Revisiting ‘Mathematics education revisited’

Koeno Gravemeijer
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

‘To revisit’ betekent ‘opnieuw bezoeken’ of ‘teruggaan naar’. Freudenthal gebruikt deze aanduiding in de titel van zijn laatste boek, waarin hij zijn ideeën nog eens op een rijtje zet en zonodig heroverweegt en aanscherpt. Het opnieuw bezoeken betrof bij hem dus vooral zijn eigen werk. Voor mij heeft het herlezen van Freudenthals boek sterk het karakter van teruggaan naar de bron. Deze ‘special’ voor Freudenthals honderdste geboortedag vormt een mooie aanleiding. Naar het schijnt is dit boek nooit in dit tijdschrift besproken.[1] *Dit wordt echter geen echte boekbespreking, maar meer een artikel ‘naar aanleiding van’.*

1 Inleiding

Freudenthal begint zijn boek ‘Revisiting Mathematics Education’, met de vraag: ‘Wat is wiskunde?’ Hij waarschuwt om niet in een woordenboek te kijken, want daar staat het toch altijd fout. Toch komt de omschrijving die ik ooit in een woordenboek vond wel erg dicht in de buurt van die van Freudenthal zelf. Freudenthal grijpt terug op Simon Stevin, die het woord ‘wiskunde’ in de Nederlandse taal introduceerde. De naam wiskunde is geconstrueerd als verwijzing naar wis en zeker, de wetenschap van wat zeker is. Dit strookt met de woordenboekdefinitie, die wiskunde definieert als een streven naar algemeenheid, zekerheid, exactheid en beknoptheid.
Uiteindelijk komt Freudenthal natuurlijk uit op ‘wiskunde als activiteit’ en ‘mathematiseren’.
Ik was nieuwsgierig naar hoe hij nu het onderscheid tussen ‘horizontaal’ en ‘verticaal’ mathematiseren definieert. Dit leidde tot een analyse die ik hier uitwerk. Mijn conclusie is dat we in plaats van twee, drie categorieën zouden moeten onderscheiden: horizontaal mathematiseren, het uitvoeren van wiskundige bewerkingen en verticaal mathematiseren in engere zin, dat wil zeggen, gericht op niveauverhoging. Deze driedeling gebruik ik als basis voor de rest van het artikel, waarbij ik uitga van de ideeën die Freudenthal in zijn boek beschrijft.

2 Horizontaal en verticaal mathematiseren

Mij valt op dat verticaal mathematiseren nogal eens gelijk wordt gesteld met ‘uitrekenen’. Eerst moet je horizontaal mathematiseren, dan heb je een wiskundig probleem dat je met wiskundige middelen kunt oplossen, en dat laatste heet dan verticaal mathematiseren. Maar wat is daar nu verticaal aan? Aan het routinematig uitvoeren van standaardbewerkingen kan ik niets van niveauverhoging (wat ik associeer met verticaal) ontdekken. Terug naar Freudenthal dus om te kijken wat hij hierover zegt. Maar bij het lezen blijkt dat hij het verticaal mathematiseren niet exclusief voor niveauverhoging reserveert. Hij zegt zich - na enige aarzeling te hebben overwonnen - aan te sluiten bij Treffers’ indeling tussen horizontaal en verticaal mathematiseren. Horizontaal mathematiseren beschrijft hij als het toegankelijk maken van een probleemgebied voor een wiskundige aanpak (in strikte zin), en het verticaal mathematiseren als het meer of minder gesofisticeerde wiskundig verwerken. Hij licht dit toe met:

> Horizontal mathematisation leads from the world of life to the world of symbols. In the world of life one lives, acts (and suffers); in the other one symbols are shaped, reshaped, and manipulated, mechanically, comprehendingly, reflectingly; this is vertical mathematisation. (Freudenthal, 1991, 41-42)

Het onderscheidend criterium is ‘de wereld’ waarin gemathematiseerd wordt. Hij voegt daaraan toe dat de grenzen van deze werelden vaag en veranderlijk zijn. Dit betekent ook dat dit onderscheid afhankelijk is van de specifieke situatie, de persoon en diens omgeving. Maar hij maakt geen onderscheid naar het soort wiskundige activiteit dat je in die wereld uitvoert, we zien er immers ook het woord *mechanically* staan. Ook uit de voorbeelden die hij geeft, kun je aflezen dat hij het routinematig handelen en uitvoeren van algoritmen tot het verticaal mathematiseren rekent. Wat verderop in zijn boek is hij daar zelfs heel expliciet over, wanneer hij vaststelt dat het onderscheid tussen horizontaal en verticaal mathematiseren niet verward moet worden met niveauverschil:

Horizontal mathematising may just as often mean a jump from reality to fresh mathematics and vertical mathematising a mere routine, as well as vice versa.
(Freudenthal, 1991, 101)

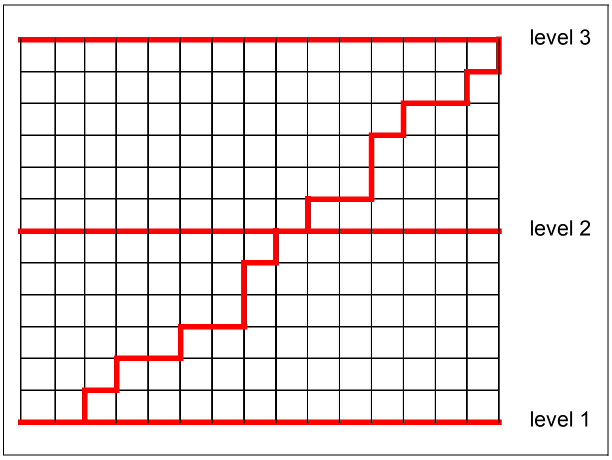
En dat is dus anders dan ik het onderscheid had opgevat. Op zich is dit een interessante ervaring. Je weet dat de manier waarop je kennis verwerkt, dingen interpreteert en onthoudt sterk afhankelijk is van je eigen referentiekader en verwachtingen. Het doet me denken aan een uitspraak van Edwards & Mercer (1987, pag.66):

For the participants, the context of any utterance is more a matter of perception and memory - What they think has been said, what they think was meant, what they perceive to be relevant.

Maar dat maakt me uiteraard nieuwsgierig naar hoe Treffers het onderscheid nu oorspronkelijk heeft gedefinieerd. Dan blijkt dat ook Treffers het uitvoeren van berekeningen tot het verticaal mathematiseren rekent. Letterlijk zegt hij:

In het algemeen kan men zeggen, dat de horizontale mathematisering bestaat uit het zodanig schematiseren van het gebied, dat het probleemveld met mathematische middelen aangepakt kan worden. De vervolgaktiviteiten, die betrekking hebben op de mathematische verwerking, de probleemoplossing, de generalisatie van de oplossing en de verdergaande formalisering, worden met de term *vertikale mathematisering* aangeduid. (Treffers, 1978, 79, cursief in het origineel)

De mathematische verwerking is echter een aspect dat bij Treffers weinig nadruk krijgt. Wanneer we kijken naar de manier waarop hij de begrippen ‘horizontaal’ en ‘verticaal’ gebruikt om het progressief mathematiseren te karakteriseren, lijkt het verticaal mathematiseren sterk gekoppeld aan niveauverhogingen (fig.1).



figuur 1: progressief mathematiseren (ontleend aan Treffers, 1987, pag.248)

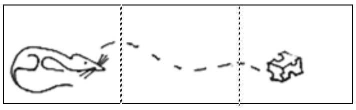
Ook in de algemene beschrijvingen van mathematiseren staat het aspect van progressie voorop. Zowel Treffers als Freudenthal omschrijven mathematiseren als een organiserende activiteit. Freudenthal doet dit bijvoorbeeld in een eerder artikel waarin hij wiskunde als activiteit typeert:

It is an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing subject matter. This can be matter from reality which has to be organized according to mathematical patterns if problems from reality have to be solved. It can also be a mathematical matter, new or old results, of your own or of others, which have to be organized according to new ideas, to be better understood, in a broader context, or by an axiomatic approach.
(Freudenthal, 1971, 413-414).

Het is langs die tweedeling dat ik horizontal en verticaal mathematiseren altijd heb opgevat als het mathematiseren van *subject matter from reality*, tegenover het mathematiseren van *mathematical matter*. Horizontaal mathematiseren staat voor het wiskundig organiseren van een stuk van de ervaren werkelijkheid, terwijl verticaal mathematiseren dan het (verder) wiskundig organiseren van de *eigen* wiskundige activiteit kan betekenen.
Uiteraard is ook het uitvoeren van wiskundige bewerkingen een belangrijke wiskundige activiteit, maar ook dit pleit ervoor om hetgeen wat volgt na het horizontaal mathematiseren uiteen te leggen in twee onderscheiden activiteiten. Ik stel daarom een driedeling voor. Je zou kunnen zeggen dat het uiteindelijk gaat om drie soorten activiteiten:

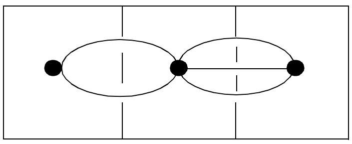
– het horizontaal mathematiseren;
– het uitvoeren van wiskundige bewerkingen;
– het verticaal mathematiseren in engere zin; het mathematiseren van de eigen wiskundige activiteit.

Laat ik dit toelichten met een voorbeeld. We kunnen hier het probleem van de muis die op verschillende manieren naar de kaas kan (Treffers (1987, pag.41) voor gebruiken (fig.2).



figuur 2: op hoeveel manieren kan de muis naar de kaas?

Om bij de kaas te komen moet de muis door twee schotten, een schot met twee poortjes, en een schot met drie poortjes, en de vraag is: Op hoeveel verschillende manieren kan de muis naar de kaas?
Als eerste stap naar een oplossing zou je een schematische tekening kunnen maken van de mogelijke wegen (fig. 3).



figuur 3: mogelijke routes

Deze stap kunnen we categoriseren als horizontaal mathematiseren. Het probleem kan nu worden opgelost door de mogelijke wegen één voor één te tellen of door de het aantal wegen in het eerste deel van de route (2) te vermenigvuldigen met het aantal mogelijke wegen in het tweede deel (3). Het uitvoeren van de vermenigvuldiging, $2 \times 3 = 6$, valt dan onder 'het uitvoeren van wiskundige bewerkingen'. Het bedenken dat je het tellen kunt vervangen door vermenigvuldigen behoort dan tot het verticaal mathematiseren in engere zin, omdat hiermee de wiskundige activiteit van het tellen wordt gemathematiseerd.
Ik denk dat we hiermee drie essentiële elementen van wiskunde als activiteit te pakken hebben en ik wil deze driedeling gebruiken als structuur voor de rest van mijn betoog.

Voor ik dat doe wil ik nog even stilstaan bij 'wiskunde als activiteit' en opmerken dat je die slogan op verschillende manieren kunt opvatten. De sterk inhoudelijke invulling van Freudenthal verschilt bijvoorbeeld van de wiskunde-als-activiteit opvattingen die onder invloed van het constructivisme in de Verenigde Staten opkwamen (Lampert, 1990). Hier stond de gemeenschap van wiskundigen model en werd de (veronderstelde) *discours* van zuiver wiskundigen als uitgangspunt genomen. Wiskunde als activiteit bestaat in die opvatting met name uit het formuleren van hypothesen en het bekritiseren en/of beargumenteren daarvan.
We zouden kunnen zeggen dat dit vooral een vormkenmerk betreft, maar tegelijkertijd kunnen we opmerken dat dit aspect bij Freudenthal weinig aandacht krijgt. Bij hem staat toch vooral de activiteit van het individu centraal; als hij over interactie spreekt, is dat veelal in dienst van de ontwikkeling van het individu. Een andere opvatting van wiskunde als activiteit is een variant van 'wiskunde leren door wiskunde doen', waarbij de verticale component weinig aandacht krijgt; een benadering van wiskunde als activiteit die daarmee dicht aanligt tegen wat Treffers de 'empiristische stroming' noemt.

3 Horizontaal mathematiseren

Uit het zojuist aangehaalde citaat over organiseren blijkt dat Freudenthal het organiseren van zaken uit de realiteit, ofwel het horizontaal mathematiseren, uitdrukkelijk tot wiskundige activiteit verklaart en op eenzelfde hoogte plaatst als het mathematiseren binnen de wiskunde. Dit is kenmerkend voor zijn visie op wiskunde. Daarmee legt hij de basis voor realistisch reken-wiskundeonderwijs dat geworteld is in het mathematiseren van reële situaties, dat wil zeggen, situaties die de leerling als reëel ervaart; situaties die *experientially real* zijn - om een uitdrukking van Cobb te gebruiken - in de zin dat leerlingen direct weten hoe je daarbinnen op een zinvolle manier kunt handelen en redeneren. En daar willen we met het wiskundeonderwijs op aansluiten. Voor jonge kinderen zullen dat vooral situaties uit de alledaagse (of gefantaseerde) realiteit zijn, voor oudere leerlingen kan ook de wiskunde zelf reëel ervaren situaties verschaffen.
Door ook niet-wiskundige situaties als startpunt voor het mathematiseren te accepteren, creëert Freudenthal de mogelijkheid om in het onderwijs te starten bij een basis die betekenisvol is voor de leerling. Omgekeerd dient in het onderwijs dan wel recht te worden gedaan aan de relatie tussen de reële context en de wiskundige interpretatie van het contextprobleem. Hier bestaat het gevaar dat het vaak voor ons volwassenen zo vanzelfsprekend is welke bewerking er moet worden uitgevoerd, dat het horizontaal mathematiseren nauwelijks aandacht krijgt.
Het MORE-onderzoek (Gravemeijer, e.a., 1993) laat zien dat het hier om een lastige balans gaat, die snel naar de ene - blijven steken in de realiteit van de context - of naar de andere kant - direct doorschieten naar de wiskunde - doorslaat.

Thompson & Thompson (1996) maken in dit verband onderscheid tussen *relational reasoning* en *calculational reasoning*, waarbij de eerste staat voor het redeneren over de relatie tussen het gestelde contextprobleem en de wiskundige bewerking die het antwoord op dit probleem moet geven. De tweede betreft het redeneren over het uitvoeren van de bewerking, los van de context (zie ook Gravemeijer, 2003).
Onderzoek van Van den Boer (2003) laat zien dat *relational reasoning*, in ieder geval in het voortgezet onderwijs, onvoldoende aandacht krijgt. Met als gevolg dat de wiskundeles vooral gaat over wat je moet doen en hoe je het moet doen en nauwelijks over waarom je het (zo) moet doen.

Contextproblemen verworden zo tot redactiesommen, die hun beoogde functie van basis voor het aanboren van de eigen informele kennis van de leerling niet kunnen vervullen.

Dit brengt mij bij een voorval tijdens een bijeenkomst van de toenmalige PA-responsgroep in Lochem. Freudenthal verweet ons - de daar aanwezige PA-docenten rekenen-wiskunde & didactiek - dat we contexten zochten bij de wiskunde die we wilden onderwijzen. In plaats daarvan zouden we, volgens hem, moeten starten bij reële contexten en ons afvragen welke wiskunde daar inzit. Het is een opmerking die me waarschijnlijk is bijgebleven omdat ik niet goed wist wat ik ermee moest. Het punt is duidelijk, er dreigt altijd het gevaar van wat De Lange ooit *dressed-up problems* heeft genoemd. Maar hoe kun je ooit een leergang maken als je niet ook vanuit de leerstof denkt?

Terugkijkend denk ik dat Freudenthal dat ook niet heeft bedoeld, dan zou hij immers ingaan tegen het basisidee van zijn didactische fenomenologie, die aangeeft dat je voor het ontwerpen van onderwijs op zoek gaat naar die fenomenen die met de wiskunde, in casu met het 'gedachteding' dat je op het oog hebt, georganiseerd kunnen worden. Waar hij vermoedelijk op heeft willen wijzen, is dat je als ontwerper altijd iets met bepaalde contexten voor hebt. Wat maakt dat je in het contextprobleem alleen datgene ziet waar jij de contextopgave voor hebt uitgekozen. Maar je moet af en toe ook de bril van de leerling opzetten en je afvragen wat die vanuit hun perspectief met een opgave zou kunnen doen. Goffree e.a. spreken in dit verband van 'sluipwegen', oplossingsmethoden die voor de leerling veel efficiënter zijn dan de mooie redeneringen die wij voor ze in gedachten hadden (Goffree & Buijs, 1989).

Horizontaal mathematiseren is nauw verbonden met het oplossen van contextproblemen, maar hier moet tegenover niet-ingewijden steeds weer benadrukt worden dat contexten in de realistische benadering ook wiskundig van aard kunnen zijn. Wanneer de leerling voldoende wiskunde in zijn of haar bagage heeft, kan de wiskunde zelf ook een betekenisvolle context bieden. Bij 'realistische' en 'contextproblemen' wordt echter maar al te vaak gedacht aan situaties in de alledaagse realiteit. Eenzelfde misverstand doet zich voor bij Freudenthals befaamde uitspraak: 'Mathematics starting and staying within reality' (aangehaald op pag.18). Freudenthal beschouwt 'werkelijkheid' als een mengsel van zintuiglijke ervaringen en interpretaties. Hij koppelt dit aan *common sense*:

> I prefer to apply the term 'reality' to what at a certain stage common sense experiences as real.
> (Freudenthal, 1991, 17)

Daarbij moeten we geen diepe filosofische, fysieke of psychologische betekenis aan 'werkelijk' of 'werkelijkheid' verbinden. Freudenthal doelt hier op een *common sense* betekenis, zoals je - zonder er verder bij na te denken - over de werkelijkheid spreekt. Deze werkelijkheid beperkt zich niet tot de fysieke werkelijkheid om ons heen, maar omvat ook mentale activiteiten en mentale objecten. Zo opgevat kan iemands werkelijkheid onbeperkt groeien. Daarmee groeit ook wat als *common sense* wordt opgevat. Wat gezond verstand is voor een wiskundige, zo betoogt hij, is heel wat anders dan wat gezond verstand is voor de man in de straat.

In deze zin moet ook de uitspraak: 'Mathematics starting and staying within reality' worden geïnterpreteerd. Het leren van wiskunde zou door de leerling moeten worden ervaren als het uitbouwen van de als betekenisvol ervaren werkelijkheid; wiskunde leren dient te starten op het niveau van gezond verstand en zou een gezond verstand activiteit moeten blijven, door de groei in wat als zodanig wordt ervaren.

Als een 'terzijde' zou ik hier willen opmerken dat Freudenthal zich in deze beschouwing over realiteit een constructivist toont. Merkwaardig genoeg haalt hij in zijn boek echter scherp uit naar het constructivisme, waarbij met name het idee dat je de objectieve werkelijkheid niet zou kunnen kennen het moet ontgelden. We moeten echter wel bedenken dat hij zijn kritiek schreef in de begintijd van de constructivistische benadering van het wiskundeonderwijs.
Hij had de PME[2]-conferentie van 1987 bijgewoond, die in het teken van het constructivisme stond. Daar werden nogal wat naïeve ideeën gelanceerd. Zo werd er betoogd dat je niet van 'misconcepties' moest spreken, maar van 'alternatieve concepties'; er was immers geen absolute toetssteen waaraan je de juistheid van kennis kon toetsen. Geleidelijk aan zijn deze ideeën vervangen door de gedachte dat je in de praktijk heel goed kunt uitgaan van wat je als realiteit ervaart, precies wat Freudenthal ook voorstelt.
Daar is aan toegevoegd dat je je voor de eindpunten van het wiskundeonderwijs kunt richten op datgene wat de gemeenschap van wiskundigen voor waar houdt en dat je je, voor wat wiskunde is, richt op de werkwijzen van diezelfde gemeenschap.

Wanneer we terugkeren naar het idee van een groeiende werkelijkheid en dat verbinden met het horizontaal en verticaal mathematiseren, zal duidelijk zijn dat de grens tussen die twee niet statisch is, maar in de loop van de tijd verschuift. Wat betekent dat na verloop van tijd het mathematiseren van een probleem in een zuiver wiskundige context, om het voor verdere wiskundige bewerking toegankelijk te maken, tot het horizontaal mathematiseren kan gaan behoren.
Dit maakt dat het onderscheid tussen de *two worlds*, zoals Freudenthal dat maakt, persoons- en tijdgebonden is, zoals hij zelf ook aangeeft. Maar wanneer je er dan ook nog van uitgaat dat:

> Horizontal mathematising may just as often mean a jump from reality to fresh mathematics and vertical mathematising a mere routine, as well as vice versa,
> (Freudenthal, 1991, 101)

dan wordt het onderscheid mijns inziens wel erg moeilijk hanteerbaar. De manier om hieruit te komen lijkt mij om horizontaal mathematiseren te reserveren voor situaties waarin de betrokkene wel wiskundig organiseert, maar niets nieuws inbrengt, terwijl we verticaal mathematiseren (in strikte zin) gebruiken voor die situaties waarin wel iets nieuws om de hoek komt kijken. Zo zou het zó bewerken van een probleem dat het voor wiskundige middelen toegankelijk wordt, gepaard kunnen gaan met het bedenken en gebruiken van een notatievorm die nieuw is voor degene die het probleem aanpakt. Het transformeren bevat in dat geval ook een element van wat ik verticaal mathematiseren (in engere zin) noem.

4 Het uitvoeren van wiskundige bewerkingen

Het ontwikkelen en gebruiken van kennis, vaardigheden en inzichten vormt uiteraard een essentieel onderdeel van het leren van wiskunde. Wiskunde is meer dan een manier van denken, wiskundig handelen vraagt ook dat je beschikt over en overweg kunt met een *body of knowledge*. Om een dergelijk kennisbestand op te bouwen, heb je een langlopend leerproces nodig, een gegeven dat door aanhangers van het 'nieuwe leren' schijnbaar niet wordt onderkend, of het nu 'Ieder-wijs' scholen of 'scenario vier' in de plannen voor de nieuwe onderbouw van het voortgezet onderwijs betreft. Freudenthal benadrukt juist deze langlopende leerprocessen. Bij het bespreken van langlopende leerprocessen haakt hij in op een bekende tegenstelling in discussies over wiskundeonderwijs: begrip en inzicht tegenover routines, procedures en inoefenen. Hij betoogt in dit verband dat er meer met inzicht wordt geleerd dan we geneigd zijn te denken. Het probleem is dat de lerende het leerproces vergeet wanneer het doel van dat leerproces eenmaal is bereikt. Nieuwe vaardigheden worden, zo niet geoefend, dan toch in ieder geval beoefend. Met als gevaar dat de oorspronkelijke bronnen van inzicht verstopt raken en onbereikbaar worden. Inzichtelijk leren heeft niet zoveel zin, stelt Freudenthal, wanneer dit alleen de fase van het verwerven betreft. Het inzicht nu dat dient te worden vastgehouden, dreigt door het oefenen verloren te gaan. Of in de woorden van Freudenthal (1991, pag.112) zelf:

> What is crucial, is
> – retention of insight,
> which is gravely endangered by drill, that is
> – premature training,
> – too much training,
> – training as such.

De manier om de bronnen van het inzicht open te houden is volgens hem ervoor te zorgen dat de leerling reflecteert op het leerproces. Hij maakt daarbij een interessant uitstapje naar 'bewijzen', door op te merken dat je altijd dingen bewijst die vanzelfsprekend zijn. Je probeert pas iets te bewijzen wanneer je voor jezelf weet dat het waar is. Maar in het reken-wiskundeonderwijs doen we dat eigenlijk nooit. Neem bijvoorbeeld het rekenen met nullen.

> Many children and adults can tell you that in order to multiply by 100 you have to add two zeros (which is only true for whole numbers) yet most of them cannot explain why. Even worse: most of them don't even understand that the matter can be argued and why this should be done. Did they learn such rules by rote? I don't believe so. I have observed too many children applying such rules intuitively before they were verbalized and formally taught at school. Rather then being taught the rules, they should have been taught to argue their intuitions, to reflect on what appears to be obvious. But this requires more patience than teachers can afford.
> (Freudenthal, 1991, 113).

Maar mogen we dan helemaal niet meer oefenen? Het gevaar van oefenen is, volgens Freudenthal, dat oefenen het behouden van inzicht bedreigt. Het alternatief is volgens hem oefenen dat is geïntegreerd met inzichtelijk leren, waarin ieder stapje weer iets aan het inzicht toevoegt. Als voorbeeld geeft hij de afwisseling van eigen constructies en eigen producties in het onderzoek van Streefland. Interessant is dat de wiskundige Van der Vorst (persoonlijke mededeling) oefenen binnen zijn eigen werk ook omschrijft als een vorm van exploreren. Op die manier kun je oefenen en inzichtelijk leren inderdaad aan elkaar koppelen. Zelf leg ik graag de relatie met een situatie waar ik oefenen zinvol vind, zoals bijvoorbeeld bij (leren) schaatsen. Het oefenen heeft hier niet het karakter van blind inslijpen, maar van al experimenterend verbeteren; je probeert uit te vinden wat je moet doen om je slag prefect te krijgen. En wanneer je meent een verbetering gevonden te hebben, probeer je die vast te houden, door te gebruiken wat je denkt geleerd te hebben. Oefenen gaat in dat geval continu gepaard met denken. Dat zou mijns inziens het model voor oefenen moeten zijn en ik vermoed ook dat het dat is wat Freudenthal bedoelt.[3]

Freudenthal breidt dit openhouden van de bronnen van inzicht uit tot het leerproces zelf. Hij redeneert dat wanneer leerprocessen zo belangrijk zijn dat ze moeten worden vormgegeven als geleid heruitvinden, het doel toch niet kan zijn dat ze vervolgens weggedrukt worden door de producten die ze voortbrengen. Leerprocessen zijn op zichzelf waardevol, maar dan moeten ze wel onthouden worden. Er zijn maar weinig mensen die zich herinneren hoe ze wiskunde hebben geleerd, aldus Freudenthal. Er zijn ook mensen die een leerproces kunnen reconstrueren zoals dat zou zijn verlopen wanneer het een proces van heruitvinden zou zijn geweest. Voor die mensen klopt het gezegde: 'Eerst leren, dan begrijpen'. Maar zo vraagt hij zich af, geldt dat ook voor de rest? Een retorische vraag. Zijn antwoord luidt, dat die mensen meer gediend zijn met geleid heruitvinden - mits ze er iets van onthouden. Wat daarvoor nodig is, is reflectie. Zo wordt het onthouden van heruitvindprocessen volgens hem bevorderd, door ingebouwde reflectiemomenten, door te verbaliseren en door te communiceren zowel met de leerkracht als met medeleerlingen.

De focus op processen blijkt ook wanneer de doelen van het wiskundeonderwijs worden besproken. (Freudenthal, 1991, pag.49-55). Wanneer je wiskunde als activiteit definieert, dan is het doel ook een activiteit, is Freudenthals redenering. De leerlingen moeten niet zozeer wiskunde uitvinden, maar mathematiseren en, in het verlengde daarvan, leren abstraheren, schematiseren, formaliseren, algortimiseren, verbaliseren enzovoort. Dit betekent niet dat hij kennis en vaardigheden onbelangrijk vindt:

> If the learner is guided to reinvent all this, then valuable knowledge and abilities will more easily be learned, retained, and transferred than if imposed.
> (Freudenthal, 1991, 49).

Het lijkt hem echter niet wenselijk die als doelen vast te leggen. Hij beschrijft de leerstof daarom als het gebied waarin het heruitvinden plaatsvindt. In dezelfde lijn wijst hij er in zijn ‘Didactische fenomenologie’ (Freudenthal, 1984, pag.223-225) op, dat veel reken-wiskundemethoden ten onrechte genoegen nemen met het eenmalig uitvoeren van de beslissende stappen in het leerproces. De resultaten van zulke stappen worden wel herhaaldelijk geoefend, maar de stappen zélf zouden onderwerp van herhaling moeten zijn. In het gunstigste geval wordt de laatste stap herhaald wanneer er iets misloopt met het automatisme. Maar ook dit is, zo benadrukt hij, onvoldoende. Het is de weg van inzichtelijkheid naar automatisme die moet worden herhaald om bekwaamheid te waarborgen.

5 Het mathematiseren van de eigen wiskundige activiteit

Het verticaal mathematiseren in engere zin, het mathematiseren van de eigen wiskundige activiteit (of die van anderen), is verantwoordelijk voor de groei van de wiskunde. Hoe ziet dat proces er volgens Freudenthal uit?
Hij zoekt de oorsprong van wiskunde in *common sense.* Hij wijst er in dit verband op dat dezelfde wiskunde, anders dan de andere exacte wetenschappen, op verschillende plaatsen is uitgevonden. De natuurkunde had figuren als Newton en wetenschappelijke revoluties nodig om verder te komen, de wiskunde niet.
Merkwaardig genoeg geldt voor de meeste mensen dat, hoewel ze ervan overtuigd zijn dat wiskunde gebaseerd is op *common sense*, niets hen er zo ver van verwijderd lijkt. Hij probeert deze paradox op te lossen met behulp van een analyse van het continue karakter van de ontwikkeling van de wiskunde.

Waar komt het zo te zien continue karakter van de ontwikkeling van de wiskunde vandaan? Wel, om wiskunde te worden moest *common sense* gesystematiseerd en georganiseerd worden. *Common sense* ervaringen werden samengebracht in regels, en die regels werden weer common sense van een hogere orde, enzovoort. Hij neemt de natuurlijke getallen als voorbeeld.

De getallenrij vindt zijn oorsprong in een taalvorm, gebruikt voor het tellen en verkrijgt zo inhoud, een rijk gevarieerde inhoud. Wanneer van deze variatie geabstraheerd wordt, krijgen getallen de status van mentale objecten, min of meer formele getallen die nog verbonden zijn met tellen van dingen. Optellen en aftrekken komen tevoorschijn als betekenisvolle operaties die voorbereiden op het meer formele optellen en aftrekken, dat eerst nog wordt ondersteund door modellen die een inhoudelijke oorsprong hebben. Commutativiteit komt voort uit de inhoudelijke betekenis van optellen en verandert vervolgens in een formele regel die op een hoger niveau weer inhoud wordt. En zo gaat het maar door - een eindeloze afwisseling van vorm en inhoud.
Deze dualiteit verklaart, volgens Freudenthal, de afstand tussen *common sense* en wiskunde die uiteindelijk in veel gevallen ontstaat:

> Content must be assimilated, while form can be imitated for the purpose of reproduction. (Freudenthal, 1991, 11)

Algoritmen kunnen worden aangeleerd en concepten kunnen worden overgedragen met behulp van talige definities, en dat is wat in veel gevallen gebeurt. Zo ontstaat dan het beeld van wiskunde als een verzameling van algoritmen en definities., met de bekende moeilijkheid wanneer meer flexibiliteit wordt gevraagd. Hij sluit dit betoog af met de constatering dat wiskunde noch als vorm noch als inhoud moet worden onderwezen, maar dat in plaats daarvan de wisselwerking tussen die twee recht gedaan moet worden in wiskunde als activiteit. Een activiteit die hij uiteindelijk karakteriseert als ‘organiseren’.

In het voorgaande zien we hoe de ontwikkeling van de wiskunde door Freudenthal wordt opgevat als een proces waarin steeds nieuwe wiskundige objecten worden gevormd, waarmee een nieuwe realiteit ontstaat die weer onderwerp van reflectie wordt. In het leren van wiskunde mag je dan vergelijkbare niveaus verwachten. Hij gaat in dit verband uitgebreid in op de niveautheorie van Van Hiele (waarbij hij veelal spreekt van de Van Hieles). Terugblikkend op zijn eigen beschrijvingen van deze niveautheorie constateert hij een verandering in beschrijving. Van:

> The learner’s operational matter on the lower level becomes his subject matter on the higher level,

naar:

> The learner’s lower level activity becomes an object of analysis to him at the higher level, or in other words: on the next level this activity is made conscious and can become subject matter of reflection. (Freudenthal, 1991, 98).

Hij constateert dat het verschil tussen de twee beschrijvingen is, dat de tweede aangeeft hoe de niveauverhoging plaatsvindt, namelijk door reflectie. In de loop van de tijd is hij zich bewust geworden van het belang van reflectie. Reflectie is karakteristiek voor het wiskundig denken, met name waar het gaat om de wisselwerking tussen vorm en inhoud.
Reflectie ziet hij dan ook als een krachtige motor voor wiskundig uitvinden, wat consequenties heeft voor *guided reinvention*; ‘the guide should provoke reflective thinking’ (Freudenthal, 1991, pag.100). Hij haalt een eigen citaat uit 1979 aan waarin hij stelt, dat wanneer je ervan uitgaat dat construeren voorafgaat aan bewijzen, er een tussenstadium moet zijn, en dat is reflecteren. Er is dus sprake van een opeenvolging: construeren, reflec-

teren, bewijzen. In het onderwijs moet de leerkracht daarvoor zorgen:

> Teachers (or peers in learning groups) need to insist on justification of what appears to be new knowledge or new procedures, thereby requiring the inventor to reflect on what he - consciously or unconsciously - performed.

We zouden kunnen zeggen dat Freudenthal hier verwijst naar het 'didactisch contract' (Brousseau, 1983) of de *social norms* (Yackel & Cobb, 1996) die een voorwaarde zijn voor realistisch reken-wiskundeonderwijs volgens het principe van *guided reinvention*. In het onderwijs is altijd sprake van een rolverdeling tussen leraar en leerlingen, die is gebaseerd op onderlinge verwachtingen en gepercipieerde verplichtingen. En hoewel deze verwachtingen en verplichtingen vaak niet worden vastgelegd of zelfs besproken, hebben ze wel een zodanige invloed op de interactie dat er gesproken kan worden van een impliciet contract.

Essentieel is nu dat het didactisch contract van realistisch reken-wiskundeonderwijs er heel anders dient uit te zien dan in het algemeen gebruikelijk is. In het traditionele reken-wiskundeonderwijs vormen de leerkracht en het leerboek het referentiepunt voor het handelen van de leerling.

De leerlingen mogen dan ook van de leerkracht verwachten dat hij of zij goed uitlegt. Omgekeerd verwacht de leerkracht van de leerlingen dat ze zich inspannen deze uitleg te volgen en na te volgen. In het realistische rekenwiskundeonderwijs worden de leerlingen geacht zelf oplossingen te bedenken en deze te kunnen verdedigen. De norm zou moeten zijn, dat ze hun oplossingen uitleggen, deze onderbouwen, proberen de oplossingen van anderen te begrijpen, zonodig om opheldering te vragen of de oplossing ter discussie te stellen. De rol van de leerkracht is om geschikte problemen voor de leerlingen te kiezen, vast te stellen welke wiskunde er aan de orde is en deze in klassengesprekken aan de orde te stellen en deze klassengesprekken op een productieve manier te leiden. Ten slotte blijft de leerkracht ook de autoriteit als het gaat om de vraag wat wiskunde is en hoe wiskunde (in deze klas) geleerd wordt.

Onderzoek laat zien dat het voor het invoeren van dergelijke normen niet voldoende is leerlingen de nieuwe regels mee te delen. Ze moeten ook ervaren dat het loont hun gedrag te veranderen. Aan concrete gebeurtenissen moet worden toegelicht wat er nu wel en wat er niet van hen verwacht wordt.

Dergelijke normen vragen dat de leerlingen ook een wiskundige belangstelling ontwikkelen, waarbij wiskunde ook een doel op zichzelf is. Freudenthal lijkt dit niet zo belangrijk te vinden voor het onderwijs, zijn argument is dat het wiskundeonderwijs een veel grotere groep omvat dan alleen diegenen die voor wiskunde als doel op zich zullen kiezen. Wel noemt hij het een belangrijke en onmisbare motor voor de ontwikkeling van de wiskunde. Het lijkt mij dat deze motor in het onderwijs net zo onmisbaar voor de ontwikkeling van de wiskunde is als in de wiskunde zelf. Mij dunkt dat *guided reinvention* net zo goed als *invention* een motief nodig heeft. In dit verband wordt tegenwoordig wel gesproken van *mathematical interest*. We kunnen dit contrasteren met wat we een pragmatische interesse zouden kunnen noemen.

Kenmerkend aan realistische contextproblemen is dat er een reden is om het probleem op te willen lossen. Op z'n minst moet de leerling zich kunnen verplaatsen in iemand die in het antwoord is geïnteresseerd. Anders gezegd, het antwoord is nuttig voor iemand en het motief is pragmatisch. Om verder te komen in de wiskunde is het echter noodzakelijk dat er niet alleen praktische problemen worden opgelost, maar dat de oplossingsmethode en de wiskunde die daarachter steekt onderwerp van onderzoek wordt. Zonder wiskundige interesse blijft de behoefte tot verticaal mathematiseren beperkt. De vraag of (en hoe) we zeker (kunnen) zijn van het antwoord, kan in een praktische context nog wel aan de orde komen, en ook het verkorten is wel pragmatisch te motiveren, maar het formaliseren, generaliseren en bewijzen dat die generalisaties gegrond zijn, komen niet direct naar voren uit de behoefte een concreet probleem te beantwoorden.

Om progressief mathematiseren echt een activiteit van de leerlingen te laten zijn, zullen we er dus voor moeten zorgen dat ze een mathematische interesse ontwikkelen. Centraal staat echter dat de leerlingen gemotiveerd worden in het beantwoorden van vragen die niet direct een praktische betekenis hebben.

Dat wil zeggen dat we willen dat ze gaan nadenken over vragen die de wiskunde zelf betreffen. Onderwijsexperimenten die we in Nashville uitvoerden, lieten zien dat leerlingen daarvoor zijn te motiveren wanneer ze ervaren dat hun inspanning op dit gebied wordt beloond.[4]

Die beloning moet primair komen van de leraar die:

- laat merken daadwerkelijk geïnteresseerd te zijn in het denken van de leerling;
- ervoor zorgt dat de bijdragen van de leerlingen op dit gebied ook daadwerkelijk een rol gaan spelen in het onderwijsleerproces.

Het onderwijsleerproces heeft in zeker opzicht het karakter van een spel, waarbij de leraar de spelregels bepaalt. In het algemeen willen de leerlingen meespelen; ze staan niet graag buitenspel. De leraar heeft daarmee een instrument in handen om de participatie van leerlingen te sturen. Waar leerlingen wel of niet aan meedoen, wordt in belangrijke mate bepaald door de leraar. Dat geldt ook voor het nadenken over wiskundige vragen.

6 Besluit

In de inleiding sprak ik van het 'herlezen' van Freudenthals 'Mathematics Education Revisited, maar zo simpel was het niet - het was meer studeren, omdat ik me ervan wilde vergewissen dat ik zijn ideeën goed weergaf. Wat het boek dan lastig maakt is dat, het er soms op lijkt dat Freudenthal meer zijn eigen gedachtenlijn volgt dan dat hij zich in de lezer verplaatst. Daarbij introduceert hij af en toe begrippen, waar hij wel een heel betoog over houdt, maar niet van vertelt wat hij er precies onder verstaat. Verder is het onmogelijk zo'n boek in enkele bladzijden recht te doen.

Ik heb me uiteraard moeten beperken. Bij mijn keuzen heb ik mij laten leiden door de door mij gemaakte driedeling van 'wiskunde als activiteit' in horizontaal mathematiseren, het uitvoeren van wiskundige bewerkingen en het verticaal mathematiseren in engere zin.
Daarmee heb ik ook veel waardevols onbesproken gelaten. Ik hoop echter dat het voorgaande de lezer voldoende aanleiding geeft om het boek (weer eens) ter hand te nemen.

Noot

1 Hierbij mag echter het artikel dat Buys (1991) aan dit boek heeft gewijd niet onvermeld blijven. Hij gaat daarbij uitgebreid in op de relatie die Freudenthal legt tussen wiskunde en gezond verstand.
2 PME staat voor Psychology of Mathematics Education.
3 Voor de duidelijkheid moet worden opgemerkt, dat de metafoor van de schaatser zijn beperkingen heeft. Een schaatser kan zo'n geïntegreerd proces heel goed zelf sturen, in het reken-wiskundeonderwijs zullen de leerlingen daar begeleiding bij nodig hebben.
4 Dit betreft een onderwijsexperiment rond statistiek in de eerste twee leerjaren van het voortgezet onderwijs dat werd uitgevoerd door P. Cobb, K. MacClain, C. Konold en ikzelf (zie ook Gravemeijer, 2002).

Literatuur

Boer, C. van den (2003). *Als je begrijpt wat ik bedoel. Een zoektocht naar verklaringen voor achterblijvende prestaties van allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs.* Utrecht: CD-β Press.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistémologiques et les problèmes en didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 164-197.

Buys, K. (1992). Het wiskundeonderwijs nogmaals bezien. In: M. Dolk (ed.). *Rekenen onder en boven de tien.* Utrecht: HMN/FEO & Freudenthal Instituut, 9-19.

Edwards, D. & N. Mercer (1987). *Common Knowledge: the development of joint understanding in the classroom.* London, Methuen.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 413-435.

Freudenthal, H. (1984). *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren 1*. Utrecht: OW&OC.

Freudenthal, H. (1979). How does Reflective Thinking Develop? *Poceedings Conference IGPME*, Warwick.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education, China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (2002). De context van de interactie. In: R. Keijzer & W. Uittenbogaard. (eds.) *Interactie in het rekenwiskundeonderwijs.* Utrecht: Freudenthal Instituut, 61-76.

Gravemeijer, K. (2003). Betekenisvol Rekenen. *Willem Bartjens, 22*(4), 5-8.

Gravemeijer, K., M. van den Heuvel-Panhuizen, G. van Donselaar, G., L. Streefland, W. Vermeulen, E. te Woerd & D. van der Ploeg (1993). *Methoden in het reken-wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek.* Utrecht: CD-β Press.

Goffree, F. & K. Buys, (red.). (1989). *Tegengesteld, wiskundedidactiek op de grens van basis en voortgezet onderwijs, toegespitst op negatieve getallen*. Baarn: Bekadidact.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and when the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research journal, 27,* 29-63.

Thompson, A.G. & P.W. Thompson (1996). Talking about rates conceptually, part II: Mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 29,* 121-142.

Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht*. Utrecht: IOWO (proefschrift).

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions, A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction - The Wiskobas Project*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Yackel, E. & P. Cobb (1996). Sociomath norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458-477.

In his last book 'Mathematics Education Revisisted', Freudenthal reviews, reconsiders, and refines his personal ideas on mathematics education. 'Revisting' this book after more than a decade the author investigates what Freudenthal writes about mathematics as an activity. The starting point for this investigation is found in the distinction Treffers makes between horizontal and vertical mathematising. The author argues for adding a third category, 'carrying out mathematical procedures', while at the same time restricting the concept of vertical mathematising to 'mathematising one's own mathematical activity'. These three categories then are taken as a structure for describing and discussing Freudenthal's thoughts on mathematics as an activity. In doing so, the author limits himself to this theme, while leaving out of account all other topics that Freudenthal addresses in this book.