen in het kader van het studiehuis veel vaker zelfstandig moeten werken en leren. Om te zorgen dat leerlingen dit ook inderdaad kunnen, wordt naarstig gewerkt aan de productie van goed voorgestructureerde opdrachten. Dit zijn opdrachten waarmee leerlingen aan de slag kunnen aan de hand van duidelijke stappenplannen, alleen werkend of in groepjes. Gesignaleerd werd ook dat sommigen zich zorgen maken over de vraag of die zelfstandig functionerende leerlingen, tijdens het werken aan de opdrachten en het volgen van de instructies wel toe zullen komen aan het vervullen van leerfuncties, zoals bijvoorbeeld het concreet maken van leerdoelen en het kiezen van leeractiviteiten. Zullen leerlingen niet ten onrechte menen dat het af hebben van de wiskunde-sommen gelijkgesteld kan worden met het gerealiseerd hebben van een concreet leerdoel en zullen zij niet menen dat het krijgen van een voldoende voor het ingeleverde werk erop duidt dat zij de juiste leeractiviteiten hebben uitgevoerd? Ook binnen het traditionele klassikale onderwijs kunnen dit soort misverstanden uiteraard ontstaan, maar de kans lijkt binnen de studiehuisconstructie eerder groter dan kleiner te worden. Strikt noodzakelijk is dit echter niet en het is daarom goed om gezamenlijk op zoek te gaan naar zoveel mogelijk verschillende soorten hanteerbare en leerzame opdrachten, werk-, begeleidings- en beoordelingsvormen.

In dit artikel hebben wij een procesmodel gepresenteerd dat aangeeft hoe zelfstandig leren en niveauverhogend leren samen kunnen gaan. Het model is gebaseerd op en heeft relaties met onderzoek naar het leren van wiskunde in kleine groepen. Binnen dit onderzoek wordt reflectie al heel lang beschouwd als de basis van de niveauverhoging. Reflectie is in het procesmodel uitgewerkt tot vier kernactiviteiten: *tonen* (afstand nemen), *uitleggen* (articuleren, in woorden beschrijven, van eigen werk en gedachtengang), *verantwoorden* (rechtvaardigen aan de hand van redeneringen waarin de gehanteerde regels of principes worden geëxpliciteerd) en *reconstrueren* (opnieuw formuleren van een/de probleemruimte waarbinnen het werk wordt voortgezet, uitgelegd of verantwoord). Het model is toe te passen op niveauverhogend leren door leerlingen die zelfstandig leren in groepen, maar ook op leerlingen die individueel (of in aanwezigheid van een coach) aan opdrachten werken. Wat individueel werkende leerlingen missen is uit het model eenvoudig af te lezen. Zij missen de stimuli die uitgaat van de vragen van anderen en zij missen de mogelijkheid om gebruik te maken van de inhoudelijke inbreng van de ander(en). Daartegenover staat uiteraard een belangrijke besparing aan tijd en inspan-

ning. Het procesmodel maakt het mogelijk om de ins en outs en de voors en tegens van verschillende werkvormen overzichtelijk in kaart te brengen. In het huidige artikel hebben wij hiermee een start gemaakt met het oog op de praktijk van het onderwijs. In de toekomst zal het model ook worden gebruikt in onderzoek naar de effectiviteit van de verschillende werkvormen.

Literatuur

- Abels, M. e.a. (1993). *Moderne wiskunde - 6e editie, 1 mavo-havo-vwo*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Balacheff, N. (1991). Treatment of Refutations: Aspects of the Complexity of a Constructivist Approach to Mathematics Learning. In: E. von Glasersfeld (Ed.). *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 89-110.
- Bereiter, C. (1985). *Toward a Solution of the Learning Paradox. Review of Educational Research*, 55(2), 201-226.
- Boekaerts, M. & R.J. Simons (1993). *Leren en instructie, psychologie van de leerling en het leerproces*. Assen: Dekker & Van de Vegt.
- Bos, M. (1996). Zelfwerkzaamheid? Zelfstandig leren! *Euclides*, 72(1), 15-18.
- Chinn, C.A. & W.F. Brewer (1993). The Role of Anomalous Data in Knowledge Acquisition: A Theoretical Framework and Implications for Science Instruction. *Review of Educational Research*, 63, 1-49.
- Dekker, R. (1991). *Wiskunde leren in kleine heterogene groepen*. De Lier: Academisch Boeken Centrum.
- Dekker, R. (1993). Ruimte voor groepswerk. In: M. Meeder & L. Spijkerboer (Red.). *Bladeren in de nieuwe schoolboeken wiskunde*. Utrecht: Algemeen Pedagogisch Studiecentrum.
- Dekker, R. (1995). Hoeveel interactie haal je uit een methode? *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 13(4), 34-36.
- Elshout-Mohr, M. & S. Stawski (1995). Studievaardigheden, of toch liever Zelfstandig Studeren? In: W. Veugelers & H. Zijlstra (Red.). *Netwerken aan de bovenbouw van havo en vwo*. Leuven/Apeldoorn: Garant, 59-82.
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing*. Dordrecht: Reidel.
- Hoogland, K. (1995). Wiskunde en Zelfstandig Leren. *Nieuwe Wiskrant*, 15(2), 10-14.
- Kilpatrick, J. (1985). Reflection and Recursion. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 1-26.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Pijls, M.H.J. (1996). *Spiegeltaal, over de ontwikkeling van een lesboekje voor de bovenbouw VWO*. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam, Faculteit WINS.
- Vermunt, J. (1995). *Zelfstandig studeren en omgaan met verschillende leerstijlen*. Lezing gehouden op de studiedag van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren. Bilthoven, 11 november.
- Veugelers, W. & H. Zijlstra (Red.) (1995). *Netwerken aan de bovenbouw van havo en vwo*. Leuven/Apeldoorn: Garant.
- Wistedt, I. (1994). Reflection, Communication, and Learning Mathematics: A Case Study. *Learning and Instruction*, 4, 123-138.
- Yackel, E., P. Cobb & T. Wood (1991). Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(5), 390-408.
- Yackel, E. & P. Cobb (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.