



# Hans Freudenthal opnieuw in de schijnwerpers

- een beschouwing naar aanleiding van het proefschrift van S. la Bastide-van Gemert -

F. Goffree<sup>1</sup>

*Op 11 mei 2006 promoveerde S. la Bastide-van Gemert na het verdedigen van haar proefschrift 'Elke positieve actie begint met kritiek. Hans Freudenthal en de didactiek van de wiskunde'. De kernvraag die in deze studie beantwoord wordt, luidt 'Wie was Hans Freudenthal?' Echter, het antwoord betreft niet alleen de persoon Hans Freudenthal (HF), maar vooral ook de (rijke) opbrengst van zijn denkwerk, in dit geval zijn didactische gedachtegoed. De promovendus ging op onderzoek in de publikaties van (en deels over) HF. Haar proefschrift, gekarakteriseerd als historiografie, krijgt evenwel pas echt kleur doordat ze gebruik kan maken van de goed bewaarde correspondentie die HF met velen in binnen- en buitenland voerde. Dit omvangrijke bronmateriaal wordt bewaard in het Rijksarchief in Noord-Holland te Haarlem. Publikaties en correspondentie maakten het samen mogelijk om de beschrijving van het didactische gedachtegoed als product van denkwerk te completeren met de beschrijving van het ontstaansproces.*

*In onderstaand artikel wordt deze studie vanuit verschillende invalshoeken besproken. De auteur heeft in de jaren tussen 1970 en 1990 veelvuldig met HF mogen samenwerken op het gebied van de didactiek van de wiskunde. Zijn keuze voor een persoonlijke en een didactische invalshoek vloeien als het ware hieruit voort. Naast de thematische beschouwingen wordt natuurlijk ook aandacht besteed aan de opbouw van het boek zodat ook de levensloop en didactische ontwikkeling van HF naar voren kunnen komen.*

*Enkele kritische kanttekeningen ontbreken ook niet tussen de vele lovende woorden. En de kritiek krijgt een constructief vervolg in de vorm van het voorstel voor een aanvullende vervolgstudie.*

## 1 Inleiding

Het is 24 augustus 1969. Ik vier mijn 35<sup>ste</sup> verjaardag buitenshuis, in Lyon. Dat komt zo. Enkele weken geleden schonk professor Monna, secretaris van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW), mij zijn uitnodiging voor de eerste International Conference on Mathematics Education (ICME). 'Dat gaat over didactiek', zei hij, 'dat is meer wat voor u.' En daar zit ik dan in de Salle des Conférences, met coryfeeën als Joh. H. Wansink, P. Vredenduin en K. van der Briel, voorzitter van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Ver weg, op het podium wordt een van de organisatoren van deze conferentie, professor H. Freudenthal, met veel égard aan de zaal voorgesteld. Hij opent de conferentie met een korte voordracht, afwisselend in het Frans en Engels (Freudenthal, 1969). Dat is dus professor Freudenthal, dacht ik. Eigenlijk had ik hem nog nooit van zo dichtbij gezien. Maar zelfs nu nog, bijna veertig jaar later, herinner ik me heel goed de enorme afstand die ik toen ervoer tussen de internationaal bekende geleerde, professor Freudenthal daar temidden van de vele bekenden uit alle windstreken, 64 jaar oud (jong!) en mijzelf, zojuist aangenomen als medewerker van de CMLW voor mavo, lager technisch en agrarisch onderwijs en, wie weet, in de toekomst ook het basisonderwijs. Dat laatste

gold ook voor E. Wijdeveld, die in de zaal naast me zat. In de ruim twintig jaar die volgden, zou ik Freudenthal nog vaak tegen komen. Langzaam, heel langzaam leerde ik hem wat beter kennen. Toen hij tien jaar later, in 1979 dus, samen met J. Sixma, mijn promotor was, hadden we onder meer in Wiskobas en in het bijzonder op de pedagogische academie in Gorinchem (Goffree & Jansen, 2005) veel samengewerkt en gemeenschappelijke ervaringen opgedaan. Na de promotie en de definitieve sluiting van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO) reisden we nog vaak samen naar Enschede, waar hij de nieuwe sectie wiskunde van de SLO de helpende hand bood.

Kan ik na die twintig jaar vertellen wat voor iemand Freudenthal nu eigenlijk was? Ik weet het echt niet. Ik twijfel sterk of ik daar wel een zinnig woord over kan zeggen. Maar ik hoef de vraag niet te beantwoorden, want dat is in zekere zin al gebeurd, en wel op basis van een grondige wetenschappelijke studie van veel oorspronkelijk, in hoofdzaak geschreven materiaal. S. la Bastide-Van Gemert (LB in het vervolg) verrichtte de klus en promoveerde op 11 mei 2006 in Groningen bij de hoogleeraren K. van Berkel en J. van Maanen. Op pagina 47 van het proefschrift stelde zij ook die vraag: 'Wie was Hans Freudenthal?', en wel tegen de achtergrond van de wens om precies te weten wat zijn betekenis is geweest voor het wiskundeonderwijs.

---

## 2 Beeldvorming

De vraag ‘Wie wàs Hans Freudenthal?’ wordt gesteld aan het eind van hoofdstuk 2: Middelbaar wiskundeonderwijs en de wiskundendidactiek in het interbellum. In het geheel van het boek mag dat een merkwaardige plaats lijken voor een vraag die in feite de pretentie van een *organisator* heeft. Maar bij nader inzien is de constructie zo gek nog niet. Hoofdstuk 2 beschrijft namelijk de context waarin Freudenthals denken over wiskundeonderwijs in de periode tussen de beide wereldoorlogen op gang is gekomen. Wat gebeurde er in die tijd in en rond het wiskundeonderwijs? Freudenthal kwam in 1930 naar Nederland, op uitnodiging van professor L.E.J. Brouwer om de Amsterdamse wiskundefaculteit te versterken. Freudenthal zelf legt het begin van de wiskundendidactiek in Nederland een aantal jaren eerder, in 1924 bij het verschijnen van het ‘Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, gewijd aan onderwijsbelangen’. Hierin werden wiskundig-didactische onderwerpen van hoog niveau behandeld. Grote namen uit die tijd passeren de revue: E.J. Dijksterhuis, mevrouw T. Ehrenfest-Afanassjewa, H.J.E. Beth, D. van Dantzig, P.A. Kohnstamm, J.H. Schogt en P. Wijdenes. Na 1930 mengde ook H. Freudenthal zich in de discussies. Het ‘Bijvoegsel’ is dan inmiddels (1927) overgegaan in *Euclides*, het ‘tijdschrift voor de didactiek van de exacte wetenschappen’.

Hoofdstuk 2 handelt verder over het reilen en zeilen van Gymnasium en HBS in die jaren, over de programmacommissie Beth met onder andere de invoering van de differentiaal- en integraalrekening in het vmo, de ondergang van het leervak mechanica als onderdeel van het wiskundeprogramma, alsmede de lerarenopleiding. Het laatste deel van het hoofdstuk wordt besteed aan de Wiskunde Werkgroep, die in 1936 werd opgericht door de ‘vernieuwers’ van die tijd. Een belangrijke gedachte kreeg nu de aandacht van verscheidene leraren, namelijk dat je bij het ontwerpen van wiskundeprogramma’s voor het vmo niet uit moet gaan van het wiskundig systeem, maar van het kind. Onder de gelijkgestemden in de Wiskunde Werkgroep bevond zich ook Freudenthal, die later met veel genoegen en respect op die tijd zou terugzien. Hij sprak zelfs over ‘zijn hogeschool van de wiskundeonderwijskunde’.

Tot aan het uitbreken van de oorlog heeft hij voldoende tijd gehad om zich in het Nederlandse onderwijs in te werken. Hij wist dan ook heel goed waarover hij sprak. Dat weten we dus van Freudenthal omstreeks 1940. Maar om de vraag ‘Wie wàs Hans Freudenthal?’ (omstreeks 1940) goed te beantwoorden, moet men ook weten hoe Freudenthal zich in de jaren voor zijn komst naar Nederland heeft ontwikkeld. En wel vanaf zijn geboorte in 1905 in Lückenwalde, bij Berlijn, tot en met zijn wiskundestudie in Berlijn.

La Bastide vertelt dit deel van zijn levensverhaal in

hoofdstuk 3 (Hans Freudenthal - een schets). Het hoofdstuk begint, enigszins verrassend, met een impressie van Freudenthal. Hierin krijgt de lezer als het ware alvast een voorschot op het beeld dat van hem gevormd kan worden. Wellicht is een paragraaf (Hans Freudenthal - een impressie) daarin bedoeld als leeswijzer, of als *advanced organiser* om bij het lezen van het ‘verhaal’ de kernvraag van deze studie niet uit het oog te verliezen. Zo gezien vormen alle genoemde impressies tezamen een kapstok om hetgeen in dit hoofdstuk naar voren komt of, bij reeds ingewijde lezers uit eigen herinnering naar boven komt, aan op te hangen.

Een dergelijk ophangpunt is bijvoorbeeld ‘Freudenthal als leermeester’. LB neemt hierover drie citaten op (pag.47). De eerste van Freudenthal zelf (‘Mijn hele leven ben ik een slecht leermeester geweest. ...’), vervolgens van oud-student J. van Dormolen (‘Nu was Freudenthal in die tijd niet iemand waarbij je veilig ging vragen wat hij precies bedoelde. ...’) en ook van de oud-promovendus W.T. van Est (‘Er zijn wetenschappers en geleerden. Hans Freudenthal was een geleerde ...’). In feite heeft de auteur ook een ophangpunt gekozen, en wel als het ‘kritiek’ betreft, op en van Freudenthal. Ze scheidt hiermee ook de gelegenheid om naar de titel van haar proefschrift te verwijzen: ‘Elke positieve actie begint met kritiek’, geciteerd van Freudenthal zelf uit ‘Rekendidactiek’, zijn eerste poging om over didactiek te schrijven (1944). Die ‘Rekendidactiek’ wordt in hoofdstuk 4 uitvoerig besproken.

Aan de schets van een eerste impressie mag ik niet voorbijgaan zonder de bijdrage van J. de Lange te vermelden. Hij herinnert zich Freudenthal (HF vanaf nu) als iemand met het uiterlijk van de typische professor, met pijp en vlinderstrikje, wiens naam ergens voor stond. (‘... deze professor zag er precies uit als een professor eruit diende te zien ...’). Ik kan eraan toevoegen dat alle kinderen van de basisscholen, die HF in de Wiskobasperiode heeft bezocht, hem precies zo zagen. Enkelen durfden wel stiekem met hun hand langs zijn jasje te strijken om later thuis te kunnen vertellen dat ze een echte professor hadden aangeraakt.

---

## 3 De ‘mythe-Freudenthal’ wetenschappelijk getoetst

Het boek leest als een goed verhaal, je zou haast vergeten dat het hier gaat om een proefschrift. Een wetenschappelijke publicatie dus, het wetenschappelijk antwoord op de gestelde vraag.

In de inleiding legt de auteur uit dat haar studie een meerwaarde geeft aan hetgeen er al voorhanden is. En wat al voorhanden is bestaat ten minste uit de publicaties van HF zelf,<sup>2</sup> en voorts uit enkele bekende publicaties over HF.<sup>3</sup>

Wat kan aan de kennis over HF in deze publicaties nog worden toegevoegd, vraag je je af, ook nog als de auteur uitlegt dat haar boek biografie noch didactiekboek is, maar een historiografie. Daarmee bedoelt ze dat er via een historische analyse van het beschikbare, geschreven materiaal een beeld van HF wordt geschapen. En wel langs twee lijnen, die van de persoon HF en die van de didacticus HF. De auteur stelt met nadruk dat ze niet HF's eigen inzichten over zichzelf, zoals in zijn autobiografie 'Schrijf dat op, Hans' (Freudenthal, 1987), als leidraad neemt. Wat dan wel? Het antwoord krijgt men door kennis te nemen van de bijna 1200 voetnoten. Voortdurend wordt daar verwezen naar het Rijks Archief Noord Holland (RANH) te Haarlem. Daar bevindt zich HF's persoonlijke archief, dat zestien meter plankruimte in beslag neemt.

Het is wel aardig, en ook een beetje pijnlijk om hier te vermelden dat ik dit archief, toen het nog maar net op de Kleine Houtweg in Haarlem was gearriveerd, heb mogen inzien. Dit was om een voordracht op de komende ICME 7 conferentie in Quebec, over de persoon en het werk van Freudenthal voor te kunnen bereiden. Freudenthal was in oktober 1990 overleden en de Canadese organisatoren wilden daar onder meer via een lezing aandacht aan besteden. Mijn *handout* bestond uit de brochure: 'Hans Freudenthal. Working on mathematics education' (Goffree, 1992), met veel foto's en enkele fotokopieën van stukken die ik in het archief had gevonden. De tekst werd als artikel opgenomen in 'The Legacy of Hans Freudenthal', dat onder redactie van L. Streefland in 1993 uitkwam. Het is 'aardig' om dit te vermelden omdat ik meende de eerste te zijn die HF's 'Rekendidactiek' ontdekte. Ik maakte een fotokopie van de eerste bladzijde en plaatste die op de cover, net als La Bastide ruim tien jaar later deed. Het is wat 'pijnlijk' omdat in haar dissertatie van mijn tekst niets is terug te vinden.

Welnu, dit archief vormt de leidraad om de ontwikkeling van het didactisch gedachtegoed van HF te reconstrueren. De 'mythe-Freudenthal', waarin hij onder meer wordt afgeschilderd als de man die van meet af aan de oorlog verklaarde aan de *New Math*, die ook Nederland wist te behoeden voor de desastreuze gevolgen ervan, ook de man die als grondlegger van het realistische reken-wiskundeonderwijs wordt beschouwd, kan nu met behulp van de reconstructie tegen het licht worden gehouden. Nu weten we dus nog beter wat HF in werkelijkheid heeft betekend voor het wiskundeonderwijs in Nederland. Dat is volgens de auteur de meerwaarde van deze studie.

## 4 HF's gedachtegoed: product of proces?

De eerste didactische publicatie van HF ('Rekendidactiek') had ik dus in 1991 zelf mogen inzien. Wat ik toen

niet heb gevonden, waren de 'Dagboekjes 1940-1945'. LB heeft deze in het pietepouterige handschrift van HF geschreven schriftjes zorgvuldig doorgenomen en kon zo bij passages uit 'Rekendidactiek' ook iets vertellen over de context, waarin ze tot stand waren gekomen. Volgens LB is HF al in 1942 begonnen met het nadenken over een rekindidactiek, maar is hij in 1944 pas met schrijven begonnen. Dat hij niet verder is gekomen dan 103 getypte bladzijden, wijt ze aan dit late begin. Toen de oorlog afgelopen was, werd HF vanzelfsprekend weer bedolven onder het werk voor de universiteit en toen was het ook niet meer nodig zijn kinderen les te geven. Daar had hij in de oorlog nog alle tijd voor gehad, en ook voor het doorspitten van 370 publicaties op het gebied van rekenen, didactiek en hulpwetenschappen (zoals hij het zelf noemde). In het archief vond LB nog een notitieboekje met analyses van die literatuur, op een paar plekken afgewisseld met observaties van zijn kinderen. Ook besteedde HF zijn tijd aan het nadenken over nut en doelen van het reken-(wiskunde)onderwijs.

Dit boeiende hoofdstuk berust dus op twee bronnen, die LB in het RANH heeft aangetroffen: het 'fragment Rekindidactiek' en de 'Dagboekjes 1940-1945'. Je zou kunnen spreken van 'het product' en 'het proces'. Bijna ongemerkt zijn we hiermee aangeland bij het naar mijn mening meest ingrijpende inzicht van HF, dat LB op pag. 345 door HF aldus heeft laten verwoorden:

Je maakt die kennis van de mens los, dan beschouw je de kennis die klaar gekomen is, en die orden je op de een of andere manier in een lexicon of in wiskundige zin. Zo zit die kennis in elkaar. Maar zo is hij niet tot stand gekomen. Niet in de geschiedenis, en komt ook bij een individu niet zo tot stand, integendeel, het gaat net omgekeerd. (...)

Ik zie juist hoe langzaam het gaat voor je die kennis kunt losmaken van de manier waarop je hem zelf verworven hebt. Dat wil zeggen een deel van de kennis blijft op een onbewuste manier verworven en er is nog heel wat vereist om die kennis daarvan los te maken.

Het is ook interessant te lezen dat HF bij de aanvang van zijn wiskundestudie in Berlijn (1923, HF was toen net achttien jaar) dat inzicht in het geheel nog niet bezat. (citaat op pag.51 uit 'Schrijf dat op, Hans'):

Geen ogenblik vatte ik het idee op dat wiskunde iets was om zelf voort te brengen, maar dat had alles te maken met de wijze waarop je met wiskunde - op school en buitenschools - werd geconfronteerd. (...)

Terug bij LB. Tijdens het lezen vroeg ik me op zeker moment af welke insteek zij gekozen heeft bij het reconstrueren van HF's gedachtegoed: het product (dat wát hij bedacht heeft) of het proces (hóe en in welke omstandigheden hij zijn kennis tot stand heeft gebracht)?

Mag ik als didacticus nog een stapje verder gaan? Hoe zou het boek eruit gezien hebben als LB het 'in de voetsporen van HF' had proberen te schrijven? Dan, meen ik, was het gedachtegoed zo gepresenteerd dat lezers ook het

ontwikkelen ervan hadden kunnen méébelevén. LB laat op blz. 167 zien dat die HF-didactiek niet ongemerkt aan haar voorbij gegaan is. Daar behandelt ze namelijk het allereerste studieboek, dat HF (in 1957) schreef ('Waar-schijnlijkheidsrekening en statistiek') en merkt op:

Freudenthal sprak zijn lezers continu toe. In de tekst en bij de opgaven zijn uitspraken te vinden als 'Maar pas op!', 'Reken die uit, maar doe het handig' of 'Zoek dat uit'.

Natuurlijk kon LB zover niet gaan, in een proefschrift moeten namelijk op alle gestelde vragen ook antwoorden komen. Maar zeker is dat voor 'reconstrueren' van gedachtegoed product én proces nodig zijn. Dat heeft LB in de neerslag van haar studie gerealiseerd en wel omdat ze de beschikking had over het materiaal in het RANH, waarin zowel 'product' als 'proces' besloten liggen.

## 5 De opbouw van het boek

Ik denk dat het voor de hand ligt dat een historiografie een chronologische opbouw kent. Dat mijn voorgaande opmerkingen meer een thematisch karakter hebben is een gevolg van mijn didactische invalshoek. Om de historische analyse van LB toch recht te doen en om lezers tegemoet te komen die graag een overzicht over het geheel tot hun beschikking hebben, som ik de tien hoofdstukken op, in de goede volgorde en op sommige punten summier toegelicht.

- 1 Inleiding: 'A way to master this world'.
- 2 Middelbaar wiskundeonderwijs en wiskundendidactiek in het interbellum.
- 3 Hans Freudenthal - een schets.
- 4 'Rekendidactiek'.
- 5 Een nieuw begin.
  - 5.1 Opvoeden.
  - 5.2 Het Hoger Onderwijs.
  - 5.3 De Wiskunde Werkgroep.
- 6 Van roepende aan de zijlijn naar autoriteit.
- 7 Freudenthal en de niveautheorie van de Van Hieles. Een leerproces.
- 8 Methode versus inhoud. New Math en de modernisering van het wiskundeonderwijs.
  - 8.1 Tijd voor modernisering.
  - 8.2 New Math.
  - 8.3 Royaumont.
  - 8.4 Freudenthal over moderne wiskunde.
  - 8.5 Modernisering van het wiskundeonderwijs in Nederland.
  - 8.6 Meetkundeonderwijs.
  - 8.7 Logica.
  - 8.8 Freudenthal en New Math: conclusie.
- 9 Freudenthal ziet het zo.
  - 9.1 Veranderingen van het strijdtoneel.
  - 9.2 Educational Studies in Mathematics.
  - 9.3 Het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs.

9.4 Wereldverkennen van de straatstenen tot de maan.

9.5 De observatie als bron.

9.6 Enfant terrible.

9.7 De opdracht voor de toekomst.

10 Epiloog. De cirkel is rond.

In deze opsomming van hoofdstukken zijn de belangrijke perioden in het leven van HF min of meer zichtbaar: (2) De tijd rond zijn komst naar Nederland. (3) Zijn jeugd vanaf de geboorte in 1905 (te Lückenwalde) tot en met de wiskundestudie in Berlijn. (4) De oorlogsjaren. (5) De tijd vlak na de oorlog. (6) De jaren vijftig. (7) Omstreeks het jaar 1957 waarin de Van Hieles promoveren. (8) Eind jaren vijftig, beginjaren zestig. (9) De beginjaren zeventig.

## 6 Discutabel eindpunt?

LB laat haar historiografie eindigen omstreeks het jaar 1973. Voor medewerkers van het IOWO, zoals ik, vraagt dat om een gedegen uitleg. Waarom zou je stoppen aan het begin van een tijdperk waarin HF zich voor het grootste deel van zijn tijd en energie aan de wiskundendidactiek kon wijden? Wat maakt 1973 tot een bijzonder jaar? En waarom zegt LB met deze keus eigenlijk dat het gedachtegoed in de jaren na 1973 in principe niet verder tot ontwikkeling kwam?

In de jaren 1975 en 1976 bezocht HF de PA in Gorinchem, ging mee de klassen in en deed mee aan de lessen wiskunde & didactiek met de studenten. Met die studenten ging hij weer naar de stagescholen om ook zelf actief te worden en met leerlingen socratische leergesprekken te houden. Na zo'n ochtend opleidingswerk kon hij heel wat vertellen over zijn ervaringen met studenten en leerlingen. Het concept 'didactiseren' kwam tot stand. In de bundel 'Freudenthal 100' is er een heel hoofdstuk aan gewijd (Goffree & Jansen, 2005).

LB legt wel iets uit over haar 'stopcriterium', al in de inleiding. Het komt erop neer dat naar haar mening omstreeks 1970, als HF dus zijn krachten gaat geven aan het IOWO, de opbouwfase van HF's didactiek is afgesloten. Letterlijk:

... Hier eindigt het onderzoek. Hiermee is de kous voor HF's wiskundendidactiek nog lang niet af. Immers, Freudenthal werkt tot zijn overlijden in 1990 nog onvermoeibaar verder aan de ontwikkeling van wiskundeonderwijs en -didactiek. Op het moment waarop dit onderzoek eindigt, is de basis van een belangrijk deel van HF's didactische ideeën echter uitgekristalliseerd. De richting waarin zijn werk zich zal ontwikkelen is daarmee in grote lijnen uitgezet (...)

De lezer zal het hiermee moeten doen.

## 7 Even checken?

Maar dit hoeft niet te leiden tot een passief afwachterende opstelling van de lezer. LB beperkt zich namelijk niet tot de publicaties en archiefstukken van voor 1973. Zelfs HF's laatste boek uit 1991 wordt benut als bron bij het bespreken van leerprocessen en niveauverhogingen. En het is niet zomaar een bron. In het genoemde boek, dat werd gepubliceerd na het overlijden van HF op 13 oktober 1990, kijkt hij namelijk kritisch terug op het tot stand komen van zijn didactisch gedachtegoed. LB beschrijft hier onder andere het moment dat HF tot het inzicht is gekomen dat de sprong naar een hoger niveau (in de zin van de niveautheorie van de Van Hieles), tot stand wordt gebracht door reflectie (pag.205). Dat moment moet omstreeks 1962-'63 geweest zijn, tussen het schrijven van twee artikelen, 'Logical analysis and critical survey' uit 1962 en 'Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?' van 1963.

Zonder het zo te bedoelen laat LB hier dus zien dat wat betreft reflectie, niveaus van het leerproces en niveauverhoging de kennis anno 1973 voorhanden was en dat 'China Lectures' dus in feite als *checkpoint* kan dienen om haar keuze voor eindpunt-1973 te staven.

Er zijn meer van die *checkpoints* waarvan de mijns inziens meest voor de hand liggende publicatie door LB niet wordt benut. Ik doel op HF's *keynote* lezing te Berkeley 1980, op ICME IV: 'Major problems of mathematical education' (Freudenthal, 1981). Dit artikel is, afgaande op de literatuurlijst, door LB helemaal niet gezien. Net als '10 jaar leerplanontwikkeling 1975-1985. Het wiskundeonderwijs' (Freudenthal & Goffree, 1987) ter gelegenheid van het tienjarig bestaan van de SLO. En ook niet vermeld staat de bundel, die bij de sluiting van het IOWO door de medewerkers is geschreven: 'De achterkant van de Möbiusband' (Freudenthal, 1980). HF schreef daarin een reactie op een onderzoek van de IREM Grenoble (Quel est l'âge du capitaine?) onder de titel: 'Wat is onderzoek van onderwijs? - een paradigma'. Hij toont dat kwalitatief onderzoek van het onderwijs diepgang vereist. HF laat ook direct zien wat hij bedoelt door aan het begrip context een dimensie toe te voegen. Dit is de 'magische context' waarin onbegrepen inzichten van kinderen ineens betekenis krijgen. Ik vermoed dat deze uitbreiding van HF's gedachtegoed na 1973 door LB als ondersteuning van haar stellingname zou zijn aangewend. Ik blijf het echter een vlekje op de studie van LB vinden. Het gekozen eindpunt is m.i. geforceerd en bezijden de werkelijkheid van HF en zijn IOWO. Freudenthal zou er in zijn IOWO-tijd niets bijgeleerd hebben? Onvoorstelbaar!

Ik krijg steun uit onverdachte hoek. Het is niet alleen onvoorstelbaar, maar het is ook in werkelijkheid niet zo geweest. Treffers beschrijft hoe bij HF in de jaren na 1975

een blikwisseling in gang werd gezet (Treffers, 2005). HF's oorspronkelijke en zeer dominante gedachte dat wiskunde via de thema's van 'alldag' onderwezen zou moeten worden, werd verrijkt met het inzicht dat bepaalde leerstof noodzakelijkerwijs via leergangen aangeboden diende te worden. Deze fundamentele ingreep op HF's gedachtegoed was volgens Treffers onder meer tot stand gekomen onder invloed van het Wiskobasteam, dat zich in de laatste jaren van het IOWO veel bezighield met het ontwerpen van leergangen voor onder meer tellen, aanvankelijk rekenen, cijferen en breuken. In de vele gesprekken met Treffers stak HF zijn waardering voor de realistische breukenleergang van Streefland niet onder stoelen of banken. En dat terwijl hij zelf ook een breukenleergang, op basis van een fenomenologische analyse (Freudenthal, 1984) had ontworpen. Het was zijn enige ontwerp, gepresenteerd met veel twijfel over de haalbaarheid ervan en wezenlijk verschillend van die van Streefland. Langzamerhand kreeg HF meer aandacht voor het ontwikkelen van leergangen en ging hij inzien dat niveautheorie en fenomenologische analyses tekort schoten. Het is duidelijk. Het didactisch gedachtegoed van HF was omstreeks 1973 nog niet uitontwikkeld. En de richting waarin zijn werk op het gebied van onderwijsontwikkeling verder zou gaan, was op dat moment nog niet 'in grote lijnen uitgezet'.

## 8 Leerboek

Van de reconstructie van HF's wiskundig didactische gedachtegoed valt heel wat te leren. Of we het gedachtegoed als product opvatten (welke kennis heeft HF ons nagelaten?) ofwel als proces (hoe heeft hij die kennis tot stand gebracht?), elke didactisch geïnteresseerde lezer wordt met dit boek een rijke kennisbasis aangeboden. Na een eerste globale lezing noteerde ik de volgende onderwerpen, in de gedachte dat daar wel eens iets voor mij 'te halen' zou kunnen zijn. Tussen haakjes staan mogelijke vindplaatsen:

- De niveautheorie van Van Hiele (7.3).
- Het verband tussen de niveautheorie en de principes van de geleide heruitvinding (*guided reinvention*) en de anti-didactische omkering (7.4).
- Wat is precies een didactische fenomenologie? (168, 315, 321, 323).
- HF's denken over 'getalbegrip' (130, 315, 317).
- Wiskundeonderwijs en het leren denken (43, 99, 142).
- Paradigma's zoals HF ze bedoelde (311).
- Reflecteren als niveauverhogende activiteit (204).
- Kritiek op Piaget (9.6.3).
- Observeren en analyseren van leerprocessen (7.5, 9.4 en 9.5)
- Ordening van de leerstof (kennis) (200, 201).

LB beschrijft HF's didactische gedachtegoed en de totstandkoming daarvan, prachtig, dat wil zeggen dat ze zich zorgvuldig baseert op de bronnen, dat ze een heldere manier van uitleggen heeft en dat wat ze schrijft leest als een goed boek. Ze is bovendien goed in staat geweest om de verschillende ontwikkelingen met elkaar in verband te brengen.

Een mooi en leerzaam voorbeeld vind ik zelf hoe de worsteling van HF om een geschikte didactische volgorde in de wiskundige lesstof aan te brengen, door LB in beeld wordt gebracht. Grofweg komt het erop neer dat het allemaal begint met de kritiek van HF op de logisch-deductieve opbouw van de meetkunde, al in de jaren dertig, met als tegenstander onder andere E.J. Dijksterhuis en als medestander - op enige afstand - mw. T. Ehrenfest-Afanassjewa.

Het moest anders, zo vermoedde HF, een psychologische (pedagogische) ordening diende de voorrang te krijgen boven de logische (deductieve, axiomatische) ordening van de stof. Maar hoe dat precies moest, kon hij gedurende lange tijd niet zeggen. Pas bij het begeleiden van het echtpaar Van Hiele op weg naar hun (dubbel) promotie, in samenwerking met M.J. Langeveld, brak via de niveautheorie van P. van Hiele het gewenste inzicht door. Richt het onderwijs zo in dat de leerlingen via de Van Hiele-niveaus door de stof kunnen gaan. De inrichting van deze verschillende niveaus, waarbij het denken over de wiskundige leerstof op een lager niveau de leerstof vormt op het iets hogere niveau lijkt in veel opzichten op hoe wiskundigen voorheen de wiskunde met wiskundige middelen hebben georganiseerd. Deze overeenkomst tussen het organiseren van de leerstof en het organiseren door wiskundigen van de wiskunde is werkelijk prachtig.

De relatie tussen twee opeenvolgende niveaus van Van Hiele is te vergelijken met de relatie tussen theorie en meta-theorie. In het citaat op pagina 197 zegt HF dit aldus:

The relation between one level and the next higher one is analogous to that between a system and a meta-system. At every level the subject matter is a certain field that will be organized on this level. The devices of organizing on a certain level will form the field, and therefore the subject matter, on the subsequent higher level.

Vervolgens gaat hij op zijn eigen wijze met de niveautheorie van de Van Hieles aan de slag. Hij voegt 'reflectie' toe, die hij ziet als een middel om tot niveauverhoging te komen, maakt de theorie los van de meetkundige context waarin deze totstand was gekomen en laat zien dat hij ook toepasbaar is op het leren van andere wiskundige onderwerpen, zoals 'volledige inductie'. De niveautheorie wordt zodoende geïntegreerd in zijn eigen didactische gedachtegoed, bruikbaar in vele toekomstige ontwikkelingen en ook om reeds eerder verinnerlijkte didactische concepten als *guided reinvention* en *anti-*

*didactical inversion* in een nieuw perspectief te zien. (pag.201).

---

## 9 Wat ontbreekt hier nog aan de beeldvorming?

De thematische aanpak die ik koos om de historiografie te beschouwen, doet tekort aan hetgeen LB over de persoon (de mens) HF naar voren heeft gebracht. Zo zijn bijvoorbeeld zijn botsingen met collega's en instanties hier niet aan de orde gekomen. Bij een juiste beeldvorming mogen ze niet ontbreken, meen ik. Wat bijvoorbeeld te denken van de reactie van HF op Dieudonné tijdens een hoogoplopende discussie: 'Don't shout at me, because I can shout as loud as you can and in more languages!' (pag.48). Deze prachtige reactie past in het beeld dat HF van zichzelf had, een *enfant terrible*. Al moet ik hier meteen aan toevoegen dat deze typering meer op de inhoud van zijn kritieken slaat dan op de vorm ervan. Ook is nauwelijks nog iets gezegd over zijn vriendenkring van collega's.<sup>4</sup> Hij ontmoette ze overal op de wereld in kleine en meer omvangrijke conferenties over het wiskundeonderwijs. HF was altijd een welkome gast en een zeer gewaardeerde deelnemer. Het *enfant terrible* van zojuist trad in deze vriendenkring op als een geanimeerd causeur en begaafd verteller.

---

## 10 Welk beeld is nu gevormd?

Het is 6 september 2006. Ik loop al een paar dagen rond met de vraag hoe ik dit artikel samenvattend en met waardering voor LB kan afsluiten. Dan hoor ik op Radio 5 het lied 'Je bent alles' gezongen door J. ten Hoopen. Ineens springt er een vonk over.

... Je bent wat je eet en je bent wat je drinkt.  
En je bent wat er in je ogen blinkt.  
Je bent wat je droomt en je bent wat je draagt.  
Maar je bent ook waar je altijd over klaagt.  
(...)  
(Je bent alles) Je bent alles.  
Alles wat je doet en alles wat je zegt.  
(Je bent alles) Je bent alles.  
Soms dan ben je goed en soms dan ben je slecht (...)

De kernvraag van deze studie was 'Wie was Hans Freudenthal?' Mijn vraag luidt of die vraag na lezing van het boek te beantwoorden is? Ik meen van wel, in elk geval voor een groot deel. 'Voor een groot deel', niet dus voor de volle honderd procent. Hoe zit dat? Mijn weifeling in dezen komt voort uit het feit dat LB de beeldvorming van HF tot stand bracht op basis van louter geschreven docu-

menten. Koos zij hiermee de veilige weg? Wat op papier gedrukt staat, is onwrikbaar en vraagt om niet meer dan interpretatie. Dat was anders geweest als zij personen uit de kring rond HF had bevestigd over hun beeld van hem. Ze beroept zich op het onderzoekje van E. de Moor, waarin hij tot de conclusie komt dat de meeste Wiskobasers (die tien jaar met HF hadden samengewerkt) het met elkaar oneens zijn over hetgeen HF heeft bijgedragen aan het meetkundeonderwijs op de basisschool. Wat doe je met zo'n verzameling tegenstrijdige meningen, moet ze gedacht hebben. Ik vind het ontbreken van een dergelijke bevestiging van tenminste alle oud-IOWO-ers in de beeldvorming een ernstig gemis. Ik moet hier terugkomen op de opmerkingen in 'even checken', die verwijzen naar (Treffers, 2005). Deze publicatie was te laat om nog door LB te kunnen worden ingezien. Maar de auteur ervan was gedurende de hele studie van LB wel beschikbaar geweest voor een vraaggesprek, waarin gelijklopende informatie naar voren was gekomen. Jammer dat het van een systematische bevestiging niet is gekomen.

Maar ieder nadeel heeft zijn voordeel. De beide nadelen, die ik met betrekking tot het onderzoek heb aangegeven (discutabel eindpunt 1973 en gebaseerd op louter geschreven materiaal), hebben gezamenlijk het voordeel dat zich nu de noodzaak van een vervolgonderzoek voordoet. Het antwoord op de vraag wie HF was, is nog niet volledig tot stand gebracht. En daar ik vermoed dat beide promotoren een niet geringe invloed hebben gehad bij het nemen van de beslissingen over eindpunt en dataverzameling, weet ik bijna zeker dat zij (of in elk geval een van hen) een kandidaat-onderzoeker voor het vervolg met open armen zullen ontvangen.

Ondanks mijn kritiek bij de historiografische dataverzameling, kan de lezer naar mijn mening bij bijna alle typeringen hieronder zeker sprekende invullingen in het boek terugvinden, wellicht gekleurd door eigen ervaringen. Hij was wat hij wiskundig deed, hoe hij wiskunde als activiteit zag, hoe hij kinderen observeerde, hoe hij wiskundige problemen oploste, welke problemen hem bezighielden, hoe hij aan discussies deelnam, hoe hij leerplanontwikkeling zag, de anekdotes die hij in voorraad had, hoe hij verhalen vertelde, op welke wijze hij kritiek uitoefende, waarop zijn kritiek zich richtte, hoe hij zich voelde als enfant terrible, hoe hij leerprocessen analyseerde, hoe hij Van Hieles niveautheorie gebruikte, hoe hij zich opstelde als medewerker in een team, hoe hij anderen inspireerde, wie hij in vertrouwen nam, hoe hij met taal omging, hoe hij met aandacht een artikel schreef, hoe hij zijn tijdschrift 'Educational Studies in Mathematics' redigeerde, hoe hij een studieboek schreef, hoe hij zichzelf zag als leermeester, hoe anderen hem zagen, hoe hij met zijn (klein)kinderen omging, wat de *New Math* met hem deed, hoe hij een tekst van anderen las, waarop hij reflecteerde, op welke gebieden hij theoretiseerde, hoe hij onderzoek van het onderwijs zag, hoe hij zich

nieuwe kennis eigen maakte, op welke manier hij wiskundige onderwerpen uitlegde, hoe en wanneer hij refereerde aan andere auteurs, hoe hij zich opstelde als leerling, hoe hij zich inleefde in een leerling, wat voor autoriteit hij was in onderwijsland, hoe hij opvoeden opvatte, hoe hij steeds terugkwam op het werk van de Van Hieles, hoe hij herkend wordt als intuïtionist.

De studie van LB maakt het dus mogelijk een beeld van HF te creëren dat zo genuanceerd is als de typeringen hierboven suggereren. Wat ze noteerde is gebaseerd op een (bijna) volledige verzameling van achtergrondmateriaal, geschreven door of over HF. Deze verzameling is helder en overzichtelijk in de bibliografie achter in het boek opgenomen. Op basis van dit materiaal maakte ze scherpe, deskundige analyses en zorgvuldige, soms moedige interpretaties. Daarbij wist ze zich welbewust op te stellen op een positie tussen inleven en afstand nemen. Het grote aantal citaten uit het werk van HF en de enkele uit dat van anderen - in verband met HF - geven het boek precies de sfeer waarin ik de persoon HF en de ontwikkeling van zijn didactische gedachtegoed met instemming kan plaatsen.

## Noten

- 1 Met dank aan A. Treffers, E. Wijdeveld, H. Jansen en J. van Maanen voor hun commentaar op een eerdere versie van dit artikel.
- 2 Mathematics as an educational task (1973).  
Weeding and sowing. Preface to a science of mathematical education (1978).  
Didactische fenomenologie van wiskundige structuren (1984).  
Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven (1987).  
Revisiting mathematics education. China lectures (1991).
- 3 Feestboek Prof. Dr. Hans Freudenthal - 70 jaar (1975).  
Kijk op Hans (1980).  
The Legacy of Hans Freudenthal. (1993).  
Freudenthal cursief. Hans Freudenthal (1905-1990) (1991).
- 4 A.Z. Krygovska uit Polen, E. Castelnuova uit Italië, W. Servais uit België, H.G. Steiner uit Duitsland, H.O. Pollak uit de Verenigde Staten., A. Revuz en J. Adda uit Frankrijk, A. Bishop uit Cambridge (nu Australië) en C. Keitel uit Bielefeld (nu Berlijn).

## Literatuur

- Bastide-van Gemert, S. la (2006). 'Elke positieve actie begint met kritiek'. *Hans Freudenthal en de didactiek van de wiskunde*. Hilversum: Uitgeverij Verloren.
- Bundel opstellen (1975). *Feestboek Prof. Dr. Hans Freudenthal - 70 jaar*. Utrecht: Mathematisch Instituut en IOWO
- Bundel opstellen (1991). *Freudenthal cursief*. Hans Freudenthal (1905-1990), *Nieuwe Wiskrant*, (10).
- Freudenthal, H. (1957). *Waarschijnlijkheid en statistiek*. Haarlem: De Erven F. Bohn N.V.
- Freudenthal, H. (1962) (ed.). Logical analysis and critical survey. In: Freudenthal. *Report of the relation between arithmetic and algebra*, ICME, subcie for The Netherlands, Gronin-

- gen: Wolters, 20-24.
- Freudenthal, H. (1963). Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques? *L'Enseignement Mathématique IX*, 28-44.
- Freudenthal, H. (1969). Allocution du premier congrès international de l'enseignement mathématique Lyon 24-31 Août 1969. *Proceedings of the first International Congress on Mathematical Education*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 3-6.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing. Preface to a science of mathematical education*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1980). Wat is onderzoek van het onderwijs? – een paradigma. In: S. Pieters (ed.). *De achterkant van de Möbiusband*. Utrecht: IOWO, 11-15.
- Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 133-150.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1987). *Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven*. Amsterdam: Meulenhof Informatief.
- Freudenthal, H. & F. Goffree (1987). *10 jaar leerplanontwikkeling 1975-1985. Wiskundeonderwijs*. Enschede: SLO.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Goffree, F. & H. Jansen (2005). Professor Freudenthal op de Pedagogische Academie. In: H. ter Heege, e.a. (red.) *Freudenthal 100*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 114-122.
- Goffree, F. (1992). *Hans Freudenthal. Working on mathematics education*. Enschede: SLO/Amsterdam: UvA.
- IOWO medewerkers (1980). *Kijk op Hans*. Utrecht (interne publicatie).
- Moor, E.W.A. de (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Streefland, L. (ed.), (1993). *The Legacy of Hans Freudenthal*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Treffers, A. (2005). De (on)navolgbare Freudenthal. In: H. ter Heege, e.a. (red.). *Freudenthal 100*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 135-144.

---

*On 11 May 2006 S. la Bastide-van Gemert successfully defended her Ph.D thesis 'Elke positieve actie begint met critiek. Hans Freudenthal en de didactiek van de wiskunde'. (Criticism is the start of all positive action'. Hans Freudenthal and mathematics education.) The core question she had to answer in this thesis was: 'Who was Hans Freudenthal?' However, her answer on this question does not concern the person Hans Freudenthal (HF) only, but particularly also the results of his thinking, so to say his didactical range of thought. The PhD student investigated all publications written by HF himself and some writings by others about HF. The thesis, characterised as a historiography of mathematics education, becomes a real book because of the use of HF's correspondence with people in the Netherlands and abroad. This correspondence is part of HF's vast personal archive and is kept in the regional archive in Haarlem (Rijksarchief in Noord-Holland). Publications and correspondence created the possibility to describe HF's didactical range of thought as product (of thinking) and as a process (the making of) as well.*

*In the article below La Bastide's study has been reviewed from different points of view. The author frequently worked together with HF in the years between 1970 and 1990, practising and reflecting the didactics of mathematics. His choice of a personal and didactical point of view can be explained by this past.*

*Besides the thematic paragraphs the outline of the book has been given attention to create a chronologic framework for the description of HF's life story and professional development.*

*Also some critical remarks are not missing between the many words of praise. And moreover the criticism is continued constructively by presenting a proposal for a supplementary research study.*