Van procedure - naar begripsgericht onderwijs

voorbeeld van een leerlijn kommagetallen

Kees Buijs, Instituut van leerplanontwikkeling SLO, Enschede

1 Inleiding: problemen bij het onderwijs in de bovenbouw

Het onderwijs rond breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen neemt een belangrijke plaats in binnen het reken-wiskundeonderwijs in de bovenbouw van de basisschool. Wie er de huidige methoden op naslaat, moet al gauw tot de conclusie komen dat zeker de helft van alle lessen in de leerjaren 7 en 8 direct of indirect op een of meer van deze leerstofdomeinen betrekking heeft. Dat het onderwijs in de praktijk nochtans bepaald niet altijd op rolletjes loopt, bleek wel bij een consultatiebijeenkomst die door de SLO werd georganiseerd in het kader van het TAL-project. In deze bijeenkomst spraken zo'n 15 leerkrachten, afkomstig van uiteenlopende scholen en werkend met verschillende methoden, zich uit over de kwaliteit van hun onderwijs rond de genoemde domeinen (Lit e.a., 2003). Vrijwel unaniem bleek men van mening dat er nog veel te verbeteren valt. Een veel gehoorde klacht was dat de leerstappen in de eigen methode te groot zijn, dat er veel onduidelijkheden zijn over de te doorlopen leerlijn, en dat het onderwijs met name voor de C-, D- en E-leerlingen moeilijk te volgen is. Neem je geen aanvullende maatregelen, dan dreigt een groot deel van deze leerlingen al gauw af te haken, aldus veel van de aanwezigen. In samenhang hiermee werd veelvuldig gewezen op de overladenheid van het bovenbouwprogramma. Men ervaart de dagelijkse lessen nogal eens als vol en versnipperd, te veel gericht op onderdelen die weinig met elkaar te maken lijken te hebben - met als gevolg dat vooral zwakkere leerlingen na verloop van tijd door de bomen het bos niet meer dreigen te zien.

In een tweede consultatiebijeenkomst (Lit e.a., 2004), waarin een vergelijkbare groep leerkrachten een aantal bouwstenen voor een leerlijn kommagetallen (Buijs, 2004a) van commentaar voorzag, bleek onder meer een grote behoefte te bestaan aan informatie over minimumdoelen en over de eisen die het voortgezet onderwijs op het gebied van het onderhavige domein stelt. Wat zijn bijvoorbeeld voor leerlingen die naar het VMBO gaan, leerstofonderdelen die in ieder geval ruimschoots aan de orde moeten komen? Hoe ver moet het onderwijs daarin gaan om te bereiken dat deze leerlingen een goede start in het voortgezet onderwijs kunnen maken? Interessant in dat opzicht was een discussie die ontstond over de vraag in hoeverre je zwakkere leerlingen in de groepen 7 en 8 in het uiterste geval maar gewoon gericht ‘de truc’ van het onder elkaar optellen en aftrekken met kommagetallen moet aanleren. Sommige leerkrachten waren hier duidelijk een voorstander van, maar anderen brachten er tegenin dat dit vrijwel zinloos is omdat leerlingen in het voortgezet onderwijs deze truc toch zelden of nooit meer gebruiken - ze werken daar immers vrijwel vanaf dag één voornamelijk op de rekenmachine en rekenen alleen de meest elementaire zaken (en zelfs dat soms niet) uit het hoofd uit.

In dit artikel gaan we nader in op de problematiek van leerlijnen en leerstofdoelen rond breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen. Vertrekpunt daarbij vormen de ervaringen die worden opgedaan in de huidige fase van het TAL-project, een project waarin SLO en Freudenthal Instituut samen werken aan de ontwikkeling van leerlijnen en tussendoelen. In het eerste deel van het artikel staan we kort stil bij wat als een belangrijk ontwikkeldoel voor TAL fungeert: het versterken van de tendens om het onderwijs rond breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen minder te richten op het verwerven van allerlei (standaard-)procedures en meer op het verwerven van een goed begrip binnen deze domeinen. In het tweede deel wordt vervolgens een voorbeeld van een leerlijn kommagetallen gegeven die sterk gericht is op begripsontwikkeling. Dat er aan zo'n leerlijn didactische keuzen ten grondslag liggen, wordt in het laatste deel besproken. Naar voren zal komen dat er niet alleen in de keuze van contexten en modellen verschillende opties mogelijk zijn, maar ook op een meer fundamenteel niveau waar het gaat om de ‘architectuur’ van de leerlijn (Goffree, 1994). Daarbij zal onder meer de vraag besproken worden of het wel gewenst is om leerlijnen te ontwikkelen waarin het onderwijsleerproces wordt opgevat als een fijnmazig geheel van betrekkelijk kleine leerstapjes waarbij de leerlingen geleidelijk aan verder in de beoogde richting geleid worden. Verdient het niet de voorkeur om uit te gaan van een veel globaler geheel van kernproblemen die de kinderen werkelijk als een probleem ervaren en via de oplossing waarvan ze veel directer tot de kern van de leerstof doordringen? Betoogd zal worden dat hierin inderdaad verschillende keuzes mogelijk zijn, en dat voor beide typen leerlijnen iets te zeggen valt. Niettemin lijkt het voor een aanzienlijk deel van de leerlingen én voor hun leraren toch grote voordelen te hebben om voor een meer geleidelijke en fijnmazige leerstofopbouw te kiezen.

2 TAL en het streven naar begripsgericht onderwijs

Tot voor kort lag de nadruk in het onderwijs rond breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen nogal sterk op het aanleren van een aantal procedures: vaste werkwijzen die door de leerkracht stap voor stap uit de doeken gedaan werden. Zulke procedures hadden (en hebben) bijvoorbeeld betrekking op het leren werken met de breuk als operator (3/4 deel van € 600,- is ..), het optellen en aftrekken met ongelijknamige breuken (1/3 + 3/4 = ..; 3/4 - 3/5 = ..), het cijferend optellen en aftrekken met kommagetallen, het bepalen van een percentage van een bedrag (15% van € 175,- is ..), het omzetten van een breuk in een kommagetal (3/5 = 0,..; 3/7 = 0,..), en dergelijke. Een groot bezwaar van zulk onderwijs laat zich makkelijk raden: leerlingen die niet of onvoldoende tot beheersing van de betreffende, soms nogal abstracte procedures komen, blijven zitten met een verbrokkeld geheel aan onsamenhangende weetjes en trucjes.

In de huidige realistische reken-wiskundemethoden is een duidelijke tendens merkbaar om aan dit probleem tegemoet te komen. Er wordt minder nadruk op procedurele kennis gelegd en er wordt eerst en vooral naar gestreefd om tot een zekere mate van begrip van de betreffende leerstof te komen. Dat dit nog niet altijd tot de beoogde resultaten hoeft te leiden, is hierboven al gememoreerd. Het komt erop neer dat het in de praktijk ondanks alle goede bedoelingen nogal eens gebeurt dat sommige leerlingen het onderwijs als onsamenhangend ervaren en dat ze niet in voldoende mate tot de beoogde beheersing van de leerstof komen.

In het TAL-project wordt er daarom naar gestreefd om de genoemde tendens naar een meer op begripsverwerving gerichte vorm van het onderwijs, te versterken en uit te bouwen. Immers (zo is de gedachte), als er veel consequenter naar gestreefd wordt om eerst en vooral een goed begrip van een aantal basale zaken tot stand te brengen, dan zullen de leerlingen veel minder dan thans het geval is, de leerstof als een betrekkelijk onsamenhangende verzameling weetjes en trucjes ervaren. Krijgen ze bovendien in situaties waarin het gaat om het aanleren van bepaalde rekenprocedures, beter de ruimte om op hun eigen niveau tot een oplossing te komen, dan kan daarmee vroegtijdig afhaken van leerlingen eveneens in hoge mate voorkomen worden. Neem bijvoorbeeld het gebied van de breuken. Het onderwijs zou er sterker op gericht kunnen zijn om de leerlingen eerst en vooral een aantal intensieve en basale ervaringen te laten opdoen met situaties waarin het breken van de eenheid centraal staat (breeksituaties, meetsitaties, verdeelsituaties (Treffers e.a., 1994; Buijs e.a., 1996)), met als resultaat dat ze in ieder geval de breukentaal goed leren begrijpen en een goed inzicht ontwikkelen in wat aanduidingen als 2/5 pizza en 1 2/3 liter melk inhouden. Op basis daarvan kan vervolgens de weg naar eenvoudige operaties ingeslagen worden, in het bijzonder rond de breuk als operator (3/10 deel van € 750,- is ..) en het met een breuk beschrijven van een verhouding (60 van de 80 hotelbedden zijn bezet, welk deel is dat?). Krijgen de leerlingen daarbij nadrukkelijk de ruimte om op gedifferentieerde wijze tot een oplossing te komen, met de strook als centraal ondersteunend model (zie fig. 1), dan kan daarmee niet alleen een solide grondslag gelegd worden voor het verkennen van zaken die daarop voortbouwen binnen het domein van de breuken.

Fig. 1

Maar ook kan een basis gelegd worden voor de exploratie van zaken die in het verlengde daarvan binnen andere domeinen aan bod komen, zoals het gebruik van procenten als operator (15% van € 750,- is ..) en als beschrijvingsmiddel van een verhouding (60 van de 80 parkeerplaatsen is bezet, hoeveel % is dat?). Hiermee dienen zich tevens twee centrale didactische principes aan die een belangrijk aandachtspunt voor de ontwikkeling van leerlijnen en tussendoelen op het gebied van de genoemde domeinen kunnen vormen, te weten ‘samenhang’ en ‘differentiatie naar oplossingsniveau’ (Gravemeijer e.a., 2004; Buijs, 2004b).

3 Voorbeeld van een begripsgerichte leerlijn kommagetallen

Kommagetallen vormen een domein dat van oudsher in de hoogste leerjaren een centrale plaats in het onderwijs inneemt. Hoewel deze getallen in de praktijk van het leven van alledag vaak meetgetallen waren (en zijn), lag binnen het rekenonderwijs veelal een sterke nadruk op het aanleren van procedurele vaardigheden zoals rond het cijferend optellen en aftrekken, het omzetten van een breuk in een kommagetal, en zo meer. Zaken die meer een beroep doen op het inzicht in kommagetallen, zoals het op de juiste manier interpreteren van kommagetallen in een meetcontext, het vergelijken en op de getallenlijn plaatsen daarvan, het bepalen van het midden tussen twee getallen, en het werken met afrondingen van kommagetallen, kwamen in het verleden veel minder voor het voetlicht. Vandaag de dag worden dergelijke typen opgaven echter steeds meer als de kern van de leerstof beschouwd zoals die onder meer in de kerndoelen is vastgelegd. Ook passen zulke opgaventypen heel goed bij het streven naar gecijferdheid als overkoepelend doel van het reken-wiskundeonderwijs (Treffers, 1993).

Hoe kan nu een leerlijn eruit zien die veel sterker gericht is op het inzichtelijk leren oplossen van de genoemde typen opgaven? Hieronder een korte schets van een dergelijke leerlijn zoals die binnen het SLO-gedeelte van het TAL-project is ontwikkeld.

3.1 Eerste verkenningen: betekenis geven, relatie met omringende hele getallen

Het mooie van kommagetallen voor kinderen is, dat ze er al het nodige vanaf weten voordat ze er op school 'officieel' mee kennismaken. Iedereen begrijpt immers wel hoe je geldbedragen met een komma erin (zoals bij een CD van € 12,95) moet interpreteren - de komma geeft in zo'n geval de scheiding aan tussen de euro's en de centen. Die bekendheid met kommagetallen geldt ook voor bepaalde meetsituaties zoals in het geval van de eigen lengte van kinderen (Sandra is 1,34 m lang, Rob is 1,43 m), waarbij de komma de scheiding markeert tussen meters en centimeters. Sommige kinderen weten uit ervaring ook al hoe het zit met gewichten (een zak appels van 1,250 kg in de supermarkt) en met temperaturen (Fatma heeft 38,7 graden koorts) maar dit geldt zeker niet voor alle kinderen.

In het gezamenlijk onderzoeken van zulke situaties ligt voor het onderwijs dan ook een waardevol aangrijpingspunt om tot een eerste verkenning van kommagetallen te komen, en daarmee tot een aanscherping van de eigen, informele kennis ervan. Het gaat dan uiteraard nog niet om het rekenen met kommagetallen maar vooral om het betekenis geven en om de relatie met de 'omringende', al bekende hele getallen (zie Fig. 2).

Fig. 2

Zo kan bijvoorbeeld vastgesteld worden dat een gewicht van 1,250 kg zoals dat van een etiket af te lezen valt, inhoudt dat de zak 1 kg en nog 250 gram weegt; en dat dit meer is dan 1 kg (het gewicht van een pak suiker) maar minder dan 2 kg. Je kunt ook zeggen: het is 1 kg en nog een kwart kg, en via wegen op een bascule met standaardgewichten kunnen de kinderen dit ook daadwerkelijk controleren. Evenzo kan achterhaald worden dat een lichaamstemperatuur van 38,7 graden wil zeggen dat je 'verhoging' hebt; je temperatuur ligt tussen de 38 en 39 graden - om precies te zijn bedraagt deze 38 graden en nog '7 van die kleine stukjes' (oftewel 7 tienden van een graad). De schaalverdeling op de koortsthermometer kan hier als ondersteuning fungeren. Via dergelijke exploraties kunnen de leerlingen zich nader bewust worden van enkele specifieke hoedanigheden van kommagetallen zoals ze die in het leven van alledag tegenkomen. Het zijn veelal meetgetallen waarbij de cijfers voor en achter de komma gekoppeld zijn aan twee verschillende maten en die op de getallenlijn tussen de al bekende hele getallen 'in passen'.

3.2 Samenhang kommagetallen met ongelijk aantal decimalen; klikwiel als modelcontext

Uiteraard is de kous met zulke verkenningen niet af. Het gaat binnen de genoemde situaties vrijwel altijd om kommagetallen met een gelijk aantal decimalen, zoals in het geval van het vergelijken van de eigen lengte van twee kinderen van respectievelijk 1,34 m en 1,43 m lang. Terwijl juist in het met elkaar in verband brengen van kommagetallen met een ongelijk aantal decimalen (bijvoorbeeld: wat is langer: een plank van 1,4 meter of van 1,25 meter?), een belangrijke aanzet tot verdieping van het inzicht in kommagetallen en hun positie op de getallenlijn gelegen is. Ben je namelijk in staat om kommagetallen betekenis te geven en snap je hoe getallen als 1,25 en 1,4 en 1,125 ten opzichte van elkaar op de getallenlijn liggen, dan is daarmee een solide grondslag gelegd voor allerlei zaken die naderhand actueel worden, zoals elementair hoofdrekenen, samenhang breuken-kommagetallen, en afronden.

Een mogelijkheid om die samenhang beter te leren doorzien, is om de kinderen een meetsituatie voor te leggen waarin ze een proces van voortgaande maatverfijning doorlopen en waarbij de meetresultaten al naar gelang de mate van verfijning van de gehanteerde maateenheid, in een kommagetal met een groter aantal decimalen worden uitgedrukt. Een situatie die daarvoor in aanmerking komt is die rond het meten met een klikwiel met een omtrek van 1 meter (Treffers e.a., 1996). Eerst onderzoeken de kinderen hoe het klikwiel werkt, waarbij aan het licht komt dat er bij elke afgemeten meter een klik klinkt terwijl de teller eentje verspringt. Vervolgens buigen ze zich over de vraag of je niet nauwkeuriger met het klikwiel zou kunnen meten. Na gezamenlijke beraadslaging onder leiding van de leerkracht wordt de maat van 1 meter nu onderverdeeld in tienen, terwijl de teller zodanig wordt aangepast dat er om de decimeter een klik klinkt en dat deze bij elke afgemeten decimeter verspringt (zie fig. 3).

Gezamenlijk wordt nu besproken hoe je het meetresultaat kunt benoemen. Bijvoorbeeld, als 7 meter en nog 8 decimeter, of als 7,8 meter ('zeven komma acht meter'), of nog wat globaler als ruim 7 en een halve meter. Hoewel de aandacht hier nog niet nadrukkelijk op wordt gevestigd, wordt hiermee tevens impliciet duidelijk dat je 7,8 m ook kunt opvatten als 7 en nog 8/10 meter.

Tenslotte wordt een gedachtenexperiment gedaan: stel dat je de maat nog verder wilt verfijnen, waar zou je dan voor kunnen kiezen? En hoe zou je het meetresultaat kunnen benoemen? Na het voorgaande ligt het voor de hand om de maat nog een keer decimaal te verfijnen zodat de centimeter in beeld komt (zie fig. 3, onderaan). Onder leiding van de leerkracht komen de kinderen nu tot de slotsom dat je een meetresultaat als 7,85 m kunt benoemen als 7 meter en 85 centimeter maar ook als 7 meter, 8 decimeter en 5 centimeter. Impliciet wordt zo ook duidelijk dat een getal als 7,85 groter is dan 7,8 maar kleiner dan 7,9 - op de getallenlijn ligt 7,85 dus 'ingeklemd' tussen 7,8 en 7,9.

3.3 Kommagetallen op de getallenlijn leren plaatsen

Het is voor de kinderen nu nog maar een klein stapje naar het op de getallenlijn leren plaatsen van kommagetallen. Dit kan vanuit de meetcontext aangezet worden indien de opgemeten afstand wordt afgebeeld op een meetlijn met streepjes voor de hele meters. Waar liggen op die lijn nu 7,8 en 7,9? En hoe ligt 7,85 ten opzichte van deze getallen? Op grond van de voorafgaande ervaringen met het klikwiel is het voor de kinderen nu niet moeilijk meer om dergelijke ‘positieproblemen’ op te lossen. De plaats van 7,8 en 7,9 vind je door het interval dat van 7 tot 8 loopt in tienen onder te verdelen, beide getallen liggen dan bij respectievelijk het zesde en zevende streepje. Evenzo ligt 7,85 tussen 7,8 en 7,9 - om de precieze plaats te bepalen verdeel je het stukje getallenlijn tussen 7,8 en 7,9 nog eens in 10 stukjes, en 7,85 ligt dan bij het vijfde streepje (oftewel midden tussen 7,8 en 7,9; zie fig. 4).

Op een vergelijkbare manier kan achterhaald worden dat de plaats van een getal als 7,865 bepaald kan worden door eerst het stukje getallenlijn tussen 7,8 en 7,9 decimaal te verfijnen, en vervolgens het stukje tussen 3,86 en 3,87. Het denken in termen van lengtematen kan bij dit alles houvast bieden. Immers: je kunt je 7,8 indenken als 7 meter en 8 dm oftewel 7 m en 80 cm, en 7,85 kun je je indenken als 7 meter, 8 dm en 5 cm (oftewel 7 m en 85 cm).

De 'woonplaats' van de kommagetallen kan nu verder onderzocht worden door uit breiden naar andere meetcontexten. Zo kan een experiment gedaan worden rond inhoudsmaten waarbij nader aan het licht komt dat de inhoud van een fles van 0,75 liter in de maatbeker tot een hoogte komt van 'tussen de 0,7 en 0,8 liter', als het goed is ongeveer midden tussen de betreffende streepjes - net zoals 0,75 meter op de bordliniaal midden tussen 0,7 en 0,8 m ligt. Maar ook zijn er allerlei onderzoekjes met kale getallen mogelijk waarbij steeds verder in kaart gebracht wordt waar kommagetallen op de getallenlijn thuishoren. Hiermee treedt tevens iets van de oneindigheid van de getallenwereld naar voren: tussen twee kommagetallen kun je altijd nog weer andere kommagetallen (met een groter aantal decimalen) vinden. Enkele voorbeelden van opgaven:

- Zet op de juiste plaats op de (in tienden onderverdeelde) getallenlijn: 3,15 en 3, 5 en 3,095
- Welk getal ligt dichter bij 2: 1,95; 2,1 of 2,01?
- Bedenk drie getallen die groter dan 3,8 maar kleiner dan 4 zijn
- Je wandelt over de getallenlijn van 4,5 naar 5. Welke van de volgende getallen kom je tegen? Welke niet? 4,65; 4,75; 4,9; 4,09; 4,099
- Het naderspel, een spel voor twee personen, elk met een rekenmachine: speler A toets als begingetal 4,5 in, speler B 5. Speler A moet nu een getal bij z'n begingetal 4,5 optellen zodanig dat hij niet voorbij het getal van speler B komt (5). Daarna moet speler B een getal van z'n begingetal aftrekken zodanig dat hij niet voorbij het getal komt dat speler A op dat moment op z'n machine heeft staan. Enzovoorts. Wie het eerst z'n tegenstander passeert, heeft verloren (Van de Brink, 1986).

De grote waarde van het oplossen van al zulke positieproblemen is gelegen in het feit dat dit in hoge mate kan bijdragen aan een goed ontwikkeld gevoel voor de grootte van kommagetallen. De kinderen zullen zich immers steeds beter gaan realiseren dat een getal als 2,11 kleiner is dan 2,9 ondanks dat je op het eerste gezicht misschien geneigd zou zijn te denken dat het omgekeerde het geval is (omdat 11 meer is dan 9). Ook zullen ze zich steeds meer gaan realiseren dat je, 'wandelend' over de getallenlijn van 2,5 naar 3 steeds weer nieuwe kommagetallen kunt bedenken die je onderweg tegenkomt, met een steeds groter aantal decimalen. Hiermee wordt ook nader onderbouwd dat het aantal decimalen in een kommagetal niets zegt over de grootte van dat getal.

3.4 Uitwaaiering van de leerlijn naar elementair hoofdrekenen, samenhang met breuken, ‘miljoen- en miljardkommagetallen’

Zijn de kinderen eenmaal in staat om betekenis aan kommagetallen te geven en kunnen ze deze in onderlinge samenhang op de getallenlijn te plaatsen, dan is de begripsmatige basis gelegd voor een groot aantal zaken die hierop voortborduren. Dit betreft onder meer:

1 elementair hoofdrekenen: optellen en aftrekken
2 samenhang met (gewone) breuken
3 miljoen- en miljardkommagetallen

Ad (1): Elementaire hoofdrekenopgaven rond optellen en aftrekken met kommagetallen hoeven de kinderen na het voorafgaande weinig problemen meer op te leveren. Neem bijvoorbeeld enkele opgaven met kale getallen als 3,5+2,75= en 4,2-1,95= . Het is niet moeilijk voor de kinderen om zulke opgaven te ‘contextualiseren’ (er een concrete situatie bij bedenken (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001)) en, mede op grond daarvan, op te lossen. Bij 4,2-1,95= kan bijvoorbeeld gedacht worden aan een betaalsituatie of aan een plank van 4,2 m waar een stuk van 1,95 m afgezaagd moet worden. Maar ook het denken aan de getallenlijn en de positie die de betreffende getallen daar op innemen, kan houvast bieden. Het mooie van deze opzet is overigens ook dat de kinderen zich gaandeweg steeds meer realiseren dat de kennis die ze al hebben van het elementaire hoofdrekenen tot 1000 met hele getallen, hier volop ingezet kan worden.

Ad (2): Enig inzicht in de samenhang van kommagetallen met (gewone) breuken is in het voorafgaande ook al tot ontwikkeling gekomen. Dit geldt met name voor halven, kwarten en tienden. Zo is in de eerste verkenningen van kommagetallen al naar voren gekomen dat je 2,5 meter ook kunt interpreteren als 2 en een halve meter, 1,250 kg als 1 kg en een kwart kilogram, en 38,7 graden als 38 en 7/10 graad. Naderhand kunnen dergelijke relaties nader expliciet gemaakt en onderbouwd worden aan de hand van de bordliniaal en de maatbeker. Maar ook een uitbreiding in de richting van honderdsten en duizendsten kan nu gerealiseerd worden, bijvoorbeeld aan de hand van een context rond tijden in de sport (zie fig. 5). Via een dergelijke context kunnen de kinderen zich nader bewust worden van een van de meest wezenlijke trekken van kommagetallen, namelijk het decimale karakter: het feit dat je ze kunt interpreteren als tiendelige breuk, een inzicht dat voor het voortgezet onderwijs van grote betekenis is.

(Fig. 5)

Ad (3): In de media worden kommagetallen vaak gebruikt als aanduiding voor zeer grote, afgeronde getallen. Bijvoorbeeld: in Nederland rijden er momenteel (februari 2005) 6,7 miljoen auto's rond. En: sponsoractie ziekenhuis India levert 1,85 miljoen euro op. Het leren doorzien van zulke 'miljoen- en miljardkommagetallen' behoeft vanaf een zeker moment de nodige aandacht, waarbij de kinderen zelf kunnen onderzoeken hoe de vork in de steel zit. Al gauw blijkt dan dat de getallenlijn wederom goede diensten kan bewijzen. Aan de hand daarvan kan vastgesteld worden dat een getal als 6,7 miljoen op de 'miljoenenlijn' thuishoort tussen 6 en 7 miljoen. De precieze plaats bepaal je door het interval tussen 6 en 7 in tien stukjes te verdelen - 6,7 ligt dan bij het zevende streepje. Omdat elk stukje voor 100.000 moet staan, betekent 6,7 miljoen dus 6 miljoen en nog 700.000 (7 honderdduizendjes). Op een soortgelijke manier kan onderbouwd worden dat 1,85 miljoen euro staat voor 1 miljoen en nog 850.000 euro. De regel voor het afronden van hele grote getallen tot een miljoen- of miljardkommagetal (bijvoorbeeld: een bezoekersaantal als 2.367.840 afronden tot een miljoenkommagetal met één decimaal) kan overigens ook beredeneerd worden aan de hand van de getallenlijn.

3.5 Overzicht eerste deel leerlijn

Aldus kan het eerste deel van een sterk op begripsvorming gerichte leerlijn eruit zien. Uiteraard dient zo'n leerlijn in z'n geheel nog veel meer te omvatten, zoals het hierboven al genoemde afronden, het vermenigvuldigen en delen met kommagetallen en een algemene procedure voor het omzetten van een breuk in een kommagetal. Maar de basis kan in grote lijnen gevormd worden door de hierboven beschreven opeenvolging van activiteiten rond betekenis geven, positioneren en (basaal) opereren.

In een overzicht laat zich dit als volgt globaal uitbeelden (zie fig. 6):

4 Didactische keuzemomenten voor de leerlijn

Tot zo ver het overzicht van een leerlijn kommagetallen die zich primair richt op een gedegen begripsvorming. Door de kinderen in eerste instantie uitgebreid op zoek te laten gaan naar de betekenis van kommagetallen in allerlei situaties en door ze vervolgens, mede op basis van de daarbij verworven kennis, te laten onderzoeken waar de kommagetallen thuishoren op de getallenlijn, wordt een stevig begripsmatig fundament gelegd waarop zich naderhand de kennis van het leren opereren kan ontwikkelen (zie fig. 7). Wat betreft dit opereren moet dan niet in de eerste plaats aan standaardprocedures gedacht worden, maar aan het meer flexibele, op het doorzien van handige getalrelaties gerichte handelen waarvan sprake is bij elementair hoofdrekenen, bij het omzetten van breuken in kommagetallen vice versa, en bij het werken met miljoen- en miljardkommagetallen. Kenmerkend voor de leerlijn is verder het aansluiten bij de eigen, informele kennis van de kinderen en het stapsgewijs, geleidelijk aan uitbouwen van die kennis in de richting van het genoemde flexibele opereren.

In de leerlijn zitten vanzelfsprekend een aantal didactische keuzemomenten. Dit geldt bijvoorbeeld voor de keuze van de contexten die in het eerste deel van de leerlijn benut worden om de eigen, informele kennis van de kinderen aan te scherpen. Het geldt ook voor de keuze van het meten met een klikwiel als modelcontext voor het positioneren. In zulke gevallen zouden ook andere keuzes gemaakt kunnen worden, bijvoorbeeld indien een andere meetcontext wordt gekozen om de kinderen het proces van voortgaande maatverfijning te laten doormaken.

Op een meer fundamenteel niveau is er echter ook al sprake van didactische keuzes. Een van de belangrijkste daarvan betreft de keuze voor de hierboven geschetste didactische drieslag van betekenis geven, positioneren en (flexibel) opereren als ruggengraat van de leerlijn. Biedt het doorlopen van een leerlijn gebaseerd op deze drieslag de leerlingen inderdaad ruime mogelijkheden om geleidelijk aan een steeds beter begrip van het fenomeen kommagetal te verwerven? Hoe stevig is het fundament dat via het betekenis geven en het positioneren gelegd kan worden voor het opereren met kommagetallen? Het zou te ver voeren om op deze plaats uitgebreid alle argumenten achter de genoemde keuze op een rij te zetten. Ook lijkt het aan te bevelen om op dit punt, in aanvulling op de praktijkexperimenten die in het kader van TAL al eerder hebben plaatsgevonden, nader onderzoek te doen, met name ook voor wat betreft de groep zwakkere leerlingen. Maar niettemin kan hierover in ieder geval het volgende worden opgemerkt.

Ten grondslag aan de keuze voor de genoemde drieslag ligt het idee dat het meten en het interpreteren van meetkommagetallen zoals de kinderen die uit hun omgeving kennen, de meest elementaire en meest directe bron voor een goed begrip van kommagetallen is. Zoals in het voorafgaande al naar voren is gekomen, speelt de grootheid lengte daarbij een centrale rol. Met name door nader in te gaan op betekenis en grootte van kommagetallen in de context van het werken met lengtematen, en door de leerlingen voor deze grootheid een proces van voortgaande maatverfijning te laten doorlopen, worden ze zich steeds beter bewust hoe getallen als 1,4 en 1,25 zich qua grootte en qua positie op de getallenlijn tot elkaar verhouden. Zo komen ze erachter dat je 1,4 m kunt opvatten als 1 m en nog 4 dm, oftewel 1 m en 40 cm. Evenzo ontdekken ze dat je een getal als 1,25 meter niet alleen als 1 m en nog 25 cm en als 1 1/4 m kunt interpreteren, maar ook als 1 m, 2 dm en nog 5 cm. Daarmee wordt tevens de relatie tussen beide getallen duidelijk: 1,4 is meer dan 1,25 want een lengte van 1 m en 40 cm is meer dan een lengte van 1 m en 25 cm. Deze relatie komt ook in de positie op de getallenlijn tot uitdrukking: 1,25 ligt op de getallenlijn midden tussen 1,2 en 1,3; dat is 'een eindje vòòr 1,4' zoals een leerling het tijdens een van de praktijkexperimenten rond dit onderdeel van de leerlijn uitdrukte. Het bepalen van het verschil tussen beide getallen is nu ook betrekkelijk eenvoudig; dit bedraagt 0,15 (zie fig. 8). Oftewel, in termen van lengtematen: 15 cm.

(Fig. 8)

Aldus ontvouwt zich steeds verder wat wel wordt genoemd de 'getallenruimte' waarvan de kommagetallen deel uitmaken (Lorenz, 1997). De leerlingen krijgen een steeds beter en genuanceerder beeld hoe deze getallenruimte is opgebouwd, welke relaties erin te onderkennen zijn, en hoe je je door deze ruimte kunt bewegen op een manier die verwant is aan de manier waarop ze eerder al door de ruimte van de hele getallen hebben leren bewegen.

5 Discussie: kiezen voor de kern, of toch liever voor de weg van de geleidelijkheid?

Het zal duidelijk zijn dat er op het genoemde meer fundamentele niveau eveneens andere keuzes te maken zijn. Zo zou ook geopteerd kunnen worden voor een benadering waarbij afgezien wordt van de eigen, informele kennis van leerlingen en waarbij direct gewerkt wordt aan de ontwikkeling van kerninzichten op het gebied van kommagetallen. 'Kiezen voor de kern', zoals het genoemd wordt in het artikel van Keijzer, Van Galen en Gravemeijer in het tijdschrift Volgens Bartjens (Keijzer e.a., 2004). In het discussiestuk 'De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen' (Keijzer e.a., 2005) wordt deze benadering meer in het algemeen toegelicht en met voorbeelden uit de verschillende domeinen geïllustreerd. Een voorbeeld van een lessenserie gericht op het greep krijgen op een kernaspect van kommagetallen, te weten het aspect van de decimale getalstructuur, wordt beschreven in het artikel van F. van Galen, eveneens in het tijdschrift Volgens Bartjens (Van Galen, 2004). In deze lessenserie wordt beoogd de leerlingen kommagetallen te laten heruitvinden volgens een procedé dat verwantschap vertoont met de wijze waarop deze getalsoort in het verleden is uitgevonden. Op zichzelf is dit een interessante optie: de kinderen reconstrueren de betekenis van kommagetallen als decimale getallen niet vanuit hun eigen informele kennis in het kader van een geleidelijk opgebouwd proces van voortgaande niveauverhoging, maar vanuit een semi-historische invalshoek waarbij om zo te zeggen de decimale getalstructuur direct wordt blootgelegd. Aan de ene kant vertoont deze benadering een zekere mate van overeenstemming met de hierboven beschreven benadering omdat in beide gevallen sprake is van een proces van voortgaande maatverfijning dat de kinderen doorlopen. Aan de andere kant zijn er ook flinke verschillen. Wellicht het belangrijkste daarvan betreft het verschil in geleidelijkheid. In de hierboven geschetste benadering wordt gekozen voor een stapsgewijze, geleidelijke exploratie van kommagetallen waarbij in eerste instantie het meetaspect onderzocht wordt, van daaruit de plaats op de getallenlijn, terwijl pas daarna, tegelijk met elementaire operaties, het aspect van de decimale getalstructuur wordt verkend. In de benadering van Van Galen c.s. wordt er daarentegen juist voor gekozen om deze decimale getalstructuur direct aan de orde te stellen en deze door de leerlingen te laten heruitvinden. Tot besluit van dit artikel plaatsen we enkele kanttekeningen bij dit verschil in benadering.

Een afweging van de voors en tegens van een benadering via kleine leerstapjes ten opzichte van een benadering via kernproblemen en kerninzichten, is alleszins de moeite waard. In Nederland is het tot nu toe meer gebruikelijk om onderwijsleerprocessen volgens de eerstgenoemde benadering te laten verlopen. Behalve een niet onbelangrijke stijging in de reken-wiskundige prestaties van leerlingen (Kraemer, 2005) is daarvan ook een gevolg dat handleidingen bij methodes steeds verder uitdijen met lesbeschrijvingen van soms wel drie pagina's. Heroverweging van deze benadering in het licht van een analyse van de mogelijke nadelen ervan, kan zeker geen kwaad. Dat neemt niet weg dat de nodige voorzichtigheid geboden lijkt.

Op het eerste gezicht lijkt het enkele belangrijke voordelen te hebben om de weg naar een goed begrip van kommagetallen minder gelijkmatig te plaveien en de kinderen directer te laten toewerken naar het blootleggen van een van de wiskundige grondkenmerken van deze getalsoort. Weliswaar zullen de probleemsituaties waarvoor de kinderen zich gesteld zien, in eerste instantie meer moeilijkheden voor hen met zich meebrengen, maar daar staat tegenover dat een kern van de leerstof, namelijk de decimale getalstructuur, veel directer in zicht komt en dat de leerkracht zich veel meer genoodzaakt ziet om zelf die kern goed in het oog te houden en voor het onderwijs als leidraad te hanteren. Hij of zij zal zich daardoor mogelijk ook meer verantwoordelijk gaan voelen voor de totaliteit van het onderwijsleerproces. Terwijl een didactische benadering waarbij stapje voor stapje verder wordt gewerkt, bij leerkrachten wellicht een minder actieve onderwijshouding teweeg kan brengen - de weg is immers al zo ver uitgelijnd, dat er nauwelijks nog iets mis lijkt te kunnen gaan.

Er lijken echter toch ook enkele reële gevaren in een benadering te schuilen waarbij rechttoe-rechtaan aangekoerst wordt op de wiskundige kern van de zaak. Dit betreft in de eerste plaats het gevaar dat via een dergelijke benadering sommige leerlingen kansen ontnomen worden om op een meer geleidelijke manier tot een goed begrip van de leerstof te komen. Die wiskundige kern behoeft immers met name voor zwakkere leerlingen een grondigere en omzichtigere ‘toenadering’ dan voor sommige andere leerlingen. Een van de belangrijke verworvenheden van het huidige reken-wiskundeonderwijs, met name in de lagere leerjaren, is toch dat via een geleidelijke en fijnmazige leerstofopbouw, alle leerlingen aan hun trekken kunnen komen. Daarbij draagt de interactieve, groepsgerichte onderwijssetting (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001) er zorg voor dat zwakkere én betere leerlingen voor waardevolle nieuwe impulsen in het onderwijsleerproces kunnen zorgen en elkaar onder begeleiding van de leerkracht verder kunnen helpen. Anders gezegd: bij een benadering via kernproblemen dreigt vooral zwakkere leerlingen enigszins de pas afgesneden te worden.

Een tweede bezwaar is gelegen in de veel zwaardere rol die leerkrachten moet worden toegedicht. Het werken met kernproblemen en kerninzichten vraagt immers van leerkrachten een zeer goed overzicht over het geheel van de leerlijn, over fundamentele stappen daarbinnen en over functie van de voorgelegde kernproblemen. Hij of zij moet het eigen onderwijs veel meer zelf maken, en dit vereist nogal wat aan kennis van de wiskunde, gevoel voor kinderlijke ideeën en werkwijzen, en didactische vakbekwaamheid. Het adequaat begeleiden van de leerlingen in zo'n situatie vraagt dan ook heel wat van de leerkracht. Bij een meer geleidelijke, fijnmazige leerstofopbouw, wijst de weg zich veel meer vanzelf, en hoeft de leerkracht zich minder druk te maken of het wel de goede kant op gaat, of de inbreng van de leerlingen wel goed tot z'n recht komt, enzovoorts. Dan lijkt de weg van de geleidelijkheid toch te prefereren boven die van het werken met kernproblemen en kerninzichten...

Uiteraard is het laatste woord hiermee nog lang niet gezegd. Het is in ieder geval een goede zaak dat deze problematiek in toenemende mate ter discussie wordt gesteld. Daarmee komt ook de ontwikkeling van leerlijnen en tussendoelen op het gebied van breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen in een breder daglicht te staan. Bij dit alles lijkt het nochtans in ieder geval aan te bevelen om zorgvuldig om te gaan met de verworvenheden van het huidige reken-wiskundeonderwijs, hoeveel daar ook nog op aan te merken valt. Het zou jammer zijn om met het badwater abusievelijk ook het kind weg te gooien.

Literatuur

Brink, J. van den (1986). Rekenmachinespel. Steeds dichter bij elkaar. *Willem Bartjens*, 6(*1*), 25-26.

Buijs, K. (red.), J. Bokhove, R. Keijzer, A. Lek, A. Noteboom & A. Treffers (1996). *De Breukenbode* (werkboek en handleiding). Enschede: SLO.

Buijs, K. (2004a). *Bouwstenen voor een leerlijn kommagetallen* (nog niet gepubliceerde leerlijnbeschrijving). Enschede: SLO.

Buijs, K. (2004b). Wie het kan verwoorden snapt het. Niveaudifferentiatie in de bovenbouw. *Volgens Bartjens*, 24(*1*), 4-8.

Galen, F. van (2004). In de voetsporen van Simon Stevin. Kommagetallen heruitvinden. *Willem Bartjens*, 23(*5*), 16-19.

Goffree, F. (1994). Verhoudingen: je komt ze overal tegen. Een overzicht en een onderwijsspoor. *Willem Bartjens*, 14(*1*), 6-13.

Gravemeijer, K. P. E. & H. A. A. van Eerde (2004). Verschil maken. De ontwikkeling in denkbeelden over het omgaan met verschillen tussen leerlingen. *Reken-wiskundeonderwijs, onderzoek, ontwikkeling, praktijk.* 23(*1*), 3-15.

Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buijs & A. Treffers (red.) (2001). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Keijzer, R., F. van Galen & K. Gravemeijer (2004). Kiezen voor de kern. *Volgens Bartjens*, 24(*1*), 14-16.

Keijzer, R., N. Figueiredo, F. van Galen, K. Gravemeijer & E. van Herpen (2005). *De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Kraemer, J.M., J. Janssen, F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 4.* Arnhem: Cito.

Lit, S. A. & W. van Zon (2003). *Rekenen / Wiskunde Boven-*

bouw. Advies 40. Enschede: SLO.

Lit, S. A. & W. van Zon (2004). *TAL leerlijnen bovenbouw rekenen. Advies 13.* Enschede: SLO.

Lorenz, J. H. (1997). Is mental calculation just strolling around in an imaginary number space? In: M. Beishuizen, K.P.E. Gravemeijer & E.C.D.M. van Lieshout (Eds.): *The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1994). *Proeve van een nationaal programma. Deel 3A: Breuken.* Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A. (1994). Basale (on)gecijferdheid. In: M. Dolk, H. van Luit & E. te Woerd (ed.). *Speciaal rekenen*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1996). *Proeve van een nationaal programma. Deel 3B: Kommagetallen.* Tilburg: Zwijsen.