

# Algebra en applets, leren en onderwijzen

Peter Boon  
Paul Drijvers



Freudenthal Instituut  
Aidadreef 12  
3561 GE Utrecht



ICO-ISOR Onderwijsresearch  
Heidelberglaan 1  
3584 CS Utrecht

maart 2005

Onderwijskunde  
ICO-ISOR Onderwijsresearch  
Universiteit Utrecht

Freudenthal Instituut  
Universiteit Utrecht

Heidelberglaan 1  
3584 CS Utrecht  
Nederland  
telefoon: 030 - 253 49 40  
e-mail: [owksecre@fss.uu.nl](mailto:owksecre@fss.uu.nl)  
[edu.fss.uu.nl/ico-isor/internereeks.html](http://edu.fss.uu.nl/ico-isor/internereeks.html)

Aidadreef 12  
3561 GE Utrecht  
Nederland  
030 - 263 55 55  
[fi@fi.uu.nl](mailto:fi@fi.uu.nl)  
[www.fi.uu.nl](http://www.fi.uu.nl)

ISOR-rapportnummer 05.01  
ISBN 90-6709-000-X

Titel: Algebra en applets, leren en onderwijzen  
Auteurs: Peter Boon en Paul Drijvers  
Freudenthal Instituut  
maart 2005

Dit onderzoek is gefinancierd uit het budget dat het ministerie van OC&W jaarlijks beschikbaar stelt aan de LPC ten behoeve van Kortlopend Onderwijsonderzoek, dat uitgevoerd wordt op verzoek van het onderwijsveld.  
Projectnummer 04.1.3.II

© 2005 Universiteit Utrecht/Onderwijskunde/  
ICO-ISOR Onderwijsresearch  
Utrecht University/Dept. of Educational Sciences/ICO-ISOR

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze dan ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van Onderwijskunde/ICO-ISOR Onderwijsresearch.

No part of this book may be reproduced in any form, by print, photoprint, microfilm or any other means without written permission of the Department.

# Inhoudsopgave

Voorwoord .....	3
1 Inleiding .....	5
1.1 Aanleiding voor het kortlopend onderzoek .....	5
1.2 Probleemstelling .....	6
1.3 Onderzoeksvragen en theoretisch kader .....	7
1.4 Onderzoeksopzet .....	7
1.5 Opbouw van dit rapport .....	8
2 Ervaringen uit Wisweb en Welp .....	11
2.1 Het Wisweb-project .....	11
2.1.1 Ontwikkeling van modelapplets .....	11
2.1.2 Onderwijsexperimenten met applets .....	13
2.1.3 Ervaringen in de klas .....	13
2.1.4 Applets voor de docent .....	15
2.2 Het Welp-project .....	16
2.2.1 Ontwikkeling oefenapplets .....	16
2.2.2 Ervaringen in de klas .....	18
2.3 Conclusies .....	27
3 Case study AlgebraPijlen .....	29
3.1 Doel van het onderwijsexperiment AlgebraPijlen .....	29
3.2 Het applet AlgebraPijlen .....	30
3.2.1 De modelvariant van AlgebraPijlen .....	30
3.2.2 De spelvariant van AlgebraPijlen .....	33
3.3 Het lesmateriaal bij AlgebraPijlen .....	35
3.4 Opzet van het onderwijsexperiment .....	38
3.5 Resultaten .....	40
3.5.1 Pijlenkettingen en algebraexpressies .....	41
3.5.2 Equivalente kettingen en expressies .....	43
3.5.3 Inverse bewerkingen .....	46
3.5.4 Resultaten van het proefwerk .....	48
3.6 Conclusie .....	50
4 Case study VergelijkingenOplossen .....	53
4.1 Doel van het onderwijsexperiment VergelijkingenOplossen .....	53
4.2 De applets VergelijkingenOplossen .....	53
4.2.1 Vind de juiste strategie .....	53

---

4.2.2	Zoek zelf de oplossing	54
4.2.3	Toets je vaardigheid	55
4.2.4	De leeromgeving	56
4.3	Opzet van het onderwijsexperiment	57
4.4	Resultaten	60
4.4.1	Resultaten voortoets en natoets	60
4.4.2	Resultaten uit de digitale leeromgeving	62
4.4.3	Resultaten uit de veldaantekeningen	62
4.5	Conclusie	64
5	Onderwijzen met applets	67
5.1	Inleiding	67
5.2	Ervaringen van docenten in het Welp-project	67
5.2.1	Meerwaarde van het onderwijzen met applets	68
5.2.2	Veranderende werkvormen	69
5.2.3	Veranderende interactie met leerlingen	70
5.2.4	Rol en onmisbaarheid van de docent	72
5.2.5	Vorbereiding van het onderwijs en docentbelasting	72
5.3	Docentgedrag in de onderwijsexperimenten	73
5.3.1	Docentgedrag bij klassikale werkvormen	73
5.3.2	Docentgedrag bij interactie met tweetallen leerlingen aan het werk	78
5.4	Conclusies	86
6	Conclusies en aanbevelingen	89
6.1	Conclusies	89
6.1.1	Conclusies met betrekking tot de eerste onderzoeksvraag	89
6.1.2	Conclusies met betrekking tot de tweede onderzoeksvraag	90
6.2	Aanbevelingen	92
Bijlage I:	Modelapplets voor algebra	95
Bijlage II:	Oefenapplets voor algebra	103

## Voorwoord

Dit boekje vormt het verslag van een kortlopend onderwijsonderzoek getiteld 'Didactische mogelijkheden van applets bij algebra', dat in 2004 door het Freudenthal Instituut is uitgevoerd. Dit project is voortgekomen uit een veldaanvraag die het Sint Gregorius College in Utrecht in 2003 heeft ingediend bij de Landelijke Pedagogische Centra.

Het onderzoek richt zich op de vraag wat de didactische mogelijkheden zijn van het gebruik van applets voor het leren van algebra. Belangrijke aspecten daarbij zijn het leren van de leerling en de veranderende rol van de docent.

Om dit onderwerp te onderzoeken zijn allereerst de ervaringen binnen de projecten Wisweb en Welp geïnventariseerd (hoofdstuk 2). Vervolgens zijn twee kleine onderwijsexperimenten uitgevoerd. Daarbij is zowel het leren van de leerling onderzocht (hoofdstukken 3 en 4) als de manier waarop de docent applets in het onderwijs inzet (hoofdstuk 5).

Behalve dit boekje zijn in het kader van dit project ook applets ontwikkeld, die zijn ingebed in een digitale oefenomgeving. Deze digitale materialen en andere producten, zoals het lesmateriaal, zijn te vinden op [www.wisweb.nl/kloo](http://www.wisweb.nl/kloo).

Graag willen we bij deze enkele betrokkenen bedanken. Marcel Voorhoeve maakte het project mogelijk door de aanvraag in te dienen. De docenten Wout van Helsdingen, Maaïke van Houten en Karin van Zwetselaar werkten mee in de onderwijsexperimenten. De wiskundesectie van het Sint Gregorius College gaf in een interview een beeld van haar ervaringen met het gebruik van applets in de wiskundeles. De medewerkers van het Welp-project binnen het Freudenthal Instituut leverden feedback, met name op hoofdstuk 2. Betty Heijman en Sylvia Eerhart verzorgden in de eindfase de layout.

Peter Boon  
Paul Drijvers

Utrecht, maart 2005



# 1 Inleiding

## 1.1 Aanleiding voor het kortlopend onderzoek

De inzet van ICT bij het leren, en bij het leren van wiskunde in het bijzonder, staat de laatste jaren in grote belangstelling. Optimisten wijzen op de mogelijkheden van ICT voor begripsontwikkeling en oefening, terwijl sceptici benadrukken dat de daadwerkelijke integratie in de dagelijkse lespraktijk op veel moeilijkheden stuit.

Een type ICT-toepassingen dat recent veel aan populariteit heeft gewonnen, zijn zogenaamde applets. ‘Applet’ is een verzamelnaam voor allerlei kleine, interactieve programmaatjes, die via internet toegankelijk zijn en vaak in de programmeertaal Java zijn geschreven. Zelfs binnen de wiskunde is de variëteit aan applets zeer groot: er zijn applets die een begrip visualiseren, die exploratie van een eigenschap mogelijk maken, of die gericht zijn op het oefenen van een bepaalde techniek.

In het kader van de projecten Wisweb en Welp (zie [www.wisweb.nl](http://www.wisweb.nl)) is de afgelopen jaren een groot aantal applets voor de wiskundeles ontwikkeld en uitgetest in de klas. Deze applets worden regelmatig gebruikt in de wiskundeles, mede omdat ze opgenomen zijn in de gangbare schoolmethoden. Reacties uit het veld zijn overwegend positief. De applets zijn eenvoudig te gebruiken, goed toegankelijk en sluiten aan bij de leerlijnen van de schoolboeken.

Het gebruik van applets bij het ontwikkelen van inzicht en het leren van vaardigheden leidt tot veranderend leergedrag van leerlingen en nieuwe didactische aanpak van docenten. Leerlingen werken op een andere manier met een nieuw medium. Dat leidt tot andere inzichten en vaardigheden. Ook voor de docent verandert er veel: de werkvormen, de vragen van de leerlingen, de stijl van reageren op problemen die zich voordoen, de manier van toetsen, kortom het ‘didactisch contract’.

De inzet van applets maakt leerarrangementen mogelijk die minder docentafhankelijk zijn en anticiperen op ontwikkelingen in de toekomstige onderbouw. Bovendien biedt de inzet van applets de mogelijkheid om in te spelen op verschillen tussen leerlingen.

De projecten Wisweb en Welp zijn succesvol geweest op punten waar ze voor bedoeld waren: het ontwikkelen en implementeren van nieuwe technologie, in dit geval applets. Diepgaander onderzoek naar de effecten van het gebruik van applets op inzicht en vaardigheid van de leerlingen en op de veranderende didactische setting heeft binnen deze kaders niet kunnen plaatsvinden. Dat is aanleiding geweest tot het voorliggende kortlopende onderzoek.

## 1.2 Probleemstelling

De probleemstelling van het veranderende leren en onderwijzen komt naar voren in de aanvraag die het Sint Gregorius College in Utrecht in 2003 bij de Landelijke Pedagogische Centra heeft gedaan. Deze school heeft deelgenomen aan de projecten Wisweb en Welp. De indiener noemt de volgende aandachtspunten en vragen waarop het kortlopend onderwijsonderzoek zou kunnen ingaan:

- Wat zijn de didactische mogelijkheden van het gebruik van applets bij het aanbrengen van algebraïsche vaardigheden en de ontwikkeling van algebraïsch inzicht in klas 1, 2 en 3 van havo en vwo?
- Welke verandering in leergedrag bewerkstelligt het gebruik van applets?
- Wat zijn de gevolgen voor de rol van de docent in het onderwijsleerproces?

Dat in de vraagstelling van de indiener algebra een centrale plaats inneemt, mag niet verbazen. Algebra is sinds jaar en dag een belangrijk onderwerp in de schoolwiskunde, dat een struikelblok is voor veel leerlingen. De moeilijkheden van het leren van algebra zijn gelegen in het formele en algoritmische karakter, het abstracte niveau waarop problemen worden benaderd, het objectkarakter dat algebraïsche expressies en formules hebben en de compacte algebraïsche taal met haar specifieke conventies en symbolen. Door deze moeilijkheden ervaren leerlingen algebra vaak niet als een natuurlijk en betekenisvol middel om problemen mee op te lossen (Stacey et al., 2004).

Integratie van ICT is een van de manieren waarop de moeilijkheden met het leren van algebra zouden kunnen worden aangepakt. Het gebruik van applets, die voor leerlingen modelomgevingen en oefenomgevingen vormen, kan naar verwachting bijdragen aan visualisatie van begrippen, aan het exploreren van situaties en aan het geleidelijk abstraheren van modellen. Op deze manier zou het gebruik van applets het leren van algebra kunnen ondersteunen. Binnen de projecten Wisweb en Welp is dan ook een groot aantal applets ontwikkeld dat zich richt op het leren van algebra in de onderbouw. Het benutten van de kansen die het gebruik van applets biedt vraagt van de docent een heroverweging van werkvorm en didactiek.

De aanvraag is gehonoreerd<sup>1</sup> en richt zich op de vraag op welke manier het gebruik van applets het leren en onderwijzen van algebra in positieve zin kan beïnvloeden. De ervaringen binnen de projecten Wisweb en Welp vormen een waardevol uitgangspunt voor het voorliggend Kortlopend Onderwijsonderzoek.

---

1 KLOO projectnummer 04.1.3.II



### 1.3 Onderzoeksvragen en theoretisch kader

Gelet op de beperkte omvang van het kortlopend onderwijsonderzoek is het van belang om de onderzoeksvragen te concretiseren en in te perken. We onderscheiden twee hoofdpunten in de vraagstelling, namelijk het leren van de leerlingen en het onderwijzen met nieuwe didactische mogelijkheden voor de docent.

Ten aanzien van het *leren* gaat het om het ontwikkelen van algebraïsche vaardigheden en inzichten in de onderbouw van het voortgezet onderwijs. Daarbij spelen de modellen die in de appletomgeving worden aangeboden een belangrijke rol, alsmede de oefenmogelijkheden die applets bieden.

Het tweede punt, het *onderwijzen* met nieuwe didactische mogelijkheden voor de docent, is de hoofdvraag van de aanvrager. Het doel is te komen tot concrete aanbevelingen in dit opzicht, die overigens niet kunnen worden losgezien van de bevindingen ten aanzien van het leren. Dit leidt tot de volgende twee onderzoeksvragen:

1. Hoe biedt het werken met applets de leerling mogelijkheden denkmodellen te ontwikkelen en vaardigheden op een gevarieerde en motiverende manier te oefenen?
2. Welke didactische mogelijkheden biedt het gebruik van applets in het wiskundeonderwijs en op welke manier kan de docent deze uitbuiten?

Het theoretisch kader dat bij dit onderzoek wordt gebruikt kent een drietal elementen. De onderwijstheorie van realistisch reken-wiskundeonderwijs functioneert als algemeen kader, dat zowel het ontwerp van de applets en het bijbehorende lesmateriaal als de interpretatie van het gedrag van leerlingen stuurt (Freudenthal, 1991). Voor wat betreft het vakspecifieke aspect van het leren van algebra worden de vakdidactische theorieën rond de moeilijkheden van algebra en de proces-objectdualiteit gebruikt (Drijvers, 2003; Sfard, 1991; Tall & Thomas, 1991). Het derde element van het theoretisch kader is de zogenaamde instrumentele benadering van ICT-gebruik bij het leren van wiskunde, zoals beschreven in onder andere Artigue (2002). Deze benadering maakt onderscheid tussen het artefact, in dit geval het applet, en het instrument, dat behalve het applet ook bestaat uit de denkwijze en methodiek die de leerling ontwikkelt bij het werken met het applet.

### 1.4 Onderzoeksopzet

Het onderzoek is een combinatie van evaluatief onderzoek en ontwikkelingsonderzoek. Het evaluatieve deel omvat een inventarisatie van ervaringen en bevindingen binnen de projecten Wisweb en Welp. Hiervoor is met name de verslaglegging van deze projecten gebruikt, aangevuld met interviewmetho-

dieken. Het ontwikkelingsonderzoek omvat twee korte cycli gericht op klassen 2 en 3 van havo en vwo.

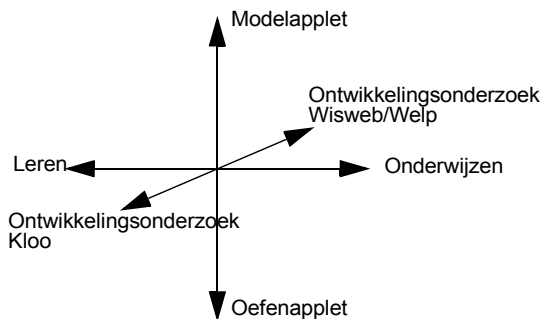
We splitsen de onderzoeksopzet uit naar de twee onderzoeksvragen.

1. Voor de beantwoording van de eerste vraag betreffende het leren met applets zijn ervaren docenten geïnterviewd om de verwachte leeropbrengst van het gebruik van applets in kaart te brengen.

Vervolgens is in een tweetal kleinschalige onderwijsexperimenten geobserveerd hoe leerlingen denkmodellen ontwikkelen en hoe het oefenen van vaardigheden met applets plaatsvindt. Het eerste van deze ‘case studies’ richt zich op het modelapplet *AlgebraPijlen*, waarin de leerlingen een denkmodel ontwikkelen. Het tweede onderzoeksexperiment maakt gebruik van het oefenapplet *VergelijkingenOplossen*, waarin de nadruk ligt op het oefenen van algebraïsche vaardigheden. Dataregistratie heeft plaatsgevonden door middel van audio- en video-opnames. Ook zijn toetsen afgenomen en is schriftelijk werk van leerlingen verzameld.

2. Voor de beantwoording van de vraag betreffende de veranderende rol van de docent zijn expertdocenten geïnterviewd die ruime ervaring hebben met het gebruik van applets in de wiskundeles. Hierbij wordt de methodiek van semi-gestructureerde interviews gehanteerd. Dataregistratie vindt plaats door audio-opname. Daarnaast is in de genoemde onderwijsexperimenten de rol van de docent geobserveerd.

## 1.5 Opbouw van dit rapport



Figuur 1.1: De drie dimensies van het onderzoek

In figuur 1.1 wordt gesymboliseerd hoe dit Kortlopend Onderwijsonderzoek langs drie dimensies heeft plaatsgevonden. De eerste dimensie is die van *leren – onderwijzen*. Deze as is weerspiegeld in de twee onderzoeksvragen, de eerste gericht op het leren en de tweede op het onderwijzen. Natuurlijk hangen leren en onderwijzen sterk samen. Toch lijkt het verstandig deze twee hier te onderscheiden.

De tweede, verticaal afgebeelde dimensie is die van *modelapplet* – *oefenapplet*. Deze as sluit aan bij het onderscheid dat in het Wisweb-project en het Welp-project is gemaakt tussen applets die primair gericht zijn op het ontwikkelen van denkmodellen bij de leerling en applets die zich hoofdzakelijk richten op het oefenen van vaardigheden (zie bijvoorbeeld Boon, 2004). Er is geen sprake van een zwart-wit onderscheid: de modellen die de leerling ontwikkelt vormen de basis voor de vaardigheden, en tijdens het oefenen zal een leerling in meer of mindere mate gebruik maken van onderliggende modellen.

De derde dimensie is die van het ontwikkelingsonderzoek dat heeft plaatsgevonden in de projecten Wisweb en Welp, en de twee nieuwe onderwijsexperimenten die zijn uitgevoerd in het kader van het Kortlopend Onderwijsonderzoek, waar dit boek het verslag van vormt. Wisweb en Welp vormen een rijke voedingsbodem voor het Kortlopend Onderwijsonderzoek. Aangezien deze projecten primair op ontwikkeling en implementatie waren gericht, is ervoor gekozen binnen dit beperkte kader een tweetal kleine onderwijsexperimenten of ‘case studies’ uit te voeren. In dit rapport zal de dimensie *Wisweb/Welp* – *Kloo* worden uitgewerkt door de bevindingen binnen dit onderzoek te vergelijken met de ervaringen van Wisweb en Welp.

In het volgende hoofdstuk worden dan eerst de bevindingen uit Wisweb en Welp geïnventariseerd. Hoofdstuk 3 en 4 beschrijven de twee case studies vanuit het perspectief van het leren, dus vanuit de eerste onderzoeksvraag. In hoofdstuk 3 staat een modelapplet centraal, terwijl hoofdstuk 4 het leren met een oefenapplet beschrijft. In hoofdstuk 5 wordt ingegaan op de tweede onderzoeksvraag, die van het onderwijzen. Hoofdstuk 6 ten slotte bevat de conclusies en een discussie.

Aanvullende informatie over dit kortlopend onderwijsonderzoek, zoals lesmateriaal en applets, is beschikbaar op [www.wisweb.nl/kloo](http://www.wisweb.nl/kloo).

## Referenties

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.
- Boon, P. (2004). Welp: letterrekenen met applets. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 23(4), 22-27.
- Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*. Dissertation. Utrecht, the Netherlands: CD- $\beta$  press.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education - China Lectures*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Stacey, K., Chick, H., & Kendall, M. (eds.) (2004). *The future of the teaching and learning of algebra*. The 12th ICMI study. Boston/Dordrecht/New York/London: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 125-147.

[www.wisweb.nl](http://www.wisweb.nl) bevat informatie over de projecten Wisweb en Welp.

[www.wisweb.nl/kloo](http://www.wisweb.nl/kloo) bevat aanvullende informatie over dit onderzoek.

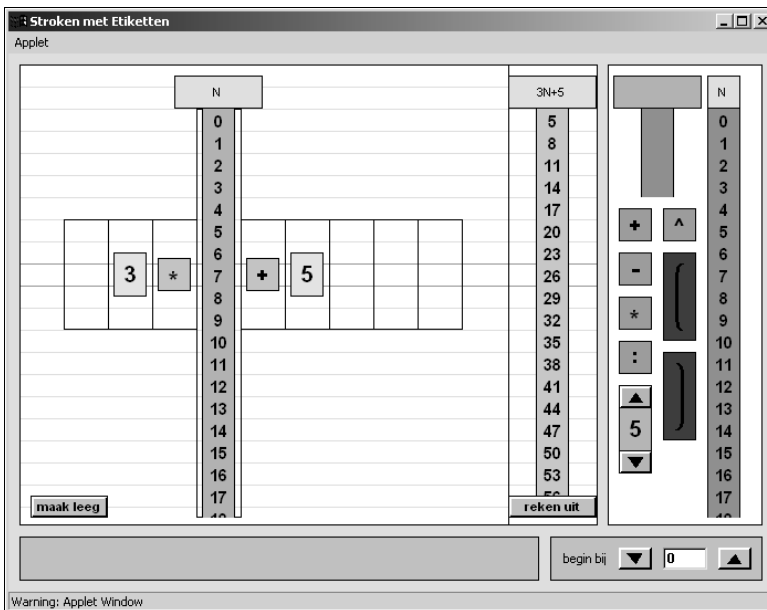
## 2 Ervaringen uit Wisweb en Welp

### 2.1 Het Wisweb-project

In het Wisweb-project, dat in de periode 2000-2002 aan het Freudenthal Instituut is uitgevoerd, is een begin gemaakt met de ontwikkeling en implementatie van de algebra-applets die het onderwerp zijn van dit onderzoek. Samen met drie scholen zijn ideeën voor applets ontwikkeld. Prototypes zijn gerealiseerd en begeleidend lesmateriaal is ontworpen. Dit materiaal is uitgetoetst in de onderwijspraktijk van de betrokken docenten. De ervaringen uit de klas zijn gebruikt om de ontwerpen te verbeteren. Overigens is er binnen Wisweb ook geëxperimenteerd met applets buiten het algebrado-  
mein.

#### 2.1.1 Ontwikkeling van modelapplets

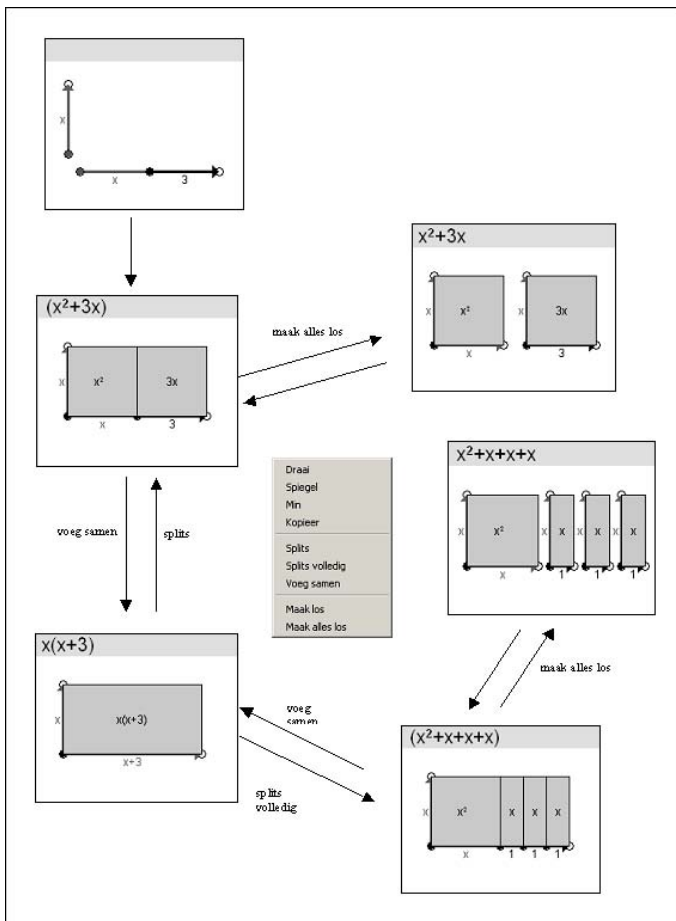
De algebra-applets die binnen het project zijn ontwikkeld zijn voornamelijk zogenaamde modelapplets. In deze applets worden visuele representaties als model voor wiskundige begrippen gebruikt. Binnen die representaties zijn allerlei activiteiten mogelijk. Puzzels en problemen kunnen met zo'n applet worden aangepakt. Dergelijke activiteiten zijn bedoeld om leerlingen ideeën te laten ontwikkelen die helpen bij het interpreteren van wiskundige representaties en handelingen.



Figuur 2.1: Het applet *Stroken met etiketten*

De verwachting is dat daarmee een betekenisvolle basis ontstaat voor de corresponderende wiskunde en dat de (dynamische) beelden een referentiekader bieden bij wiskundige vervolgvactiteiten.

Een voorbeeld van een modelapplet is het applet *Stroken*, waarin verschillende rekenkundige bewerkingen worden uitgevoerd met getallenstroken (zie figuur 2.1). Door middel van deze activiteiten ontwikkelen leerlingen inzicht in de betekenis van algebraïsche expressies (Dijkman & Van Reeuwijk, 2003).



Figuur 2.2: Rechthoeken bij expressies in *Geometrische Algebra 2d*

Een ander voorbeeld van een modelapplet is *Geometrische Algebra 2d*. In dit applet kunnen getallen en variabelen worden opgeteld en vermenigvuldigd door lijnstukken te combineren tot nieuwe lijnstukken en rechthoeken. De

lengtes van de lijnstukken en de oppervlaktes van de rechthoeken worden als expressies weergegeven (figuur 2.2). Door splitsen en samennemen van rechthoeken kunnen leerlingen inzicht ontwikkelen in de gelijkwaardigheid van verschillende expressies en wordt bijvoorbeeld de distributieve wet aanschouwelijk gemaakt.

Een overzicht van de modelapplets die zijn ontwikkeld in het Wisweb-project staat in bijlage I. Deze bijlage bevat ook per applet informatie over de bedoeling, de gebruikte modellen en de mogelijke activiteiten.

### **2.1.2 Onderwijsexperimenten met applets**

In het Wisweb-project zijn bij de applets activiteiten ontwikkeld, veelal in de vorm van werkbladen met opdrachten. Bij enkele applets, zoals *Bollenschieten*, zijn de activiteiten als spel ingebouwd. De antwoorden of uitwerkingen schrijven de leerlingen op het werkblad. De activiteiten zijn vaak aanvullingen op het gangbare curriculum en beslaan meestal één of twee lessen. Op kleinere schaal zijn ook delen van het curriculum vervangen door appletactiviteiten. De werkbladen zijn voornamelijk gemaakt door de zeven docenten die bij het project betrokken waren.

Een belangrijk doel van de onderwijsexperimenten is het inventariseren van problemen waar leerlingen bij het gebruik van de applets, vaak prototypes, tegenaan lopen. Daarbij gaat het om technische problemen (bugs), problemen omtrent de duidelijkheid en toegankelijkheid van de interface, maar ook om didactische problemen bij de gekozen representaties en activiteiten. De opgedane ervaringen hebben geleid tot verbeteringen van de applets en bijstelling van het begeleidend lesmateriaal.

### **2.1.3 Ervaringen in de klas**

Zeker tijdens de beginperiode van het project bepalen technische problemen nog wel eens een les. Niet alleen fouten in de applets, maar ook de beschikbaarheid van internet en problemen met het schoolnetwerk gooien roet in het eten. Toch is er in de loop van de tijd een gestage afname van dit soort problemen. De techniek wordt in deze periode gaandeweg volwassen.

Wat bij de experimenten opvalt is de vaardigheid van leerlingen in de bediening van de applets. Leerlingen zijn handig met de computers en de applets, vaak handiger dan docenten. Het doorgronden van de bedieningsinformatie gaat vaak snel en natuurlijk. Een aantal korte praktische inleidende opdrachten, of gewoon proberenderwijs aan de slag gaan volstaat vaak beter dan veel tekst of een uitgebreide klassikale uitleg.

Een belangrijke en vaak terugkomende observatie is dat leerlingen behoorlijk gemotiveerd zijn voor de appletactiviteiten. Een van de docenten beschrijft een les met *Geometrische Algebra 2d* zo:

*Met genoeg zien we dat eigenlijk iedereen heel hard en geconcentreerd aan het werk is. Het lesuur is zo voorbij.*

Deze ervaring staat niet op zichzelf, zoals blijkt uit lesverslagen en artikelen. Verklaringen voor die motivatie en plezier zijn:

- *Afwisseling*  
Het werken met applets zorgt als alternatieve werkvorm voor afwisseling op de gebruikelijke onderwijsvormen zoals klassikaal onderwijs en zelfstandig werken uit het boek.
- *Experimenteeromgeving*  
Applets nodigen uit iets te proberen en zonodig te corrigeren. Dat verhoogt de betrokkenheid en stimuleert vaak inventiviteit en zelfvertrouwen.
- *Feedback*  
De applets geven op een natuurlijke wijze feedback. Het wordt voor de leerling bijvoorbeeld zichtbaar dat het gewenste resultaat nog niet bereikt is, maar wel al in de buurt komt. Het eigen oplossingsproces wordt niet verstoord of afgebroken door het ‘goede’ antwoord van buitenaf.

Bovengenoemde ervaringen maken duidelijk dat applets kunnen bijdragen aan een stimulerende en motiverende onderwijssetting en dat is winst (zie bijvoorbeeld Van Reeuwijk, 2001). Maar hoe zit het met de wiskundig-inhoudelijke meerwaarde? Leer je door het werken met applets beter wiskunde, of misschien alleen op een leukere manier? Worden de belangrijke wiskundige begrippen beter, sneller of makkelijker verworven? Systematisch onderzoek hiernaar is binnen het Wisweb-project niet gedaan. De observatieverslagen en de artikelen die op grond van de ervaringen zijn geschreven bevatten veel indicaties die in een positieve richting wijzen. Veel van die ervaringen hebben te maken met de kracht van modellen.

Een citaat uit het verslag van een les van een docent met eigen materiaal bij *Geometrische Algebra 2d*:

*Mijn ervaring is dat veel leerlingen bij dit soort opdrachten vaak al tevreden zijn als ze ‘weten hoe het moet’ in plaats van dat ze ‘willen weten hoe het zit’. Bij werken binnen het model van het applet zijn er meer prikkels om uit te zoeken hoe het zit. De directe feedback van het model (de formules van de gemaakte oppervlaktes verschijnen automatisch bij het maken) stimuleerden tot verder onderzoek in een combinatie van uitproberen en erover nadenken.*

Een citaat uit een verslag van een andere docent over het applet *Stroken*:

*Applets kunnen dienen als referentiekader waar leerlingen op terug kunnen vallen wanneer ze lastige problemen tegenkomen ...*



*Toen ik na de krokusvakantie terugkwam op rijen en formules in de eerste klas wist even niemand hoe je een probleem als het vinden van een formule voor de rij 2, 6, 12, 20... aan moest pakken. Alleen al het in herinnering roepen van het werken met het strokenapplet was voldoende voor de opmerking: O ja, iets met kwadraten.*

Er waren ook duidelijke knelpunten. Zo bleek het verband tussen de gebruikte modellen en de wiskunde voor docenten heel vanzelfsprekend. Voor leerlingen bleven de activiteiten met het applet en de formele wiskundige vaardigheden echter soms los staan van elkaar. ‘Even een model gebruiken’ om formele wiskunde duidelijk te maken bleek te simpel gedacht. Om een model als referentiekader voldoende kracht te geven bleek het nodig daar veel tijd in te investeren en het model in verschillende situaties en zo mogelijk bij verschillende onderwerpen te laten terugkomen. Wanneer bijvoorbeeld het applet *Geometrische Algebra 2d* eenmalig wordt gebruikt voor het ontwikkelen van vaardigheden rond haakjes wegwerken en ontbinden, dan kan met recht worden getwijfeld aan het rendement van de investering. Tegenvallende proefwerkresultaten maakten dit soms ook duidelijk.

Een ander punt was dat (incidentele) lessen met applets niet altijd goed aansloten op de werkwijze van het boek. Het werden leuke extraatjes en de link met de wiskunde uit het boek kon soms niet goed worden uitgewerkt.

#### **2.1.4 Applets voor de docent**

Een belangrijke ervaring in het Wisweb-project is dat de applets niet alleen bij leerlingen, maar ook bij docenten een leereffect teweeg kunnen brengen. De gebruikte denkmodellen, soms nieuw, soms afgeleid van reeds bekende en vaker gebruikte modellen, nodigen uit tot nadenken over de eigen didactiek en hebben in de projectgroep regelmatig tot discussies op dit gebied geleid.

De individuele docenten binnen het project gingen hiermee verschillend om. Sommigen lieten zich in sterke mate inspireren door de mogelijkheden van de verschillende applets en zagen veel kansen om hun didactisch instrumentarium uit te breiden. Dat werd geconcretiseerd in een grote productie van zelfgemaakt lesmateriaal, soms ook vervangend voor onderdelen uit het boek. Anderen waren daarin wat terughoudender en richtten zich in eerste instantie op de werkwijze van het boek om vandaaruit te kijken of er applets waren ter ondersteuning.

Het bleek dat didactische mogelijkheden van applets zoals ontwerpers die voor ogen hebben niet altijd door docenten worden gezien. Vaak moeten die door de docent zelf ontdekt en gecreëerd worden. Dat verklaart ook dat docenten die nauwer betrokken waren bij het ontwerp van een applet betere resultaten hadden in hun klassen.

## 2.2 Het Welp-project

Het Welp-project, het vervolg op het Wisweb, is uitgevoerd in de periode 2002-2004. In Welp (Wisweb En LessenPraktijk) is gewerkt aan een bredere implementatie en verspreiding van de bij Wisweb ontwikkelde software, kennis en ervaringen. Behalve het Freudenthal Instituut participeerden in dit project vier scholen voor voortgezet onderwijs (dezelfde als bij het Wisweb-project), drie uitgevers van wiskundemethoden, het APS en Texas Instruments.

Binnen Welp heeft het Freudenthal Instituut samen met de vier scholen een algebraeerlijn ontwikkeld voor klas 2 en 3 van het havo en vwo. Uitgangspunten waren de leerdoelen van het bestaande curriculum, maar de leerlijn is zo opgezet dat de didactische mogelijkheden van de in Wisweb ontwikkelde algebra-applets optimaal gebruikt konden worden. De algebrahoofdstukken van de gebruikte wiskundemethode (Moderne wiskunde) zijn vervangen door lesmateriaal met applets. Het bij Wisweb gesignaleerde probleem dat de appletlessen vaak niet goed aansluiten op de didactische keuzes in het boek werd daarmee ondervangen.

Ten behoeve van implementatie en verspreiding is het ontwikkelde materiaal door alle docenten van de vaksectie van de scholen gebruikt. Daarbij zijn docenten zonder ervaring met applets begeleid door docenten die hebben meegedraaid in het Wisweb-project.

### 2.2.1 Ontwikkeling oefenapplets

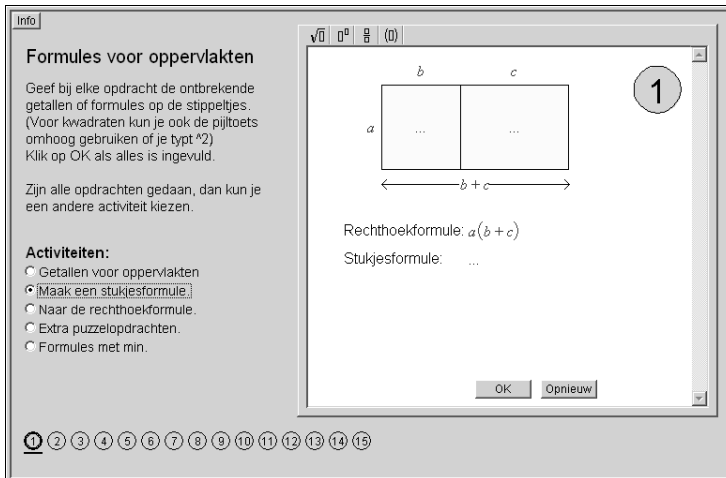
Bij de ontwikkeling van completer lesmateriaal met applets in Welp kwam ook het aspect oefenen aan bod. Met name de docentengroep drong er op aan het oefenen van vaardigheden niet te verwaarlozen in het te ontwerpen materiaal. Zo reageerde een van hen bijvoorbeeld op een eerste versie van het nieuwe lesmateriaal:

*Sowieso is het aantal oefenopgaven beperkt. Bij haakjes blijven oefeningen kunst baren.*

Het lag voor de hand om te onderzoeken wat er met applets mogelijk was op het gebied van oefenen. Dit was aanleiding voor het ontwikkelen van een serie zogenaamde oefenapplets. Dit zijn applets met een wat geslotener karakter dan de open experimenteeromgevingen van de modelapplets. Oefenapplets bieden een serie opdrachten van een bepaald type en de uitwerkingen van de leerling worden gecontroleerd. Het applet controleert het antwoord en soms ook de stappen naar het antwoord toe. In veel oefenapplets kunnen leerlingen een score behalen, wat een spelelement inbrengt. De taak ligt in het applet zelf, waardoor een werkblad niet nodig is. In veel opdrachten van de oefenapplets komen de modellen weer terug, die in de open modelapplets

zijn ontwikkeld. Een voorbeeld van een oefenapplet is *OppervlakteAlgebra* (figuur 2.3).

In *OppervlakteAlgebra* oefenen leerlingen binnen het oppervlaktemodel met expressies die variabelen bevatten. De opdracht bestaat doorgaans uit het vinden van de juiste expressies bij oppervlaktes en zijden van rechthoeken. De ingevulde expressies worden gecontroleerd. Het applet sluit aan bij de meer open modelomgeving van *Geometrische algebra 2d*.

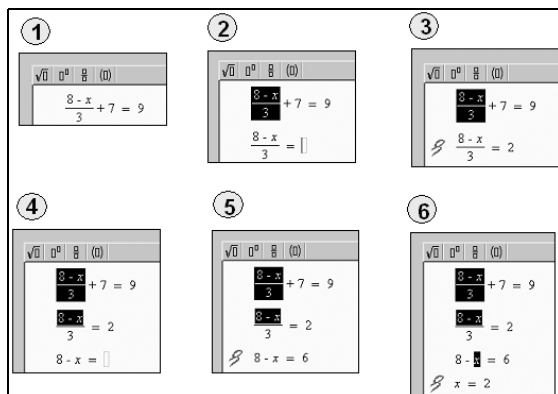


Figuur 2.3: Het applet *OppervlakteAlgebra*

Een oefenapplet dat aansluit op *OppervlakteAlgebra* is het applet *Haakjes-sommen*. Dit laatste applet is gericht op het formele herleiden van expressies. Het oppervlaktemodel blijft op de achtergrond, maar er kan op worden teruggevallen als de leerling daar behoefte aan heeft.

Een ander type oefenapplet is het applet *Vergelijkingen oplossen met bordjes*, waarmee vergelijkingen stap voor stap worden opgelost door handig te kijken naar de structuur van de expressie. Dit wordt ondersteund door de mogelijkheid de expressies met de muis te selecteren en een waarde te geven. In figuur 2.4 staat een voorbeeld van deze stap-voor-stap aanpak.

Een overzicht van de oefenapplets die zijn ontwikkeld in het Welp-project staat in bijlage II.



Figuur 2.4: Vergelijkingen oplossen met de bordjesmethode

### 2.2.2 Ervaringen in de klas

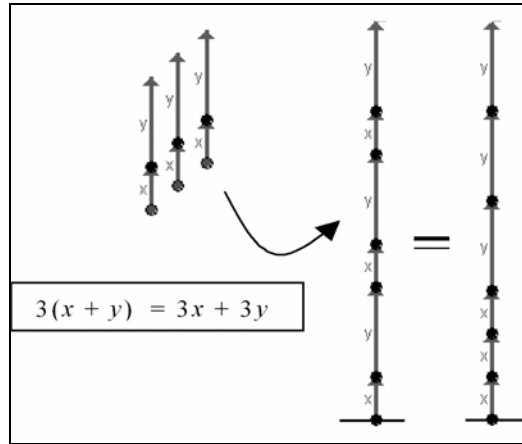
In het Welp-project is een grote hoeveelheid lesmateriaal rond de applets ontwikkeld en uitgetest in de klas. In dit materiaal komen alle algebra-onderdelen van de tweede en derde klas aan de orde. We beschrijven hier de ervaringen aan de hand van drie overstijgende onderwerpen die de leerstof samen dekken, namelijk algebraïsche manipulaties, vergelijkingen en functies en verbanden.

#### *Algebraïsche manipulaties*

Een belangrijk deel van het nieuw ontworpen lesmateriaal voor Welp heeft betrekking op symbolisch rekenen of letterrekenen. Het is vervangend voor hoofdstuk 5 van deel 2a havo/vwo van *Moderne wiskunde*, zevende editie, getiteld ‘Haakjes’ en hoofdstuk 5 van deel 3a havo en deel 3a vwo van *Moderne wiskunde*, zevende editie, getiteld ‘Ontbinden in factoren’.

Het blijkt dat de schoolboeken bij dit onderwerp weinig aandacht besteden aan betekenisvolle contexten en modellen (Boon, 2004). Al snel wordt overgestapt naar de formele regels (Goddijn & Kindt, 2001). Een argument om bij letterrekenen wel aandacht te besteden aan betekenisvolle situaties, is dat daarmee voorkomen kan worden dat algebra een geïsoleerde wereld van aangeleerde, maar niet begrepen trucjes wordt. Een hechte verbinding met betekenisvolle situaties leidt tot een beter begrip van de regels en grammatica van de algebra en biedt ook meer mogelijkheden om algebra te ontdekken als gereedschap voor het oplossen van problemen.

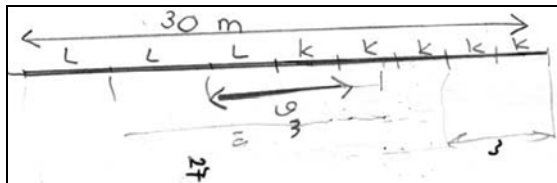
In het nieuwe lesmateriaal steunt het ontwikkelen van algebraïsche inzichten op meetkundige modellen en redeneringen. Er is gebruik gemaakt van de modelapplets *Geometrische Algebra 1d* (figuur 2.5) en *Geometrische Algebra 2d*.



Figuur 2.5: Distributieve wet in het lengtemodel

Daarnaast komen de oefenapplets *Oppervlakte algebra* en, in een later stadium, *Vermenigvuldigen met tabellen* en *Haakjessommen* aan de orde.

Het ontwerpen van lesmateriaal dat gebruik maakt van de meetkundige modellen van de applets is geen sinecure. Uit ervaringen met de eerste versie van het lesmateriaal blijkt dat leerlingen de opdrachten met het applet vaak niet in verband kunnen brengen met de algebra daarbuiten. De modellen en het gebruik daarvan in het applet moeten aansluiten bij de redeneringen van leerlingen in eerder aangeboden problemen (Doorman, 2004).

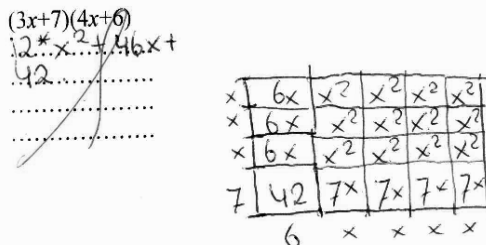


Figuur 2.6: Leerlinguitwerking van een touwpuzzel

Voor dit doel zijn onder andere touwpuzzels ontworpen, waarin zelfgemaakte lengtemodelrepresentaties handig zijn bij het oplossen van de puzzels (figuur 2.6).

De brede opzet van het materiaal kost extra lestijd, maar de leerlingen ontwikkelen daarmee ook vaardigheden die verder gaan dan de doelstellingen van het hoofdstuk uit het boek. Zo bereiden de leeractiviteiten rond de opbouw en het gebruik van modellen ook voor op het oplossen van vergelijkingen. Het is duidelijk dat die investering alleen gerechtvaardigd is in een breder perspectief, en niet alleen ten dienste staat van geïsoleerde vaardigheden als haakjes uitwerken. Veel docenten zien de waarde van de gevolgde aanpak, andere blijven liever dicht bij de aanpak van het boek.

De resultaten van de eindtoets verschillen nogal per docent en school. Soms blijken leerlingen ondanks de grotere tijdsinvestering niet beter te scoren op de toets. In andere gevallen blijkt wel een duidelijke verbetering en bovendien zijn er aanwijzingen dat de gebruikte modellen inderdaad een referentiekader bieden voor algebraïsche vaardigheden (zie figuur 2.7).



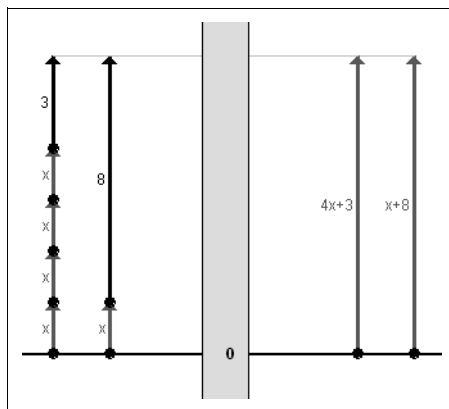
Figuur 2.7: Leerlinguitwerking van een toetsopgave

De beschreven observaties en overwegingen reiken overigens verder dan het gebruik van applets en raken ook de keuze voor onderwijs vanuit betekenisvolle contexten en modellen. Dit brengt de discussie op de waarde van Realistic Mathematics Education (RME) en de uitwerking daarvan. Tijdens gesprekken met de docenten bleek niet iedereen deze visie te onderschrijven.

### Vergelijkingen

Een ander belangrijk onderwerp in Welp is het oplossen van vergelijkingen. Hiervoor zijn verschillende applets ontwikkeld. Het materiaal besteedt aandacht aan informele strategieën zoals handig proberen: ‘Door welk getal kun je  $x$  vervangen?’ Applets als *Waarmakers* en *Vergelijkingen oplossen met bordjes* bieden hiervoor een oefenomgeving met feedback. Ook komen puzzels en raadsels aan de orde waarbij vergelijkingen handig en soms nodig zijn. Als formele oplosmethode staat de weegschaalmethode centraal. Daarmee worden vergelijkingen opgelost door aan beide kanten dezelfde bewerking uit te voeren om zodoende via steeds eenvoudiger vormen uit te komen op de oplossing. Deze methode wordt ondersteund door de applets *Vergelijkingen oplossen met de weegschaal* en *Vergelijkingen oplossen met de weegschaal spel*. De nieuwste varianten van deze applets zijn het drietal *Lineaire vergelijkingen strategie*, *-spel* en *-toets*, beschreven in hoofdstuk 4.

Hoewel er ook verschillende modelapplets zijn die het oplossen van vergelijkingen ondersteunen en voorbereiden (zie bijvoorbeeld figuur 2.8), ligt in het lesmateriaal van Welp de nadruk op de genoemde oefenapplets. Het weegschaalmodel vormt het belangrijkste achterliggende model.



Figuur 2.8: Vergelijkingen met *Geometrische Algebra 1d*

De reacties van de betrokken docenten en van de leerlingen op het materiaal en de applets waren zeer positief. Met name werd de stapsgewijze controle door het applet gewaardeerd, waardoor leerlingen niet hoeven door te rekenen met een gemaakte fout. Een docent zegt daarover:

*... en met de vergelijkingen dat je het stukje docent dat je eigenlijk niet kunt zijn in een klas zonder computers, dat de computer dat nu heel goed overnam, doordat iedere keer bij ieder regelkje bevestigd werd of ze het goed of slecht deden.*

Daarbij werd aangegeven dat je bij deze manier van lesgeven als docent je handen vrij hebt voor zwakkere leerlingen:

*Perfect, perfect! Degene die het echt niet begrijpt, die steekt dan wel zijn vinger op en daar ben je dan ook voor om te antwoorden.*

Maar bovenal viel op hoe geconcentreerd en gemotiveerd leerlingen bezig waren:

*En dan zag je ze met zijn tweeën echt puzzelen van: Hé, wat doe ik nou verkeerd? O, natuurlijk er stond  $-24$  in plaats van  $+24$ .*

De combinatie van de twee gebruikte weegschaalapplets gaf een vruchtbare opbouw in het oefenen, zo bleek in de klas. Bij het applet *Vergelijkingen oplossen met de weegschaal* kiezen leerlingen de bewerkingen, maar wordt het rekenwerk door het applet gedaan. Daardoor kunnen leerlingen zich goed op de strategie richten.

$12 - (x-3) = 7(3x-4)$  } haakjes weg  
 $12 - x + 3 = 21x - 28$  } termen optellen  
 $15 - x = 21x - 28$  }  $+28$   
 $43 - x = 21x$  }  $+x$   
 $43 = 22x$  }  $:22$   
 $1 \frac{21}{22} = x$

Figuur 2.9: Uitwerking in een proefwerk

Hebben ze die eenmaal onder de knie, dan kunnen ze ook oefenen met het rekenwerk in het applet *Vergelijkingen oplossen met de weegschaal spel*. Daarbij maakt de stapsgewijze feedback het oefenen efficiënter. Het versterkt ook het zelfvertrouwen van de wat zwakkere leerlingen. Als verrassende bijkomstigheid bleek het werken met het applet een opvallend positieve invloed te hebben op de notatie van de uitwerkingen in het schrift en op het proefwerk (figuur 2.9). In hoofdstuk 4 worden deze applets uitgebreider beschreven.

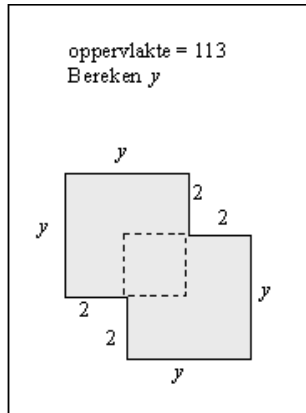
Bovengenoemde ervaringen zijn opgedaan in de tweede klas bij het onderwerp lineaire vergelijkingen. In de derde klas bij het onderwerp kwadratische vergelijkingen was een vergelijkbare aanpak mogelijk met het applet *Kwadratische vergelijkingen* (figuur 2.10).

$(x+2)(x+5) = 88$  } haakjes weg  
 $x^2 + 7x + 10 = 88$  }  $- 88$   
 $x^2 + 7x - 78 = 0$  } ontbind  
 $(x-6)(x+13) = 0$  } splits  
 $x-6 = 0$  of  $x+13 = 0$  } gelijkwaardig met:  
 $x = 6$  of  $x = -13$

Figuur 2.10: Het applet *Kwadratische vergelijkingen*

Het weegschaalmodel dat het oplossen van lineaire vergelijkingen betekenis geeft, past maar ten dele bij de aanpak van kwadratische vergelijkingen.





Figuur 2.11: Oppervlaktepuzzel

De fasering, met eerst alleen de strategie en daarna het rekenwerk met stapsgewijze feedback, is echter sterk vergelijkbaar. Deze aanpak is ook hier redelijk succesvol. Oefeningen met *Kwadratische vergelijkingen* vormen slechts een deel van het lesmateriaal. Ze worden voorafgegaan door een verkennende fase waarin modellen en informele strategieën een belangrijke rol spelen. In figuur 2.11 staat een voorbeeld van een zogenaamde oppervlaktepuzzel uit het lesmateriaal. Ook het applet *Geometrische algebra 2d* is ingezet bij dit onderwerp.

Een aanpak van kwadratische vergelijkingen die tegenwoordig uit de schoolboeken is verdwenen, het zogenaamde kwadraatafsplitsen, sluit goed aan bij de gebruikte (oppervlakte)modellen en is in het Welpmateriaal in iets gewijzigde vorm gebruikt (figuur 2.12).

$x^2 - 6x = 2$			
x	x	-3	2
x	$x^2$	-3x	
-3	-3x		

x	x	-3	$2 + 9 = 11$
x	$x^2$	-3x	
-3	-3x	9	

$(x-3)^2 = 11$

Figuur 2.12: Aanvullen tot kwadraat met behulp van een tabel

$$\begin{array}{l}
 x^2 - 6x = 2 \\
 x^2 - 6x + 9 = 11 \\
 (x - 3)^2 = 11 \\
 x - 3 = \sqrt{11} \text{ of } x - 3 = -\sqrt{11} \\
 x = \sqrt{11} + 3 \text{ of } x = -\sqrt{11} + 3
 \end{array}$$

Figuur 2.13: De stappen in het oefenapplet

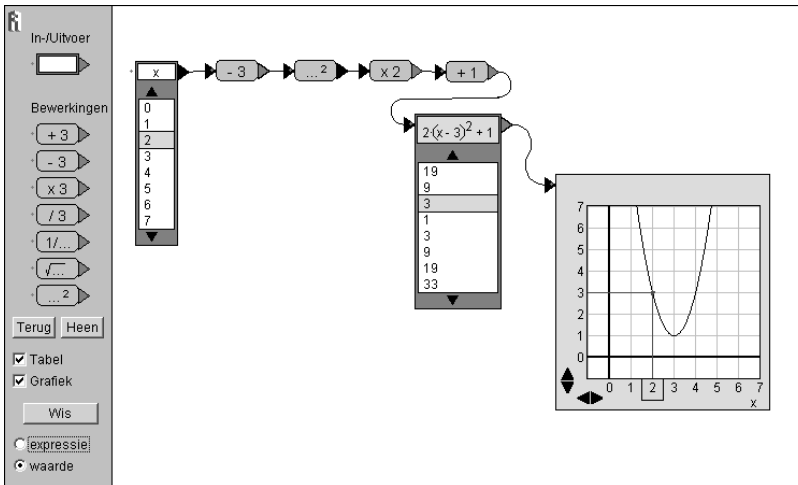
Dit blijkt in deze opzet voor leerlingen een heel toegankelijke methode, die ze in het applet *Kwadratische vergelijkingen* ook veelvuldig als strategie toepassen (figuur 2.13).

Ook de methode waarbij een op nul herleide drieterm moet worden ontbonden wordt aangeboden (figuur 2.9). Echter, nadat leerlingen het kwadraatafsplitsen onder de knie hebben, gebruiken ze de ontbindmethode nauwelijks meer. Ze hebben snel door dat de ontbindmethode alleen bij mooie getallen lukt, terwijl kwadraatafsplitsen altijd werkt.

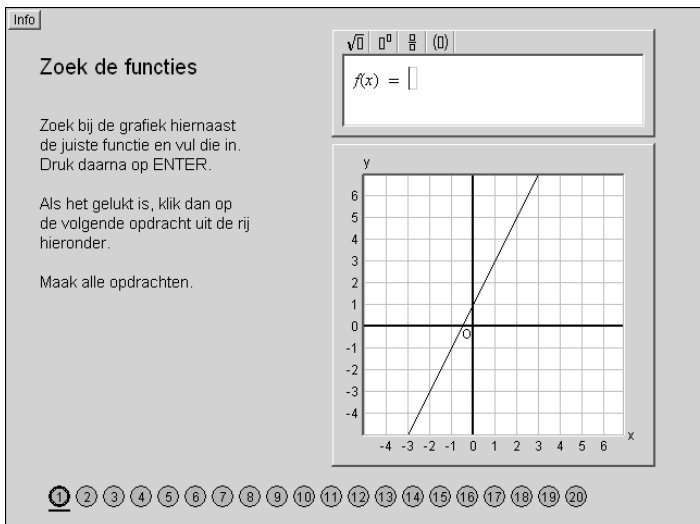
De positieve ervaringen met kwadraatafsplitsen in combinatie met het applet pleiten ervoor deze aanpak opnieuw een plaats te geven binnen dit onderwerp. Het biedt een betekenisvoller en inzichtelijker alternatief voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen dan de abc-formule, die al snel en zonder enige vorm van uitleg als belangrijkste methode wordt aangeboden. Bovendien biedt het applet zelfs de mogelijkheid om de abc-formule af te leiden, omdat de oplosstrategie ook op vergelijkingen met parameters kan worden toegepast.

### ***Functies en verbanden***

Deze onderwerpen zijn binnen Welp met name voor de derde klas uitgewerkt. De nadruk ligt op kwadratische verbanden, maar ook lineaire verbanden komen weer terug. Daarnaast komen wortelfuncties en hyperbolische functies aan bod. De gebruikte applets zijn het modelapplet *AlgebraPijlen* (figuur 2.14) en het oefenapplet *Functies Raden* (figuur 2.15). Sporadisch zijn de applets *Algebra Expressies* en *Spelen met Functies* gebruikt.



Figuur 2.14: Gekoppelde representaties van een functie



Figuur 2.15: Het applet 'Functies raden'

Het applet *AlgebraPijlen* wordt met name gebruikt vanwege de rijke combinatie van verschillende representaties die mogelijk zijn nadat een pijlenketting is gemaakt. Belangrijke activiteiten zijn:

1. Maak een pijlenketting bij een gegeven formule of context. Leerdoel is dan het inzicht in de structuur van de formules. Dit inzicht kan dan weer helpen bij terugrekenen bij vergelijkingen oplossen.

2. Zoek een formule (en dus een pijlenketting) bij een gegeven tabel.
3. Pas de getallen in de bewerkingen van de pijlenketting aan, zodat de grafiek op een bepaalde manier verschuift of verandert. Doel is dan inzicht in transformaties van grafieken en de koppeling met de veranderingen in de formules.

De ervaringen met activiteiten van de eerste soort zijn positief. Bij kwadratische verbanden is het maken van pijlenkettingen niet eenvoudig. Er worden door leerlingen veel fouten gemaakt in de voorrangsregel bij de bewerkingen. Het maken van de rekenpijlen waarin die volgorde expliciet wordt gemaakt helpt het probleem te doorgronden. Met name de mogelijkheid om na elke bewerking tussenoplossingen te bekijken geeft de juiste feedback en maakt duidelijk waarom een gemaakte pijlenketting niet klopt.

Activiteiten van de tweede en derde soort lokken veel probeergedrag uit. Dat heeft een positieve kant, maar geeft soms ook bedenkingen. Positief is dat leerlingen zeer gericht zijn op het vinden van de oplossing. De experimenteermgeving van een applet biedt de mogelijkheid om verder te zoeken als het (nog) niet goed is, in tegenstelling tot de werkwijze met een papieren antwoordboekje. Dit laatste geeft de oplossing en slaat daarmee het eigen oplossingsproces vaak dood. Echter, eindeloos ongestructureerd proberen – dat gebeurt ook – levert niet veel op.

Reflectie op de gevolgde strategie is een belangrijk onderdeel van de begripsvorming. Bij een deel van de leerlingen vindt die reflectie niet voldoende plaats en moet de docent die afdwingen. Soms gebeurt dat individueel, maar ook klassikale momenten worden met dat doel ingelast. Reflectie kan worden uitgelokt door te wijzen op de andere representatievormen. Soms leggen leerlingen in hun probeergedrag alleen een directe koppeling met de getallen in de pijlenketting en de grafiek, terwijl de tabel betekenisvolle aanknopingspunten kan leveren voor de strategie. Daar moet de docent dan op wijzen.

De hierboven gemaakte opmerkingen over het probeergedrag van leerlingen zijn ook van toepassing op de ervaringen met het applet *Functies raden*.

De activiteiten met het applet *AlgebraPijlen* vond men zinvol, maar kostten ook veel tijd, meestal aanzienlijk meer dan de planning bij het lesmateriaal aangaf. Waarschijnlijk kwam dat door de opzet waarin het applet als experimenteermgeving fungeerde. In zo'n omgeving worden leerlingen niet meteen in de 'goede' richting gestuurd, maar krijgen ze vrijheid om te zelf te zoeken en te ervaren. Natuurlijk zou deze extra tijdsinvestering tot een breder en sterker referentiekader voor de begrippen formule en functie moeten leiden. Het was echter binnen Welp niet mogelijk om dit te onderzoeken.

## 2.3 Conclusies

Ervaringen in het Wisweb- en Welp-project laten zien dat applets nieuwe mogelijkheden bieden voor het leren van algebra.

Activiteiten met applets motiveren de leerlingen. De gebruikte modellen in deze activiteiten lijken een referentiekader te vormen voor wiskundige begrippen. Applets bieden aantrekkelijke oefenomgevingen met feedback, waarmee het mogelijk lijkt om wiskundige vaardigheden efficiënter te verwerven (Bokhove & Van Reeuwijk, 2004; Palha & Van Reeuwijk, 2002). Docenten rapporteren dat de feedbackmogelijkheden een deel van hun taak konden overnemen. Toch bleek het ontwerpen van goed lesmateriaal bij met name de modelapplets niet eenvoudig. De ontwikkelaars voelden zich vaak pionier in een onbekend gebied. De opbouw van de leerstof moest vaak flink worden omgegooid om de sterke punten van applet en gebruikte modellen te kunnen benutten. Dat gaf soms implementatieproblemen, omdat niet alle docenten het prettig vonden om te veel af te wijken van de opbouw die zij gewend waren. Daar kwam bij dat het nieuwe lesmateriaal nog in hoge mate experimenteel was en op grond van de ervaringen verbeterd moest worden. De projecten Wisweb en Welp zijn dus een rijke bron van ervaringen, maar roepen ook een aantal vragen op die nauwkeuriger onderzoek vereisen.

## Referenties

- Boon, P. (2004). Welp: letterekenen met applets. *Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 23(4), 22-27.
- Bokhove, C. & Reeuwijk, M. van (2004). In plaats van erbij. *Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 23(3), 8-11.
- Doorman, M. (2004). Van touwpuzzels tot oppervlaktealgebra. *Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 23(4), 34-39.
- Dijkman, D. & Reeuwijk, M. van (2003). Stroken met etiketten. *Euclides*, 79(3), 98-102.
- Goddijn, A. & Kindt, M. (2001). Knelpunten en toekomstmogelijkheden voor de wiskunde in het VO. *Tijdschrift voor didactiek der bèta-wetenschappen*, 18, 59-94.
- Palha, S. & Reeuwijk, M. van (2002). Zie je het verband? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 22(1), 12-15.
- Reeuwijk, M. van (2001). Bollen schieten. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 20(3), 4-7.



## 3 Case study *AlgebraPijlen*

### 3.1 Doel van het onderwijsexperiment *AlgebraPijlen*

De eerste cyclus binnen het kortlopend onderwijsonderzoek richt zich op het ontwikkelen van inzicht in algebraïsche expressies door het werken met pijlenkettingen.

Verskillende overwegingen hebben tot de keuze van dit onderwerp geleid. Ten eerste is inzicht in de structuur en de betekenis van algebraïsche expressies een cruciale factor in algebraïsch inzicht. Het wordt wel als de kern beschouwd van ‘*symbol sense*’. Symbol sense is een verzamelnaam voor algebraïsche expertise die uitstijgt boven de vaardigheid van het routineus uitvoeren van procedures, maar die ook flexibiliteit en meta-vaardigheden omvat. Symbol sense is ook van belang bij het inzetten van ICT voor het uitvoeren van algebraïsche procedures (Drijvers, 2003; Zorn, 2002).

Een tweede argument voor deze onderwerpkeuze is gelegen in het feit dat voor het werken met pijlenkettingen binnen het Wisweb-project een applet is ontwikkeld, *AlgebraPijlen*, waarmee ervaringen in de klas zijn opgedaan. Deze ervaringen suggereren dat het werken met het applet wezenlijk bijdraagt aan het inzicht in algebraïsche expressies. Binnen het kader van het ontwikkel- en implementatiewerk is dit onvoldoende onderzocht. Overigens is het werken met *AlgebraPijlen* opgenomen in de meeste gangbare Nederlandse schoolmethoden.

In het Welp-project is onderscheid gemaakt tussen modelapplets en oefenapplets (zie paragraaf 2.2). Het streven binnen dit onderzoek is om het gebruik van zowel een modelapplet als een oefenapplet nader te onderzoeken. Een derde argument voor het onderzoeken van pijlenkettingen is dat het applet *AlgebraPijlen* in de categorie van *modelapplets* valt. Als oefenapplet is gekozen voor *VergelijkingenOplossen*. Het betreffende deelonderzoek staat beschreven in hoofdstuk 4.

De eerste onderzoeksvraag van dit project is hoe het werken met applets de leerling mogelijkheden biedt denkmodellen te ontwikkelen en vaardigheden op een gevarieerde en motiverende manier te oefenen. In deze eerste onderzoekscyclus gaat het met name om de denkmodellen, in dit geval het machientjes-model voor algebraïsche expressies, dat in het applet *AlgebraPijlen* in de vorm van pijlenkettingen beschikbaar is.

De onderzoeksvraag is voor deze cyclus dus als volgt geconcretiseerd:

*Hoe biedt het applet AlgebraPijlen de leerlingen een geschikt model om het inzicht in de betekenis en de structuur van algebraïsche expressies te bevorderen?*

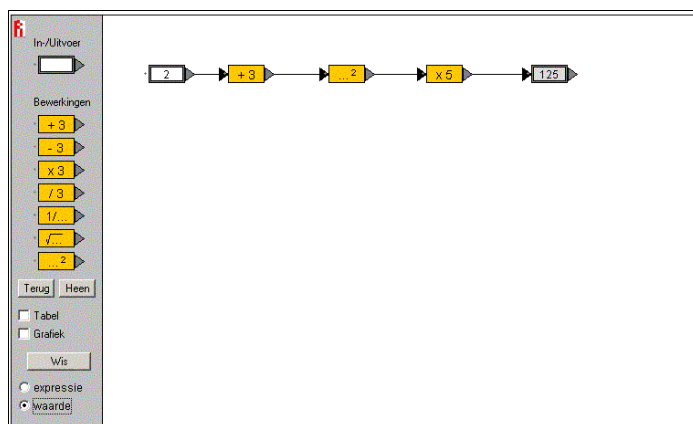
### 3.2 Het applet *AlgebraPijlen*

Leerlingen in de onderbouw van havo en vwo zijn eerder geneigd in acties te denken dan in objecten. Veel leerlingen zullen ‘ $2 + 3$ ’ beschouwen als een prikkel om 2 en 3 te gaan optellen, en het niet zien als een statische uitdrukking die de som van 2 en 3 voorstelt. Bij algebra is de tweede optiek vaak belangrijk, ook omdat er bij ‘ $a + b$ ’ in het algemeen niet veel actie te ondernemen valt. Algebraïsche expressies zijn behalve beschrijvingen van actieplannen ook statische objecten, waarvan de structuur moet worden doorzien om de betekenis te begrijpen (Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994). Het applet *AlgebraPijlen* kan worden gebruikt om de dynamische kijk op een expressie als een recept van procedures en de statische kijk op een expressie als een algebraïsch object met elkaar in verband te brengen.

In essentie is *AlgebraPijlen* een omgeving waarin leerlingen kettingen van bewerkingen kunnen maken die invoer transformeren tot uitvoer. Zo’n ketting is een model voor een algebraïsche expressie dat de structuur ervan expliciet maakt. Daarnaast draagt het maken van zo’n ketting naar verwachting bij aan de ontwikkeling van het variabelebegrip en van het begrip expressie als object.

In deze onderzoeksacyclus is gebruik gemaakt van twee varianten van het applet *AlgebraPijlen*. De belangrijkste variant is het modelapplet, dat wordt gebruikt voor de beoogde modelontwikkeling. Daarnaast is er een spelapplet, waarin de belangrijkste activiteiten geoefend kunnen worden. Het applet is ontwikkeld door Peter Boon en is beschikbaar via [www.wisweb.nl/kloo](http://www.wisweb.nl/kloo) (zie ook Boon & Drijvers, in druk).

#### 3.2.1 De modelvariant van *AlgebraPijlen*



Figuur 3.1: Een rekenketting in *AlgebraPijlen*

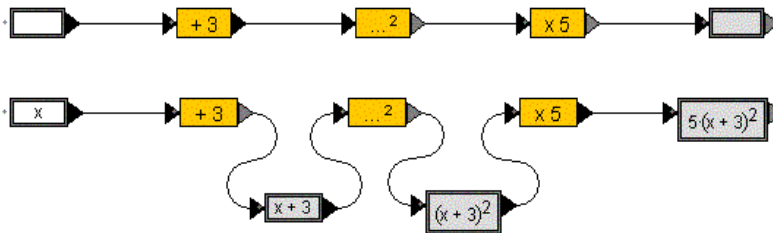


In de modelvariant van *AlgebraPijlen* kunnen bewerkingen vanuit het grijze venster in het witte werkgebied worden geslept om kettingen te maken die invoer omzetten in uitvoer. Het eenvoudigste type kettingen zijn rekenkettingen. De afbeelding in figuur 3.1 geeft bijvoorbeeld een ketting die uit de invoer 2 de uitvoer  $125 = (2 + 3)^2 \cdot 5$  berekent. De ketting symboliseert de berekening en maakt de volgorde van bewerkingen zichtbaar. In zo'n rekenketting kan het invoergetal 2 veranderd worden in een ander getal. Invoer en uitvoer veranderen, terwijl de ketting hetzelfde blijft. De ketting is dus een object dat onafhankelijk van de invoer bestaat. Door rekenkettingen en de bijbehorende rekenexpressie  $(2 + 3)^2 \cdot 5$  of  $5 \cdot (2 + 3)^2$  in elkaar om te zetten leren leerlingen naar verwachting de structuur van de expressie te doorzien. Ze worden zich bijvoorbeeld bewust van het verschil tussen  $(2 + 3)^2 \cdot 5$  en  $2 + 3^2 \cdot 5$ . Op die manier wordt het onvermogen om expressies te 'lezen', het zogenaamde *parsing obstacle*, overwonnen (Tall & Thomas, 1991). In plaats van de numerieke uitkomst kan ook de rekenexpressie door het applet in beeld worden gebracht (figuur 3.2).



Figuur 3.2: Een expressie in plaats van een numerieke uitkomst

Behalve numeriek kan de invoer van de ketting ook variabel zijn, zodat een algebraketting ontstaat. Een eerste stap in die richting bestaat eruit het invoervakje leeg te laten (figuur 3.3 boven). Dit lege vakje is een 'plaatshouder' voor verschillende numerieke waarden. Een volgende stap is om in het invoervakje  $x$  of een andere letter of woordvariabele te gebruiken (figuur 3.3 onder).

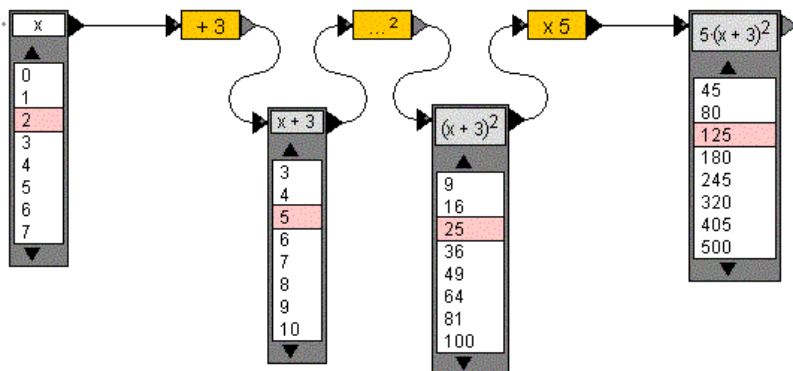


Figuur 3.3: Algebrakettingen met lege invoer en tussenantwoorden

Dit versterkt het generieke karakter van een algebraketting. Het werken met het applet draagt er naar verwachting toe bij dat leerlingen niet langer denken dat het resultaat van een procedure een getal moet zijn en dat anders 'de op-

gave nog niet af is'. Dit is het zogenaamde lack-of-closure obstacle (Tall & Thomas, 1991). Voor het doorzien van de structuur van een algebraïetelling kan het nuttig zijn ook tussenresultaten in de ketting weer te geven, zoals afgebeeld in de onderste ketting van figuur 3.3.

De optie om tabellen toe te voegen maakt duidelijk dat de variabele in feite het hele domein symboliseert, dus over de getallenverzameling generaliseert (figuur 3.4). Dit is een kijk op variabelen die verder gaat dan de variabele als flexibele invoer; hier wordt benadrukt dat de algebraïetelling voor *elk* natuurlijk getal eenzelfde procedure representeert, wat aan de basis ligt van het formulebegrip.



Figuur 3.4: Ketting met tabellen

Een meer conventionele tabel wordt verkregen door de algebraïetelling ‘in te pakken’ (figuur 3.5). Deze bewerking versterkt tevens het objectkarakter van de algebraïetelling.

$5(x+3)^2$	
x	
0	45
1	80
2	125
3	180
4	245
5	320
6	405
7	500

Figuur 3.5: Een ingepakte pijlenketting

Het applet biedt ook de mogelijkheid grafieken bij algebraïsche verbanden te tekenen. Omdat die mogelijkheid in deze onderzoeksacyclus niet is gebruikt, laten we die hier buiten beschouwing.

### 3.2.2 De spelvariant van AlgebraPijlen

De spelvariant van *AlgebraPijlen* kent dezelfde interface als de modelvariant. Het verschil is echter dat er boven in beeld opdrachten gegeven worden. Uitwerkingen worden door het applet nagekeken, waardoor de leerling een score krijgt. Hiermee wordt een spelelement aan het applet toegevoegd, dat beoogt de leerlingen uit te dagen en te motiveren. Het werken met de spelvariant is meer gericht op het oefenen met het model dan op het aanbrenge van het model.

Het eerste type opdrachten in de spelvariant komt neer op het bouwen van een algebraketting om een gegeven expressie te realiseren (figuur 3.6). Feedback wordt gegeven in de vorm van een krulletje of een kruisje.

The screenshot shows the 'AlgebraPijlen' applet interface. At the top, the task is 'Maak de pijlenketting' (Make the arrow chain). The goal is to transform the input  $x$  into the output  $\frac{(x+4)^2}{2}$ . The interface includes a 'Niveau' (Level) selector with 'Niveau 1' selected and 'Niveau 2' unselected. The 'Score' (Score) is currently 0. The main workspace shows a sequence of operations:  $x \rightarrow +4 \rightarrow \dots 2 \rightarrow /2 \rightarrow \frac{(x+4)^2}{2}$ . On the left, there is a menu of operations: '+3', '-3', 'x3', '/3', '1/...', '√...', and '...2'. At the bottom, there is a progress indicator with 10 numbered circles, where the 5th circle is highlighted.

Figuur 3.6: Eerste type opgaven in het spelapplet

Het tweede type opdrachten betreft het namaken van een tabel, maar via een andere expressie dan die in beeld verschijnt (figuur 3.7). Het onderliggend probleem is dus het vinden van een equivalente expressie. De feedback bestaat hier uit een  $V$ -teken, dat aangeeft dat inderdaad een equivalente pijlenketting is gemaakt.

In het derde type opdrachten van het spelapplet is de taak om een gegeven expressie in zo min mogelijk stappen over te voeren in een andere (figuur 3.8).

**Maak een pijlenketting**

Maak een formule die anders is dan de formule hiernaast, maar wel gelijkwaardig hieraan.

Niveau 1      Score: 0  
 Niveau 2      Score: 2

x	$x - (3 - 5x)$
0	-3
1	3
2	9
3	15
4	21
5	27
6	33
7	39

In-/Output

Operations

- + 3
- 3
- x 3
- / 3
- 1/...
- √...
- ... 2

x	→	x 6	→	- 3	→	6x - 3
---	---	-----	---	-----	---	--------

✓

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Figuur 3.7: Tweede type opgaven in het spelapplet

**Maak een pijlenketting**

Maak een pijlenketting die de linkerformule verandert in de rechterformule. Een formule gelijkwaardig aan de rechterformule mag ook. Probeer het met zo weinig mogelijk bewerkingen.

Score: 1

$6(x + 2)$	$6(x - 2)$
12	-12
18	-6
24	0
30	6
36	12
42	18
48	24
54	30

In-/Output

Operations

- + 3
- 3
- x 3
- / 3
- 1/...
- √...
- ... 2

$6(x + 2)$	→	- 24	→	$6(x + 2) - 24$
------------	---	------	---	-----------------

✓

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Figuur 3.8: Derde type opdrachten in het spelapplet

### 3.3 Het lesmateriaal bij *AlgebraPijlen*

Het applet *AlgebraPijlen* biedt een modelomgeving, maar bevat zelf (met uitzondering van het spelapplet) geen opdrachten. Daarom is voor het onderwijsexperiment lesmateriaal ontwikkeld in de vorm van werkbladen, waarop leerlingen hun uitwerkingen noteren.

Aan het lesmateriaal ligt een hypothetische leerlijn ten grondslag die bestaat uit de volgende fasen.

- *Pijlenkettingen en algebraexpressies*

In deze fase bouwt de leerling met het applet pijlenkettingen, in eerste instantie bij rekenexpressies en daarna bij algebraexpressies. Andersom is de bedoeling dat de leerling in een pijlenketting de bijbehorende algebraïsche expressie kan aflezen. Het gaat dus om de correspondentie tussen de representatie van de algebraïsche expressie en de algebraïsche expressie. De algebraïsche expressie visualiseert de volgorde van de bewerkingen, die bij de algebraïsche expressie in een geneste structuur meer impliciet blijft. De aanname hierbij is dat het maken en lezen van pijlenkettingen in het applet het inzicht in de betekenis en de structuur van de expressies bevordert.

- *Equivalenten kettingen en expressies*

In deze fase wordt eerst bij een gegeven tabel een pijlenketting gezocht. Een pijlenketting is dus een manier om een tabel te genereren. Vervolgens ontwerpt de leerling verschillende pijlenkettingen die tot eenzelfde tabel leiden. De bijbehorende algebraïsche expressies zijn dus equivalent: voor alle waarden van de invoer geven ze dezelfde uitvoer. Het verschijnsel van de identieke tabellen is aanleiding tot het zoeken naar een algebraïsche verklaring voor de equivalentie van de twee expressies. Naar verwachting leidt dit tot een dieper inzicht in de betekenis en structuur van die expressies. Met name krijgt een expressie meer een objectkarakter.

- *Inverse bewerkingen*

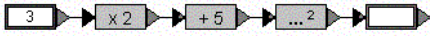
In deze fase bouwt de leerling in het applet ‘omkeerkettingen’ die een procedure ongedaan maken. Deze omkeerkettingen komen van pas bij het terugzoeken van invoer bij een gegeven uitvoer en anticiperen daarmee op het oplossen van vergelijkingen. Het maken van omkeerkettingen draagt naar verwachting bij aan het bewustzijn van de verschillende stappen in de oorspronkelijke pijlenketting en de volgorde daarin, en dus van de structuur van de bijbehorende algebraïsche expressie.

Het lesmateriaal, dat integraal beschikbaar is via [www.wisweb.nl/kloo](http://www.wisweb.nl/kloo), bestaat uit drie paragrafen:

1. Berekeningen en formules met pijlen.
2. Van tabel naar formule.
3. Kwadratische formules.

In de eerste paragraaf maken leerlingen rekenpijlen. De vraag is welke rekenexpressie bij een pijl hoort, wat de kwestie van het zetten van haakjes aan de orde stelt (figuur 3.9).

Nu een pijlenketting met 3 bewerkingen:



Aan drie leerlingen is gevraagd: *Welke berekening hoort bij de pijlenketting hierboven?*  
Hierop kwamen drie verschillende antwoorden:

- Leerling A:  $3 \times 2 + 5^2$
- Leerling B:  $3 \times (2 + 5)^2$
- Leerling C:  $(3 \times 2 + 5)^2$

**b** Wie heeft gelijk? .....

**c** Wat hebben de andere twee leerlingen fout gedaan? Leg uit.

Figuur 3.9: Opgave 1 ‘Wie heeft gelijk?’

Dan volgt de omgekeerde opdracht, namelijk om bij een gegeven rekenexpressie een rekenketting te maken. Daarbij wordt aandacht besteed aan het kiezen van het invoergetal, zodat eenzelfde ketting voor verschillende berekeningen kan worden gebruikt (figuur 3.10).

**Opdracht 3 Van berekening naar ketting**

Hieronder zie je telkens drie berekeningen die je met dezelfde pijlenketting (op het begingetal na) kunt maken. Maak de pijlenkettingen met *expressie* aangevinkt, zodat je kunt controleren of ze kloppen.

**a**

$(6 \times 3 + 8)^2$	<input type="checkbox"/>	.....
$(6 \times 5 + 8)^2$	<input type="checkbox"/>	.....
$(6 \times 7 + 8)^2$	<input type="checkbox"/>	.....

**b**

$5 \times 2^3 + 7$	<input type="checkbox"/>	.....
$5 \times 4^3 + 7$	<input type="checkbox"/>	.....
$5 \times 5^3 + 7$	<input type="checkbox"/>	.....

**c**

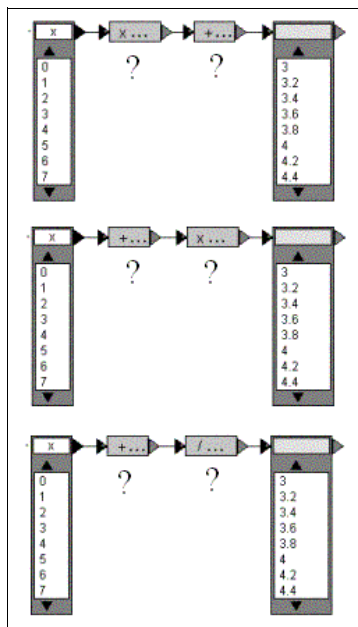
$7 \times \sqrt{\frac{3+5}{4}}$	<input type="checkbox"/>	.....
$7 \times \sqrt{\frac{6+5}{4}}$	<input type="checkbox"/>	.....
$7 \times \sqrt{\frac{9+5}{4}}$	<input type="checkbox"/>	.....

Figuur 3.10: Opgave 3 ‘Van berekening naar ketting’

Vervolgens wordt de stap naar de variabele invoer gezet. Bij een formule wordt een pijlenketting gemaakt, waarbij een tabel het effect op numerieke invoer zichtbaar maakt. En weer andersom: welke formule hoort bij een ge-

geven pijlenketting? Aan het einde van de eerste paragraaf komt kort aan de orde dat verschillende pijlenkettingen tot eenzelfde tabel kunnen leiden. De laatste opgave verwijst naar het eerste type opdrachten van de spelvariant.

Paragraaf 2, getiteld Van tabel naar formule, begint met de context van de lengte van een brandende kaars. Eerst wordt bij de tabel een formule gemaakt en daarbij een algebraketting. De tabeloptie van het applet maakt het mogelijk de ketting te controleren. Vervolgens wordt in een pijlenketting de volgorde van de bewerkingen verwisseld, terwijl toch dezelfde tabel moet ontstaan. In feite gaat het hier dus om het vinden van equivalente kettingen en daarmee equivalente expressies (figuur 3.11).




Figuur 3.11: Opgave 9 over equivalente kettingen

Paragraaf 2 eindigt met een verwijzing naar het tweede type opdrachten van het spelapplet.

In paragraaf 3 komen kwadratische formules aan de orde. De context van een vallend zandzakje leidt tot een gegeven kwadratische tabel. Deze wordt nagemaakt met een pijlenketting, die wordt gebruikt om op enkele tijdstippen de valweg te berekenen. De omgekeerde vraag, na hoeveel tijd een bepaalde afstand is afgelegd, leidt tot terugzoeken in de tabel en vervolgens het opstellen van een omkeerketting met bijbehorende formule (figuur 3.12). Extra vragen binnen de context van het vallende zandzakje leiden tot het verlengen

van de ketting. Paragraaf 3 eindigt met opgaven met het derde type van het spelapplet.

Opdracht **b** is makkelijk als je een pijlenketting als hieronder zou hebben. Misschien heb jij die opdracht ook wel op die manier gedaan.



c Maak die pijlenketting en gebruik die om te berekenen wanneer de zandzak op de helft is (weer op  $1/1000^e$  seconde nauwkeurig.)

Pijlen ketting: .....

Zandzak op de helft als  $t =$  .....

d Welke formule hoort er bij die pijlenketting? .....

Figuur 3.12: Opgave 13 over de omkeerketting

### 3.4 Opzet van het onderwijsexperiment

De onderwijsexperimenten met *AlgebraPijlen* vonden in het voorjaar van 2004 plaats in twee klassen 2 havo/vwo van het Sint Gregorius College in Utrecht, een school die ook heeft deelgenomen aan de projecten Wisweb en Welp. De twee docenten hadden dan ook al ervaring met het werken met applets in de les.

De experimenten besloegen 4 lessen in elk van de twee klassen. Inhoudelijk sloot het lesmateriaal aan bij hoofdstuk 11 van de gebruikte methode, deel 2b hv van de zevende editie van *Moderne wiskunde*. Het experiment verving delen van dit hoofdstuk, maar legde andere accenten.

Bij de start van het experiment hadden de leerlingen nog geen ervaring met het applet. Vandaar dat de eerste les begon met kennismaking met het applet en met het kettingmodel van rekenexpressies. De leerlingen werkten paragraaf 1 van het lesmateriaal door. Als huiswerk werd een begin gemaakt met het eerste type opgave van het spelapplet, dat via internet beschikbaar was.

In de tweede les werd verder gewerkt met het eerste deel van het spelapplet. Daarna begonnen de leerlingen aan paragraaf 2 van het lesmateriaal. Het huiswerk bestond uit het werken aan het tweede type opgaven van het spelapplet. De derde les bleek dat meer oefening nodig was, en hebben de leerlingen verder gewerkt aan het spelapplet. Daarna is begonnen aan paragraaf 3. Thuis konden leerlingen hieraan verder werken, of aan het derde type opgaven van het spelapplet. De vierde les hebben de leerlingen gewerkt aan paragraaf 3. Het experiment is afgesloten met een proefwerk.

Voor de deelnemende docenten is een docentenhandleiding gemaakt, waarin de belangrijkste ideeën achter het lesmateriaal toegelicht worden en waarin de lessen in detail gepland zijn. Met name is daarbij aandacht besteed aan het organiseren van klassikale momenten.



In het onderwijsexperiment zijn de volgende gegevens verzameld met betrekking tot het effect van het gebruik van applets op het leren:

1. Audio-opnames van zogenaamde mini-interviews met leerlingen tijdens de les. Deze mini-interviews hebben betrekking op vooraf geïdentificeerde centrale aspecten in het leerproces, die in ijkpuntopgaven in het lesmateriaal geconcretiseerd zijn. Bij deze mini-interviews zijn zo veel mogelijk leerlingen betrokken, om te proberen een overzicht van de klas als geheel te krijgen.
2. Videoregistratie van twee tweetallen leerlingen per klas tijdens het zelfstandig werken. Bij één tweetal is een videocamera gebruikt, bij het andere tweetal de combinatie van screenvideo-software en microfoon. Deze data geven meer gedetailleerd inzicht in het leerproces van enkele leerlingen (figuur 3.13).



Figuur 3.13: Twee leerlingen aan het werk

3. Veldaantekeningen van de observatoren.
4. Ingevulde werkbladen van de leerlingen van één van de twee klassen.
5. Proefwerken van leerlingen van één van de twee klassen.

Daarnaast zijn ook gegevens verzameld met betrekking tot het gedrag van de docent. Deze komen in hoofdstuk 5 over onderwijzen aan de orde.

Omdat het in dit onderwijsexperiment gaat om het verwerven van algebraïsch inzicht in de structuur van expressies aan de hand van de algebraketting als denkmodel, ligt de nadruk op de kwalitatieve gegevens uit mini-interviews en videoregistratie. De andere data zijn gebruikt ter ondersteuning, triangulatie en verificatie.

Ter voorbereiding van de observatie en de mini-interviews is een observatieplan gemaakt. In dit plan worden cruciale stappen in het leerproces onder-

scheiden en is aangegeven op welke manier het werken met het applet daaraan bij kan dragen. Dat leidt tot de identificatie van zogenaamde schema's (zie bij wijze van voorbeeld figuur 3.14). Daarbij wordt aangegeven bij welke opgaven in het lesmateriaal deze schema's zichtbaar zouden moeten worden. Bij deze zogenaamde ijkpuntopgaven zijn vervolgens vragen opgesteld die bij een mini-interview zicht op de beheersing van het schema en de bijbehorende inzichten zouden moeten bieden. Het observatieplan stuurt niet alleen de mini-interviews, maar ook de datareductie en data-analyse.

<p><b>Schema I: Rekenpijlen en rekenexpressies vergelijken</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <i>Waar het om gaat:</i> Het gaat erom dat leerlingen zien hoe een rekenketting en een rekenexpressie samenhangen. Het gaat dus om het 'parsen' van een rekenexpressie, en nagaan of die door een pijlenketting wordt weergegeven. Ook andersom, bij een gegeven rekenketting de expressie reconstrueren.</li> <li>- <i>Technische aspecten:</i> Eigenlijk geen, want in dit schema is de pijlenketting al ingevoerd. Hoogstens is in het applet een controletechniek om 'expressie' aan te vinken, zodat de vertaalslag al door het applet wordt gemaakt.</li> <li>- <i>Conceptuele aspecten:</i> Het gaat hier om het inzicht in de structuur van de rekenbewerkingen, de volgorde en de voorrangregels.</li> <li>- <i>Ijkopgave:</i> Opgave 1d</li> <li>- <i>Verwachting:</i> Leerlingen zullen het moeilijk vinden precies onder woorden te brengen waarom de andere opties fout zijn. Zeker alternatief A is goed te verdedigen. We hopen op opmerkingen in de zin van 'ja maar het applet rekent eerst 3 keer 2 uit, telt er dan 5 bij op, en kwadrateert het hele antwoord, dus dan moet je op papier haakjes zetten.'</li> <li>- <i>Ijkvraag bij mini-interview:</i> Wat heeft A nu fout gedacht? Dan een beetje advocaat van de duivel spelen: maar kwadrateren gaat toch voor optellen? Aandringen op goede formulering en die laten opschrijven.</li> </ul>
--

Figuur 3.14: Fragment uit observatieplan

### 3.5 Resultaten

Deze paragraaf bevat een overzicht van de resultaten van het onderwijsexperiment aan de hand van de kern van de leerlijn, die bestaat uit de volgende drie fasen:

- Pijlenkettingen en algebraexpressies.
- Equivalente kettingen en expressies.
- Inverse bewerkingen.

Bij het bespreken van deze drie fasen worden de verschillende typen data gecombineerd tot een totaalbeeld. De gegevens van het proefwerk komen aan het einde van deze paragraaf apart aan de orde.

### 3.5.1 Pijlenkettingen en algebraïsche expressies

De eerste opgave waarin het verband tussen pijlenketting en algebraïsche expressie expliciet aan de orde komt is vraag 1c (zie figuur 3.9).

De vraag wat de twee andere leerlingen fout hebben gedaan leidt tot discussie, zoals bij Marloes en Dietha:

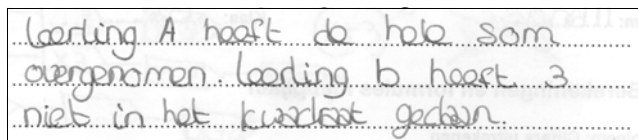
*Marloes:* *Leerling A heeft gewoon de hele som overgenomen.*

*Observator:* *Wat bedoel je daar eigenlijk mee?*

*Dietha:* *Leerling A heeft gewoon dit opgeschreven [ze wijst op de opeenvolgende vakjes van de pijlenketting]. Dat klopt niet want er moeten haakjes staan, want dit moet in zijn geheel in het kwadraat [wijst op het eerste deel van de ketting]. Hij heeft alleen die 5 in het kwadraat gedaan.*

*Marloes:...* *en dan kom je volgens mij op het verkeerde antwoord uit.*

Het goed formuleren van de fouten is moeilijk. Het antwoord dat Marloes opschrijft staat in figuur 3.15.



Figuur 3.15: Antwoord van Marloes op opgave 1c

Analyse van de ingeleverde werkbladen en de mini-interviews laat zien dat de meeste leerlingen antwoorden geven die verwijzen naar de volgorde van de bewerkingen en/of het ontbreken van haakjes. Het werken aan deze opgave met het applet maakt leerlingen bewust van het probleem van het vertalen van pijlenkettingen naar expressies. Uit het overgrote deel van de antwoorden blijkt dat de leerlingen zich dit probleem realiseren en het ook kunnen verwoorden, al zijn de formuleringen niet altijd duidelijk.

Een tweede ijkpuntopgave met betrekking tot het verband tussen pijlenketting en expressie is opgave 3c (zie figuur 3.10). Rinke en Walter zijn trefzeker bij de gezamenlijke aanpak, getuige de volgende observatie.

*Rinke:* *De wortel van  $3 + 5$  gedeeld door 4, keer 7.*

*Walter:* *3 dat is het invoervakje, + 5, gedeeld door 4, de wortel,*

*Rinke:* *en dan keer 7,*

*Walter:* *en dan weer een uitvoervakje.*

Dit tweetal ziet snel dat 3 het invoergetal moet zijn en bouwt snel de pijlenketting. Dat loopt niet bij iedereen zo vlot:

- Michel: [tegen docent] We wilden met de wortel beginnen.  
 Docent: En waarvan neem je de wortel?  
 Agnes: 3 plus 5 gedeeld door 4.  
 Docent verwijst terug naar een eerdere opgave.  
 Michel: O, wortel is pas op het einde, die wortel staat voor de uitvoer.

Michel en Agnes voeren vervolgens de pijlenketting correct in en nemen deze over op het werkblad.

In het algemeen blijken leerlingen wel in te zien dat het getal dat in de drie uitdrukkingen varieert het beste als invoergetal genomen kan worden, zodat de pijlenketting zelf niet meer veranderd hoeft te worden. Op deze manier wordt geanticipeerd op de algebraketting. Om deze opdracht te begrijpen is dus nodig dat leerlingen het idee van een pijlenketting voor één numerieke berekening uitbreiden tot een pijlenketting als klasse van vergelijkbare berekeningen. Bij sommige leerlingen wordt deze conceptuele stap zichtbaar in hun notatie. In figuur 3.16 staat een uitwerking van vergelijkbare opgaven, die duidelijk maakt dat de stap naar het gebruik van tabellen een natuurlijke is voor sommige leerlingen.

**Opdracht 3 Van berekening naar ketting**  
 Hieronder zie je telkens drie berekeningen die je met dezelfde pijlenketting (op het begingetal na) kunt maken. Maak de pijlenkettingen met *expressie* aangevinkt, zodat je kunt controleren of ze kloppen.

**a**

$(6 \times 3 + 8)^2$	
$(6 \times 5 + 8)^2$	
$(6 \times 7 + 8)^2$	

**b**

$5 \times 2^2 + 7$	
$5 \times 4^2 + 7$	
$5 \times 5^2 + 7$	

Handwritten calculations for part (a) show the result 616 for the first expression, and for part (b) show the results 47, 327, and 632 for the three expressions respectively.

Figuur 3.16: Anticiperen op tabellen

De mogelijkheid om tussenantwoorden in de pijlenketting op te nemen leidt bij een tweetal leerlingen tot verwarring: ze denken dat het tussenantwoord nodig is om een directe berekening af te dwingen, terwijl ook in een ketting zonder tussenantwoorden elke stap meteen wordt uitgevoerd. Dergelijke misverstanden zijn moeilijk te voorkomen en vormen behalve tot verwarring ook aanleiding tot interessante discussies, omdat de keuzes van de ontwerpers aan de orde komen.

Als leerlingen moeite hebben met het maken van een pijlenketting, zijn er twee manieren om hen te helpen. De eerste bestaat eruit hen te vragen hoe ze de gegeven uitdrukking uit het hoofd zouden uitrekenen, en hen op de analogie te wijzen:

*Docent: Als je dit uitreken, gewoon uit je hoofd, wat zou je dan als eerste doen?*

Een tweede manier van hulp bieden, met name bij het bepalen van de plaats van het worteltrekken in de pijlenketting, bestaat uit het benoemen van de reikwijdte van het wortelteken, zodat leerlingen zich realiseren wat er wel en niet onder valt. Dat is een concreet aspect van het inzicht in expressies.

In het algemeen bevordert het werken met het applet aan de geformuleerde opdrachten het denken over de structuur en betekenis van algebraïsche expressies en vormt het een vruchtbare bodem voor onderlinge discussies en klassengesprekken. Het probleem van het doorgronden van de structuur van expressies komt duidelijk naar voren. Het applet biedt met de pijlenkettingen een middel aan om die structuur expliciet te maken. Belangrijk is het verschil tussen de pijlenketting in het applet, waarin elke stap meteen wordt uitgevoerd, en de algebraïsche expressie waarin haakjes moeten staan om de volgende bewerking op het geheel uit te voeren. Dit verschil is cruciaal in het leertraject en verdient dan ook klassikale aandacht.

### **3.5.2 Equivalente kettingen en expressies**

Het probleem van het ontwerpen van equivalente expressies komt nadrukkelijk aan de orde in opgave 9 van het lesmateriaal, waar drie verschillende pijlenkettingen gemaakt moeten worden die eenzelfde tabel opleveren (zie figuur 3.11). Bij de eerste pijlenketting zien veel leerlingen snel dat de stapgrootte in de tabel de factor van vermenigvuldiging moet zijn.

*Observator: Hoe kun je aan de tabel zien welk getal je hier [in de keer-operator] moet zetten?*

*Leerling: Keer 0,2.*

*Observator: Ja, waarom doe je dat?*

*Leerling: Omdat er telkens 0,2 bijkomt.*

Voor sommige leerlingen is niet meteen duidelijk dat ze de tabel als geheel moeten namaken. Ze letten alleen op het eerste element: 0 moet 3 worden. Dat kan wijzen op een ‘locale’ en numerieke in plaats van een globale, algebraïsche kijk op de pijlenketting. Toch komen de meeste leerlingen wel uit op de juiste ketting, namelijk  $\times 0,2$  gevolgd door  $+ 3$ .

Bij het verwisselen van de volgorde van de ‘+’- en de ‘ $\times$ ’-operatie zien we veel trial-and-error gedrag. Veel leerlingen laten de vermenigvuldigingsfactor terecht onveranderd, maar weten niet goed wat ze met de optelling moeten doen. In eerste instantie blijft ook die vaak ongewijzigd. Als de tabel dan niet blijkt te kloppen wordt er vaak, zo lijkt het, op goed geluk wat geprobeerd.

*Michel en Agnes veranderen de vermenigvuldigingsfactor weer in 0,2 en proberen kettingen zoals 'plus 9, keer 0,2' en 'plus 18, keer 0,2'. Zo komen ze na enig proberen en verbeteren tot de juiste ketting: 'plus 15, keer 0,2'.*

Als de juiste ketting is gevonden, hebben veel leerlingen de neiging meteen door te gaan met de volgende vraag zonder op het antwoord te reflecteren. Vaak is daarvoor enige aandrang van de docent of de observator nodig. Dan ontstaan wel verklaringen, zo blijkt uit de volgende drie observaties.

*Michel: Dat is natuurlijk ook wel erg logisch ook.*

*Agnes: Ja, nou moeten we het ook wel effe snappen hè.*

*Michel: Kijk want je doet 0,3 keer, 0,2 keer 3 is 15, snap je, 15 keer 0,2 is 3.*

Bij de tweede ketting hebben de leerlingen  $+15, \times 0,2$ .

*Observator: Hoe heb je dat nou gevonden?*

*Leerling: Ik heb hem teruggerekend, [onverstaanbaar]*

*Observator: Hoe reken je dan terug?*

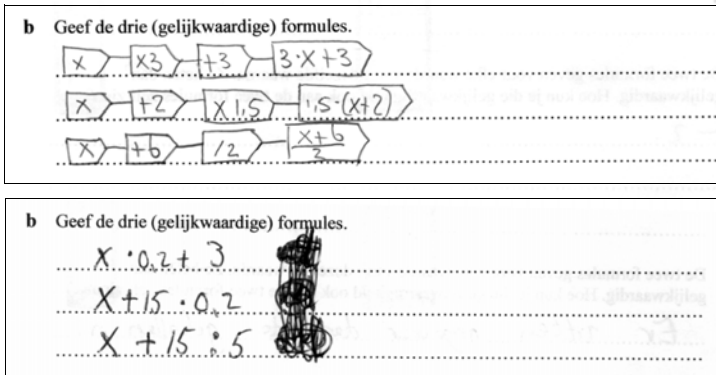
*Leerling: Nou ik had hem zeg maar, 3.2 gedeeld door 0.2 min puntje puntje is 1.*

Bij de derde ketting hebben Michel en Agnes  $+15, /5$ .

*Michel: O ja, natuurlijk, als je 15 deelt door 5 is het natuurlijk 3.*

Toch blijft het verklaren van de equivalentie van expressies moeilijk. Behalve gebrekkige algebraïsche vaardigheid van de leerlingen speelt daarbij vooral de dubbele kijk op equivalentie een rol. Equivalentie pijlenkettingen zijn kettingen die eenzelfde tabel opleveren, dus gelijke uitkomsten voor de hele inputverzameling. Equivalente expressies zijn expressies die via algebraïsche bewerkingen in elkaar kunnen worden overgebracht. Deze twee vormen van equivalentie worden onvoldoende met elkaar in verband gebracht.

Bij opgave 9b wordt gevraagd om de drie gelijkwaardige formules op te schrijven die bij onderdeel 9a gemaakt zijn. Een van de leerlingen (figuur 3.17 boven) combineert hierbij de pijlenkettingnotatie met de conventionele algebraïsche schrijfwijze. Overigens zijn de gegeven antwoorden niet correct. Een andere leerling (figuur 3.17 onder) zet in de tweede en derde expressie ten onrechte geen haakjes. Bij onderdeel 9a heeft deze leerling wel de juiste pijlenkettingen, maar vermoedelijk ontstaan de fouten bij 9b door het verkorten van de notatie voor de pijlenketting. Een pijlenketting overnemen op papier is bewerkelijk, dus leerlingen ontwikkelen daarvoor kortere notaties, die kunnen interfereren met de algebraïsche notatie.



Figuur 3.17: Verschillende notaties bij opgave 9b

In opgave 10 wordt bijvoorbeeld gevraagd pijlenkettingen bij een gegeven tabel te maken en de bijbehorende expressies te noteren (figuur 3.18).

**Opdracht 10 Kettingen verbergen**  
 In de vorige opdracht heb je gezien dat je bij een tabel verschillende pijlenkettingen kunt maken. Zoek bij elk van de volgende tabellen minstens twee pijlenkettingen. Gebruik het applet om deze te vinden (en te controleren). Bij een gevonden pijlenketting geeft het applet zelf de bijbehorende formule, maar als je het makkelijker vindt om eerst een formule te zoeken en daarna de pijlenkettingen, dan is dat natuurlijk ook goed.

a

x	y
0	6
1	9
2	12
3	15
4	18
5	21
6	24
7	27

pijlenkettingen:

$x+2 \cdot 3$ .....

~~$x+3+6$~~ .....

formules:  $3 \cdot (x+2)$ ...  $3 \cdot x + 6$ .....

Figuur 3.18: Interferentie tussen notaties voor kettingen en expressies

De uitwerking van de leerling laat zien dat ze de expressie  $3 \cdot (x + 2)$  correct noteert, maar voor de pijlenketting de verwarrende notatie  $x + 2 \cdot 3$  gebruikt. Bij een andere leerling zien we een ‘rijnotatie’ ontstaan:

$$t \times 3 = 3 \cdot t + 6 = 3 \cdot t + 6.$$

Kennelijk brengt het pijlenkettingmodel dus het risico van een dubbelzinnige notatie met zich mee.

Een andere complicatie is dat het applet anders rekt dan de rekenmachine, die de leerlingen soms ook tijdens het werken gebruiken. De rekenmachine houdt de voorrangregels aan, terwijl het applet stap voor stap evalueert in

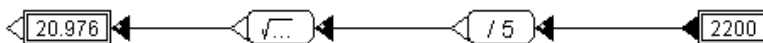
volgorde van invoeren. In opgave 9 (figuur 3.11) bijvoorbeeld zoeken leerlingen een pijlenketting die bij een input van 1 een output van 3,2 oplevert. Een tweetal gebruikt daarvoor de rekenmachine. Ze toetsen in  $1 + 11 \times 0,2$  en krijgen de gewenste 3,2 als antwoord. Toch geeft de pijlenketting  $+ 11, \times 0,2$  bij invoer 1 uitvoer 2,4. Dit punt, dat overigens al vanaf het begin van het onderwijsexperiment speelt, roept vragen op die interessant zijn om met de leerlingen te bespreken.

Ondanks de complicaties met de notatie van pijlenkettingen en de voorrangregels bij het uitvoeren van het rekenwerk – en misschien ook wel dank zij deze ‘hobbels’ – lijken de opdrachten over equivalentie bij te dragen aan een beter inzicht in de structuur van de expressie. Opvallend is dat de vervolgoopgave 10 veel sneller is gemaakt dan opgave 9 en met betere resultaten. Er is inderdaad sprake van een leerproces.

### 3.5.3 Inverse bewerkingen

Het opbouwen van de omkeerketting komt nadrukkelijk aan de orde in opgave 13 van het lesmateriaal (figuur 3.12). In deze opgave valt een zandzakje van 2200 meter hoogte. De afstand  $a$  na een valtijd van  $t$  seconden wordt gegeven door de formule  $a = 5t^2$ .

Als de vraag is na hoeveel seconden het zakje op de grond valt, zien twee leerlingen Rinke en Walter al snel dat de pijlenketting moet worden omgekeerd (figuur 3.19).



Figuur 3.19: Omkeerketting van Rinke en Walter

Rinke: Dus dan moeten we 2200.

Walter: Nee, 2200 is dit [wijst uitvoervakje aan].

Rinke: Nou dan moeten we het andersom doen. Dus dan moeten we gedeeld door 5 en dan de wortel.

Ze zetten de ketting van rechts naar links op het scherm (zie figuur 3.19).

Rinke: 21 seconden gewoon.

[...]

Walter: [zegt wat hij opschrijft] We hebben teruggerekend dus keer 5 wordt gedeeld door 5 en kwadraat wordt de wortel.

[...] De docent komt langs.

Docent: Moet je eerst de wortel nemen en dan delen door 5, of eerst delen door 5 en dan de wortel nemen?

Rinke, Walter: Eerst delen door 5.

Walter: Dus tussen haakjes.



Bij veel leerlingen loopt deze opgave minder vlot. Kim en Dietha bijvoorbeeld lijken het spoor bijster te zijn. Ze spelen veel met het applet en proberen zonder dat er een duidelijke strategie uit naar voren komt.

*Ze lezen de vraag, vragen zich af hoe ze dat gaan doen, maar gaan dan even ongericht spelen. Grafiek erbij en weer weg, de hulpknop met de uitleg over het applet.*

[...]

*Ze voelen dat ze iets moeten omkeren, maar keren alleen de volgorde van de bewerking om. Ze zien dat het niet klopt en veranderen de maal 5 in gedeeld door 5. Dan blijkt het te kloppen voor afstand = 0 en afstand = 5. Voor de zekerheid kijken ze ook nog naar afstand = 20 en zien dat het daar niet klopt. Ze vragen zich af waarom die andere twee wel kloppen. Ze gooien de hele pijlenketting weer weg en steken hun vinger op en wachten.*

De observator komt erbij en vindt het gezien de vorderingen en de verwarring nodig om sterk in de goede richting te sturen.

*Observator: Je hebt nu die ketting. Eerst kwadrateren en dan keer 5.  
Hoe kom je nu terug van de afstand naar de tijd?*

*[wijst op het scherm van uitvoer naar invoer]*

*Kim: Gedeeld door 5 en dan..... tsja... hoe doe je dat... kwadraat.*

*Observator: Ja, delen door 5 om dat keer 5 op te heffen en dan wil je nog dat kwadraat opheffen, weet je dat moet?*

*Kim: Nee...*

*Dietha: Wortel!*

Op hun werkbladen schrijven Kim en Dietha echter niet de formule voor de omkeerketting op, maar delen ze de tijd door 2. De opgave komt bij hen dus niet tot een bevredigend einde.

Maak die pijlenketting en gebruik die om te berekenen wanneer de zandzak op de helft is (weer op 1/1000<sup>e</sup> seconde nauwkeurig.)

Pijlen ketting:  $1100 : 5 \rightarrow 220 \rightarrow \sqrt{\quad} \rightarrow 14,832$

Zandzak op de helft als  $t = 14,832 \text{ sec}$

Welke formule hoort er bij die pijlenketting?  $\sqrt{\frac{g}{2}} = t$   $t = \sqrt{\frac{2g}{g}}$

Figuur 3.20: Goede uitwerking van een van de leerlingen

In het algemeen blijkt uit de werkbladen dat het werken met de omkeerketting slechts gedeeltelijk is overgekomen. Enkele leerlingen geven goede ant-

woorden en formuleren die zelfs in algemene zin (figuur 3.20). Bij veel leerlingen geeft het werk echter de indruk dat de omkeerketting op een moment komt dat ze er nog geen behoefte aan hebben en dat ze het voorafgaande nog niet helemaal verwerkt hebben. Dat leidt tot richtingloos werken, zonder dat de grote lijn voldoende helder is. De kwaliteit van de antwoorden op de werkbladen is minder dan bij voorgaande opgaven.

Alles overziend is de functie van het uitvoeren van inverse bewerkingen met het applet onvoldoende uit de verf gekomen. Bij enkele leerlingen, die de grote lijn van het lesmateriaal onderkenden en het voorgaande verwerkt hadden, droeg dit onderdeel wel bij aan het inzicht in de expressies en de pijlenkettingen; voor de meerderheid van de leerlingen leek deze paragraaf te vroeg te komen en niet aan te sluiten bij hun behoeften.

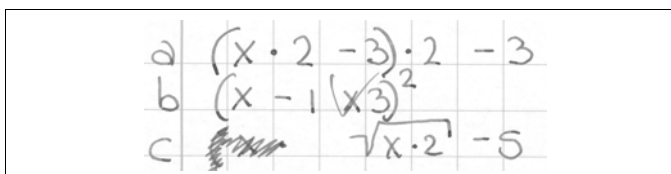
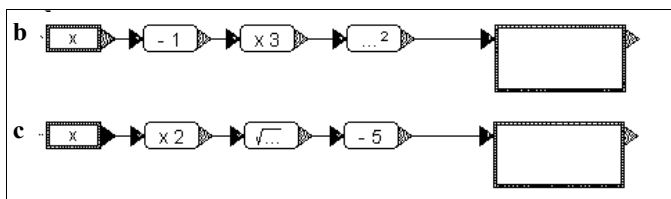
**3.5.4 Resultaten van het proefwerk**

Van het proefwerk na afloop van het onderwijsexperiment zijn de uitwerkingen van een van de twee klassen helaas verloren gegaan. We baseren deze paragraaf dus op de resultaten van de andere klas.



Figuur 3.21: Vraag 1b van het proefwerk

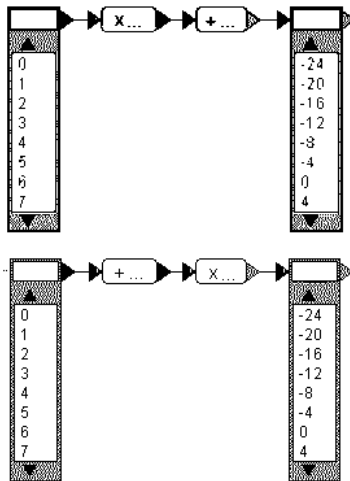
In de eerste opgave van het proefwerk wordt gevraagd om bij een drietal gegeven expressies pijlenkettingen te maken (figuur 3.21). Deze opgave is vrij goed gemaakt: gemiddeld is 71% van het maximum aantal punten behaald.



Figuur 3.22: Vragen 2b en 2c met uitwerking van een leerling

In de tweede opgave is de vraag omgekeerd, namelijk om bij een gegeven pijlenketting de bijbehorende expressie te vinden. Deze vraag kende vier onderdelen, met scores van respectievelijk 42, 0, 79 en 8%. De vragen b en c

(zie figuur 3.22 boven) scoren dus zeer verschillend. Veelgemaakte fouten bij b zijn dat het kwadraat alleen bij de 3 wordt gezet of dat er geen haakjes om  $x - 1$  staan (zie figuur 3.22 onder). Een verklaring hiervoor ligt in de moeilijkheden die ontstaan als een vermenigvuldiging of deling plaatsvindt na een optelling of aftrekking. Daarnaast is de reikwijdte van machten en wortels moeilijk te overzien.



Figuur 3.23: Opgave 3 van het proefwerk

Bij opgave 3 zijn twee equivalente kettingen gegeven (figuur 3.23) waarbij de leerling eerst gevraagd wordt uit te leggen hoe de gelijkwaardigheid blijkt. Dit onderdeel scoorde 72%. De volgende twee onderdelen, waarin gevraagd werd om de bewerkingen in de pijlenkettingen in te vullen en de bijbehorende formules te geven, scoorden slechts 32 respectievelijk 22%. Veel leerlingen zijn niet in staat de formules te vinden. Fouten worden gemaakt met haakjes en negatieve getallen; een aantal leerlingen geeft helemaal geen antwoord.

De conclusie uit deze proefwerkresultaten is dat leerlingen beter in staat zijn om bij een gegeven formule een pijlenketting te maken (opgave 1) dan om uit een gegeven pijlenketting een expressie af te lezen (opgave 2). De verklaring daarvoor is dat met name in de oefenapplets het maken van een pijlenketting bij een expressie meer aandacht heeft gekregen dan het lezen van expressies uit pijlenkettingen. In die zin zijn de resultaten niet verbazingwekkend. De matige resultaten van opgave 3 verklaren we uit het feit dat de leerlingen met pen en papier geen mogelijkheid hebben om een pijlenketting te proberen en op basis van het resultaat de ketting aan te passen. Dit ‘trial-and-improve’ gedrag zijn de leerlingen kennelijk onvoldoende ontstegen.

### 3.6 Conclusie

De vraag die we ons aan het begin van dit hoofdstuk stelden is:

*Hoe biedt het applet AlgebraPijlen de leerlingen een geschikt model om het inzicht in de betekenis en de structuur van algebraïsche expressies te bevorderen?*

In paragraaf 3.3 zijn de verwachtingen geformuleerd aan de hand van een hypothetische leerlijn die bestaat uit drie fasen: pijlenkettingen en algebraexpressies, equivalente kettingen en expressies, en inverse bewerkingen. We gebruiken deze drie fasen als kapstok voor de volgende conclusies.

1. *Het maken van pijlenkettingen bij algebraexpressies en het 'lezen' van expressies uit algebrakettingen bevordert het denken over de structuur en betekenis van algebraexpressies. Het applet vormt een geschikte werkomgeving hierbij.*

Uit de observaties en mini-interviews blijkt dat het werken met het applet het denken over de structuur en de betekenis van algebraïsche expressies bevordert. Het maken van pijlenkettingen dwingt de leerling zich de volgorde van de bewerkingen en de reikwijdte ervan te realiseren. Het reconstrueren van een expressie uit een pijlenketting heeft een vergelijkbaar effect, maar wordt door leerlingen moeilijker gevonden en verdient meer aandacht in de les. De verschillende vormen van feedback van het applet – getallen, tabellen en met name expressies – zijn krachtige hulpmiddelen bij het doorzien van algebraïsche structuren. Een lastig punt bij dit alles is dat de pijlenketting en de expressie in feite beide verschillende aspecten van het onderliggende functiebegrip benadrukken: de pijlenketting accentueert het procedurele machientjeskarakter en de expressie het statische objectkarakter. Dat verschil moet duidelijk gemaakt worden om te voorkomen dat informele notaties van leerlingen voor pijlenkettingen en conventionele notaties voor algebraïsche expressies door elkaar gaan lopen. Ook zou nadruk op deze verschillen kunnen voorkomen dat leerlingen moeite hebben met de stapsgewijze evaluatie van de pijlenkettingen in het applet in vergelijking met de voorrangsregels en de haakjes in de expressies.

2. *Het maken van equivalente pijlenkettingen en het verklaren van de equivalentie van de bijbehorende expressies is een effectieve manier om de aandacht op de structuur van algebraïsche expressies te richten.*

In eerste instantie moeten leerlingen het idee van equivalentie leren kennen. De tabeloptie van het applet ondersteunt het idee: leerlingen ervaren dat een ketting op een hele verzameling getallen werkt. De activiteit van het ontwerpen van equivalente kettingen, bijvoorbeeld door het verwisselen van bewerkingen, leidt tot redeneringen over de structuur van de

bijbehorende expressies. Equivalentie heeft echter twee gezichten, het gezicht van de gelijke tabellen en het gezicht van de algebraïsche equivalentie die door manipulaties is aan te tonen. Leerlingen vinden het moeilijk deze twee aspecten met elkaar in verband te brengen. De activiteiten waren echter productief en zinvol. Het ontwerpen van een pijlenketting bij een gegeven tabel is hierop een nuttige voorbereiding.

3. *Het maken van omkeerkettingen in het applet en het onderzoeken van de bijbehorende inverse expressies is in het onderwijsexperiment onvoldoende uit de verf gekomen, mogelijk vanwege een te kort leertraject.*

In principe lijkt het idee om een pijlenketting om te draaien en op die manier de inverse ketting te construeren kansrijk en zinvol. Het idee is voor leerlingen niet onnatuurlijk en bereidt voor op het oplossen van vergelijkingen. In het onderwijsexperiment is dit niet goed overgekomen. De verklaring hiervoor zoeken we in het te hoge tempo binnen het onderwijsexperiment. De voorgaande stof heeft onvoldoende tijd gekregen om te bezinken, zodat de leerlingen nog niet toe waren aan deze volgende stap. In een langer experiment, of na een onderbreking, zou het de moeite waard zijn het effect van het maken van omkeerkettingen nader te onderzoeken.

## Referenties

- Boon, P. & Drijvers, P. (in druk). *Chaining operations to get insight in expressions and functions*. Proceedings van de CERME4 conferentie, februari 2005, Sant Feliu de Guixol, Spanje. <http://cerme4.crm.es/>
- Drijvers, P. (2003). Algebraïsche vaardigheden, symbol sense en ICT. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 23(1), 38-42.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.
- Tall, D. & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 125-147.
- Zorn, P. (2002). *Algebra, computer algebra and mathematical thinking*. Contribution to the 2nd international conference on the teaching of mathematics, 2002, Hersonissos, Crete. [www.stolaf.edu/people/zorn](http://www.stolaf.edu/people/zorn)



## 4 Case study *VergelijkingenOplossen*

### 4.1 Doel van het onderwijsexperiment *VergelijkingenOplossen*

De tweede cyclus binnen het kortlopend onderwijsonderzoek richt zich op het oplossen van vergelijkingen. Om verschillende redenen is dit een geschikt onderwerp voor het onderzoeken van het leren en onderwijzen van algebra met applets. Ten eerste is vergelijkingen een centraal en moeilijk onderwerp in de onderbouw van havo en vwo. Hoewel er verschillende methoden zijn om vergelijkingen op te lossen, blijven leerlingen het oplossen lastig vinden.

Ten tweede zijn er binnen de projecten Wisweb en Welp enkele applets ontwikkeld voor het oplossen van vergelijkingen die, zo blijkt uit de ervaringen van de proefscholen, in de klas succesvol waren (zie hoofdstuk 2). De vraag is natuurlijk wat het succes van deze applets verklaart.

Ten derde zijn de applets voor het oplossen van vergelijkingen vooral te beschouwen als oefenapplets. Daarmee vult deze onderzoekscyclus de eerste aan, waarin het modelapplet *AlgebraPijlen* centraal stond (zie hoofdstuk 3). De eerste onderzoeksvraag van dit project is hoe het werken met applets de leerling mogelijkheden biedt denkmodellen te ontwikkelen en vaardigheden op een gevarieerde en motiverende manier te oefenen. In deze tweede onderzoekscyclus gaat het met name om het oefenen van vaardigheden, in dit geval het oplossen van vergelijkingen met de weegschaal-methode, zoals die in de applets *VergelijkingenOplossen* wordt aangeboden. De onderzoeksvraag is voor deze cyclus dus als volgt geconcretiseerd:

*Welke factoren maken dat het oefenen van het oplossen van vergelijkingen met de applets *VergelijkingenOplossen*, ingebed in een digitale leeromgeving, tot betere prestaties van leerlingen leiden?*

### 4.2 De applets *VergelijkingenOplossen*

In deze onderzoekscyclus is gebruik gemaakt van een sequentie van drie applets, die zijn ingebed in een eenvoudige digitale leeromgeving. De applets zijn drie varianten van het basisapplet *VergelijkingenOplossen* en hebben als titels ‘Vind de juiste strategie’, ‘Zoek zelf de oplossing’ en ‘Toets je vaardigheid’. De applets en de leeromgeving zijn ontwikkeld door Peter Boon. De applets zijn te vinden op [www.wisweb.nl/kloo](http://www.wisweb.nl/kloo).

#### 4.2.1 *Vind de juiste strategie*

Dit applet, het eerste in de reeks, is het strategieapplet (figuur 4.1). De leerling kiest in het applet een niveau en een vergelijking. De betreffende vergelijking is van een bepaald type, maar de coëfficiënten worden door een toe-

valsgenerator bepaald. Vervolgens kan de leerling de vergelijking oplossen met de weegschaalmethode of balansmethode. Deze aanpak komt erop neer dat de leerling aan beide kanten van het gelijkteken dezelfde bewerking uitvoert, om ervoor te zorgen dat de twee ‘armen van de weegschaal’ in balans blijven. Dit weegschaalmodel komt in de meeste schoolboeken aan de orde en wordt met dit applet geoefend. Het applet biedt vijf niveaus met elk tien vergelijkingen van een vergelijkbaar type. De nieuwe elementen in de hogere niveaus zijn negatieve coëfficiënten, gebroken coëfficiënten en uitdrukkingen met haakjes.

Los de lijst met vergelijkingen op via de weegschaal-methode.

Druk op een van de rode knoppen om aan beide kanten dezelfde bewerking uit te voeren. Zorg dat de vergelijking steeds eenvoudiger wordt en uitkomt op:  $x = \text{getal}$ . De vergelijking is dan opgelost.

Niveau 1  
 Niveau 2  
 Niveau 3  
 Niveau 4  
 Niveau 5

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Figuur 4.1: Het strategieapplet

Bij deze strategievariant gaat het om het kiezen van de juiste vervolgstap. In het scherm hierboven gaat het om de vergelijking  $4x - 2 = -6x - 14$ . Het is nu aan de leerling om te beslissen welke stap de oplossing dichterbij brengt. Als hij besluit dat aan beide kanten 2 moet worden opgeteld, klikt hij op de plus-knop en voegt 2 toe. Het applet geeft nu de volgende regel op basis van deze bewerking:  $4x = -6x - 12$ . Op deze manier kan de leerling zich concentreren op de te zetten stappen naar de oplossing, zonder zich te bekommeren om het algebraïsch rekenwerk. Stappen die de oplossing niet dichterbij brengen kunnen ongedaan gemaakt worden met de Terug-knop, maar leveren ook feedback op die de leerling op het spoor kan zetten van een goede strategie.

#### 4.2.2 Zoek zelf de oplossing

Het tweede applet in de reeks is het spelapplet (figuur 4.2). Qua opbouw en interface lijkt het sterk op het eerste: het gaat om het oplossen van eerste-graads vergelijkingen met de weegschaalmethode. Er zijn echter drie belangrijke verschillen. Ten eerste moet de leerling na het bepalen van de volgende



stap (in figuur 4.2 allereerst de bewerking  $+1x$ ) zelf de nieuwe vergelijking invoeren, in dit geval  $3x - 7 = 16$ . Het applet geeft feedback in de vorm van een krulletje of een kruisje dat aangeeft of de leerling de beoogde bewerking goed heeft uitgevoerd. Als dat niet zo is, kan de leerling de fout verbeteren. Als op die manier de goede oplossing wordt gevonden, krijgt de leerling 10 punten. Deze puntentelling is het tweede verschil met het vorige applet. Als de leerling de hulp-knop gebruikt, geeft het applet de nieuwe vergelijking, maar gaan er wel 2 punten van de 10 af. Op deze manier is een spelelement ingebouwd, waardoor leerlingen in het algemeen gemotiveerd worden. Het derde verschil is de knop  $\square$ , die staat voor equivalentie. Als de leerling die bewerking kiest, is hij vrij om elke equivalente vergelijking in te voeren, wat het mogelijk maakt om meerdere stappen in één regel te zetten.

Los de lijst met vergelijkingen op via de weegschaal-methode.

Druk op een van de rode knoppen en voer een bewerking uit op de vergelijking. Vul bij elke stap de nieuwe vergelijking in. Je kunt hulp krijgen met de hulp-knop, maar dan krijg je minder punten.

Een goede oplossing levert minimaal 5 punten op. Zonder hulp wordt dat 10 punten per opdracht.

Niveau 1      Score: 0  
 Niveau 2      Score: 10  
 Niveau 3      Score: 0  
 Niveau 4      Score: 0  
 Niveau 5      Score: 0

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Scores: 10

Figuur 4.2: Het spelapplet

#### 4.2.3 Toets je vaardigheid

De derde variant van het applet ‘Toets je vaardigheid’, is het toetsapplet (figuur 4.3). Het accent is hier verschoven van het kiezen van de geschikte bewerkingsstap naar het uitvoeren. De belangrijkste knop is de equivalentieknop  $\square$ . De leerling moet zelf de equivalente vergelijkingen bepalen en invoeren. Omdat het applet geen directe feedback geeft, is de leerling aangewezen op zelfcontrole en staat de werkwijze dicht bij het werken met pen-en-papier. Wel kan, bijvoorbeeld als een aantal vergelijkingen is opgelost, de Kijkna-knop worden gebruikt. Herhaald gebruik hiervan kost punten, waarmee het spelelement is gehandhaafd. Ook kan de leerling met de Terug-knop stappen ongedaan maken en opnieuw beginnen.

Vanwege de overeenkomst met het werken met pen en papier biedt dit toetsapplet de leerlingen de gelegenheid te oefenen voor de toets, die ook met pen en papier wordt afgenomen.

Hieronder staan voor verschillende niveaus een aantal vergelijkingen. Druk op de knop met de pijl omlaag om een vergelijking stapgewijs op te lossen.

Als je alle opdrachten van een niveau gedaan hebt druk je op de nakijkknop. Je krijgt een score en je kunt zien welke stappen goed of fout waren.

Je kunt ook tussendoor de nakijkknop gebruiken, maar dat kost punten.

Niveau 1    Score: 0  
 Niveau 2    Score: 10  
 Niveau 3    Score: 0  
 Niveau 4    Score: 0  
 Niveau 5    Score: 0

1    2    3    4    5    6    7    8    9    10

Scores: 10      1 keer nagekeken

-3 - 2x = 3x - 20  
 17 = 5x  
 x =  $\frac{17}{5}$

gelijkwaardig met.  
 gelijkwaardig met.

Kijk na    Opnieuw

Figuur 4.3: Het toetsapplet

#### 4.2.4 De leeromgeving

Ten slotte nog enkele opmerkingen over de leeromgeving waarin deze serie van drie applets is ingebed. Ervaringen uit met name het Welp-project leren dat het werken met applets een vluchtig karakter kan hebben. Leerlingen schrijven in het algemeen weinig in hun schrift. Als ze al iets opschrijven, is het meestal alleen het antwoord en niet de strategie die tot dit resultaat heeft geleid. Het gevolg is dat leerlingen weinig ‘tastbaars’ overhouden aan het werken met het applet en dat de docent niet kan nagaan wat ze gedaan hebben.

De leeromgeving die voor het doel van dit onderzoek is ontwikkeld, voorziet in deze twee hiaten. Leerlingen krijgen via internet een individuele toegang tot de omgeving met de drie applets. Het werk van de leerlingen wordt doorlopend opgeslagen, zodat ze elk moment kunnen terugkijken op welke manier ze een vergelijking hebben opgelost. Ook kunnen ze vanaf elke computer met internet verder werken. De docent heeft toegang tot alle gegevens en kan dus de voortgang van de leerlingen controleren, nagaan of er huiswerk wordt gemaakt en de moeilijkheden inventariseren.

In figuur 4.4 staat bijvoorbeeld een uitwerking van een van de leerlingen. De oplossing van de specifieke vergelijking is zichtbaar, evenals de totaalscore op de verschillende niveaus.

De digitale leeromgeving is beschikbaar via [www.wisweb.nl/kloo](http://www.wisweb.nl/kloo).

Max Bos opdracht 3

Hieronder staan voor verschillende niveaus een aantal vergelijkingen. Druk op de knop met de pijl omhoog om een vergelijking stappewijs op te lossen.

Als je alle opdrachten van een niveau gedaan hebt druk je op de nakijkknop. Je krijgt een score en je kunt zien welke stappen goed of fout waren.

Je kunt ook tussendoor de nakijkknop gebruiken, maar dat kost punten.

<input type="radio"/> Niveau 1	Score: 88
<input type="radio"/> Niveau 2	Score: 0
<input checked="" type="radio"/> Niveau 3	Score: 61
<input type="radio"/> Niveau 4	Score: 0
<input type="radio"/> Niveau 5	Score: 0

Scores: 10 10 10 10 10 10 10 10 6

Kijk na Opnieuw Bewaar

4 keer nagekeken

Workspace content:

Calculator:  $\sqrt{\square}$   $\square^{\square}$   $\frac{\square}{\square}$   $(\square)$  Terug

Equations:

- $5(x - 1) = 9x - 12$  (gelijkwaardig met.)
- $5x - 5 = 9x - 12$  (gelijkwaardig met.)
- $5x = 9x - 7$  (gelijkwaardig met.)
- $-4x = -7$  (gelijkwaardig met.)
- $x = 1,75$  (gelijkwaardig met.)

Figuur 4.4: Uitwerking van een leerling opgeslagen in de leeromgeving

### 4.3 Opzet van het onderwijsexperiment

De onderwijsexperimenten met deze serie van applets vonden in het najaar van 2004 plaats in vier klassen 2 havo/vwo van het Sint Gregorius College in Utrecht. Op deze school, die heeft deelgenomen aan het Wisweb-project en het Welp-project, vond ook het eerste onderwijsexperiment rond algebra-pijlen plaats dat beschreven is in hoofdstuk 3. Er waren twee docenten die elk aan twee parallelklassen les gaven. Een van deze twee docenten was ook betrokken bij het eerste onderwijsexperiment van dit onderzoek; afgezien van doubleurs was de leerlingpopulatie nieuw.

Bij de start van het experiment hadden de leerlingen nog geen ervaring met het oplossen van vergelijkingen. In de gebruikte methode, deel 2b hv van de zevende editie van *Moderne wiskunde*, komen vergelijkingen in hoofdstuk 9 aan bod. Vanwege de tijdsfasering van het onderzoek is hoofdstuk 9 meteen na hoofdstuk 2 aan de orde gekomen. Daardoor hadden de leerlingen nog geen ervaring met algebraïsche vaardigheden zoals het wegwerken van haakjes in expressies.

Het experiment begon met een drietal lessen waarin de leerlingen op de gebruikelijke manier de eerste vijf pagina's van hoofdstuk 9 doorwerkten. Daarin komt het oplossen van vergelijkingen aan de orde met de weegschaal-methode of balansmethode.

Het denkmodel voor de leerlingen bestond er dus uit dat een vergelijking wordt voorgesteld als een balans die in evenwicht is en die in evenwicht blijft doordat er telkens aan beide kanten evenveel wordt bijgedaan of afgehaald (figuur 4.5).

**10** Om de vergelijking  $4x + 2 = 6x + 7$  op te lossen moet je eerst links en rechts  $4x$  aftrekken.

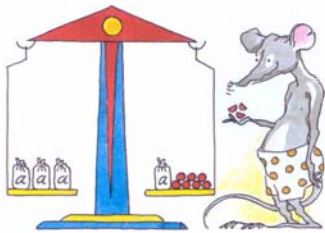
**a** Welke vergelijking krijg je dan?  
**b** Wat moet er nu links en rechts gedaan worden?  
**c** Los de vergelijking verder op.

VOORBEELD

$$4x + 2 = 6x + 7$$

$$\begin{array}{r} -4x \quad -4x \\ \hline 2 = \dots + 7 \\ \dots x = \dots \\ x = \dots \end{array}$$

Bij de balans doe je steeds links en rechts hetzelfde om hem in evenwicht te houden. Bij een vergelijking doe je links en rechts van het gelijkteken ook steeds hetzelfde. Hierbij kun je niet altijd aan zakken knikkers denken. In een zakje kunnen bijvoorbeeld geen  $3\frac{1}{2}$  of  $-3$  knikkers zitten.



Figuur 4.5: De weegschaal in Moderne wiskunde, 7de editie deel 2b hv, pag. 17

Met dit model zijn enkele vergelijkingen opgelost (figuur 4.6).

**11** Los de volgende vergelijkingen op.

**a**  $6a + 1 = 4a + 21$   
**b**  $2b + 4 = 5b + 4$   
**c**  $8c + 2 = 7c + 30$   
**d**  $5d + 3 = d + 51$   
**e**  $62 + 2e = 6 + 9e$   
**f**  $4f + 1 = 9 + 2f$

✘ **Extra oefening – opdracht E-2**

Figuur 4.6: Oefenopgaven in Moderne wiskunde, 7de editie deel 2b hv, pag. 17

Aan het einde van de derde les maakten de leerlingen een voortoets die bestond uit een vijftal vergelijkingen die ze op papier moesten oplossen.

In les 4 van het onderwijsexperiment werkten de leerlingen in tweetallen met het applet ‘Vind de juiste strategie’. Er werd ingelogd onder de naam van één van de twee leerlingen. De les werd ingeleid door de docent, die het verband tussen het werken met pen en papier aangaf, de bediening van het applet demonstreerde en uitleg gaf. De leerlingen konden per niveau enkele vergelijkingen oplossen en bepaalden zelf of ze aan een volgend niveau toe waren dan wel meer wilden oefenen op het huidige niveau.

Het huiswerk was om thuis minstens één niveau van het spelapplet ‘Zoek zelf de oplossing’ te maken. Dat konden de leerlingen individueel doen onder hun eigen loginnaam.

Les 5 begon met het nabespreken van het huiswerk. Afhankelijk van de voortgang konden de leerlingen verder gaan met het spelapplet, dan wel beginnen met het derde applet, ‘Toets je vaardigheid’. Dit gebeurde in principe met dezelfde tweetallen als in les 4 en onder dezelfde loginnaam. Het huiswerk bestond uit het verder werken aan het toetsapplet als voorbereiding op de natoets in les 6.

Les 6 begon met de natoets, bestaande uit dezelfde vijf vergelijkingen als de voortoets die weer met pen en papier moesten worden opgelost. Vervolgens ging de les verder met paragraaf 9.4 uit het boek. Nadat het hoofdstuk op die manier is afgemaakt, werd het afgerond met een proefwerk.



Figuur 4.7: Leerlingen aan het werk

In het onderwijsexperiment zijn de volgende gegevens verzameld:

1. Uitwerkingen van voortoets en natoets.
2. Resultaten van het werk van leerlingen (in de les en thuis) zoals opgeslagen in de digitale leeromgeving.
3. Veldaantekeningen van observaties tijdens de lessen.
4. Video-opnamen van klassikale delen van de lessen in het computerlokaal (figuur 4.7).
5. Reacties van de docenten middels een interview na afloop.

Omdat het in dit onderwijsexperiment gaat om het verwerven en oefenen van algebraïsche vaardigheden, ligt de nadruk op de kwantitatieve gegevens, zoals de resultaten van voortoets en natoets, en de resultaten van het werk in de klas en thuis zoals opgeslagen in de digitale leeromgeving.

## 4.4 Resultaten

### 4.4.1 Resultaten voortoets en natoets

De voortoets en natoets waren identiek en bestonden uit de volgende vijf vergelijkingen die de leerlingen met pen en papier moesten oplossen.

1.  $5x + 5 = 17 + x$

2.  $18 - 4x = 6x - 12$

3.  $2x + 8 = -4x - 16$

4.  $3\frac{1}{2}x + 7 = 3x - 2\frac{1}{2}$

5.  $2(4x + 1) = 3x + 20$

Vergelijking 1 is een eenvoudige eerstegraads vergelijking. Vergelijkingen 2 en 3 zijn iets ingewikkelder omdat er ook negatieve coëfficiënten in voorkomen. Vergelijking 4 bevat gebroken coëfficiënten en in vergelijking 5 zijn de haakjes een extra moeilijkheid.

De voortoets en natoets zijn door de onderzoekers nagekeken. Voor elke vergelijking konden de leerlingen 0, 0.5 of 1 punt behalen. Door een misverstand zijn de voortoetsen in één van de klassen aan de leerlingen teruggegeven voor ze door de onderzoekers waren nagekeken. Omdat niet al het werk is achterhaald, is het aantal leerlingen waarvan zowel voor- als natoets door de onderzoekers zijn nagekeken 88 voor de vier klassen samen.

Vergelijking	Voortoets	Natoets	Vooruitgang
1	0.78	0.81	0.03
2	0.23	0.69	0.46
3	0.26	0.67	0.41
4	0.27	0.63	0.35
5	0.07	0.41	0.34
Totaal	1.61	3.20	1.59

Figuur 4.8: Scores van voor- en natoets

De resultaten worden samengevat in figuur 4.8. De gemiddelde vooruitgang en de totalen zijn berekend voor afronding, waardoor bij item 4 de vooruitgang 0.35 is en niet 0.36, en bij de natoets het totaal 3.20 en niet 3.21.

De gemiddelden binnen de kolommen voortoets en natoets nemen af, wat te verwachten is vanwege de stijgende moeilijkheidsgraad. De gemiddelde vooruitgang per item is significant, met uitzondering van vergelijking 1, die bij de voortoets al hoog scoorde (voor items 2 t/m 5:  $p < 0.000$ , gekoppelde

$T$ -toets).<sup>1</sup> De totale score is ongeveer verdubbeld. Ook dat is een significante vooruitgang ( $p < 0.000$ , gekoppelde  $T$ -toets). Er is dus sprake van een significant leereffect.

$$\begin{array}{l}
 3. \quad 2x + 8 = -4x - 16 \\
 -8 \quad \downarrow \quad 2x = -4x - 24 \quad \downarrow \quad -8 \\
 +4x \quad \downarrow \quad 6x = -24 \quad \downarrow \quad +4x \\
 :6 \quad \downarrow \quad x = -4 \quad \downarrow \quad :6
 \end{array}$$

Figuur 4.9: Notaties van het applet op papier

Wat opvalt bij het werk van de leerlingen is dat de manier van opschrijven nauw aansluit bij de notatie in het applet, die ook het weegschaalmodel symboliseert. In figuur 4.9 gebruikt een leerling de pijlen aan twee kanten van de vergelijking om aan te geven welke bewerking op beide leden wordt uitgevoerd. Anderen gaan daarin minder ver en zetten bijvoorbeeld alleen bogen in plaats van pijlen, of een boog aan één kant in plaats van twee, of helemaal niets.

Vergelijking 5 luidt:  $2(4x + 1) = 3x + 20$ . De matige resultaten hier worden veroorzaakt door de haakjes, waar veel leerlingen geen raad mee weten. Van het linkerlid wordt bijvoorbeeld gemaakt  $2 + 5x$  of  $24x + 1$ . Ook wordt binnen de haakjes  $3x$  afgetrokken:  $2(4x + 1) = 3x + 20$  wordt  $2(x + 1) = 20$ . Een leerling telt de 2 op bij de 1 binnen de haakjes (figuur 4.10).

$$\begin{array}{l}
 4x + 3 = 3x + 20 \\
 1x + 3 = 20 \\
 1x = 17 \\
 x = 17
 \end{array}$$

Figuur 4.10: Haakjes verkeerd uitgewerkt

Er zijn ook leerlingen die dit probleem ontwijken door eerst de vergelijking door 2 te delen, en leerlingen die de haakjes wel goed uitwerken.

De moeilijkheden met de haakjes zijn begrijpelijk als we ons realiseren dat hoofdstuk 9 naar voren is gehaald, waardoor de leerlingen het hoofdstuk over

<sup>1</sup> Significanties zijn berekend met SPSS 9.0

haakjes hebben overgeslagen. Tijdens de lessen is het uitwerken wel kort aan de orde gekomen, maar dat was kennelijk niet voldoende. Bij het proefwerk na het hoofdstuk bleek volgens de docenten dat de prestaties van de leerlingen goed waren, wat in lijn is met de resultaten van de natoets.

#### **4.4.2 Resultaten uit de digitale leeromgeving**

Het werk van de leerlingen, zowel in de les als thuis, is opgeslagen in de digitale leeromgeving. Dat maakt het voor de leerling mogelijk om terug te kijken in het eigen werk en dat te verbeteren. Voor de docent is het hierdoor mogelijk om de vorderingen van de individuele leerlingen en van de klas als geheel bij te houden (zie figuur 4.4). Voor het onderzoek zijn met name de prestaties nagegaan van leerlingen bij het toetsapplet, waaraan ze thuis individueel hebben gewerkt na afloop van de tweede computerles.

Per leerling is de totaalscore over alle niveaus van het toetsapplet berekend. In praktijk gaat het met name om de niveaus 1 en 2, omdat slechts weinig leerlingen aan hogere niveaus zijn toegekomen. Deze totaalscore is gecorrigeerd met de vooruitgang op de schriftelijke voor- en natoets. Omdat zich in een van de klassen technische problemen hebben voorgedaan met de digitale leeromgeving, zijn er slechts 62 leerlingen die zowel voortoets als natoets hebben gemaakt en hebben ingelogd om aan het derde applet te werken. Voor deze groep is er een significante positieve correlatie gevonden van 0.334 ( $p = 0.008$ ). Er is dus een positieve samenhang tussen het gebruik thuis van het toetsapplet en de vooruitgang op de schriftelijke toetsen.

#### **4.4.3 Resultaten uit de veldaantekeningen**

In aanvulling op de kwantitatieve gegevens die hierboven zijn beschreven, zijn de lessen geobserveerd. De observaties zijn verwerkt in veldaantekeningen. Daaruit komen de volgende punten naar voren.

- *Motivatie van leerlingen*

Leerlingen werken hard tijdens de lessen en vinden het gebruik van de applets motiverend. Mogelijk speelt hierbij de afwisseling een rol: het werken met het applet is weer eens wat anders dan werken uit het boek. Daarnaast werkt vermoedelijk de directe feedback van de software stimulerend. Een derde factor is de opslag van het werk in de digitale leeromgeving, die controle door de docent mogelijk maakt. Het werken in tweetallen stimuleert de discussie en de interactie tussen leerlingen. Er wordt overlegd over de te volgen strategie en over de uitvoering.

- *Trial-and-improve*

Bij het tweede applet, ‘Zoek zelf de oplossing’, moeten de leerlingen behalve over de strategie ook nadenken over de uitwerking, inclusief moeilijkheden met negatieve getallen, breuken en haakjes. De aandacht van



de leerlingen is dan ook minder gefocust op de strategie. Omdat er veel tegelijk speelt, zien we ook meer ‘trial-and-improve’ gedrag, waarbij de leerlingen wat proberen in de hoop dat de feedback hen verder brengt. De koppeling met het weegschaalmodel verdwijnt daarmee soms wat naar de achtergrond. Mogelijk zou het beter zijn geweest langer bij het strategieapplet stil te blijven staan.

- *Negatieve getallen*

Leerlingen vinden het soms moeilijk om met negatieve getallen om te gaan. Ze moeten zich realiseren dat je 19 in  $3x + 19 = \dots$  weg kunt werken door 19 af te trekken in plaats van op te tellen. Ook het vereenvoudigen van  $-x = 5$  of  $-8x = 19$  leidt tot moeilijkheden. Delen door een negatief getal is een van de lastigste stappen.

- *De x voorop*

De applets beschouwen een vorm als  $17 = x$  als een opgeloste vergelijking, terwijl leerlingen vinden dat  $x = 17$  pas de oplossing is. Van de andere kant accepteert het spelapplet ‘Zoek zelf de oplossing’ het veranderen van de volgorde niet: als de leerlingen de vergelijking  $30 = 5x$  delen door 5, en dan zelf als resultaat invoeren  $x = 6$ , dan vindt het applet dat daar  $6 = x$  zou moeten staan. Men kan zich hier afvragen of het applet hier niet te streng is. De reactie van het applet is wel correct en het obstakel waarmee leerlingen hier geconfronteerd worden kan aanleiding zijn tot een interessante reflectie of discussie.

- *Breuken, gebroken en decimale getallen*

Het werken met breuken vraagt ook veel aandacht van de leerlingen. Het invoeren van een breuk wordt soms lastig gevonden. Bij  $3/5 \cdot x$  is het bijvoorbeeld opletten dat niet  $3/(5x)$  wordt ingevoerd. Ook is er het verschil tussen de schrijfwijze  $11/3$  en  $3\frac{2}{3}$ . Daarnaast hebben de leerlingen een voorkeur voor decimale antwoorden, zodat ze af en toe hun rekenmachine te voorschijn halen om een breuk decimaal te schrijven. Als het applet dan een exact antwoord geeft, is de vraag weer of dat overeenstemt met het gevonden decimale getal. Op de achtergrond speelt hier het verschil tussen een deling als operatie en een breuk als een object en het verschil tussen exact en benaderend rekenen.

- *Haakjes*

Al eerder is opgemerkt dat de leerlingen nog geen vaardigheid hebben in het werken met haakjes, omdat het betreffende hoofdstuk is overgeslagen. Dat geeft moeilijkheden bij het oplossen van vergelijkingen. In een uitdrukking als  $4(x + 1)$  lijken leerlingen de impliciete vermenigvuldiging niet te zien. Via het rechthoekmodel, en in een van de klassen de ‘papagaaienbek’, is gepoogd dit te repareren, maar te haastig om werkelijk effect te hebben.

De resultaten van de video-opnames van de klassikale delen van de lessen en van de interviews met de docenten na afloop van het onderwijsexperiment komen in het volgende hoofdstuk aan de orde, waarin het onderwijzen centraal staat.

#### 4.5 Conclusie

Uit de resultaten trekken we de volgende conclusies.

1. *Het gebruik van de serie applets voor het oefenen van het oplossen van vergelijkingen heeft succes gehad, in die zin dat de prestaties van de leerlingen duidelijk vooruit zijn gegaan, terwijl er slechts twee lessen tussen de voortoets en de natoets zaten.*

Hoewel geen sprake is van een vergelijkend onderzoek, waarin we de leerwinst van de leerlingen kunnen vergelijken met die van onderwijs zonder applets, is de geboekte vooruitgang, gelet op het korte tijdsbestek, groot te noemen. De twee belangrijkste factoren die dit positief hebben beïnvloed zijn vermoedelijk de directe feedback van de applets en de uitdaging in de vorm van spelelementen.

Wat er in de applets wordt geoefend, verschuift in de loop van de sequentie. In eerste instantie gaat het vooral om de strategie van de weegschaal-methode. Daar werkt het oefenen goed. In tweede instantie wordt in combinatie hiermee ook het algebraïsch manipuleren met vormen geoefend en dan wordt het complexer.

2. *Het gebruik van de digitale leeromgeving waarin het werk van de leerlingen wordt vastgelegd heeft een positief effect op de resultaten.*

De opslag in de digitale leeromgeving maakt het werken met de applets minder vluchtig. Daarnaast speelt er het effect van de controleerbaarheid, wat maakt dat leerlingen gemotiveerder zijn om veel vergelijkingen op te lossen. Ook maakt de opslag het mogelijk dat de leerlingen thuis verder werken. De correlatie tussen de score van het thuis oefenen en de vooruitgang op de natoets suggereert dat het thuis oefenen bijdraagt aan het leren.

3. *Ook in een oefenapplet zitten modelaspecten, zodat oefenen en begripsontwikkeling samenhangen.*

Het onderscheid tussen oefenapplet en modelapplet is niet zwart-wit. Hoewel deze sequentie applets primair gericht is op het oefenen van de vaardigheid van het oplossen van vergelijkingen, spelen daarbij op de achtergrond begripsmatige en modelmatige aspecten een rol. Het gaat hier vooral om het weegschaalmodel van een vergelijking. Als een leerling dit model niet doorziet, zal het oplossen van een vergelijking met de applets lastig zijn; aan de andere kant zal het oefenen met de applets het

model versterken. In moeilijker situaties, waarin de routine tekort schiet, zal het model ter ondersteuning opgeroepen moeten kunnen worden.

Het gebruik van de equivalentieknop  $\dagger$  van het applet vraagt om een beeld van wat equivalentie is, en daarmee van de weegschaal. Ook het idee van wat een oplossing van een vergelijking is en hoe die genoteerd wordt komt aan de orde. Het werken met breuken, en de onderliggende ideeën over exact en benaderend rekenen, is een derde voorbeeld van de verwevenheid van oefenen en inzicht. Deze bevindingen sluiten aan bij de instrumentele benadering van ICT-gebruik, die benadrukt dat technieken in de ICT-omgeving samenhangen met concepten in het hoofd van de leerling (Drijvers & Gravemeijer, 2004).

De vraag die we ons aan het begin van dit hoofdstuk stelden was:

*Welke factoren maken dat het oefenen van het oplossen van vergelijkingen met de applets VergelijkingenOplossen, ingebed in een digitale leeromgeving, tot betere prestaties van leerlingen leiden?*

De conclusies hierboven bevatten de antwoorden. Inderdaad is sprake van betere prestaties van leerlingen. De eerste belangrijke factor die dit verklaart is de directe feedback van het applet, in de vorm van correcties en beoordelingen. Een tweede factor is het spelelement in de vorm van niveaus en scores, die de leerlingen sterk motiveren. Een derde factor is de leeromgeving, die het mogelijk maakt dat leerlingen een eigen ‘digitaal schrift’ opbouwen, en tevens dat de docent die schriften kan inzien, controleren en beoordelen.

### **Referentie**

Drijvers, P. & Gravemeijer, K.P.E. (2004). Artefact en instrument: Computeralgebra en algebraïsche schema's. *Tijdschrift voor didactiek van de bètawetenschappen*, 21(1), 47-68.



## 5 Onderwijzen met applets

### 5.1 Inleiding

Dit hoofdstuk gaat in op de tweede onderzoeksvraag van het onderwijsonderzoek, die luidt:

*Welke didactische mogelijkheden biedt het gebruik van applets in het wiskundeonderwijs en op welke manier kan de docent deze uitbuiten?*

Deze vraag is op twee manieren benaderd. Ten eerste zijn de bevindingen van expert-docenten, die een ruime ervaring hebben met het gebruik van applets in de wiskundeles, geïnventariseerd en geanalyseerd. De data bestaan uit interviews met docenten en verslagen van lesobservaties uit het Welp-project. De resultaten hiervan worden beschreven in paragraaf 5.2.

De tweede benadering bestaat uit het observeren en analyseren van het gedrag van de docenten in de twee onderwijsexperimenten die in de hoofdstukken 3 en 4 zijn beschreven. De data bestaan uit videoregistratie van klassikale delen van de lessen, audio-opnames van interacties tussen docenten en leerlingen tijdens het werken met de applets, en aantekeningen van nabesprekingen van lessen. De resultaten hiervan staan in paragraaf 5.3. Paragraaf 5.4 bevat de conclusies.

### 5.2 Ervaringen van docenten in het Welp-project

De eerste benadering van de onderzoeksvraag bestaat uit het inventariseren en analyseren van bevindingen van expert-docenten die in de projecten Wisweb en Welp ervaring hebben opgedaan met het gebruik van applets in de wiskundeles. Om deze ervaringen in kaart te brengen is een interview gehouden met het team van het Sint Gregorius College in Utrecht en zijn de eerder gehouden evaluaties met andere docenten opnieuw geanalyseerd.

Het merendeel van de reacties van deze experts is in te delen in een van de volgende rubrieken:

- Meerwaarde van applets bij het onderwijzen
- Veranderende werkvormen
- Veranderende interactie met leerlingen
- Rol en onmisbaarheid van de docent
- Voorbereiding van het onderwijs en docentbelasting.

Deze categorieën worden in het vervolg van deze paragraaf langsgelopen.



### **5.2.1 Meerwaarde van het onderwijzen met applets**

Uit de analyse van de interviewgegevens blijkt dat docenten de appletactiviteiten ervaren als zinvolle uitbreiding van het repertoire aan werkvormen. De meerwaarde van het gebruik van applets bestaat uit de volgende aspecten.

- Leerlingen zijn actiever en beter gericht op de taak.

*Appletlessen vind ik altijd wel leuk om te doen. Je hoeft hen ook minder achter de broek aan te zitten.*

- Door de feedback en exploratiemogelijkheden die het applet biedt hebben leerlingen meer mogelijkheden om zonder hulp van de docent obstakels te overwinnen.

*Wat ik heel positief vond .... dat je het stukje docent dat je eigenlijk niet kunt zijn in een klas zonder computers, dat de computer dat nu heel goed overnam, doordat iedere keer bij ieder regeltje bevestigd werd of ze het goed of slecht deden. Dat kun je als docent nooit.*

In de evaluatie van het Welp-project beschrijft een van de docenten de meerwaarde van het onderwijzen met applets als volgt:

*Eigen onderwijs wordt leuker. De algebralin is leuker geworden. Waarom? Minder leuke dingen zoals rekenwerk en heel specifiek controleren laat je nu doen. Instructie kan korter en meer gericht op algemene patronen. Routinematig werken van docent wordt zo ook minder.*

Ook andere ervaringen die uit de evaluatie van het Welp-project naar voren komen laten zien dat docenten het lesgeven met applets als een verworvenheid zien die ze niet graag meer zouden missen. Er zijn overigens wel kritische opmerkingen over het gebruikte lesmateriaal in Welp, maar alle docenten geven aan door te zullen gaan met het gebruik van applets in hun lessen.

### **5.2.2 Veranderende werkvormen**

Docenten geven aan dat zij bij de appletlessen minder klassikale momenten inbouwen dan in de normale lessen waarin leerlingen uit het boek werken.

*Minder klassikaal lesgeven, meer rondlopen.*

Bij het gebruik van oefenapplets is die verschuiving naar zelfstandig werken het grootst. Zelfs een eerste klassikale introductie van een dergelijk applet kan zeer kort zijn of blijkt nauwelijks nodig. Bij de modelapplets vinden docenten een regelmatige gezamenlijke reflectie op de gemeenschappelijke ervaringen wel belangrijk. Maar ook hier is de neiging om de leerlingen eerst zelf ervaringen te laten opdoen en zaken te laten uitzoeken groter dan bij normale lessen.

*Ik moest dus heel duidelijk zijn in wat ik ze wilde uitleggen, ik had ook zoiets van: ik mag ook niet teveel vertellen. Ga jullie gang maar. En normaal ga je toch iets meer vertellen..... hier is het echt zelf uitzoeken. Alleen echt de basis vertellen en dat heeft wel heel goed gewerkt.*

Over het gebruik van de beamer wordt verschillend gedacht. Sommige docenten vinden dat heel zinvol, omdat het de mogelijkheid biedt om samen naar een applet te kijken en ervaringen uit te wisselen en aan elkaar te laten zien. Een enkele docent had een zogenaamd *interactive whiteboard* tot zijn beschikking waarmee hij het applet kon bedienen door aanwijzen in plaats van met de muis op zijn bureau. Dat bood verrassende extra mogelijkheden die het onderzoeken waard zijn. Andere docenten vinden het gebruik van de beamer niet zo nodig. Ook geven veel docenten aan dat het regelen van deze voorziening vaak lastig is. De drempel voor het gebruik ervan kan daardoor te hoog zijn.

Het belang van een goed werkblad bij de appletlessen wordt door de docenten onderstreept. Dat geldt met name voor de modelapplets. Het opschrijven

van resultaten en uitwerkingen is voor leerlingen minder vanzelfsprekend dan bij het werken met boek en schrift. Het moet voor hen duidelijk zijn dat werken met applets niet een vrijblijvende zaak is. Een werkblad dat moet worden ingeleverd, eventueel voor een cijfer, kan dat duidelijk maken. Digitale opslag van de resultaten zou deze rol wellicht ook kunnen vervullen. Leerlingen moeten individueel op hun werk worden afgerekend.

*Tips voor collega's: Je moet leerlingen controleren, ook huiswerk. Toets individueel en laat die toetsen meetellen.*

Voor sommige docenten zijn de ervaringen met de applets aanleiding tot nadenken over toekomstige onderwijsvormen waarin een deel van het werk op de computer kan worden gedaan zonder de aanwezigheid van de docent. Voorwaarde is dan wel dat de applets gekoppeld worden aan een leerlingvolgsysteem, zodat controle op het leerlingwerk mogelijk is. Veel ervaringen wijzen er echter op dat de docent in appletlessen een belangrijke rol blijft spelen en zeker niet overbodig wordt. Wel is die rol anders dan in een gewone les (zie paragraaf 5.2.4). Toch biedt het werken met een leerlingvolgsysteem vermoedelijk mogelijkheden voor docentonafhankelijker onderwijs voor een bepaald type appletactiviteiten, met name voor het oefenen van vaardigheden. Experimenten waarbij ook leerlingregistratie een rol speelt zijn zeker interessant; in het kader van dit onderzoek is dit in het onderwijsexperiment rond het oplossen van vergelijkingen op beperkte schaal onderzocht (zie hoofdstuk 4).

### **5.2.3 Veranderende interactie met leerlingen**

Zoals al opgemerkt werken leerlingen in de appletlessen zelfstandiger dan in de reguliere les. Het is lastiger om in een computerlokaal klassikaal de aandacht van leerlingen te vragen en vast te houden. Ze willen graag zelf aan de gang, zelf proberen. Daar zijn de applets ook op ontworpen.

*In het gewone lokaal leg ik veel meer uit. (...) Ik deed dan voor op het bord inderdaad.*

Leerlingen vragen wel veel hulp. De docent is daarmee drukker dan in een gewone les. Dat lijkt in tegenspraak met de observatie dat leerlingen meer zelf kunnen uitzoeken en feedback krijgen van de computer in plaats van de docent.

*Je moet ze wel meer helpen dan in een gewone les. Dan kan je nog wel eens een praatje maken, zo van 'hé, hoe gaat het bij dit groepje?'. En dan hebben ze eigenlijk niks te vragen. Dan maak je even een kletspraatje alleen voor het andere contact, niet het wiskundecontact. Terwijl ik in het computerlokaal nog wel eens echt rond loop te rennen.*



De drukte van de docent kan uit de volgende factoren verklaard worden:

1. De grotere activiteit van de leerling. De leerling wordt meer uitgedaagd en wil graag verder. Hij zal daarom ook sneller iets vragen.
2. Leerlingen zijn niet gewend om bij problemen eerst gebruik te maken van de exploratiemogelijkheden van de software alvorens de hulp van de docent in te roepen. Ze moeten daartoe aangezet worden.
3. Zeker in het begin zijn er ook vragen die te maken hebben met de bediening van het applet.

In het interview signaleren docenten deze werkdruk, maar relativiseren die ook:

*Het is heel dubbel. Aan een kant is die les dus heel relaxed en aan de andere kant moet je wel wat meer rondrennen.*

Docenten zien dat ze de leerling ook makkelijker kunnen terugverwijzen naar het applet om het probleem nog eens op een andere manier aan te pakken. Veel van de interactie bestaat uit terugverwijzen, eventueel met een tip. ‘Uitleggen hoe het moet’ kan vaker worden uitgesteld. Ook geven docenten aan dat het niet zo erg is als leerlingen niet direct geholpen worden. Ze zoeken dan zelf aanknopingspunten om nieuwe dingen te proberen.

*Het is dus harder werken? Wat dat betreft wel. Maar ze kunnen wel even wachten, ze gaan toch wel proberen.*

Individuele instructie op het niveau van vaardigheden en algoritmen is, met name door de stapsgewijze feedback bij de oefenapplets, minder nodig.

*Instructie kan korter en meer gericht op algemene patronen.*

Aan de andere kant kan het applet in de interactie met een leerling een middel zijn om zaken uit te leggen en te laten zien. De docent gebruikt dan in zijn uitleg de representaties van het applet.

*Je kan wel directer gaan uitleggen. Je pakt zelf even een muis en je wijst iets aan, met de muis: Kijk, dit heb je dan hier fout gedaan. Dan moet het anders. Je klikt even zelf.*

In de interactie met de leerling is het voor de docent niet altijd makkelijk om in te schatten waar de problemen zitten. De leerling heeft al wat geprobeerd, soms met succes, soms niet. Ook heeft de leerling meestal nog niet een compleet beeld van mogelijkheden en onmogelijkheden van het applet. Om dan in de interactie af te stemmen op het leerproces van de leerling kan lastig zijn.

Om met de uitleg goed aan te kunnen sluiten op de mogelijkheden van het applet, moet de docent het applet zelf goed kennen. Hij moet weten waar de sterke punten liggen, maar hij moet ook kunnen inschatten welke misconcep-

ties er bij leerlingen kunnen optreden. Overigens worden veel van deze zaken voor de docent pas echt duidelijk tijdens de interacties met leerlingen. Docenten geven aan dat ze daarin moeten groeien. In het lesgeven wordt het applet steeds meer een didactisch instrument.

#### **5.2.4 Rol en onmisbaarheid van de docent**

Vroeger werd wel gesteld dat ICT-gebruik in het onderwijs de rol van de docent volledig zou overnemen. De ervaringen van de docenten in het Wisweb- en Welp-project maken duidelijk dat hiervan geen sprake kan zijn.

De onmisbaarheid van de docent blijkt uit steeds terugkomende opmerkingen over de sleutelrol die hij vervult in het samenbrengen van de leerervaringen en het reflecteren daarop, in het expliciteren van de rode draad in de leerstof. Deze rol, die de docent natuurlijk ook heeft in gewone wiskundelessen, blijft bij appletlessen, met name bij de modelapplets, heel belangrijk.

*Sommige applets, daar moet je echt bij zijn, ik denk dan meer aan modelapplets dan aan oefenapplets. Dat onderscheid wordt heel duidelijk. Modelapplets, daar moet je gewoon bij zijn, praten, sturen en zo.*

Ook als begeleider van de individuele leerling blijft de rol van de docent cruciaal. Door de exploratie- en feedbackmogelijkheden krijgen leerlingen in de appletlessen meer initiatief in het eigen leerproces. Daardoor verandert de rol van de docent als begeleider enigszins. Al eerder is genoemd dat de feedback in de oefenapplets een virtuele hulpdocent in het leven roept. De docent zal hiervan, waar mogelijk, gebruik maken en zich bij de begeleiding meer richten op de grote lijnen en het verbinden van de afzonderlijke leerervaringen. Onderstaand citaat weerspiegelt de onmisbaarheid van de docent bij computerlessen. Reflectie op de activiteiten is binnen zelfstandige (ICT-)leerarrangementen vaak moeilijk af te dwingen.

*Er zijn soms ook verschillen hoor, soms hoef ik er maar bij te zitten, misschien heeft dit ook met mij te maken, maar ook door er alleen al te zitten door de uitstraling die je hebt als docent, dwingt ze meer te reflecteren. Wat ben je aan het doen, waar is het probleem. Dan kan je wel zeggen 'dan moet de computer de juiste vragen blijven stellen', maar zo werkt het niet.*

#### **5.2.5 Voorbereiding van het onderwijs en docentbelasting**

Uit het interview en de evaluaties komt naar voren dat de appletlessen meer planning en voorbereiding vragen dan de normale lessen met het boek. Ten eerste geldt dat voor de praktische organisatie. Er moet een computerlokaal gereserveerd worden. Als de docent een beamer wil gebruiken, moet deze vaak ook gereserveerd, opgehaald en aangesloten worden. Een vaste

beamer in een klaslokaal blijkt eerder uitzondering dan regel. Ook moeten er soms werkbladen gekopieerd en uitgedeeld worden.

Ten tweede vraagt ook de inhoudelijke voorbereiding extra tijd, zeker als de docent nog weinig ervaring heeft met de applets. Hij moet besluiten welke onderdelen hij uit het boek wil vervangen of aanvullen met appletactiviteiten. Soms zijn daarbij werkbladen nodig. Die moeten dan worden opgezocht of worden ontworpen. Zeker voor een docent met weinig ervaring op dit gebied is dit aanvankelijk een extra belasting. Wel geven de expertdocenten aan dat het na verloop van tijd steeds makkelijker gaat. Maar ook het leren kennen van het applet kost tijd.

*Je moet het applet ook leren kennen, hoe het werkt. Ik zelf ja en dan dus ook goed nadenken van: hoe ga ik dat gebruiken of hoe ga ik dat kortsluiten met mijn leerlingen.*

Een belangrijke factor in het beperken van de werkdruk is samenwerking in de vaksectie. Het werk kan dan worden verdeeld en de voortrekkers op dit gebied kunnen de andere collega's ondersteunen en coachen. Scholen waar het lukt een dergelijke samenwerking op te zetten zijn ook succesvoller in de implementatie van deze nieuwe onderwijsvorm.

### **5.3 Docentgedrag in de onderwijsexperimenten**

De didactische mogelijkheden van applets en de manier waarop de docent die kan uitbuiten zijn ook aandachtspunten in de twee korte onderwijsexperimenten die in de hoofdstukken 3 en 4 zijn beschreven. De klassikale momenten van de lessen zijn met video geregistreerd. Het gaat dan om de introductie van de les, demonstratie van het applet, nabespreking en eventuele tussentijdse klassikale interventies. Daarnaast zijn gedurende enkele lessen audio-opnames gemaakt van interacties tussen de docent en leerlingen die in tweetallen met de applets aan het werk zijn. De docent was daartoe uitgerust met een minidiscreorder. Ten slotte zijn veldaantekeningen gemaakt en zijn de lessen met de docenten nabesproken.

Analyse van deze gegevens heeft geleid tot het in kaart brengen en evalueren van het didactisch repertoire van de docent in 'appletlessen'. Daarbij maken we onderscheid tussen het docentgedrag bij klassikale delen van de les en bij de interacties met leerlingen die aan het werk zijn met het applet. Deze tweedeling wordt in het vervolg van deze paragraaf aangehouden.

#### **5.3.1 Docentgedrag bij klassikale werkvormen**

De analyse van observaties en videoregistratie laat een variëteit aan klassikale werkvormen zien, terwijl sommige werkvormen ook opvallend afwezig zijn. Hieronder volgt een opsomming, waarbij wordt nagegaan in hoeverre

deze werkvormen specifiek zijn voor het gebruik van ICT, en in het bijzonder applets, in de wiskundeles.

- *Huishoudelijke en organisatorische zaken*

Het bespreken van huishoudelijke en organisatorische zaken verschilt niet wezenlijk van de gang van zaken in een gewone les. Wel is de logistiek van de aanvang van een les in het computerlokaal complexer. Denk bijvoorbeeld aan het opstarten van computers en software, aan het eventuele klaarzetten van een beamer, aan kapotte apparatuur zoals muizen en aan het indelen van tweetallen leerlingen.

Ook dienen bij de start van de les – en ook bij de begeleiding van het werken met het applet – werkinstructies gegeven te worden. Is het de bedoeling dat leerlingen samenwerken? Wat wordt van hen verwacht dat ze opschrijven? Is het de bedoeling dat ze afwisselen in de bediening van muis en toetsenbord? Aan dergelijke aspecten moet enige aandacht worden besteed.

- *Schetsen van de grote lijn en doel*

Vaak begint de les met het aangeven van de grote lijn van de lessenserie en het doel van de huidige les in dat grotere verband. Dit is in het computerlokaal zeker niet eenvoudiger dan in een gewoon leslokaal. Ten eerste is de opstelling hiervoor vaak minder geschikt. In het computerlokaal waarin de onderwijsexperimenten plaatsvonden zaten de leerlingen met de schouder naar het bord in plaats van met het gezicht. Een lokaalopstelling met computers tegen de wanden en in het midden frontale banken verdient de voorkeur.

Ten tweede willen leerlingen in het computerlokaal vaak meteen met de computer aan de slag, al is het maar om hun e-mail te checken.

- *Uitleg op het bord*

Uitleg op het bord is een van de traditionele werkvormen die in reguliere lessen veel wordt gebruikt. In het computerlokaal gebeurt dit ook. Daarbij speelt de hierboven aangestipte opstelling van het lokaal een rol. Ook is het mogelijk dat de bordruimte beperkt is door een projectiescherm.

*Je moet wel van tevoren bedenken: wat ga ik op het bord zetten, wetende dat je maar een half bord hebt.*

Verder is van groot belang dat de uitleg op het bord qua inhoud, notatie en representatie aansluit bij het werken met het applet. Daarover hieronder meer.

- *Demonstratie van het applet*

Sommige docenten hebben bij wijze van introductie de werking van het applet kort klassikaal gedemonstreerd. Dat kan een efficiënte manier zijn om leerlingen wegwijs te maken en hen op bepaalde functionaliteiten te wijzen. Het werkt met name goed als wordt begonnen met zaken die voor de leerlingen qua wiskundige inhoud al bekend zijn. Verder is het aan te bevelen om deze demonstraties kort te houden en niet te veel voor te doen.

Voorwaarde is natuurlijk dat goede projectievoorzieningen aanwezig zijn. Dat is niet vanzelfsprekend: een beamer is niet altijd beschikbaar. Daarnaast kan invallend zonlicht afbreuk doen aan de kwaliteit van de projectie. Het valt te overwegen om in de vaklokalen een vaste beamer aan het plafond te installeren, en de introductie te laten plaatsvinden in de les die voorafgaat aan de les in het computerlokaal.

Voor docenten is het bedienen van het applet in combinatie met het aanspreken van de hele klas niet eenvoudig. Dat is voor een deel een kwestie van gewenning. Daarnaast zou een interactieve whiteboard uitkomst kunnen brengen, omdat de gebaren en acties dan beter zichtbaar zijn dan wanneer ze met een muis worden uitgevoerd.

- *Nabespreken van opgaven met het applet*

In verschillende lessen zijn opgaven tussentijds of aan het einde van de les nabesproken met het applet. Dat kan een efficiënte manier zijn om de klas 'op een lijn te brengen', nadat leerlingen in tweetallen hebben gewerkt. Net als bij het nabespreken van een opgave uit het boek op het bord biedt dit de docent de gelegenheid de hoofdzaken te benadrukken en reflectie uit te lokken. Daarnaast kan op aanvullende mogelijkheden van het applet worden gewezen. Dit leidt tot een standaardisatie van de methode van werken, die aanbevelenswaardig is omdat leerlingen anders in inefficiënte strategieën kunnen blijven steken.

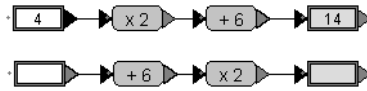
*Docent:* *Ik heb hier een bewerking..keer 2..plus 6... en ik heb hier een bewerking plus 6...keer 2.*

*Op het bord staan deze twee pijlenkettingen met lege in- en uitvoervakjes.*

*Docent* *Ik neem het getal 4 (vult 4 in in de eerste ketting). Wat komt hieruit? ... 8 (schrijft op na de eerste bewerking)... plus 6...14 (schrijft op in uitvoervakje). Zou ik nu, als ik hier 4 inzet (invoer 2e ketting)..dezelfde uitkomst krijgen?*

*Leerling:* *Nee.*

*Docent:* *Nee. Wat krijgen we hier?*



*Leerling:* 20.

*Docent:* 20 (vult dat in). Dus de volgorde van bewerken heeft invloed op de uitkomst. Maar stel nu dat ik deze uitkomst wil krijgen. (Vult 14 in plaats van 20 in als uitvoer van de tweede ketting) ... en ik wil toch deze volgordes houden ... eerst plus (veegt de 6 weg bij +6) ... en daarna keer ... (veegt de 2 weg bij x2). Hoe zouden we het nu kunnen doen? Bart?

*Bart:* Plus 3.. en dan keer 2.

*Docent:* Plus 3 en keer 2 (vult de bewerkingsvakjes in) 4 keer 3 is 7... keer 2 is 14. Dus je ziet ... als je een bewerking hebt ... van keer ... naar plus ... en van plus .... naar keer... kan je toch dezelfde uitkomsten krijgen, maar zal je de bewerking plus een ander getal moeten gebruiken.

Net als bij het demonstreren van het applet kan het voor de docent lastig zijn om het bedienen van de computer en het nabespreken gelijktijdig uit te voeren. Daarnaast is de timing moeilijk. We zien tijdens het werken met applets veel tempo- en niveaudifferentiatie, wellicht zelfs meer dan bij het werken uit het boek. Dat betekent dat klassikale bespreking van een opgave voor een deel van de leerlingen overbodig is of te laat komt, terwijl andere zelf nog onvoldoende over het probleem hebben nagedacht. Een goede timing vraagt veel overzicht van de docent op de voortgang van de leerlingen.

- *Leerling klassikaal met het applet laten werken*

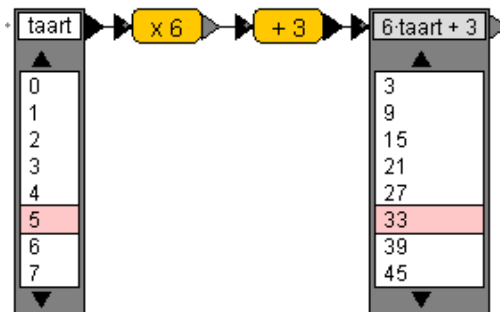
Een werkvorm die niet in de klas is waargenomen, is die waarin een leerling via de beamer een werkwijze demonstreert, dan wel uitvoert wat anderen voorstellen. Deze aanpak kan productief zijn, omdat ze enerzijds de betrokkenheid van de klas vergroot en anderzijds de docent inzicht geeft in de manier van werken van de leerlingen. Dat kan aanleiding zijn om verschillende technieken met elkaar te vergelijken en te komen tot een vorm van standaardisatie in de klas. Trouche (2000) spreekt in dit verband van de ‘sherpa-leerling’, de leerling die als waterdrager voor de docent fungeert.

- *Verband leggen tussen het applet en de wiskunde*

Het is van belang dat leerlingen verband leggen tussen het werken met het applet, het werken met pen en papier, en de onderliggende wiskundige begrippen en methoden. Ook dit vindt plaats in klassikale momenten, waarin de docent scenario's van appletinteracties verbindt aan het wiskundige verhaal.

*Docent: Als je iets koopt, dan moet je daar voor betalen. Bijvoorbeeld als er een taart gekocht moet worden, dan zie ik hier een berekening .. keer 6. .. en plus 3.*

*De docent wijst op een pijlenketting in het applet op het scherm.*



*Docent: Ik wil eens even een aantal mensen vragen wat dat voor betekenis zou kunnen hebben. Anne?*

*Anne: Die zes keer die taarten.. plus ..(niet te verstaan)*

*De docent wijst een andere leerling aan.*

*Leerling: Die 6 is voor een taart en die 3 is voor het bezorgen.*

*Docent: Ja. Dus als we zeggen keer 6, dan betekent dat 6 euro voor een taart.. en 3 euro voor het bezorgen. Dus we zien hier dat we voor twee taarten een prijs moeten betalen van 15 euro (klikt op 2 in de tabel). Voor 5 taarten moeten we een prijs betalen van 33. Dan zien we hier 5 keer 6 is 30, plus 3 is 33.*

Vaak wordt hierbij bordgebruik en appletgebruik gecombineerd en is er tevens sprake van interactie met de klas. Het moge duidelijk zijn dat dit soort klassikale momenten uiterst belangrijk zijn voor het totstandkomen van een geïntegreerd beeld van het geleerde, maar ook dat ze veel vragen van de vaardigheden van de docent. Hij of zij moet vaardig kunnen wisselen tussen het applet en het bord, moet in staat zijn de verbanden duidelijk aan te geven en moet de wiskundige kern helder naar voren kunnen halen.

- *Klassengesprek met leerlingen*

In het verlengde van het voorafgaande kunnen klassengesprekken aan de hand van de geprojecteerde appletbeelden zinvol zijn. Hier ligt de nadruk meer op de interactie met de klas dan bij de vorige werkvorm. Een ‘shepa-leerling’ die in opdracht van docent en leerlingen het applet bedient, kan hierbij een belangrijke rol spelen. Het doel van zo’n gesprek is vaak dat de ervaringen die leerlingen met het applet hebben opgedaan worden opgeroepen. Door daar gezamenlijk op te reflecteren worden deze ingebed in de wiskundekennis. Dit vraagt van de docent een grondige door-denking van de waarde van het werken met het applet voor de wiskundige leerdoelen en de manier waarop het applet de kijk op de wiskundige begrippen beïnvloedt.

Samengevat constateren we dat het didactisch repertoire van de docent bij lessen waarin applets centraal staan zich kan uitbreiden, maar dat die uitbreiding veel vraagt van de vaardigheden van de docent. Met name het gebruik van applets in combinatie met uitleg, met bordgebruik en met interactie met leerlingen is veelzijdig, te meer daar de verhouding tussen het werken met het applet en de wiskundige leerdoelen vaak subtiel is.

### **5.3.2 Docentgedrag bij interactie met tweetallen leerlingen aan het werk**

Ten aanzien van het docentgedrag bij interactie met leerlingen concentreert de data-analyse zich eveneens op het didactische repertoire van de docent. De voornaamste bron van gegevens zijn de audio-opnames van gesprekje tussen docent en leerlingen die in tweetallen met een applet werken. Video-opnames van enkele tweetallen leerlingen en veldaantekeningen vormen aanvullende data.

Deze analyse heeft geleid tot een inventarisatie van het didactisch repertoire van de docent tijdens het ‘rondlopen in de klas’. Deze inventarisatie wordt hieronder samengevat. Daarbij gaan we weer na in hoeverre dit repertoire specifiek is voor het gebruik van ICT – in het bijzonder applets – in de wiskundeles. De items worden geïllustreerd met korte prototypische observaties.

In de interactie tussen docent en tweetallen leerlingen die met een applet werken kunnen we de volgende elementen onderscheiden.

- *Uitleg vragen aan leerlingen*

Een van de manieren waarop docent en leerlingen interacteren bestaat eruit dat de docent kijkt wat de leerlingen doen en vervolgens om nadere uitleg of verklaring vraagt. Op deze manier stimuleert de docent de leerlingen tot nadenken over hun aanpak, en daarmee de reflectie. Verder is het antwoord van de leerlingen ook een vorm van feedback voor de docent over de voortgang. Hieronder twee voorbeelden.



- Docent: Waarom is het niet antwoord A?*  
*De leerlingen hadden  $(2 + 5)^2 \times 3$  terwijl in het lesmateriaal staat  $3 \times (2 + 5)^2$ .*  
*Docent: Zou dat hetzelfde zijn?*  
*Docent: Waarom is het handiger dat je met 3 bent begonnen dan met 6?*  
*Leerling: Omdat ie drie keer hetzelfde is, dus dan kunnen ze het allemaal nog zijn.*

Deze aanpak is niet specifiek voor het werken met applets of ICT. Als leerlingen in de gebruikelijke setting in tweetallen opgaven uit het boek uitwerken in hun schrift, terwijl de docent rondloopt, zijn vermoedelijk vergelijkbare interacties waar te nemen. Omdat het werken met ICT het gevaar van een zekere vluchtigheid in zich heeft, is het vragen van uitleg aan leerlingen wellicht nog belangrijker dan in een reguliere les.

- *Gerichte vragen stellen aan leerlingen*

Een tweede vorm van interactie is die waarin de docent gerichte, ietwat gesloten vragen stelt aan de leerlingen. Deze aanpak geeft de leerlingen weinig ontsnappingsmogelijkheden en stuurt hen in de richting van een efficiënte aanpak.

- Docent: Wat is een lineaire formule?*  
*Leerling: Dat er steeds hetzelfde bijkomt?*  
*Docent: Steeds hetzelfde bijkomt. Komt hier steeds hetzelfde bij?*  
*Leerling: Nee.*  
*Docent: Nee. Dus is-ie lineair?*  
*Leerling: Nee.*

Ook deze aanpak is bekend van het werken met pen en papier. Het voordeel ervan is dat de leerlingen snel op het goede spoor worden gezet. Het gevaar is dat de docent de leerlingen het probleem uit handen neemt, wat vaak niet de bedoeling is. De observaties in de appletlessen suggereren dat docenten vooral voor deze aanpak kiezen wanneer ze het druk hebben met het beantwoorden van vragen en snel resultaat willen boeken om een en ander in goede banen te leiden. Als de docent gehaast probeert veel tweetallen langs te lopen, is deze aanpak verleidelijk.

- *Spiegelen*

Onder spiegelen verstaan we dat de docent herhaalt wat leerlingen zeggen en daar mogelijk iets aan toevoegt door de formulering aan te scherpen of de grote lijn te verhelderen. Kenmerkend voor deze vorm van in-

teractie is dat het probleem bij de leerlingen blijft liggen en dat de docent een afwachtende houding aanneemt. Hoewel leerlingen deze aanpak niet altijd waarderen, leidt ze wel vaak tot denkwerk van hun kant.

Het protocol hieronder is een grensgeval, omdat de docent daarin ook wel wat stuurt.

*Docent: Nou, dus je zult hier niet hele getallen moeten invullen, maar ... ?*

*Leerling: Op de drie decimaal.*

*Docent: Kommagetallen, dus tot op drie decimalen nauwkeurig. In-klemmen.*

Ook deze vorm van interactie komt in gewone lessen voor. Ze vraagt wat meer geduld van docent en leerlingen dan het stellen van sturende vragen, en komt dan ook meer onder druk te staan als er veel vragen zijn in de klas of als de werksfeer onrustig is.

- *Terugverwijzen en terugkoppelen*

Een regelmatig waargenomen interactievorm is die waarin de docent de leerlingen terugverwijst naar een eerdere, soortgelijke opgave, of naar voorkennis die eerder aan de orde is gekomen. Soms is het al voldoende om leerlingen te vragen een bepaalde opgave opnieuw te lezen. Ook hier geldt dat het voordeel is dat het probleem bij de leerlingen blijft en dat hen slechts op analogie wordt gewezen waar ze zelf mee verder kunnen. In het tweede citaat hieronder gebeurt nog meer: daar moedigt de docent de leerlingen aan om te experimenteren en geeft hen bovendien nog een aanwijzing over de samenwerking tussen de twee leerlingen.

*Docent: En hoe deed je het hier? Kijk eens naar deze wortel, wat deed je nou?*

*Docent: Kijk eens even wat staat er bij opdracht 1, als je daar nou eens even naar kijkt?*

*Leerlingen lezen opgave 1.*

*Docent: Nou probeer dat eens. En ook allebei om de beurt de muis gebruiken.*

Ook dit element uit het didactisch repertoire van de docent is niet exclusief voor het werken met applets of ICT in het algemeen. Als we ervan uitgaan dat het werken met de computer de aandacht van de leerlingen sterk richt op het beeldscherm dat ze op dat moment voor ogen hebben, dan lijkt het terugverwijzen bij het gebruik van ICT mogelijk nog belangrijker.

- *Controleren*

Natuurlijk wil een docent die rondloopt in de klas ook de resultaten controleren om zo een indruk te krijgen van de voortgang van de leerlingen. We zien dan ook dat de docent zich door blikken op de verschillende schermen te werpen een beeld vormt van hoe het gaat. Ook tijdens de interacties worden controlevragen gesteld, zoals in de volgende observatie.

*Twee leerlingen hebben verschillende kettingen. Het gaat om de volgorde worteltrekken en delen door 5.*

*Docent: Het zijn wel twee verschillende formules. Moet je eerst de wortel nemen en dan pas delen door 5, of moet je eerst delen door 5 en dan de wortel?*

*Leerling: Eerst delen door 5.*

*Docent: Ja. Dus dit is de pijlenketting terug. OK, dat is goed.*

*De docent wijst erop dat in de expressie de wortel er helemaal overeen moet.*

*Docent: Goed zo, gaat goed.*

Controleren van leerlingenwerk speelt natuurlijk ook bij werken met pen en papier. In computerlessen zien we enkele specifieke aspecten aan het controleren. Ten eerste is controle in die zin eenvoudiger, dat een blik op een beeldscherm tijdens het langslopen eenvoudiger is dan een blik in een schrift. Ten tweede zien we dat de mogelijkheden van zelfcontrole voor de leerling zijn toegenomen: in plaats van een antwoordenboekje dat slechts beperkte informatie biedt, geeft het applet onmiddellijke en gerichte feedback. Ten derde kan controle achteraf worden bemoeilijkt als het digitale werk van de leerlingen niet wordt opgeslagen of overgeschreven op papier. Om dit laatste bezwaar te ondervangen is in het tweede onderwijsexperiment gewerkt met een digitale omgeving die het werk van de leerling opslaat en controle achteraf door de docent mogelijk maakt (zie hoofdstuk 4).

- *Aanmoedigen om te experimenteren*

In verschillende gesprekken tussen de docent en een tweetal leerlingen zien we de docent de leerlingen aanmoedigen om de experimenteerruimte van het applet te benutten. Hoewel leerlingen in het algemeen geen last hebben van knoppenvrees, blijken ze toch niet altijd te zien hoe een experiment met het applet hen verder kan brengen. Het gaat hier niet om blinde trial-and-error, maar om gerichte pogingen, waarbij de feedback van het applet de leerlingen verder brengt. De volgende twee citaten geven een indruk van dit soort aanmoedigingen.

*Docent: Nou, denk nog maar eens na, en probeer maar. Ga maar gewoon die ketting maken en dan kijk je wel of dat eruit komt. Misschien kom je een heel eind.*

*Docent: Misschien, probeer het eens, dan zullen we zien of het klopt.*

Experimenteren en situaties gericht onderzoeken zijn zaken die met een applet, en met ICT in het algemeen, eenvoudiger en sneller te realiseren zijn dan met pen en papier. Dat maakt dit element uit het didactisch repertoire van de docent specifiek voor het werken met ICT.

- *Aanzetten tot reflectie*

In verschillende observaties komt naar voren dat de docent de leerlingen probeert aan te zetten tot nadenken over de bevindingen, tot reflectie op de resultaten. Dat gebeurt vaak door middel van aanvullende vragen, die soms het niveau van de opgave overstijgen en waarbij de leerling gevraagd wordt op een hoger niveau over de opgave na te denken. De docent vraagt bijvoorbeeld naar een reden, naar het waarom van een aanpak. De volgende drie citaten geven een indruk.

*Docent: Is dit hetzelfde?*

*Leerling: Eh, ja.*

*Docent: Waarom is dit hetzelfde?*

*Docent: Wacht even voor je begint. Wat deed je nou net als eerste bij deze formule?*

*Docent: En hebben jullie ook wel een beetje een idee WAT jullie aan het doen zijn?*

Elke docent zal de ervaring hebben dat reflectie in de klas in het algemeen niet vanzelf plaatsvindt. In die zin is dit element van het didactisch repertoire niet specifiek voor ICT-gebruik. Wel is de noodzaak voor de docent om hieraan aandacht te besteden wellicht nog groter dan bij werken met pen en papier. Leerlingen worden bij het gebruik van ICT immers vaak gefascineerd door de mogelijkheden van het programma en de verschillende knoppen, maar zijn geneigd om op een oppervlakkige manier door de opgaven te gaan, zonder dat reflectie plaatsvindt. Hier ligt dus duidelijk een taak voor de docent.

- *Koppelen aan andere media*

Wat we in de appletlessen regelmatig zien gebeuren is dat de docent verband legt tussen het werken met het applet en het werk met pen en papier of uit het hoofd. Vanuit het oogpunt van de geïntegreerde kennis die wordt beoogd is dit een belangrijk aandachtspunt. Het is natuurlijk niet de bedoeling dat bijvoorbeeld het oplossen van een vergelijking met een applet los komt te staan van het oplossen met pen en papier, of het ‘zien’ van een oplossing uit het hoofd. Bovendien kan de aanpak uit het hoofd of met pen en papier ook een aanwijzing zijn voor een strategie in de ICT-omgeving.

*Docent: Als je dit uit je hoofd zou uitrekenen, wat is dan het eerste wat je zou doen?*

Dit element uit het didactisch repertoire is typisch voor het werken met ICT. Ook bij klassikale werkvorm speelt het een rol, omdat de docent dan bijvoorbeeld verband moet leggen tussen de representaties in de ICT-omgeving en de notaties op het bord.

- *Technische aanwijzingen geven*

Af en toe maakt het geven van technische aanwijzingen ook deel uit van de docent-leerlinginteractie. Hoewel leerlingen in het algemeen handig zijn in het werken met de computer en de applets een eenvoudige en toegankelijke interface kennen, blijkt het soms toch nodig leerlingen op handigheidjes te wijzen die ze zelf niet ontdekken.

*Leerling: Expressie?*

*Docent: Nee, dat hoeft niet, gewoon waarde.*

*Ze verwijst naar de afbeelding van de ketting in het lesmateriaal.*

*Docent: Je kan ze iets verder uit elkaar zetten, en dan moet je aan de pijltjes trekken.*

*Leerling: Waarom moet dat dan?*

*Docent: Dan zijn ze verbonden.*

*De docent raadt aan ook tussenoplossingen in de ketting op te nemen.*

Het geven van technische aanwijzingen komt bij het werken met pen en papier niet voor; het is dus een nieuw element in het didactisch repertoire. Hierbij zijn technische en inhoudelijke adviezen vaak verweven, zoals ook blijkt uit het protocol hierboven. Puur technische hulp is soms ook aan de orde, maar regelmatig blijkt die een wiskundig-inhoudelijke component te hebben. Verder is het van belang om technische problemen van leerlingen niet voor hen op te lossen, maar om hen te leren hoe ze zich bijvoorbeeld met on-line hulp kunnen redden.

- *Wiskundig-inhoudelijke uitleg geven*

Vanzelfsprekend geeft de docent ook wiskundig-inhoudelijke uitleg tijdens het rondlopen in de klas. De manier waarop dat gebeurt, verschilt niet essentieel van de situatie waarin leerlingen uit het boek werken, zij het dat de uitleg in dit geval meestal gerelateerd is aan wat er op het scherm gebeurt.

*Leerling stelt een vraag over het verschil tussen de expressie  $5t^2$  en de ketting  $^2, *5$ .*

*Docent: Ja, in deze volgorde, wat moet ik als eerste doen? Eerst kwadraat. Ook al staat die achter de 5, ik moet toch eerst kwadraat doen, dan pas keer 5. Dat zie je ook in de volgorde van de pijlenketting.*

Tot zover de inventarisatie van de elementen uit het didactisch repertoire van de docent bij het rondlopen in de klas. Vaak komen binnen één gesprekje verschillende van deze elementen naar voren. De vaardigheid van de docent bestaat onder meer uit het vermogen adequaat te switchen tussen de verschillende elementen.

*Leerling: Is het erg als het niet tussen haakjes staat?*

*Docent: Ja, dan is het dus niet goed, want daar staat het ook niet tussen haakjes. Wat staat hier eigenlijk als je dit uit je hoofd uitrekt?*

*De leerling vertelt dat.*

*Docent: Maar dat staat er niet, want dat is dat antwoord. Hier staat min, ..., 2 in het kwadraat. Wat was dat ook weer?*

Bij het begin van de interactie tussen docent en leerlingen die met het applet werken is het inschatten van de situatie en het localiseren van de moeilijkheid de grootste uitdaging voor de docent. Een van de betrokken docenten formuleert het zo:

*Je moet achterhalen wat het probleem van de leerling is: knoppen, wiskunde, of gewoon een klein foutje, dus steeds zoeken naar het niveau waarop je moet helpen. Als je weinig tijd hebt, schat je dat soms niet goed in.*

Het in dit citaat aangehaalde tijdsprobleem is ook een punt van aandacht. In sommige lessen loopt de docent vanwege het grote aantal vragen vrij gehaast van tweetal naar tweetal. Het spreekt vanzelf dat het gehaaste karakter de interacties beïnvloedt. De diagnose van de moeilijkheid waar de leerlingen mee kampen en de openheid in de reactie daarop kunnen hieronder lijden. We concluderen dat het geobserveerde didactisch repertoire van de docent

bij de interacties met tweetallen leerlingen die met applets werken in een aantal opzichten vergelijkbaar is met het gehanteerde repertoire als leerlingen zelfstandig of in tweetallen uit het boek werken. Wel zien we een aantal nieuwe elementen, zoals het aanmoedigen tot experimenteren, het verbinden van ICT-werk aan papierwerk en hoofdwerk en het bieden van technische hulp. Daarnaast verandert een aantal bekende elementen van karakter, zoals het aanzetten tot reflectie, het controleren en het geven van wiskundig-inhoudelijke uitleg. Het aanzetten tot reflectie is extra belangrijk, omdat het werken met ICT voor leerlingen een vluchtig en oppervlakkig karakter kan hebben. Bij het reageren op leerlingen is een van de lastige punten het stellen van de diagnose: waar zit de moeilijkheid, is die technisch, conceptueel, strategisch van aard, of mogelijk een combinatie van verschillende factoren? Het docentgedrag in de onderwijsexperimenten tijdens het werken met applets maakt dus duidelijk dat het didactisch repertoire in deze situatie verandert. Dat betekent enerzijds dat er mogelijkheden zijn voor nieuwe benaderingen, maar anderzijds dat de docent tijd nodig heeft om zich dit nieuwe repertoire eigen te maken.

## 5.4 Conclusies

De vraag die in dit hoofdstuk centraal staat luidt:

*Welke didactische mogelijkheden biedt het gebruik van applets in het wiskundeonderwijs en op welke manier kan de docent deze uitbuiten?*

Allereerst moeten we ons bij het formuleren van conclusies realiseren dat binnen een kortlopend onderzoek als dit globale antwoorden slechts met voorzichtigheid kunnen worden gegeven. Waar de hoofdstukken 3 en 4 specifiek en in detail op bepaalde applets ingaan, is de vraag in dit hoofdstuk algemener van karakter. Dat maakt de beantwoording moeilijker.

Het eerste deel van de vraag richt zich op de *didactische mogelijkheden* van het gebruik van applets in het wiskundeonderwijs. In de hoofdstukken 3 en 4 zijn deze mogelijkheden voor enkele specifieke applets beschreven. Paragraaf 2 van dit hoofdstuk geeft algemenere informatie over de didactische mogelijkheden. Inventarisatie van de ervaringen binnen de projecten Wisweb en Welp maakt duidelijk dat het gebruik van applets in de wiskundeles de volgende mogelijkheden biedt.

- De applets bieden mogelijkheden voor het aanbrengen van denkmodellen bij leerlingen en voor het oefenen van vaardigheden. Sterke punten zijn daarbij de onmiddellijke feedback die leerlingen krijgen en de motiverende werking van spelelementen in de applets.
- Het gebruik van applets biedt mogelijkheden voor andere werkvormen,

zoals het demonstreren van appletgebruik door docent en leerling, het combineren van het gebruik van verschillende media en de bijbehorende representaties, en het houden van klassengesprekken aan de hand van ge-projecteerde beeldschermen.

- Het gebruik van applets leidt tot veranderende interactie met leerlingen. Applets zijn, zoals een van de docenten het formuleert, ‘middelen om uit te leggen’. Het experimenteren met applets en het bestuderen van de feedback zijn aanleiding tot inhoudelijke leergesprekken tussen leerling en leraar.

Het tweede deel van de vraag heeft betrekking op het *uitbuiten van de mogelijkheden* van applets door de docent. Het blijkt dat het ‘exploiteren’ van de didactische mogelijkheden van applets vraagt om een aanpassing en uitbreiding van het didactisch repertoire. Dat betreft zowel het klassikaal werken als het begeleiden van het zelfstandig werken van leerlingen met de applets. Bij het *klassikaal werken* is de timing een cruciale factor. Vanwege toenemende differentiatie is het niet eenvoudig de klassikale momenten op een zodanig moment te houden dat alle leerlingen er baat bij hebben. Een tweede belangrijke factor bij klassikale momenten is het hanteren van verschillende media. De aansluiting bij het werk van de leerlingen vraagt om het gebruik van een beamer. Vanwege de inbedding in de aanwezige kennis en de aansluiting bij boek en schrift is het gebruik van het bord gewenst. Om dit te combineren en tegelijkertijd de wiskundige inhoud te kunnen toelichten en het klassengesprek te organiseren vraagt veel van de docenten. Ook hier geldt dat oefening kunst baart en dat daar enige tijd overheen gaat. Het inschakelen van leerlingen voor de bediening van het applet kan een manier zijn om de docent te ontlasten, die bovendien inzicht geeft in de vaardigheden van de leerlingen.

Bij het adequaat *begeleiden van leerlingen* tijdens het werken met het applet staat een didactisch repertoire ter beschikking dat in vergelijking met de reguliere klassensituatie aanpassing en uitbreiding behoeft. Een eerste punt bij het reageren op vragen van tweetallen leerlingen is het stellen van de diagnose: wat is de achtergrond van de vraag, is die technisch, strategisch, begripmatig? Vervolgens is het van belang dat er verband wordt gelegd tussen het werk met het applet, met een eigen stijl van representatie, en de al aanwezige kennis met bijbehorende representaties zoals de leerling die via het boek heeft opgedaan. Ten slotte is het ook belangrijk dat de docent de leerlingen aanzet tot zowel experimenteren als reflecteren. Het experimenteren, zonder dat dat in trial-and-error ontaardt, is één van de mogelijkheden van ICT in het algemeen en applets in het bijzonder. Reflectie is daarentegen één



van de zaken waaraan leerlingen gemakkelijk voorbij kunnen gaan, en die dus moet worden afgedwongen door opdracht en docentgedrag.

Zeker als het werken met ICT in de wiskundeles nieuw is voor de betrokken docent heeft het een prijs. Die prijs bestaat uit extra inhoudelijke voorbereiding, uit organisatorische voorbereiding, en uit extra hard werken tijdens de lessen vanwege het zich uitbreidende didactische repertoire. Enerzijds zijn enthousiaste docenten vaak bereid dit op te brengen; anderzijds ligt het voor de hand dat extra inspanningen als eerste sneuvelen onder tijdsdruk en andere prioriteiten. Voor wat betreft het didactisch repertoire zullen de inspanningen afnemen naarmate de ervaring toeneemt. Voor wat betreft de praktische en organisatorische aspecten is het goed maatregelen te nemen om die tot een minimum te beperken.

Om het docenten mogelijk te maken op een optimale manier gebruik te maken van de didactische mogelijkheden van applets in de wiskundeles ligt een aantal *praktische maatregelen* voor de hand.

- Het is aan te bevelen dat de voorzieningen in het computerlokaal zodanig zijn dat de praktische voorbereiding voor de docent geminimaliseerd wordt. Denk aan infrastructurele voorzieningen als computers die standby staan, aan software die direct toegankelijk is en aan de permanente opstelling van een beamer. In sommige gevallen kan aanvullende ondersteuning van een technisch onderwijsassistent of systeembeheerder nodig zijn.
- De opstelling in het computerlokaal dient zo te zijn dat de leerlingen ook recht voor het bord/projectiescherm kunnen zitten zonder achter beeldschermen verscholen te zijn. Computers kunnen dan tegen de achterwand en de zijwanden van het lokaal worden opgesteld.
- Zowel in computerlokaal als vaklokaal is de beschikbaarheid van een beamer zeer gewenst ten behoeve van het inleiden en nabespreken van het werken met applets.
- Een volgsysteem waarin het werk van de leerlingen wordt opgeslagen biedt leerlingen de mogelijkheden hun eigen werk na te kijken en te verbeteren. Voor de docent is het een middel tot controle.
- Mogelijk is een interactieve whiteboard een goed medium voor de docent om onderwijzen en computergebruik te combineren.

De conclusie van het onderzoek is dan ook dat het gebruik van applets veel didactische mogelijkheden biedt, maar dat het van de docent aanpassing van de manier van werken vraagt om die uit te buiten. Daarnaast dient aan een aantal praktische randvoorwaarden te zijn voldaan.

### **Referenties**

Drijvers, P., Boon, P. en Hoekstra, W. (2002). De leraar had het wel heel erg druk, ervaringen uit het Adlo-project. *Euclides*, 78(3), 98 - 104.

Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 239-264.

## 6 Conclusies en aanbevelingen

### 6.1 Conclusies

Dit kortlopend onderzoek richt zich op de volgende twee onderzoeksvragen:

1. Hoe biedt het werken met applets de leerling mogelijkheden denkmodellen te ontwikkelen en vaardigheden op een gevarieerde en motiverende manier te oefenen?
2. Welke didactische mogelijkheden biedt het gebruik van applets in het wiskundeonderwijs en op welke manier kan de docent deze uitbuiten?

Deze twee vragen worden hieronder apart besproken.

#### 6.1.1 *Conclusies met betrekking tot de eerste onderzoeksvraag*

De eerste onderzoeksvraag is ingegeven door de positieve ervaringen die met applets zijn opgedaan in de projecten Wisweb en Welp. In hoofdstuk 2 zijn deze ervaringen nader in kaart gebracht. Belangrijke elementen die daaruit naar voren komen zijn de afwisseling die applets vormen in de lespraktijk, de krachtige mogelijkheden van applets voor het ontwikkelen van modellen en het oefenen van vaardigheden, en de gerichte en onmiddellijke feedback die applets de leerlingen bieden. Deze combinatie van factoren maakt dat leerlingen gemotiveerd en productief met applets werken, zo is de indruk uit de genoemde ontwikkelprojecten.

In de hoofdstukken 3 en 4 is het gebruik van twee applets nader onderzocht. Het applet *AlgebraPijlen* is een modelapplet voor het ontwerpen en bestuderen van algebraïsche expressies. Het werken daarmee beoogt bij te dragen aan het inzicht in de structuur van algebraïsche expressies. De conclusies uit het onderwijsexperiment zijn dat werken met *AlgebraPijlen* inderdaad het denken over de structuur en de betekenis van algebraïsche expressies bevordert. Met name het onderzoeken van gelijkwaardige pijlenkettingen bleek vruchtbaar te zijn. Omkeerkettingen waren in dit verband minder bruikbaar, mogelijk door een te kort uitgezet leertraject.

De ervaringen met de applets *VergelijkingenOplossen* (zie hoofdstuk 4) zijn positief. De applets vormen een motiverende oefenomgeving voor het oplossen van vergelijkingen. Het vastleggen van leerlingewerk in een digitale oefenomgeving bevorderde de motivatie en maakte controle mogelijk. De prestaties bij het oplossen van vergelijkingen met pen en papier zijn duidelijk verbeterd.

Extrapolatie van deze ervaringen naar het gebruik van applets in de wiskundeles in het algemeen leidt tot de volgende conclusies met betrekking tot de eerste onderzoeksvraag.

- Het gebruik van applets in de wiskundeles biedt *mogelijkheden voor het aanbrengen van denkmodellen en het oefenen van vaardigheden*. Sterke punten van het werken met applets zijn de onmiddellijke feedback en de motiverende werking.
- Zowel bij het aanbrengen van denkmodellen als bij het oefenen is het van groot belang dat het denken van de leerling en de aanpak met pen, papier en boek aansluiten bij de representaties en strategieën die het applet mogelijk maakt. De *correspondentie tussen denken – ‘traditioneel’ werk – applet gebruik* dient zeer nauw te zijn, om transfer te bevorderen en om te voorkomen dat ‘appletwiskunde’ los staat van ‘boekwiskunde’.
- Het onderscheid tussen modelapplets en oefenapplets is niet altijd duidelijk te maken. Tijdens het werken met een modelapplet komen oefen- en vaardigheidsaspecten aan bod, terwijl de leerling bij het oefenen vaak zal terugvallen op onderliggende modellen. Deze bevinding komt overeen met de nadruk die binnen het theoretisch kader van de instrumentele benadering wordt gelegd op de *verwevenheid van techniek en inzicht*. Oefenen en begripsontwikkeling hangen samen, en in de manier waarop applets in de les functioneren moet dit tot uitdrukking komen.
- Applets die de nadruk leggen op het ontwikkelen van denkmodellen belichamen in het algemeen ook een *didactische benadering van een onderwerp*, en in sommige gevallen zelfs een visie op wiskundendidactiek. Dit stelt hogere eisen aan de inpasbaarheid dan het geval is bij meer ‘didactiekvrije’ oefenapplets.

#### **6.1.2 Conclusies met betrekking tot de tweede onderzoeksvraag**

In de tweede onderzoeksvraag staat het onderwijzen centraal. Dit is ingegeven door de constatering van docenten, betrokken bij de projecten Wisweb en Welp, dat het onderwijs onder invloed van het gebruik van applets verandert en op andere docentvaardigheden een beroep doet. Extrapolatie van de ervaringen uit de onderwijsexperimenten zoals beschreven in hoofdstuk 5 leidt tot de volgende conclusies met betrekking tot de rol van de docent bij het onderwijzen met applets.

- Het gebruik van applets biedt mogelijkheden voor *andere klassikale werkvormen*, zoals het demonstreren van appletgebruik door docent en leerling, het combineren van het gebruik van verschillende media en de bijbehorende representaties, en het houden van klassengesprekken aan de hand van geprojecteerde beeldschermen.

- Bij het klassikaal werken is de *timing* een cruciale factor. Vanwege toenemende differentiatie is het niet eenvoudig klassikale momenten op een zodanig tijdstip te laten plaatsvinden dat alle leerlingen er baat bij hebben.
- Een belangrijke factor bij klassikale momenten is het hanteren van verschillende media. Het is aan te bevelen om zowel applet als bord te gebruiken bij klassikale momenten. Het *geïntegreerd gebruik van deze media*, in combinatie met het toelichten van de wiskundige inhoud of het organiseren van een klassengesprek, stelt hoge eisen aan de vaardigheden van de docent. Het inschakelen van leerlingen voor de bediening van het applet kan een manier zijn om de docent te ontlasten, die bovendien inzicht geeft in de vaardigheden van de leerlingen.
- Het uitbuiten van de didactische mogelijkheden van applets vraagt om een aanpassing en uitbreiding van het *didactisch repertoire* van de docent. Dat betreft zowel het klassikaal werken als het begeleiden van het zelfstandig werken van leerlingen met de applets.
- Het gebruik van applets leidt tot *veranderende interactie* met leerlingen als die in tweetallen aan het werk zijn. Applets zijn, zoals één van de docenten het formuleert, ‘middelen om uit te leggen’. Het experimenteren met applets en het bestuderen van de feedback zijn aanleiding tot inhoudelijke leergesprekken tussen leerling en leraar.
- Het begeleiden van leerlingen die met een applet werken vraagt allereerst om het stellen van de *diagnose*: wat is de situatie, zijn de moeilijkheden technisch, strategisch, begripsmatig van aard? Vervolgens is het van belang verband te leggen tussen het werk met het applet, met een eigen stijl van representatie, en de al aanwezige kennis met bijbehorende representaties zoals de leerling die vaak via het boek heeft opgedaan.
- Het is van belang dat de docent de leerlingen aanzet tot zowel *experimenteren als reflecteren*. Het experimenteren, zonder dat dat in trial-and-error onttaardt, is één van de mogelijkheden van ICT in het algemeen en applets in het bijzonder. Reflectie is daarentegen één van de zaken waaraan leerlingen gemakkelijk voorbij kunnen gaan en die dus moet worden afgedwongen door opdracht en docentgedrag.
- Het werken met applets in de wiskundeles vraagt, zeker in het begin, een *extra inspanning* van de betrokken docent. Deze bestaat uit extra inhoudelijke

delijke en organisatorische voorbereiding. Verder zijn de lessen inspannend vanwege het zich uitbreidende didactische repertoire.

Voor wat betreft het laatste punt, de inspanning van de docent om applets in de les in te passen, is er een verschil tussen applets die overwegend gericht zijn op het oefenen van vaardigheden en applets die zich meer richten op het ontwikkelen van denkmodellen. Oefenapplets zijn meestal relatief eenvoudig in te passen. Ze sluiten goed aan op de onderwijspraktijk en worden gebruikt bij een duidelijk afgebakend onderdeel van het lesmateriaal. Ze worden ingezet in de verwerkingsfase, bij het opfrissen van vaardigheden, voor remediële doelen of voor (zelf-)toetsing. Het oefenapplet neemt door de feedbackfunctie een deel van de controlerende taak over van de docent en geeft leerlingen meer zelfstandigheid. De docent kan zich richten op onderliggende problemen die fundamenteeler van aard zijn.

Modelapplets veronderstellen daarentegen meestal een specifieke opbouw van de leerstof, die mogelijk afwijkt van die van het boek. Inpassing hiervan vraagt een didactische heroverweging van het onderwerp. Ook is vaak bijpassend lesmateriaal nodig. Sommige docenten geven hun eigen didactiek graag vorm en laten zich inspireren door de mogelijkheden van de applets. Voor anderen is bijvoorbeeld het zelf ontwikkelen van opgaven te bewerken.

## 6.2 Aanbevelingen

Uit de conclusies van dit kortlopende onderzoek komt een aantal aanbevelingen voort, die verschillend van aard zijn. We onderscheiden praktische aanbevelingen voor de onderwijspraktijk en theoretische aanbevelingen voor onderzoek.

In de eerste categorie, aanbevelingen voor de onderwijspraktijk, vallen de volgende suggesties.

- Om de ‘drempel’ naar het computerlokaal voor de docent te verkleinen dient de infrastructuur goed te zijn: computers en randapparatuur moeten optimaal functioneren, software dient eenvoudig toegankelijk te zijn en lessen dienen op afstand te kunnen worden voorbereid.
- Een computerlokaal moet zich ook lenen voor klassikale werkvormen. Dit vraagt om de permanente beschikbaarheid van een beamer en een opstelling waarbij leerlingen naar het projectiescherm kunnen kijken zonder achter een monitor te zitten.
- Om het verband tussen reguliere lessen en computerlessen te leggen, dienen ook in de vaklokalen een beamer en PC permanent beschikbaar zijn.
- Een nieuw technologisch medium waarmee we experimenten in de klas

aanbevelen is het interactive whiteboard, dat naar verwachting leidt tot levendiger en interactiever onderwijs.

- Het is aan te bevelen dat leerlingen ook thuis met de applets of andere ICT-toepassingen kunnen werken en dat de resultaten van hun werk, waar het ook plaatsvindt, digitaal wordt vastgelegd. Dit laatste maakt dat leerlingen hun eigen werk kunnen terugzien en verbeteren en dat de docent het kan controleren en beoordelen.
- Om de werkdruk voor docenten te verminderen is het aan te bevelen dat het werken met applets een grotere plaats krijgt in de reguliere schoolmethoden. De beperkte groep docenten die met applets eigen onderwijs wil ontwikkelen, kan dat blijven doen, terwijl de gemiddelde docent houvast heeft aan het boek.

In de tweede categorie, aanbevelingen voor onderzoek, doen we de volgende suggesties.

- Uit dit onderzoek komt naar voren dat de verhouding tussen het leren van algebra en het gebruiken van applets – of ICT in het algemeen – subtiel en complex is. Dat is in overeenstemming met ander onderzoek (zie bijvoorbeeld Drijvers, 2003; Drijvers & Gravemeijer, 2004). Het theoretisch kader van de instrumentele benadering kan bijdragen aan helderheid in deze complexiteit. We bevelen dan ook uitgebreider onderzoek aan naar de verhouding tussen het gebruik van ICT-tools en het leren van wiskunde vanuit dit kader.
- De gevolgde methodologie van dataverzameling combineert kwantitatieve en kwalitatieve data. Voor wat betreft de kwantitatieve data is de digitale registratie van leerlingenwerk met applets een waardevolle bron gebleken. Voor wat betreft de kwalitatieve data zijn de zogenaamde screenvideo's van tweetallen leerlingen bruikbaar gebleken. Geschikte software hiervoor is beschikbaar (bijvoorbeeld Lotus Screencam, Camtasia of Camstudio). Ook opnemen van alle docent-leerlinginteracties met een minidiscrecorder is een praktische en nuttige manier van dataverzameling. We bevelen aan dat deze technieken van dataverzameling bij soortgelijk onderzoek worden meegenomen.

## Referenties

- Drijvers, P. (2003). Algebraïsche vaardigheden, symbol sense en ICT. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 23(1), 38-42.
- Drijvers, P. & Gravemeijer, K.P.E. (2004). Artefact en instrument: Computeralgebra en algebraïsche schema's. *Tijdschrift voor didactiek van de bètawetenschappen*, 21(1), 47-68.



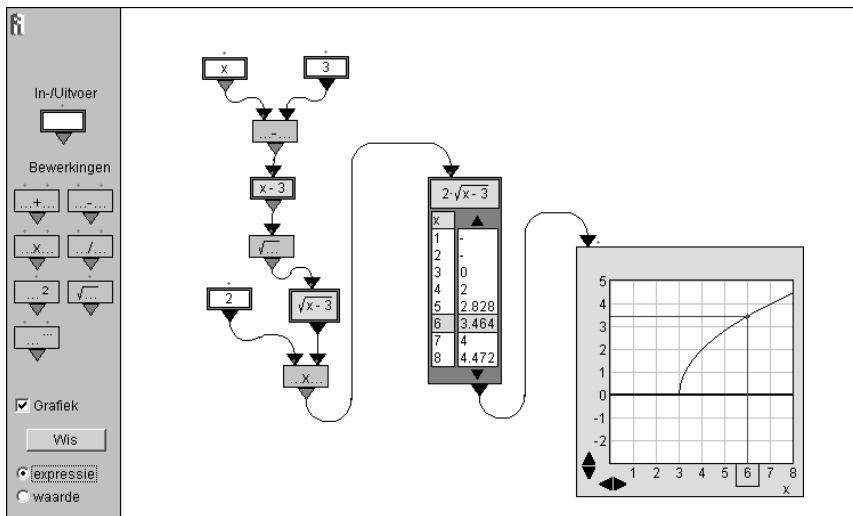


## **Bijlage I: Modelapplets voor algebra**

Deze bijlage bevat een selectie uit de verzameling modelapplets van het Wisweb die in de onderbouw van havo en vwo bij algebra kunnen worden gebruikt. Bij elke applet staat een korte beschrijving.

## AlgebraExpressies

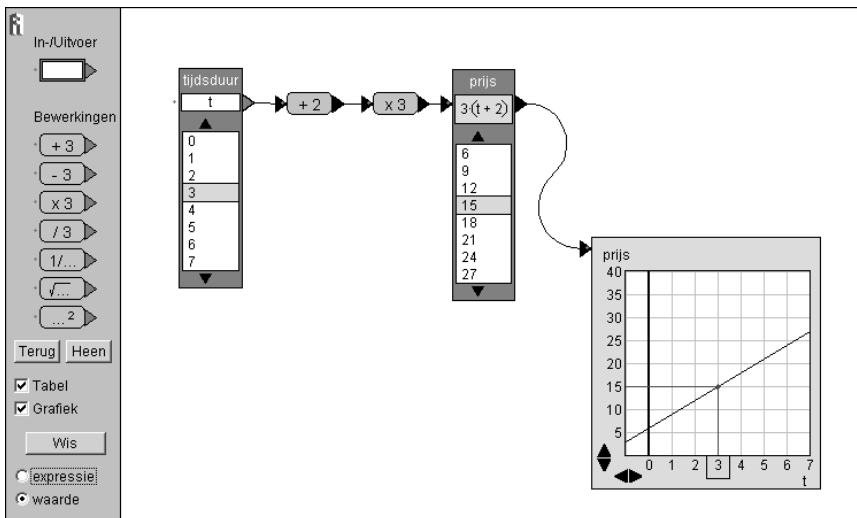
Met het applet *AlgebraExpressies* kan de leerling oefenen met het construeren van ingewikkelde expressies en formules vanuit eenvoudige bewerkingen. Het idee is dat door het zelf construeren een dieper inzicht ontstaat in de structuur en betekenis van formules. Ook is het mogelijk om te switchen tussen de formule met variabele, de formule waarin de variabele vervangen is door een getal (een expressie) en de uitgerekende waarde. Naast de rekenboom en de formulerepresentatie die daarvan het resultaat zijn, biedt het applet de mogelijkheid een tabel en een grafiek te laten zien.



## AlgebraPijlen

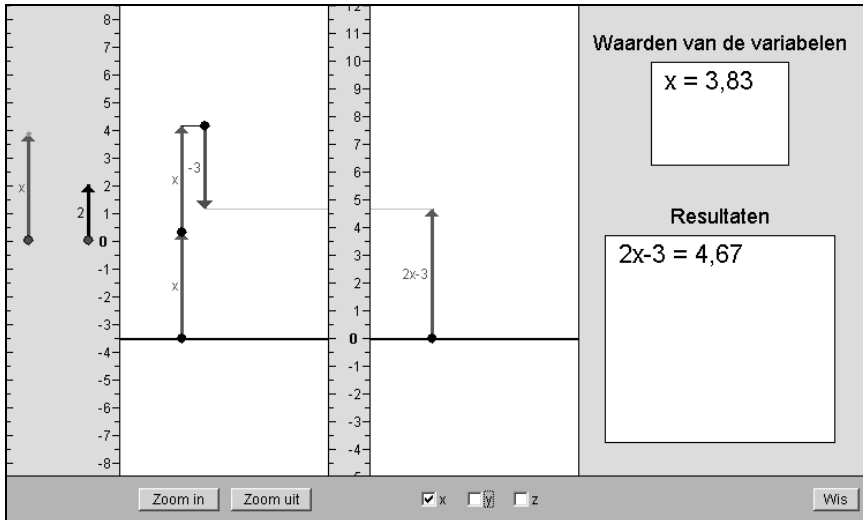
Met *Algebra Pijlen* kunnen pijlenkettingen gemaakt worden. Daarmee worden invoer/uitvoer-machientjes gemaakt die voorbereiden op de wiskundige begrippen formule en functie. Er kunnen naast getallen ook variabelen als invoer gebruikt worden, met als uitvoer de bijbehorende formulesnotatie. Daarmee helpt het applet, net als *AlgebraExpressies*, de structuur en betekenis van zo'n notatie te doorgronden. Ook kunnen de bij de formule horende tabellen en grafieken worden weergegeven, waardoor verschillende representaties met elkaar in verband worden gebracht.

Het onderliggende machientjesmodel wordt ook gebruikt in de meeste wiskundemethoden. Dat maakt dit applet in de praktijk goed bruikbaar bij deze onderwerpen.



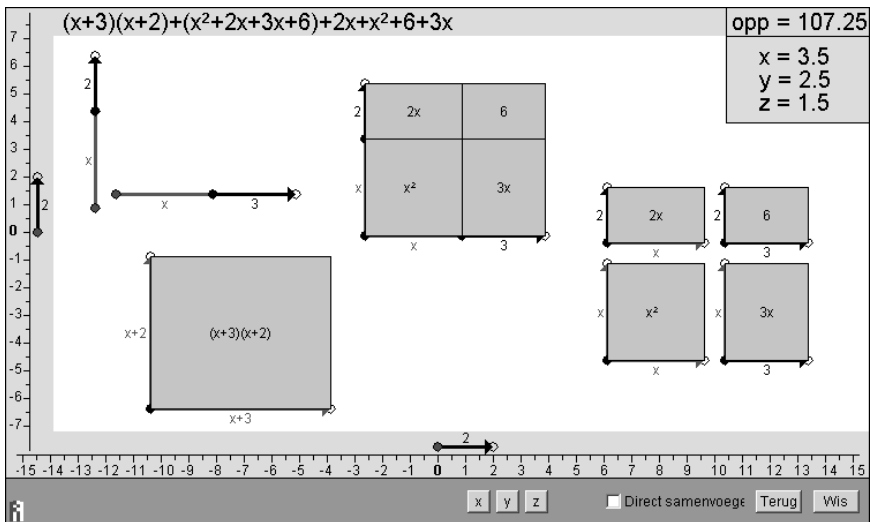
## Geometrische Algebra 1d

Met *Geometrische Algebra 1d* kunnen pijlen van constante en variabele lengte gekoppeld worden tot combinaties die een sompijl opleveren. Dit biedt een anschouwelijke basis voor algebraïsche activiteiten met lineaire expressies. Zo kunnen bijvoorbeeld vergelijkingen worden opgelost door de lengte van de variabele pijlen aan te passen, zodat de sompijl een gevraagde lengte krijgt.



## Geometrische Algebra 2d

In dit applet kunnen getallen en variabelen worden opgeteld en vermenigvuldigd door lijnstukken te combineren tot nieuwe lijnstukken en rechthoeken. De lengtes van de lijnstukken en de oppervlaktes van de rechthoeken worden als algebraïsche expressies weergegeven. Door splitsen en samennemen van rechthoeken kunnen leerlingen inzicht ontwikkelen in de gelijkwaardigheid van verschillende expressies en wordt bijvoorbeeld de distributieve wet aanschouwelijk gemaakt.

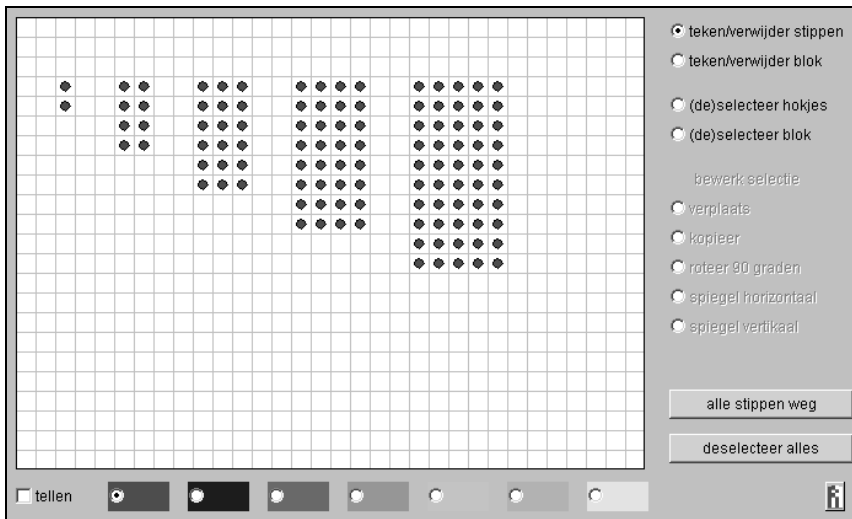


## StippelAlgebra

*StippelAlgebra* is een applet waarmee stippelfiguren kunnen worden gemaakt en gewijzigd. De aantallen stippen die worden gebruikt, worden door het applet geteld.

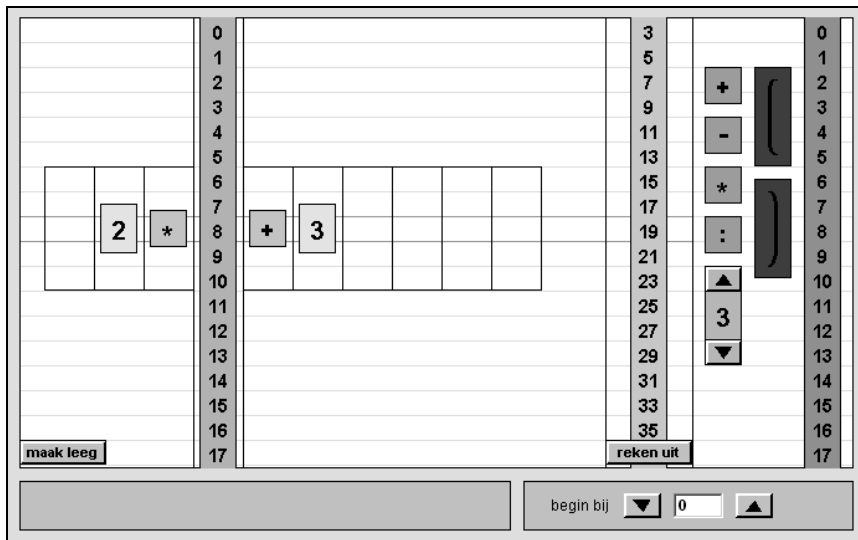
De bedoeling van dit applet is om regelmatige figuren en patronen te maken met verschillende kleuren stippen. Het aantal stippen van elke kleur wordt geteld en weergegeven in de vakjes onder in het scherm.

Door bijvoorbeeld opeenvolgende patronen in telkens een andere kleur te maken kunnen de getallen onderin gebruikt worden om de regelmaat te ontdekken en die met behulp van een formule te beschrijven.



## Stroken

Met dit applet kunnen verschillende rekenkundige bewerkingen worden uitgevoerd met getallenstroken. De opdracht is meestal het maken van een bepaalde getallensequentie (strook), uitgaande van de basisstrook met de natuurlijke getallen. Deze activiteiten bereiden voor op het werken met variabelen en formules en geven hieraan een aanschouwelijke basis.



## Stroken met etiketten

Dit applet vormt een uitbreiding van het applet *Stroken*. Leerlingen moeten niet alleen nieuwe stroken maken, maar deze ook voorzien van formules door de bijbehorende etiketten in te vullen. Wanneer een nieuwe strook van het juiste etiket is voorzien, kan deze op zijn beurt weer als bouwsteen gebruikt worden voor een andere strook. Zo wordt het manipuleren van formules op aanschouwelijke wijze geoefend.

The screenshot shows a software interface for a mathematical applet. The main window is titled "Stroken met Etiketten" and contains a grid with two columns: "N" and "3N+5". The "N" column contains the integers from 0 to 17. The "3N+5" column contains the corresponding values: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56. A formula "3 \* 5" is entered in the grid, and the result "15" is shown in the "3N+5" column. A calculator panel on the right shows the same calculation. A "begin bij" dropdown is set to 0.

N	3N+5
0	5
1	8
2	11
3	14
4	17
5	20
6	23
7	26
8	29
9	32
10	35
11	38
12	41
13	44
14	47
15	50
16	53
17	56



## **Bijlage II: Oefenapplets voor algebra**

Deze bijlage bevat een selectie uit de verzameling oefenapplets van het Wisweb die in de onderbouw van havo en vwo bij algebra kunnen worden gebruikt. Bij elke applet staat een korte beschrijving.

## AlgebraExpressies Oefenspel

Dit applet is een spelvariant van *AlgebraExpressies*, waarin leerlingen met behulp van rekenbomen expressies moeten bouwen. Het spel kan op twee niveaus gespeeld worden:

1. Maak een rekenboom bij de gegeven of gelijkwaardige expressie (voor een gele stip);
2. Maak een zo kort mogelijke boom bij deze of een gelijkwaardige expressie (voor een groene stip).

Het eerste niveau dwingt de leerling al ‘bouwend’ te zoeken naar de interne structuur van de expressie. Bij het tweede niveau gebruikt de leerling zijn kennis omtrent gelijkwaardige expressies bij het zoeken naar een kortere boom.

Er zijn overeenkomsten met de ideeën over ‘de prijs van de algebra’ (zie het applet *Formulemaker*) waarbij het zoeken naar een efficiënt rekenalgoritme de basis vormt voor het vinden van gelijkwaardige vormen.

**Maak de rekenboom**

Maak de formule hieronder met behulp van een rekenboom. Een gelijkwaardige formule mag ook.  
Extra opdracht:  
Zoek de eenvoudigste rekenboom.  
Probeer dus zo weinig mogelijk vakjes te gebruiken.

Prima!  
Jouw rekenboom klopt en het is de eenvoudigste.

In-/Uitvoer

Bewerkingen

Wis

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

## AlgebraPijlen Oefenspel 1

Dit applet is een spelvariant van *AlgebraPijlen* en kent dezelfde interface als de modelvariant. Het verschil is dat boven in beeld opdrachten gegeven worden, die door het applet worden nagekeken en waarvoor de leerling een score krijgt. De opdracht is het bouwen van een pijlenketting om een gegeven expressie te realiseren.

**Maak de pijlenketting**  $x \longrightarrow 6\sqrt{x^3-2}+5$

Niveau 1      Score: 0.0  
 Niveau 2      Score: 1.0

In-/Uitvoer

Bewerkingen

- + 3
- 3
- x 3
- / 3
- 1/...
- √...
- ... 2

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

## AlgebraPijlen Oefenspel 2

Dit applet is vergelijkbaar met *AlgebraPijlen Oefenspel 1*. De opdracht hier betreft het namaken van een tabel, maar via een andere expressie dan die in beeld verschijnt. Het onderliggend probleem is dus het vinden van een equivalente expressie door middel van een pijlenketting. De feedback bestaat enerzijds uit de gemaakte tabel die al dan niet verschilt met de gegeven tabel en anderzijds uit een  $\checkmark$ -teken, dat aangeeft dat de equivalente pijlenketting inderdaad is gemaakt.

**Maak een pijlenketting**

Maak een formule die anders is dan de formule hiernaast, maar wel gelijkwaardig hieraan.

Niveau 1      Score: 1.0  
 Niveau 2      Score: 0.0

x	4x-12
0	-12
1	-8
2	-4
3	0
4	4
5	8
6	12
7	16

In-/Uitvoer

Bewerkingen

- +3
- 3
- x 3
- / 3
- 1/...
- √...
- ... 2

$x \rightarrow -3 \rightarrow x-3 \rightarrow \times 4 \rightarrow 4(x-3)$

x	x-3	4(x-3)
0	-3	-12
1	-2	-8
2	-1	-4
3	0	0
4	1	4
5	2	8
6	3	12
7	4	16

✓

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

### AlgebraPijlen Oefenspel 3

Dit applet is vergelijkbaar met *AlgebraPijlen Oefenspel 1*. Hier is de taak om een gegeven expressie in zo min mogelijk stappen over te voeren in een andere. Leerlingen worden daarbij uitgelokt om kennis over gelijkwaardigheid van expressies te ontwikkelen en te gebruiken.

**Maak een pijlenketting**

Maak een pijlenketting die de linkerformule verandert in de rechterformule. Een formule gelijkwaardig aan de rechterformule mag ook. Probeer het met zo weinig mogelijk bewerkingen. Je score wordt dan hoger.

Score: 1.0

In-/Uitvoer

Bewerkingen

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

## Funcities Raden

De opdracht bij dit applet is het zoeken van het juiste functievoorschrift bij een gegeven grafiek. Wanneer een verkeerde formule wordt gebruikt, dan verschijnt de bijbehorende grafiek in rood naast de gegeven grafiek. Deze feedback kan de leerling informatie verschaffen die helpt bij een volgende poging.

Info

### Zoek de functies

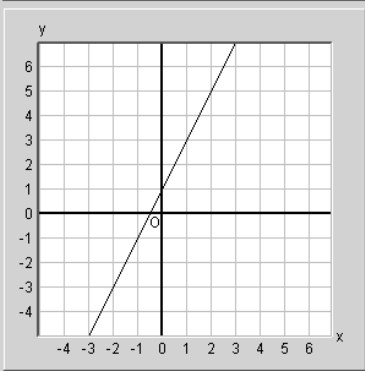
Zoek bij de grafiek hiernaast de juiste functie en vul die in. Druk daarna op ENTER.

Als het gelukt is, klik dan op de volgende opdracht uit de rij hieronder.

Maak alle opdrachten.

$\sqrt{\square}$   $\square^\square$   $\frac{\square}{\square}$   $(\square)$

$f(x) = \square$



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

## Geometrische Algebra Opdrachten 1

Dit applet is een oefenapplet bij *Geometrische Algebra 2d*, gericht op het herleiden van formules in een oppervlaktecontext. Bij de oppervlakte van een gegeven rechthoek hoort een formule. Door de rechthoek in stukken te splitsen en eventueel op een andere manier weer samen te voegen, ontstaan gelijkwaardige expressies. De opdracht is om dit op dusdanige wijze te doen dat een zo kort mogelijke expressie zonder haakjes ontstaat.

### Opdracht 4

Schrijf de formule hiernaast zonder haakjes en zo kort mogelijk.

Doe dit door splitsen, losmaken en eventueel opnieuw samenvoegen van de rechthoeken (gebruik de rechtermuisknop).

$(2x+1)(x+5)$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

## Geometrische Algebra Opdrachten 2 en 3

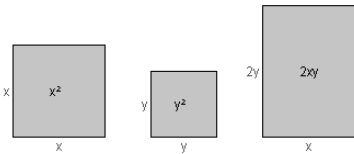
Deze applets zijn vergelijkbaar met *Geometrische Algebra Opdrachten 1*. Het verschil is dat hier de rechthoeken moeten worden gecombineerd tot één rechthoek. Daarmee wordt een ontbinding gevonden van de oorspronkelijke formule. In *Geometrische Algebra Opdrachten 2* bevatten de expressies steeds één variabele. In *Geometrische Algebra Opdrachten 3* worden meer variabelen gebruikt.

### Opdracht 1


Zoek een ontbinding voor de formule hiernaast.

Doe dit door de aanwezige rechthoeken na splitsen losmaken enz. te combineren tot één nieuwe rechthoek (gebruik de rechtermuisknop).

$x^2+y^2+2xy$



The diagram shows three separate rectangles on a white background. On the left is a square with side length  $x$ , labeled  $x^2$  inside. In the middle is a smaller square with side length  $y$ , labeled  $y^2$  inside. On the right is a vertical rectangle with width  $x$  and height  $2y$ , labeled  $2xy$  inside. The labels  $x$ ,  $y$ , and  $x$  are placed below the respective rectangles, and  $x$ ,  $y$ , and  $2y$  are placed to the left of the respective rectangles.



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18



## Haakjessommen Oppervlaktemodel

Met dit applet wordt de distributieve wet geoefend. De opdrachten sluiten aan op het applet *OppervlakteAlgebra*. De oppervlaktecontext blijft nu echter meer op de achtergrond. De gebruikte formules zijn zo gekozen dat ze gebruikt kunnen worden om de oppervlakte van een rechthoek te beschrijven. Als leerlingen het moeilijk vinden, dan kan de bij de formule horende rechthoek met een druk op de knop worden opgeroepen. De opdrachten kunnen worden nagekeken en het applet bepaalt een score.

Info

**Oppervlakteformules zonder haakjes**

Geef bij elke formule een gelijkwaardige formule zonder haakjes.  
 Klik op "Bekijk" als je de bijbehorende oppervlakte wilt bekijken.  
 Klik op "Kijk na" als je klaar bent.

$x$	$4$	
$x$	...	...
$4$	...	...

$\updownarrow$   
 $x + 4$

$\leftarrow \rightarrow$   
 $x + 4$

$\sqrt{\square}$   $\square^\square$   $\frac{\square}{\square}$   $(\square)$

$3(3x + 9)$	$= 9x + 27$	
$x(6 + 2x)$	$= 6x + 12x^2$	
$(x + 4)(x + 4)$	$= \square$	<input type="button" value="Bekijk"/>
$(x + 4)(x + 1)$	$= \dots$	
$(9 + x)(2 + x)$	$= \dots$	
$(x + 4)(3x + 1)$	$= \dots$	
$(4x + 3)(3 + x)$	$= \dots$	
$(x + 1)^2$	$= \dots$	
$(4x + 6)^2$	$= \dots$	
$(9 + 5x)^2$	$= \dots$	

## Haakjessommen Tabel

Dit applet is sterk vergelijkbaar met *Haakjessommen Oppervlaktemodel*. De aangeboden formules moeten naar een zo kort mogelijke vorm zonder haakjes worden omgeschreven. Als de leerling dit moeilijk vindt, dan kan een lege vermenigvuldigingstabel met een druk op de knop worden opgeroepen. Deze kan door de leerling als 'kladblaadje' worden gebruikt. Er kan een beroep worden gedaan op aanvullende hulp, waarbij de randen van de tabel al worden ingevuld. Na het maken van de opdrachten wordt een score bepaald, die mede gebaseerd is op de extra hulp die de leerling heeft gebruikt.

Info

### Formules zonder haakjes

Geef bij elke formule een gelijkwaardige formule zonder haakjes (Voor kwadraten kun je ook de pijltoets omhoog gebruiken of je typt ^2) Klik op "Kijk na" als alles is ingevuld.

x	...	...
...	...	...
...	...	...

Kijk na Opnieuw Hulp

$\sqrt{\square}$   $\square^{\square}$   $\frac{\square}{\square}$   $(\square)$

$- 5(5x - 8) = - 25x + 40$

$2x(7 - 3x) = 14x - 6x^2$

$(x + 2)(x - 5) = \square$  tabel

$(x - 4)(x - 7) = \dots$

$(6 - x)(2 + x) = \dots$

$(x + 6)(x - 1) = \dots$

$(4x - 7)(2 - x) = \dots$

$(x - 1)^2 = \dots$

$(3x + 6)^2 = \dots$

$(8 - 5x)^2 = \dots$

Kijk na Opnieuw

## Haakjessommen Ontbinden

Dit applet is vergelijkbaar met *Haakjessommen Tabel*. Het verschil is dat de leerling bij dit applet een ontbinding moet zoeken voor de aangeboden expressie.

**Formules ontbinden**

Geef bij elke formule een ontbinding

(Voor kwadraten kun je ook de pijltoets omhoog gebruiken of je typt ^2)  
Klik op "Kijk na" als alles is ingevuld.

√
0
0
(0)

x	...	...
...	- 12x	24

Kijk na
Opnieuw
Hulp

√
0
0
(0)

- 12x + 24 =

- 15x<sup>2</sup> + 21x = ...

7x<sup>2</sup> - 28x = ...

x<sup>2</sup> - 9x + 18 = ...

x<sup>2</sup> - 13x + 42 = ...

x<sup>2</sup> + x - 12 = ...

x<sup>2</sup> - x - 12 = ...

x<sup>2</sup> - 6x + 9 = ...

- x<sup>2</sup> + 5x + 24 = ...

4x<sup>2</sup> - 24x + 36 = ...

tabel

Kijk na
Opnieuw

## Kwadratische Vergelijkingen

*Kwadratische Vergelijkingen* heeft dezelfde insteek als *Lineaire Vergelijkingen Strategie* en werkt (deels) ook met het weegschaalmodel. De leerling kiest een bewerking die aan beide kanten van het =-teken wordt uitgevoerd. Behalve de bekende operaties is er een aantal extra mogelijkheden zoals het trekken van de wortels, ontbinden, splitsen, enzovoorts. Het applet kan het rekenwerk bij de gekozen stappen uitvoeren, maar wanneer de leerling dit rekenwerk zelf doet, kan hij daarmee zijn score verhogen (vergelijkbaar met *Lineaire vergelijkingen spel*).

Los de vergelijkingen rechts stapsgewijs op.

Druk op een van de rode knoppen om een bewerking uit te voeren.  
Gebruik de pijl naar beneden als je zelf een nieuwe stap wilt invullen.

De hoogste score krijg je als je alleen de pijlknop gebruikt.

<input type="radio"/> Niveau 1	Score: 0
<input type="radio"/> Niveau 2	Score: 0
<input type="radio"/> Niveau 3	Score: 0
<input type="radio"/> Niveau 4	Score: 0
<input checked="" type="radio"/> Niveau 5	Score: 5
<input type="radio"/> Niveau 6	Score: 5

Score: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Eigen vergelijking

Score: 5

Toolbar:  $\sqrt{\quad}$   $\square^2$   $\frac{\square}{\square}$   $(\square)$   $+$   $-$   $\times$   $:$   $\sqrt{\quad}$   $\sqrt[3]{\quad}$   $\sqrt{\quad}$   $\downarrow$   $\uparrow$

Equation steps:

$$12x^2 - 36x + 8 = 56$$
$$12x^2 - 36x - 48 = 0$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$(x - 4)(x + 1) = 0$$
$$x - 4 = 0 \text{ of } x + 1 = 0$$
$$x = 4 \text{ of } x = -1$$

Operations indicated:

- 56
- : 12
- ontbind
- splits
- gelijkwaardig met.

## Kwadratische Vergelijkingen Toets

Dit is een toetsapplet bij het applet *Kwadratische Vergelijkingen*. De werkwijze is vergelijkbaar met dat applet, alleen moet de leerling het stellen zonder de hulpknoppen voor het laten uitvoeren van de stappen door de computer. Ook vindt de feedback niet meer stapsgewijs plaats, maar pas na het maken van de opdrachten. Op dat moment worden overigens wel alle stappen geëvalueerd en kan de leerling terugzien welke fouten hij gemaakt heeft. Het applet kan ook gebruikt worden als diagnostische toets.

**f**

Los de vergelijkingen rechts stapsgewijs op.

Druk op de rode knop met de pijl naar beneden en vul de nieuwe stap in.

Als je alle opdrachten van een niveau klaar hebt, druk dan op de nakijkknop. Tussendoor nakijken kan, maar dat kost punten.

<input type="radio"/> Niveau 1	Score: 0
<input type="radio"/> Niveau 2	Score: 0
<input type="radio"/> Niveau 3	Score: 0
<input type="radio"/> Niveau 4	Score: 0
<input type="radio"/> Niveau 5	Score: 0
<input checked="" type="radio"/> Niveau 6	Score: 0

$\sqrt{\square}$   $\square^2$   $\frac{\square}{\square}$   $(\square)$ 
↓ ↑

$$x^2 - 12x + 34 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 = 2$$

$$x - 6 = \sqrt{2} \text{ of } x - 6 = -\sqrt{2}$$

$$\text{f} x = 6 + \sqrt{2} \text{ of } x = 6 - \sqrt{2}$$

	)	gelijkwaardig
f	)	met
	)	gelijkwaardig
f	)	met
	)	gelijkwaardig
f	)	met

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Kijk na Opnieuw

Score: 10 4 keer nagekeken

## Lineaire Vergelijkingen Strategie

*Lineaire vergelijkingen strategie* is een nieuwe versie van *Vergelijkingen oplossen met de weegschaal* dat al langer op Wisweb wordt aangeboden. Deze nieuwe versie biedt de opdrachten op verschillende niveaus aan en genereert deze at random.

Het applet gebruikt het weegschaalmodel voor het oplossen van lineaire vergelijkingen. Binnen dit model wordt een vergelijking opgelost door aan beide kanten van de vergelijking hetzelfde te doen. Met dit applet geven leerlingen aan welke bewerking (aan beide kanten) moet worden toegepast. Het applet doet vervolgens het rekenwerk. Hiermee wordt het mogelijk om in eerste instantie de focus te richten op de oplossingsstrategie zonder te worden afgeleid door fouten in het rekenwerk. Het applet *Lineaire Vergelijkingen spel* waarbij leerlingen het rekenwerk wel zelf moeten doen is een natuurlijke volgende stap.

Los de lijst met vergelijkingen op via de weegschaal-methode.

Druk op een van de rode knoppen om aan beide kanten dezelfde bewerking uit te voeren. Zorg dat de vergelijking steeds eenvoudiger wordt en uitkomt op:  $x = \text{getal}$ . De vergelijking is dan opgelost.

Niveau 1      Score: 0  
 Niveau 2      Score: 0  
 Niveau 3      Score: 0  
 Niveau 4      Score: 0  
 Niveau 5      Score: 10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$$\frac{2}{5}(x - 4) = \frac{1}{2}x - 5$$

$$4(x - 4) = 5x - 50$$

$$4x - 16 = 5x - 50$$

$$-16 = x - 50$$

$$34 = x$$

Handwritten annotations on the right side of the equations:  
- A bracket from the first equation to the second is labeled "x 10".  
- A bracket from the second equation to the third is labeled "haakjes weg".  
- A bracket from the third equation to the fourth is labeled "- 4x".  
- A bracket from the fourth equation to the fifth is labeled "+ 50".

## Lineaire Vergelijkingen Spel

*Lineaire Vergelijkingen Spel* is een nieuwe versie van *Vergelijkingen oplossen met de weegschaal spel* dat al langer op Wisweb wordt aangeboden. Deze nieuwe versie biedt de opdrachten op verschillende niveaus aan en genereert deze at random.

Het applet is vergelijkbaar met het applet *Lineaire vergelijkingen strategie*, alleen moeten leerlingen nu zelf intypen wat het resultaat is van de bewerking die ze op de vergelijking willen toepassen. Daarbij worden ze bij elke stap gecontroleerd en kunnen ze zich verbeteren. Lukt dit niet, dan kunnen ze hulp opvragen. Het applet doet dan het rekenwerk, maar dat kost punten. Het applet geeft namelijk per opdracht een score.

Los de lijst met vergelijkingen op via de weegschaal-methode.

Druk op een van de rode knoppen en voer een bewerking uit op de vergelijking. Vul bij elke stap de nieuwe vergelijking in. Je kunt hulp krijgen met de hulp-knop, maar dan krijg je minder punten.

Een goede oplossing levert minimaal 5 punten op. Zonder hulp wordt dat 10 punten per opdracht.

Niveau 1      Score: 0  
 Niveau 2      Score: 5  
 Niveau 3      Score: 0  
 Niveau 4      Score: 0  
 Niveau 5      Score: 0

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Scores: 5

$$\begin{array}{l}
 6x - 1 = 2x + 18 \\
 4x - 1 = 18 \\
 4x = 19 \\
 x = 4\frac{3}{4}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left. \vphantom{6x - 1 = 2x + 18} \right\} - 2x \\
 \left. \vphantom{4x - 1 = 18} \right\} + 1 \\
 \left. \vphantom{4x = 19} \right\} : 4
 \end{array}$$

## Lineaire Vergelijkingen Toets

Dit applet is een toetsversie bij *Lineaire Vergelijkingen Strategie* en *Lineaire Vergelijkingen Spel*. Het verschil is dat de leerling het nu moet stellen zonder de stapsgewijze feedback van het applet. De leerling moet een serie opdrachten maken en pas aan het eind van deze activiteit worden de antwoorden en de stapsgewijze uitwerkingen gecontroleerd. Op grond hiervan wordt een score bepaald. Leerlingen kunnen dus ook achteraf in hun uitwerkingen zien waar het fout ging. Deze uitgestelde feedback moet leerlingen stimuleren tot meer zelfcontrole en reflectie op hun werk en blokkeert een eventuele trial-and-error strategie. Dit applet is als diagnostische toets te gebruiken.

Hieronder staan voor verschillende niveaus een aantal vergelijkingen. Druk op de knop met de pijl omhoog om een vergelijking stapgewijs op te lossen.

Als je alle opdrachten van een niveau gedaan hebt druk je op de nakijkknop. Je krijgt een score en je kunt zien welke stappen goed of fout waren.

Je kunt ook tussendoor de nakijkknop gebruiken, maar dat kost punten.

- Niveau 1      Score: 0
- Niveau 2      Score: 0
- Niveau 3      Score: 6
- Niveau 4      Score: 0
- Niveau 5      Score: 0

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Scores: 6

Kijk na      Opnieuw

1 keer nagekeken

$\sqrt{\square}$   $\square^\square$   $\frac{\square}{\square}$   $(\square)$       ↓ Terug

$4(x - 1) = 9x - 10$       ↷ gelijkwaardig met.

$4x - 4 = 9x - 10$       ✗ gelijkwaardig met.

$5x = -14$       ↷ gelijkwaardig met.

✗  $x = -\frac{14}{5}$



## OppervlakteAlgebra

Het applet *Oppervlakte Algebra* biedt een serie opdrachten, waarin telkens een in stukken verdeelde rechthoek wordt getoond. Verschillende lengtes en/of oppervlaktes zijn als waarde of variabele aangegeven. Ontbrekende waarden en formules moeten door de leerling worden ingevuld. De contextgebonden begrippen ‘rechthoekformule’ en ‘stukjesformule’ worden hier gebruikt in plaats van formele begrippen als ontbinding en uitwerking zonder haakjes. Behalve het oefenen van de overgang van rechthoeksformule naar stukjesformule en omgekeerd, zijn er opdrachten die dit stramien doorbreken en de leerling uitnodigen tot complexere redeneringen. Ook wordt er gewerkt met formules met mintekens, maar alleen voor zover die formules betekenis hebben in een oppervlaktecontext.

Geef bij elke opdracht de ontbrekende getallen of formules op de stipeltjes. (Voor kwadraten kun je ook de pijltoets omhoog gebruiken of je typt ^2) Klik op OK als alles is ingevuld.

Zijn alle opdrachten gedaan, dan kun je een andere activiteit kiezen.

**Activiteiten:**

- Getallen voor oppervlakten
- Maak een stukjesformule.
- Naar de rechthoekformule.
- Extra puzzelopdrachten.
- Formules met min.

Rechthoekformule: ...

Stukjesformule:  $p^2 + 13p + 42$

OK Opnieuw

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

## StippelAlgebra opdrachten

Dit applet biedt de leerlingen opdrachten bij stippelpatronen en fungeert daarmee als een context voor het ontdekken van regelmaat en het beschrijven daarvan met behulp van zelfgemaakte formules.

De leerling kiest een probleem en krijgt dan een sequentie van drie stippelpatronen te zien, die een regelmaat vertonen. Vervolgens worden er vijf vragen gesteld: twee over het aantal stippen in een gegeven patroon-rangnummer, twee over existentie van een patroon met een gegeven aantal stippen en een laatste over de formule. Je kunt het volgende patroon van de sequentie opvragen, maar dat kost punten.

niveau

▼ 1 ▲

kies een probleem

V-getallen ▼

toon volgend patroon (-4)

score 4

totaal 0

volgende vraag

Hoeveel stippen bevat patroon  $n=4$ ?

## Vergelijkingen oplossen met bordjes

Het applet *Vergelijkingen oplossen met bordjes* biedt een interactieve ondersteuning van de zogenaamde bordjesmethode, een strategie die handig is bij een bepaald type vergelijkingen. Het applet maakt het mogelijk om een deel van de vergelijking te selecteren en een waarde voor dit deel in te vullen. Op deze manier kan de vergelijking stapsgewijs worden opgelost. Het applet geeft bij elke stap feedback. Het werken met deze strategie helpt bij de ontwikkeling van inzicht in de structuur van expressies.

Info

√ 0 0 (0) Opnieuw

Zoek een oplossing voor de vergelijking. Gebruik de bordjes-methode.

Doe dat door met de muis een deel van de linkerkant te selecteren en daarvan de waarde te bepalen. Ga door tot je weet wat  $x$  is.

Kies daarna een andere vergelijking uit de lijst hieronder.

$$13 - \frac{56}{21 + \frac{70}{3+x}} = 12$$

$$\frac{56}{21 + \frac{70}{3+x}} = 1$$

$$21 + \frac{70}{3+x} = 56$$

$$\frac{70}{3+x} = 35$$

$$3+x = 2$$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

## Vermenigvuldigen met tabellen

Dit applet is sterk vergelijkbaar met het applet *Oppervlakte Algebra*. De rechthoekoppervlaktes zijn vervangen door de abstractere vermenigvuldigingstabellen, waarin ook formules met negatieve coëfficiënten kunnen worden gemanipuleerd. De opdrachten zijn verdeeld in een zestal activiteiten. De eerste activiteit bevat nog geen formules. Rekenen met negatieve getallen en breuken wordt geoefend door deels ingevulde vermenigvuldigingstabellen af te maken. Bij de tweede en derde activiteit moeten tabellen met variabelen en expressies worden aangevuld. Bij de vierde activiteit moeten formules zonder haakjes worden geschreven. Daarbij mag de tabel worden gebruikt, maar dit hoeft niet. Het invullen van de juiste formule zonder haakjes is voldoende. Daarbij wordt ook gecontroleerd of de formule zo kort mogelijk is geschreven. Zo niet, dan krijg je een oranje vinkje in plaats van een groene krul, maar de opdracht wordt wel goed gerekend. De vijfde activiteit heeft dezelfde bedoeling als de vierde, alleen krijgt de leerling hier slechts een lege tabel als steun, zodat ook de randen zelf ingevuld moeten worden. Bij de zesde activiteit moeten formules worden ontbonden, waarbij een aanwezige tabel kan worden gebruikt.

**f**

Geef bij elke opdracht de ontbrekende getallen of formules op de stippeltjes. (Voor kwadraten kun je ook de pijltoets omhoog gebruiken of je typt ^2) Klik op OK als alles is ingevuld.

Zijn alle opdrachten gedaan, dan kun je een andere activiteit kiezen.

**Activiteiten:**

- Getallen vermenigvuldigen
- Formules in een tabel 1
- Formules in een tabel 2
- Haakjes uitwerken met een tabel 1
- Haakjes uitwerken met een tabel 2
- Ontbinden met een tabel

$\sqrt{\square}$   $\square^{\square}$   $\frac{\square}{\square}$   $(\square)$

$\times$	$x$	$-\frac{1}{2}$
$x$	$x^2$	$-\frac{1}{2}x$
$4$	$4x$	$-2$

Schrijf zonder haakjes. Je mag de tabel invullen.

Met haakjes:  $(x+4)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

X Zonder haakjes: ...

OK Opnieuw

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

## Waarmakers

Het applet *Waarmakers* genereert (at random) series vergelijkingen van verschillende moeilijkheidsgraad die moeten worden opgelost. Het applet geeft feedback door aan te geven of een vergelijking correct is opgelost of niet. Vergelijkingen worden hier gepresenteerd als puzzels waarin je een onbekende waarde moet zoeken, zonder dat er een kant-en-klare strategie of algoritme wordt aangeboden. Doordat de oplossingen gehele getallen zijn, zijn er ook allerlei eigen strategieën mogelijk, zoals goed kijken naar de formule, handig proberen en controleren. Deze eigen strategieën bevatten vaak elementen van bijvoorbeeld de bordjesmethode of de terugrekenmethode en vormen daarmee een goede voorbereiding op het oplossen met formele strategieën.

Info

### Wat is x?

Hiernaast staan een aantal vergelijkingen.  
Los die op door een waarde voor x te geven.  
Klik daarvoor op de stippels en vul in.  
Je mag ook de waarde voor x direct invullen  
in de vergelijking.  
Als je klaar bent, druk dan op de nakijkknop.  
Je maximumscore wordt bijgehouden per niveau.  
Je kunt de nakijkknop vaker gebruiken en  
verbeteringen maken, maar elke keer kost het  
een punt.

<input type="radio"/> Niveau 1	Score: 0	
<input checked="" type="radio"/> Niveau 2	Score: 0	
<input type="radio"/> Niveau 3	Score: 0	

$- 2 - 3 \cdot x = - 20$ 
x = ...

$\sqrt{\frac{20}{x}} = 2$ 
x = ...

$- 5 \cdot x^2 = - 45$ 
x = ...

$- 3 \cdot (9 - x) = - 9$ 
x = ...

$\frac{- 49}{\sqrt{x}} = - 7$ 
x = ...

$\frac{- 10}{x} + 11 = 13$ 
x = ...

$8 - \frac{x}{7} = - 3$ 
x = ...

$\frac{8}{x^2} = 2$ 
x = ...

Direct invullen
Kijk na
Opnieuw

