Tien jaar NWD

een lichtbundel

Lichtende voorbeelden van artikelen en werkbladen
voortkomend uit
tien jaar Nationale Wiskunde Dagen

Colofon

Deze uitgave is tot stand gekomen ter gelegenheid van de tiende Nationale Wiskunde Dagen 2004.
Veel van de opgenomen artikelen zijn eerder verschenen. In die gevallen is een bronvermelding gegeven.

Redactie
Michiel Doorman
Paul Drijvers
Tom Goris
Marianne Moonen

Vormgeving omslag
Tom Goris

Foto vuurtoren
William A. Britten

INHOUD

Licht op tien jaar NWD

Het was moeilijk kiezen voor deze bundel. U heeft een boekwerk met 20 prachtige bijdragen uit de afgelopen 10 jaar NWD in handen. Door deze 20 *wel* te kiezen, zijn er tegelijk zo'n 250 NWD verhalen *niet* gekozen, verhalen die stuk voor stuk ook allemaal zeer de moeite waard waren. Gelukkig werd de keuze vergemakkelijkt doordat de redactie zich grotendeels heeft beperkt tot verhalen die eerder in de *Nieuwe Wiskrant* verschenen zijn. Maar dat waren er toch altijd nog zo'n 40 stuks....

Ik houd wel van statistiek en van grote getallen. Daarom hierbij nog een paar:

1. De afgelopen 9 NWD's telden samen zo'n 4000 deelnemers, die 4000 × 2 = 8000 deelnemersdagen met zich meebrachten, wat neerkomt op zo'n 40 full-time arbeidsjaren.
2. Die 4000 deelnemers genoten ieder van 8 presentaties, dus dat was 32.000 keer genieten, verzorgd door 272 sprekers, waarvan 36 plenair en 236 parallel, zodat een plenaire spreker gemiddeld 444 deelnemers een plezier deed en een parallelle spreker gemiddeld 68 deelnemers in z'n gehoor had.
3. Als elke spreker een artikel had geschreven voor deze bundel van laten we zeggen 6 pagina's, had u nu een boekwerk van ruim 1600 pagina's, wat overeenkomt met de omvang van 8 jaargangen *Nieuwe Wiskrant*, dat is zo'n 20 cm rugbreedte in uw boekenkast.

U zou er niet aan toekomen om het allemaal te lezen.

De rijkdom van de afgelopen negen jaar NWD valt niet alleen in getallen uit te drukken, maar ook in woorden. De lange lijst van thema's uit de voorgaande jaren luidt: wiskunde in de natuur, voorspellen en beslissen, wiskunde en kunst (2×), wiskunde in de geschiedenis (4×), wiskunde om de wiskunde (2× getaltheorie, 2× meetkunde, 1× analyse), wiskunde en sport (3×), wiskunde en statistiek (2×), wiskunde en techniek (2×), wiskunde van het vrije veld (2×), redeneren en bewijzen, weer en astronomie, wiskunde en robotica, wiskunde en architectuur (2×), wiskunde en archeologie, discrete wiskunde, wiskunde en taal, wiskunde en luchtvaart, wiskunde en medische wetenschappen, wiskunde en sterrenkunde, wiskunde en geld, wiskunde en ruimtevaart, muziek en lawaai, wiskunde en beeldanalyse, wiskunde en verkeer, uitdaging en stimulans, wiskunde en aardwetenschappen, wiskunde en verwantschappen, wiskunde en biologie, wiskunde en elektronisch rekenen, wiskunde onder handbereik, wiskunde, kans en cultuur, wiskunde in een kritische maatschappij, wiskunde en economie, wiskunde en speelgoed, wiskunde in het vmbo (2×), wiskunde en zeevaart, wiskunde en modelleren, wiskunde en didactiek: wiskunde door leerling-ogen gezien, wiskunde en filosofie, wiskunde en actualiteiten.

Korter kan ik deze opsomming niet maken!

U leest deze lijst diagonaal, maar wellicht gaan er toch een paar concrete herinneringen aan geslaagde NWD presentaties door uw hoofd.
Men vraagt mij wel eens: *hoe verzinnen jullie die thema's en waar halen jullie toch al die sprekers vandaan?* Het antwoord luidt: *dat is de verdienste van de NWD-programmacommissie.* Danzij de creativiteit en de uitstekende netwerken van de commissieleden gaan er vele deuren voor de NWD open. Keer op keer lukt het weer om met originele namen aan te komen en keer op keer zijn potentiële sprekers bereid om hun belangenloze medewerking te verlenen.

Maar uiteindelijk gaat het er natuurlijk om of u de NWD waardeert. En dat doet u. Hoe wij dat weten? Dat vertelt u ons zelf. Jaar in jaar uit vult ongeveer 50% van de deelnemers het evaluatieformulier in. Dat zijn dus zo'n 2000 formulieren. Uw globale oordeel is stabiel: de NWD in z'n totaliteit geeft u keer op keer een royale 8.

Terug naar deze bundel. De redactie heeft ook NWD verhalen opgenomen met een praktisch tintje. Praktisch in de zin van bruikbaar voor in de klas of voorzien van enkele opgaven. Bij enkele artikelen is zelfs een apart werkblad bijgevoegd. Hiermee is de bundel ook een *doe-bundel* geworden.

Ook voor de enkeling onder u die alle voorgaande 9 NWD's heeft bijgewoond en (onverhoopt) meent alle verhalen al te kennen, is er tenminste één nieuw verhaal: *Ontsnappen aan de Nipkow-doctrine*, de openingslezing van NWD10.

Rest een woord van dank. In de eerste plaats dank aan de sprekers, die hun NWD verhaal opschreven en ter beschikking stelden voor deze bundel. Dank ook aan de gelegenheidsredactie, zie het colofon.

Veel plezier bij het lezen en vooral ook doen van deze bundel. Maar eerst: vooral weer genieten van NWD10.

Heleen Verhage
NWD organisatie

De Fis van Euler

Voordracht gehouden op de Nationale Wiskunde Dagen 1995

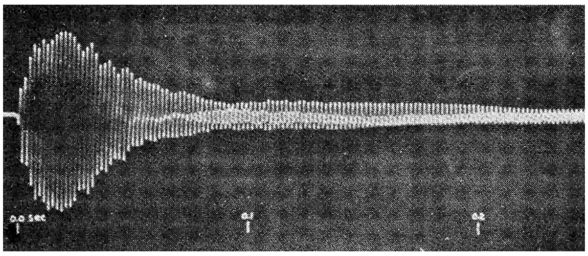
J. van de Craats
Oosterhout

In 1739 beschreef de wiskundige Leonhard Euler (1707-1783) in zijn boek *Tentamen novae musicae* (Proeve van een nieuwe muziektheorie) een nieuwe manier om toonsystemen te vormen. Een van de aldus gevormde systemen komt vrijwel overeen met de traditionele C-groot toonsoort, het systeem dat per octaaf de zeven tonen bevat van de gewone C-grote-terts toonladder. Alleen voegt Euler er een extra toon aan toe, de Fis. We zullen Eulers ideeën presenteren en verder uitwerken. Zowel de grote-tertssystemen als de kleine-tertssystemen krijgen daarbij een plaats in een zogenaamd kwinten-tertsen rooster. Daarmee kunnen we verbanden tussen toonsoorten duidelijk maken en modulaties verklaren.

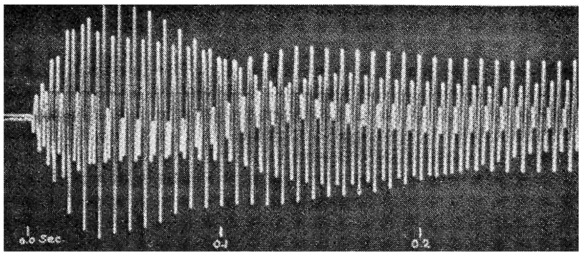
Tonen en boventonen

Aan een muzikale toon kan men drie aspecten onderscheiden: de *toonhoogte*, de *toonsterkte* (luidheid) en de *klankkleur* (het timbre). Sinds de zeventiende eeuw weet men dat geluid ons oor bereikt via trillingen in de lucht, en dat een muzikale toon correspondeert met een min of meer periodieke trilling. Maak je die trilling zichtbaar, dan zie je een regelmatig terugkerend golfpatroon (figuur 1). De toonhoogte wordt daarbij bepaald door de *frequentie*, het aantal trillingen per seconde. De toonsterkte hangt samen met de *amplitude* van de trilling, en de klankkleur ligt vast door de specifieke vorm van het trillingspatroon. Tonen met dezelfde toonhoogte die op verschillende instrumenten worden voortgebracht, corresponderen met trillingen van gelijke frequentie maar met een verschillende golfvorm.

De Fourieranalyse leert ons dat elke trilling beschouwd kan worden als de superpositie van sinusoïden met frequenties die gehele veelvouden zijn van de grondfrequentie. Een trillend voorwerp dat een muzikale toon voortbrengt, brengt dus eigenlijk een superpositie voort van afzonderlijke trillingen. Inderdaad kun je bij gespannen snaren of luchtkolommen in blaasinstrumenten door middel van wat kunstgrepen die samenstellende trillingen ook afzonderlijk tot klinken brengen: je kunt waarnemen dat ze bij al die frequenties gaan *resoneren*; de tonen die bij die frequenties behoren, noemt men *boventonen*, en elke muzikale toon is dus een superpositie van boventonen. De *n*-de boventoon heeft als frequentie het *n*-voud van de grondfrequentie. De bijdragen van de afzonderlijke boventonen in een toon bepalen de uiteindelijke trillingsvorm, dat wil zeggen de klankkleur van de toon.



Dayton C. Miller



Dayton C. Miller

fig. 1 Twee klankgrafieken van pianotonen. De bovenste is een toon C met een frequentie van 516 Hz, de onderste een C met frequentie 129 Hz. De figuren zijn afkomstig uit Science and Music *van Sir James Jeans.*

Welluidende intervallen

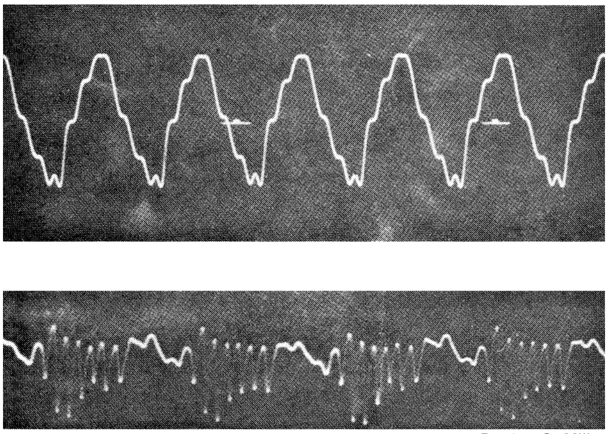
Aan Pythagoras wordt wel de ontdekking toegeschreven dat welluidende muzikale intervallen iets te maken hebben met eenvoudige getalsverhoudingen. Verdeel je een gespannen snaar in twee delen, dan brengen de twee stukken samen een welluidend interval voort wanneer de

Eerder verschenen in de *Nieuwe Wiskrant*, *15*(1), 1995

verhouding van de lengten van de delen eenvoudig is. Zo correspondeert een verhouding 1 : 2 met het interval dat men een *octaaf* noemt. De twee tonen tezamen versmelten zozeer, dat het zelfs moeilijk is ze nog afzonderlijk te blijven horen. Dat is niet zo moeilijk te verklaren: het korte stuk van de snaar zal twee maal zo snel trillen als het lange: alle boventonen van het korte stuk zijn ook boventonen van het lange stuk, en je kunt de samenklank dus ook opvatten als één toon, de toon van het lange stuk, waarvan de even boventonen extra zijn versterkt. Tonen die een octaaf verschillen, zijn dus in zekere zin ‘gelijk’: een melodie die een octaaf hoger of lager wordt gespeeld, klinkt in wezen hetzelfde. Als mannen en vrouwen samen zingen, zullen de vrouwen een octaaf hoger zingen dan de mannen. Tonen die een octaaf verschillen, hebben ook dezelfde naam: zo worden de tonen met frequenties

..., 55, 110, 220, 440, 880, 1760, 3520, 7040, ... Hz

allemaal met de toonnaam A aangeduid.



Dayton C. Miller

fig. 2 Klankgrafieken van dezelfde toon C gespeeld op twee verschillende klarinetten.

Hier past overigens een waarschuwende opmerking. We zouden op dit moment, los van alle muzikale tradities, een heel nieuw systeem van toonnamen kunnen gaan invoeren, gebaseerd op frequenties en hun verhoudingen. Dat zou wiskundig zeer bevredigend zijn, maar verwarrend voor muzikaal geschoolde lezers. We nemen daarom een hybride standpunt in, waarbij we wel aansluiten bij de gebruikelijke notaties voor toonnamen en muzikale intervallen, maar hele delen van de traditionele harmonieleer verwerpen of modificeren. In het bijzonder zullen de namen van de tonen en de intervallen (*octaaf* bijvoorbeeld) niet meer dan onverklaarde, traditioneel gangbare symbolen zijn.

We gaan nu verder met het verkennen van de welluidende intervallen. Ook het interval met frequentieverhouding 2 : 3 klinkt zeer welluidend: men noemt het een *kwint*. De welluidendheid correspondeert ook weer met het overeenstemmen van boventonen: de twee tonen hebben veel boventonen gemeen, maar ze zijn ook allebei boventoon van eenzelfde grondtoon: de toon die een octaaf lager klinkt dan de laagste van de twee.

De verhouding 3 : 4 (de *kwart*) levert in wezen niet veel nieuws: haal in de kwint de laagste toon maar een octaaf omhoog. Wél nieuw is de verhouding 4 : 5, de *grote terts*. De drieklank 4 : 5 : 6, die samengesteld is uit een grote terts 4 : 5 en een kwint 4 : 6 = 2 : 3, vormt in zekere zin de basis van de harmonie van de westerse muziek; in wezen is die drieklank, die bekend staat als de *grote-tertsdrieklank* (of kortweg *grote drieklank*) gewoon een stukje van de boventonenreeks van een twee octaven lager liggende grondtoon. Nogmaals vragen we de lezer niets te zoeken achter de verwarrende namen *kwint* en *terts*, die een verband suggereren met de getallen 5 (voor kwint) en 3 (voor terts), maar die nu juist te maken hebben met frequentieverhoudingen waarin de priemfactoren 3 en 5 precies andersom voorkomen! De naamgeving van de intervallen heeft dan ook een heel andere achtergrond; we moeten die hier buiten beschouwing laten.

De grote drieklank 4 : 5 : 6 bevat ook het interval 5 : 6 = 10 : 12, de *kleine terts*. Samen met de kwint 2 : 3 = 10 : 15 kan men er de *kleine drieklank* 10 : 12 : 15 mee vormen, maar het is duidelijk dat deze drieklank een veel mindere mate van welluidendheid bezit. De grondtoon ervan ligt meer dan drie octaven lager, en bovendien is die grondtoon niet een toon die in de drieklank zelf voorkomt.

Toonsystemen

De oude Grieken vormden al toonsystemen door combinaties van de fundamentele intervallen octaaf, kwint en grote terts. Het zogenaamde Pythagoras-systeem maakte zelfs alleen maar gebruik van octaven en kwinten. Zes geschakelde kwinten leveren zeven tonen. Begint men met een toon F, dan krijg je in de traditionele naamgeving de volgende rij tonen:

F – C – G – D – A – E – B

waarbij de frequentieverhouding tussen twee opvolgende tonen dus telkens 2 : 3 is. Breng je al die tonen door octaaftransposities binnen één octaaf, bijvoorbeeld het octaaf tussen twee C’s, dan ontstaat de zogenaamde *Pythagoras-toonladder:*

C – D – E – F – G – A – B – C

de toonladder die je ook op de witte toetsen van de piano vindt (alleen wijkt de stemming van de tonen op de piano een heel klein beetje van de zuivere kwinten af, maar daarover later).

Men kan natuurlijk de kwintenreeks naar beide zijden onbeperkt voortzetten, en zo een in principe onbegrensde rij van nieuwe tonen vormen. Binnen het octaaf komen er dan ook steeds meer tonen in het systeem. In de gebruikelijke naamgeving:

... – Ges – Des – As – Es – Bes – F – C – G – D –
– A – E – B – Fis – Cis – Gis – Dis – Ais – Eis – ...

In zekere zin is het aantal van zeven tonen per octaaf van de Pythagoras-toonladder nogal willekeurig. Het is meer een kwestie van traditie dan van muzikale noodzaak. Euler trok zich van dit traditionele aantal van zeven tonen dan ook niets aan toen hij voorstelde toonsystemen te vormen met als basis niet alleen het octaaf en de kwint, maar ook de grote terts. Net als boven worden octaaftransposities niet expliciet opgeschreven, en dus krijg je dan een tweedimensionaal schema met als bouwstenen kwinten en grote tertsen. Euler stelde voor om die schema's altijd *rechthoekig* te maken, en hij had daar zowel rekenkundige als muzikale argumenten voor. In mijn boek *De Fis van Euler* is daarover meer te vinden; hier moeten we die kwestie laten rusten.

Het eenvoudigste Euler-schema krijg je met één kwint en één grote terts als bouwstenen: vier tonen per octaaf, bijvoorbeeld

A – E
| |
F – C

Horizontaal vinden we hierin de kwintverhouding 2 : 3, en verticaal (van beneden naar boven) de grote terts 4 : 5. Natuurlijk is dit simpele schema muzikaal gesproken nauwelijks interessant. Het volgende systeem is dat echter wel:

A – E – B – Fis
| | | |
F – **C** – G – D

Euler noemde dit systeem C-Durus, en hij merkte op dat het, afgezien van de Fis, overeenkomt met het traditionele C-groot systeem. Eulers systeem bevat de drie grote drieklanken C–E–G, G–B–D en F–A–C, die door Rameau als basis genomen waren van de harmonie: de centrale drieklank C–E–G op de *tonica* C (vet gedrukt in het schema), een kwint hoger de grote drieklank G–B–D op de dominant G, en een kwint lager de drieklank F–A–C op de subdominant F. Elke drieklank is ook voorzien van zijn leidtoon: B als leidtoon naar de tonica C, Fis als leidtoon naar de dominant G, en E als leidtoon naar de subdominant F. Ook Rameau sprak van leidtonen, maar in zijn C-majeur systeem nam hij de leidtoon Fis naar de dominant G niet op, waarschijnlijk omdat hij de traditie van zeven tonen per octaaf niet wilde doorbreken. Het merkwaardige is echter dat je, wanneer je in de muziek van de grote componisten kijkt, die leidtoon naar de dominant (de 'Fis van Euler') veelvuldig tegenkomt. Niet als een 'vreemd' element, maar als een volkomen natuurlijk onderdeel van het grote-tertssysteem. Zie bijvoorbeeld figuur 3; de muzikale praktijk geeft Euler gelijk!

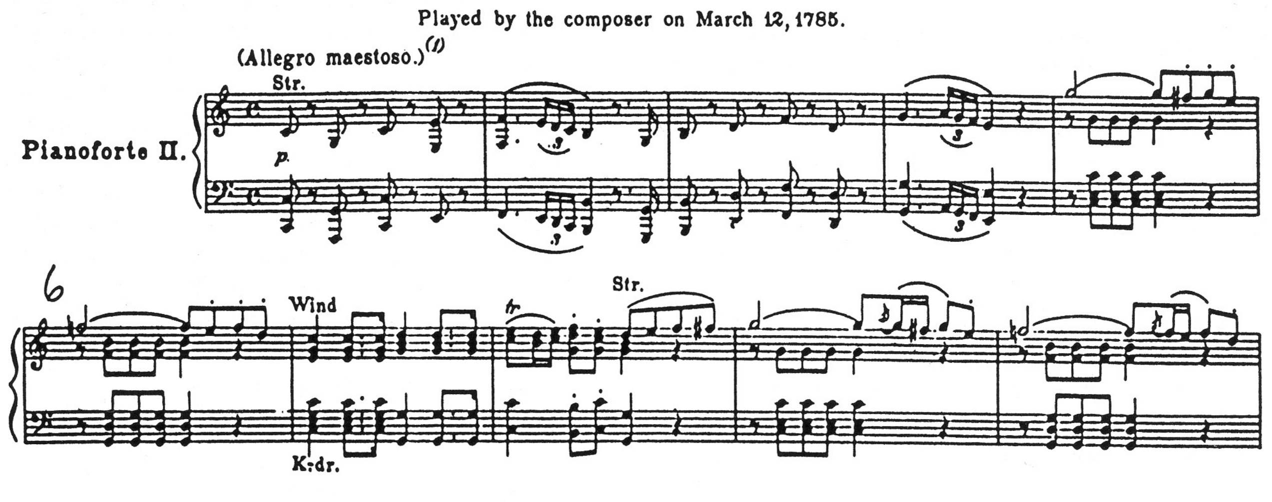


fig. 3 Het begin van Mozarts pianoconcert in C groot, KV 467, met daarin in de maten 5, 8 en 9 een 'Fis van Euler' (voor de duidelijkheid is de orkestpartij tot twee notenbalken gereduceerd)

Kleine-tertssystemen

Euler beschouwde ook andere systemen; veel aandacht besteedde hij aan het volgende systeem van twaalf tonen per octaaf:

```
  A  –  E  –  B  –  Fis
  |     |     |     |
  F  –  C  –  G  –  D
  |     |     |     |
 Des – As  –  Es – Bes
```

Dit systeem bevat twee grote-terts deelsystemen: C-groot en As-groot. Maar het bevat ook de *kleine drieklanken* C–Es–G op de tonica C, G–Bes–D op de dominant G, en F–As–C op de subdominant F, samen met de leidtonen B, Fis en E. Als je de muziekliteratuur onderzoekt, zie je dat zo'n 4–bij–3 schema een uitstekende theoretische grondslag vormt voor de beschrijving van kleine-tertstoonsoorten. Bach, Mozart en Beethoven blijken in hun kleine-tertscomposities juist deze twaalf tonen te gebruiken, en bijna steeds is ook de harmonische functie van die twaalf tonen uit het schema verklaarbaar. Bovendien wordt hierdoor duidelijk wat de relatie is tussen een kleine-tertssysteem en het bijbehorende grote-tertssysteem: het eerste is een *uitbreiding* van het tweede: het tooncentrum (de tonica) is hetzelfde, maar de harmonische mogelijkheden zijn uitgebreid. Het is uitermate verrassend om te constateren hoe goed dit theoretische model aansluit bij de muzikale praktijk. In figuur 4 staat een fragment in G-klein uit hetzelfde pianoconcert van Mozart waaraan ook figuur 3 ontleend is. Overigens, waarom de tonica daar G is en niet C, zullen we hieronder verklaren.

Modulaties

In principe kan men Eulers schema natuurlijk onbeperkt naar alle kanten uitbreiden. Dan ontstaat een onbegrensd tweedimensionaal tableau van de vorm

```
      |       |       |       |       |       |
 –  Fis  –  Cis  –  Gis  –  Dis  –  Ais  –  Eis  –
      |       |       |       |       |       |
 –   D   –   A   –   E   –   B   –  Fis  –  Cis  –
      |       |       |       |       |       |
 –  Bes  –   F   –   C   –   G   –   D   –   A   –
      |       |       |       |       |       |
 –  Ges  –  Des  –  As   –  Es   –  Bes  –   F   –
      |       |       |       |       |       |
 – Eses  – Beses –  Fes  –  Ces  –  Ges  –  Des  –
      |       |       |       |       |       |
```

Horizontaal vindt men steeds kwintintervallen, en verticaal (van beneden naar boven) grote tertsen. In dat schema vinden alle grote- en kleine-tertssystemen hun plaats, want elke toon kan als tonica genomen worden, als centrum van een vier–bij–twee blok (voor de grote-tertssystemen) of een vier–bij–drie blok (voor de kleine-tertssystemen). Je kunt er ook *modulaties* mee verklaren. Een modulatie is de overgang binnen een muziekstuk van één toonsysteem naar een ander. Het tonale centrum, de tonica, verschuift dan van de ene toon naar de andere. Modulaties zijn in onze muziek nog maar van betrekkelijk recente datum: tot in de zeventiende eeuw kwamen ze eigenlijk nauwelijks voor: men koos zich in het begin van een stuk een bepaald tonaal centrum met de daarbij behorende tonenvoorraad, en bleef daar gedurende het gehele stuk mee werken. Vanaf de achttiende eeuw begonnen de componisten echter steeds meer modulaties toe te passen.

fig. 4 Fragment in G-klein uit het eerste deel van hetzelfde pianoconcert van Mozart. Hierin komen precies alle tonen uit het vier–bij–drie schema van G-klein voor.

Kwintmodulaties worden het meest gebruikt: ze verlopen vrijwel moeiteloos. Haast ongemerkt verschuift het tonale centrum een kwint omhoog of omlaag. In de klassieke sonatevorm wordt het tweede thema vrijwel altijd in de dominant gespeeld, dat wil zeggen dat er een modulatie over een kwint omhoog heeft plaatsgevonden. Maar eerst bij Mozart, later ook bij Beethoven, en vooral bij Schubert vind je ook modulaties over een *grote terts*. Uit het kwinten-tertsenschema zijn die modulaties gemakkelijk te verklaren: het tonale centrum schuift dan een plaats omhoog of omlaag. Ook de overgang van majeur naar mineur en omgekeerd is aan de hand van dit schema uitstekend te volgen. Het is fascinerend om de modulaties bij Mozart, Beethoven en Schubert op deze wijze te analyseren.

Stemmingsproblemen

Het tweedimensionale kwinten-tertsenrooster van hierboven bevat een onbeperkt aantal tonen per octaaf: alle tonen zijn verschillend, ook al komen dezelfde toonnamen meermalen voor (maar dat is weer een kwestie van muzikale traditie). De lezer van deze *Nieuwe Wiskrant* zal na kunnen gaan dat dit een direct gevolg is van het feit dat een positieve gehele macht van 2 nooit gelijk kan zijn aan een positieve gehele macht van 3 of van 5. Heb je echter een instrument met een beperkt aantal tonen per octaaf, zoals bijvoorbeeld een orgel of een piano, dan kun je in de problemen komen wanneer je modulaties wil toepassen. Het moderne klavier heeft slechts twaalf toetsen per octaaf, en de vraag is dus hoe je de bijbehorende tonen moet stemmen. Zelfs een simpele kwintmodulatie kan al moeilijkheden veroorzaken: de toon A in F-groot is een andere toon dan de A in G-groot die uit C-groot ontstaat door een kwint omhoog te moduleren. In de loop der tijden heeft men op allerlei manieren gepoogd oplossingen voor dit probleem te vinden. Een klavier met meer dan twaalf toetsen per octaaf is wel geprobeerd, doch dit stuitte op praktische bezwaren. Al in een vroeg stadium heeft men de *evenredige twaalftoonsstemming* voorgesteld, een methode waarbij men het octaaf in twaalf gelijke deelintervallen verdeelt. Zo'n verdeling maakt onbeperkt transponeren en moduleren mogelijk: alle toonsoorten zijn 'even vals'. De afwijking die je in dat systeem voor de kwint krijgt, is uitermate klein, maar de grote terts is hoorbaar vals. Het heeft tot in de vorige eeuw geduurd totdat men zich over dit bezwaar heenzette, en de evenredige stemming als stemmingswijze voor piano's accepteerde. Tot die tijd werkte men met allerlei compromisstemmingen die bepaalde toonsoorten bevoordeelden ten koste van andere. Onbeperkt moduleren stuitte daarbij dus op bezwaren: 'ver verwijderde' toonsoorten klonken storend vals.

Toen in de negentiende eeuw componisten steeds meer modulaties gingen toepassen, moesten die compromisstemmingen geleidelijk aan plaats maken voor de evenredige octaafverdeling. Het enorme succes van de piano als dominerend muziekinstrument sinds de tweede helft van de achttiende eeuw – vrijwel alle componisten waren goede pianisten, en veel componisten componeerden aan de piano – heeft ertoe bijgedragen dat velen de evenredige stemming thans niet meer ervaren als een compromissysteem dat alleen voor toetsinstrumenten noodzakelijk is, maar als een van de grondslagen van de muziek. Zij beschouwen de verdeling van het octaaf in twaalf gelijke deelintervallen als een soort muzikaal axioma. Daardoor worden echter alle harmonische wetmatigheden verduisterd, en men dringt ook de menselijke zang, het begin en het einde van alle muziek, in een keurslijf van valse intonaties en onzuivere intervallen. Het is niet verwonderlijk dat het axioma van de octaafverdeling in twaalf gelijke delen slechts tot doodlopende wegen heeft geleid. Het verloochent een van de belangrijkste wezenskenmerken van de muziek: de harmonie.

Literatuur

Het bovenstaande wordt veel uitgebreider behandeld in mijn boek *De Fis van Euler* (Aramith Uitgevers, Bloemendaal 1989, ISBN 90-6834-051-4), dat echter sinds kort uitverkocht is.
Wel verkrijgbaar zijn twee voortreffelijke 'klassieken':
Hermann L.F. Helmholtz: *On the Sensations of Tone* (Engelse vertaling en uitgebreide bewerking (1885) door Alexander J. Ellis van *Die Lehre von den Tonempfindungen*, Heidelberg, 1862, 1877), heruitgave Dover, New York, 1954, ISBN 0-486-60753-4
Sir James Jeans: *Science and Music*, Cambridge, 1937, heruitgave Dover, New York, 1968, ISBN 0-486-61964-8

Toen *x* nog een grote onbekende was

Voordracht gehouden op de Nationale Wiskunde Dagen 1995

M. Kool
Hogeschool Domstad, Utrecht

In de zestiende-eeuwse Nederlanden ging het merendeel van onze landgenoten zonder algebra door het leven. Toch werden destijds door degenen die zich hadden geoefend in 'die edel conste arithmetica' wel degelijk ingewikkelde vraagstukjes opgelost. x was voor hen nog een grote onbekende, maar men beschikte wel over allerlei handige rekentechnieken en rekenregels.

Waar zouden wij zijn zonder x? Wij zijn gewend aan en geoefend in het gebruik van variabelen en vergelijkingen. Als ons gevraagd wordt de waarde van een onbekende te berekenen, proberen we vaak niet eens het vraagstuk zonder algebra op te lossen.

De paardenkoop

Tijdens de Nationale Wiskundedagen 1995 deed ik een klein testje. Ik legde de ongeveer honderd toehoorders van mijn voordracht het volgende vraagstuk voor:

> Twee ghesellen Willem ende Wouter coopen een peert voor 60 guldenen ende niemandt van huerbeeden en cant betalen. Daeromme seide Willem tot Wouter: "leent my 3/4 van uwen ghelde ende ic salt tpeert betalen." "Neen", seide Wouter tot Willem, "gheeft my maer 2/3 van uwen ghelde ende ic salt tpeert selue betalen." De vraghe es nv hoeveel ghelts elck besondert mede te merctwaert brochte.

Zoals te verwachten was, stelde vrijwel iedereen in de zaal keurig een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden op en binnen de kortste keren werd gevonden dat Willem 30 gulden en Wouter 40 gulden bezat. Zo zijn we opgevoed en zo werkt het prima.

Het vraagstuk van de twee vrienden die een paard willen kopen is afkomstig uit de arithmetica van Christianus van Varenbraken, geschreven in 1532. Dit rekenboekje is één van de dertig Nederlandstalige rekenboeken en rekenhandschriften die zijn overgeleverd uit de zestiende eeuw. In deze werken wordt de leerling het cijferend rekenen met Hindoe-Arabische getallen geleerd. In het eerste gedeelte wordt uitgelegd hoe men moet optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Het tweede gedeelte bevat de zogenaamde rekenregels waarmee allerlei vraagstukken opgelost kunnen worden. De belangrijkste regel die wordt behandeld is de 'Regel van drieën'. Deze regel wordt gebruikt om bij drie gegeven getallen het vierde evenredige getal te berekenen. Peter van Halle legt in zijn arithmetica van 1568 de regel van drieën uit aan de hand van het volgende voorbeeld:

> 9 naysters maecten op eenen dach 15 paer hemden. Hoeveel soudender 6 naysters maeken?

De drie gegeven getallen worden in de juiste volgorde op een rij gezet: 9 --- 15 --- 6. De laatste twee getallen worden vermenigvuldigd met elkaar en vervolgens wordt het produkt gedeeld door het eerste getal:

$$\frac{15 \times 6}{9} = 10$$

Wij zouden dit 'kruiselings vermenigvuldigen' noemen.

De verdeling van een erfenis

Met deze regel van drieën worden in de zestiende-eeuwse rekenboeken zeer veel vraagstukken opgelost. Vaak gaat het om eenvoudige verhoudingsvraagstukken, maar gaandeweg komen er ook ingewikkelder opgaven voor. Meestal gaat het om praktische vraagstukken uit de praktijk van de zestiende-eeuwse koopman: berekeningen over het kopen en verkopen van goederen, het wisselen van geld, rentetarieven, enzovoort. Soms worden er echter ook nogal onrealistische vraagstukken behandeld. Een mooi en zeer onwaarschijnlijk voorbeeld is de kwestie van de erfenisverdeling in de arithmetica van Bernard Stockmans uit 1595:

Eenen overleden Man achter-ghelaten hebbende eene bevruchte vrouwe met 3175 guldens heeft sijn Testament ghemaeckt dat so Godt haer Moeder liete worden van eenen Sone dien soude 3 mael soo veel hebben als de Moeder: maer Soo t'kindt een Dochter ware dat en soude maer hebben half soo veel als de Moeder. Soo ontfangt sy ter tijdt haerder baringhe eenen Sone met een Dochter ende een Hermaphroditus, dat is half Man half Vrouwe. Hoeveel sal elck dan hebben op dat des Mans verbondt onverbroken blijve?

Bij de oplossing van dit vraagstuk wordt de regel van drieën meerdere malen gebruikt. De dochter is de laagste in het rijtje erfgenamen. Zou zij bijvoorbeeld 2 gulden krijgen, dan krijgt de moeder 4 gulden, de zoon 12 gulden en de hermafrodiet 7 gulden. Daarmee zou 25 gulden verdeeld zijn. Er moet echter 3175 gulden verdeeld worden en daarbij komt de regel van drieën goed van pas. Het bedrag van de dochter wordt bijvoorbeeld als volgt berekend:

$$25 \text{ --- } 3175 \text{ --- } 2 \quad \frac{3175 \times 2}{25} = 254 \text{ gulden}$$

Voor elk van de erfgenamen volgt een vergelijkbare berekening.

Het vraagstuk van de erfenisverdeling heeft een lange traditie. Varianten van dit probleem komen al in zeer oude bronnen voor. Zo heeft onder andere ook de veertiende-eeuwse Italiaan Paolo Dagomari het in zijn arithmetica opgenomen. Hij voorzag het vraagstuk van een fraaie illustratie.

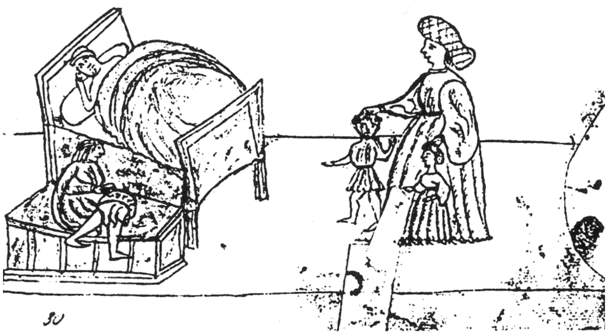


fig. 1 Illustratie bij een vraagstuk over erfenisverdeling uit de veertiende-eeuwse Italiaanse arithmetica van Paolo Dagomari

Bij het oplossen van het erfenisvraagstuk zou u waarschijnlijk geen gebruik maken van variabelen en vergelijkingen. Toch zijn er in de zestiende-eeuwse arithmetica's vele vraagstukken waarbij u dat vermoedelijk wel zou doen, terwijl uw zestiende-eeuwse collega's deze moesten oplossen zonder dat zij de beschikking hadden over algebratechnieken. Hoe deed men dat destijds?

Nogmaals de paardenkoop

Laten we even terug gaan naar het vraagstuk over de paardenkoop uit het begin. Willem en Wouter willen een paard van zestig gulden kopen. Willem zegt dat zijn kapitaal aangevuld met $\frac{3}{4}$ van Wouters bezit daarvoor toereikend zou zijn. En Wouter beweert dat hij het paard zou kunnen kopen als Willem hem even $\frac{2}{3}$ van zijn spaargeld leent. In figuur 2 is te zien hoe men dit vraagstuk in 1532 oploste. Doordat men geen gebruik maakte van rekensymbolen is deze oplossing vrijwel onleesbaar voor ons, twintigste-eeuwers die gewend zijn aan het gebruik van symbolen als +, –, =, enzovoort. Overigens haalt de auteur in zijn oplossing de namen van Willem en Wouter door elkaar.

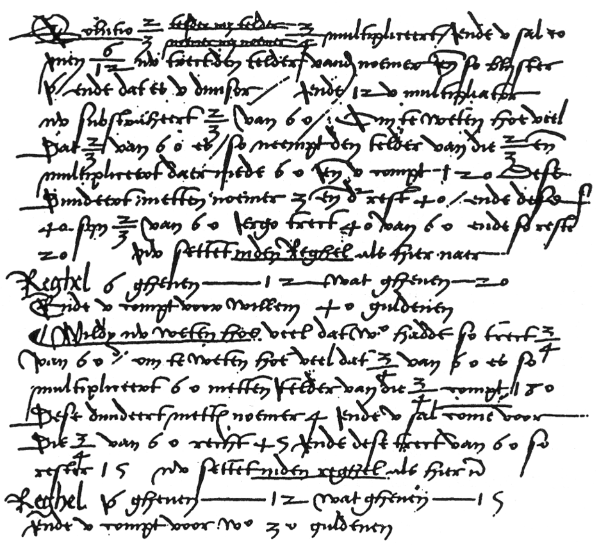


fig. 2 Oplossing (Solutio) van het vraagstuk over de paardenkoop uit de arithmetica van Christianus van Varenbraken (1532)

In moderne rekentaal komt de zestiende-eeuwse oplossing hierop neer:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$$

$12 - 6 = 6$

12 wordt de vermenigvuldiger en 6 wordt de deler.

$\frac{2}{3}$ van $60 = 40$

$60 - 40 = 20$

6 --- 12 --- 20 (de regel van drieën)

$\frac{12 \times 20}{6} = 40$ guldens bezit Wouter.

Dit lijkt op het eerste gezicht nog steeds gegoochel met getallen, maar dat wordt anders als we het vergelijken met onze moderne oplosmethode, het stelsel van vergelijkingen:

Wo is het kapitaal van Wouter en *Wi* dat van Willem.

$$Wo + \tfrac{2}{3}\,Wi = 60$$
$$Wi + \tfrac{3}{4}\,Wo = 60$$

$$Wo + \tfrac{2}{3}\,Wi = 60$$
$$\tfrac{3}{4}\,Wo + Wi = 60 \qquad \times \tfrac{2}{3}$$

$$\begin{array}{l} \tfrac{12}{12}\,Wo + \tfrac{2}{3}\,Wi = 60 \\ \tfrac{6}{12}\,Wo + \tfrac{2}{3}\,Wi = 40 \quad - \\ \hline \tfrac{6}{12}\,Wo = 20 \end{array}$$

Eigenlijk berekenen wij ook

$$12 - 6 = 6 \text{ en } 60 - \tfrac{2}{3} \times 60 = 20$$

en wij nemen eveneens 12 als vermenigvuldiger en 6 als deler:

$$Wo = \frac{12 \times 20}{6} = 40$$

De zestiende-eeuwse oplosmethode komt zeer dicht bij de onze, alleen werd er destijds geen gebruik gemaakt van vergelijkingen.
Het is nog maar de vraag of Christianus van Varenbraken, de auteur van de zestiende-eeuwse arithmetica, zelf helemaal precies begreep waar hij mee bezig was en doorzag waarom zijn rekentrucjes klopten.

De appelboomgaard

> een vrijster oft iongedochter comt in een Boomgaert om Appelen te plucken oft te rapen ende haer ghenoegen hebbende so wilde sy wederom naer huys keeren maer int wtgaen so ontmoette haer een vande wachters (der welcker datter dry waren) ende moeste de helft aenden eersten wachter geuen van allen den appelen die sy hadde dwelc sy seer geerne dede dit siende de wachter gaffer haer 13 appelen wederom ende voorts gaende ontmoette haer den anderen die nammer haer 9 maer comende tot den derden gaf sy hem de helft vande appelen die sy noch behouden hadde maer hy aensiende haer goetheyt ende beleeftheyt soo gaf hy haer 8 appelen wederom Thuys comende so hadde sy noch 22 appelen behouden de vrage is hoeveel appelen dat sy ten eersten hadde doen sy wt den Boomgaert ginc ende den eersten wachter ontmoete.

De regel van drieën speelde niet bij alle zestiende-eeuwse vraagstukken een rol. In dit vraagstuk over de appelboomgaard uit de arithmetica van Bernard Stokmans (1595) gaat het bijvoorbeeld om een geheel andere oplosmethode.
Bernard Stockmans begint te rekenen met de 22 appels die de jongedochter thuisbrengt en werkt terug tot hij op het aantal appels uitkomt dat ze in de boomgaard verzameld heeft. Dat blijken er dan 48 te zijn.

Toen het vraagstuk van de appelboomgaard samen met een moderne vertaling ervan voorgelegd werd aan een aantal brugklassers, kozen velen van hen spontaan voor dezelfde oploswijze als Bernard Stockmans precies vier eeuwen geleden had gedaan. De meeste brugklassers kwamen op het goede antwoord.
Toen hetzelfde probleem aan een 3 MAVO-klas werd gepresenteerd, bleken, opvallend genoeg, veel minder leerlingen in staat het antwoord op de vraag te vinden. Dat kwam waarschijnlijk omdat bijna alle leerlingen uit de 3 MAVO-klas probeerden het vraagstuk op te lossen met vergelijkingen. Daarbij raakten de meeste leerlingen al snel in de problemen. Ze kwamen niet meer op het idee om terug te gaan rekenen. Blijkbaar was dat het gevolg van jarenlang intensief oefenen met vergelijkingen en variabelen. Het is jammer dat het flexibel rekenen met eigen ideeën en inzichten gedurende de middelbare school langzaamaan verloren gaat door het eindeloze oefenen met algebraïsche rekentechnieken.

Hoe voorkom je zoiets? Het antwoord op deze vraag ligt voor de hand: Confronteer leerlingen ook met andere oplosmethoden, laat ze regelmatig zelf eigen oplosstrategieen bedenken of laat ze nadenken over alternatieve rekentechnieken van anderen. De leerlingen zullen zo in ieder geval ontdekken dat het rekenen met variabelen en vergelijkingen niet de enige oplosmethode is. Daarmee vergroten ze hun wiskundig inzicht en worden ze hopelijk wat flexibeler in de aanpak van problemen.

Wie zijn leerlingen af en toe confronteert met een alternatieve oplosmethode van vier eeuwen geleden vangt nog meer vliegen in één klap. Deze leerlingen krijgen immers de kans hun historisch bewustzijn te ontwikkelen. Ze zullen ontdekken dat de wiskunde niet zomaar op een dag kant en klaar uit de lucht is komen vallen. Zij zullen ervaren dat wiskunde zich in de loop der tijden ontwikkeld heeft en nog steeds in ontwikkeling is, dat mensen door de eeuwen heen steeds tegen wiskundige vragen zijn aangelopen en geprobeerd hebben daarop een antwoord te vinden met de middelen die ze op dat moment tot hun beschikking hadden.

De leraar die af en toe een historisch vraagstukje in zijn wiskundeles verwerkt, levert een belangrijke bijdrage aan het cultuurhistorisch inzicht van zijn leerlingen.

Schip met zeilen

Tot besluit volgt hier een vraagstuk uit de Italiaanse arithmetica van Filippo Calandri uit 1491.

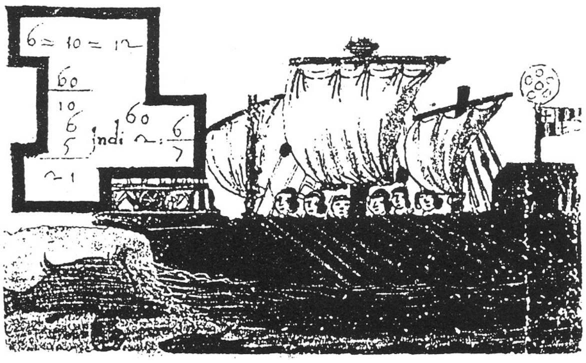
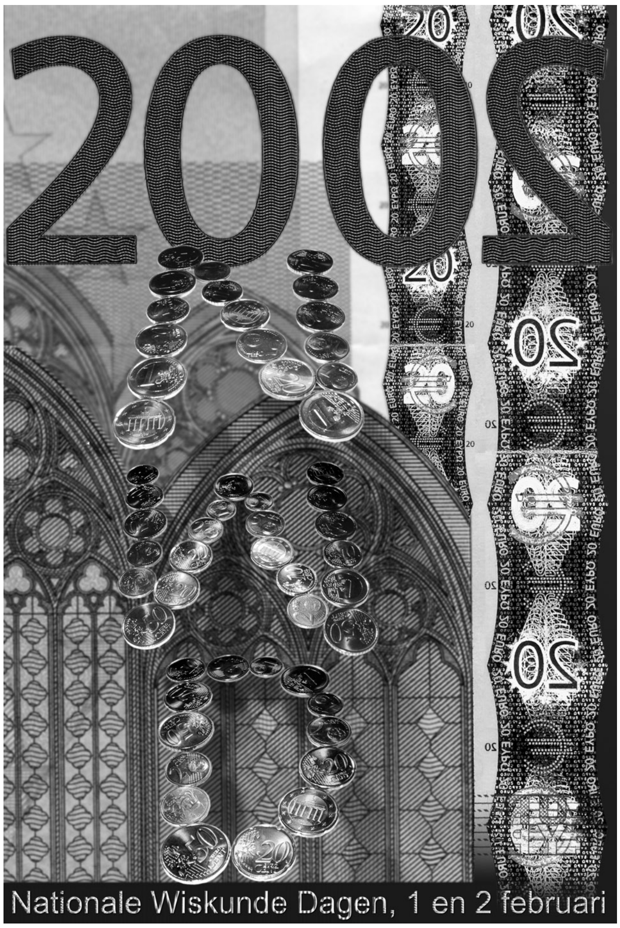


fig. 3 Vraagstuk over het schip met de drie zeilen uit de Italiaanse arithmetica van Filippo Calandri (1491)

Figuur 3 toont in een kader de vijftiende-eeuwse oplosmethode. Kunt u zien hoe hier gerekend wordt? Als het u niet lukt de Italiaanse oplossing te doorgronden, kunt u wellicht de hulp van uw leerlingen inroepen!

> Er is een schip met drie zeilen dat een grote reis moet maken. Als alleen het eerste zeil gehesen wordt, zal de reis 6 dagen duren. Vaart het schip met uitsluitend het tweede zeil, dan zal de reis 10 dagen in beslag nemen. En met behulp van slechts het derde zeil, duurt de tocht 12 dagen. Hoe lang zal het schip over deze reis doen als aldrie de zeilen gehesen zijn?

Marjolein Kool, Hogeschool Domstad, Utrecht



Het ontbinden van grote getallen in priemfactoren

Voordracht gehouden op de Nationale Wiskunde Dagen 1995

H.W. Lenstra, Jr.

Dit artikel is gebaseerd op een plenaire voordracht die ik tijdens de Nationale Wiskunde Dagen 1995 gehouden heb. Ik ben dank verschuldigd aan F. van der Blij voor het schrijven van een eerste versie en aan J. van de Craats voor het leveren van opbouwende kritiek.

In deze voordracht hoop ik het in de titel vermelde onderwerp van verschillende kanten te belichten, zodat de toehoorder in staat zal zijn tijdens beschaafde koffietafelgesprekken een welingelichte indruk te maken. Een aspect dat onderbelicht zal blijven is dat van de wiskundige details. Hiervoor, en voor vele andere zaken, kan men terecht in het boek *Cryptology and computational number theory*, geredigeerd door C. Pomerance en uitgegeven door de American Mathematical Society in 1990.
De benodigde voorkennis bestaat uit de volgende definitie: *een priemgetal is een geheel getal groter dan* 1 *dat geen delers behalve* 1 *en zichzelf heeft*. Van zo'n getal zegt men ook wel kortweg dat het *priem* is. Een getal heet *samengesteld* als het niet een priemgetal is, en groter dan 1. Merk op dat 1 geen priemgetal is, en ook niet samengesteld – wiskundigen weten dat deze afspraak in de loop van de tijd het meest geriefelijk is gebleken. (In andere kringen vat men de zaak wel eens als een geloofskwestie op, en de discussies kunnen dan hoog oplopen.) Het getal 101 is een priemgetal, maar $91 = 7 \cdot 13$ is samengesteld.

De hoofdstelling van de getaltheorie

Volgens de 'Hoofdstelling van de getaltheorie' is *elk positief geheel getal op precies één manier als produkt van priemgetallen te schrijven*. Zo heeft men de volgende ontbindingen in priemfactoren:

$$9191 = 7 \cdot 13 \cdot 101,$$
$$2178540 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19,$$
$$100895598169 = 112303 \cdot 898423.$$

Hier moet men het woord *produkt* ruim opvatten: neemt men het produkt van een verzameling die slechts uit een enkel priemgetal bestaat, dan krijgt men dit priemgetal zelf, en het getal 1 is het *lege* produkt.

Dat men ieder positief geheel getal inderdaad als produkt van een stel priemgetallen kan schrijven is gemakkelijk in te zien. Dat het maar op één manier kan, spreekt, anders dan men weleens denkt, allerminst vanzelf. In figuur 1 ziet men een bericht dat op 2 (!) april 1993 de ronde deed.

```
    |\^/|      MAPLE V
._|\|   |/|_.  Copyright (c) 1981-1990 by the University of Waterloo.
 \  MAPLE  /   All rights reserved.  MAPLE is a registered trademark of
 <____ ____>   Waterloo Maple Software.
      |        Type ? for help.

 > a := 34816783:
 > b := 29698715047:
 > c := 1209796049048786O7889:
 > d := 1031956000233747418830O1:
 > isprime(a);

                                        true

 > isprime(b);

                                        true

 > isprime(c);

                                        true

 > isprime(d);

                                        true

 > a*d;

                           35929388125686333158214572O5783

 > b*c;

                           35929388125686333158214572O5783
```

fig. 1

In het computer-algebra systeem Maple worden vier verschillende getallen a, b, c, d ingevoerd, en het systeem beantwoordt de in gebroken Engels gestelde vraag of dit priemgetallen zijn bevestigend. Vervolgens worden de produkten ad en bc uitgerekend. Had men nu ook nog even het verschil genomen, dan was direct duidelijk geweest wat men nu pas na enig turen ziet: beide produkten zijn gelijk! Weerspreekt dit de hoofdstelling? Het geeft te denken dat men het experiment niet met de huidige versie van Maple kan herhalen.
Deze ervaring toont, wellicht ten overvloede, de nood-

zaak aan om de hoofdstelling te *bewijzen*. In de *Disquisitiones arithmeticae*, het boek waarmee Carl Friedrich Gauss (1777-1855) in 1801 de moderne getaltheorie inluidde, is de hoofdstelling voor het eerst duidelijk geformuleerd en bewezen. Bij eerdere getaltheoretici, zoals Euclides van Alexandrië (circa 295 voor Chr.), Diophantos van Alexandrië (circa 250 na Chr.), Pierre de Fermat (1601-1665) en Leonhard Euler (1707-1783), zoekt men de hoofdstelling tevergeefs, hoewel Euclides in de buurt komt. Ik zal de priemfactorontbinding van een getal vaak in de vorm

$$\prod_p p^{a(p)}$$

schrijven, waarbij het produkt zich uitstrekt over alle priemgetallen p, en waarbij $a(p)$, voor ieder priemgetal p, een niet-negatief geheel getal is dat voor slechts eindig veel p verschillend van 0 is.

Het belang van de hoofdstelling

Men kan zich afvragen waar de stelling de naam *hoofd*stelling aan verdient. Dit ligt eraan dat vele vragen die men zich over gehele getallen kan stellen een antwoord toelaten in termen van de priemfactorontbinding. Ik geef twee voorbeelden.

Welke getallen laten zich als som van twee kwadraten schrijven? Antwoord: als

$$n = \prod_p p^{a(p)}$$

dan is n te schrijven als som van twee kwadraten van gehele getallen dan en slechts dan als $a(p)$ *even* is voor ieder priemgetal van de vorm $p = 4k - 1$. Met andere woorden: n is een som van twee kwadraten als elk priemgetal van de vorm $4k - 1$ een even aantal keren in n voorkomt, en deze voorwaarde is ook nodig. Deze mooie stelling is van Fermat afkomstig.

Voorbeelden: $175 = 5^2 \cdot 7$ is niet een som van twee kwadraten, want 7 komt een oneven aantal keren voor; maar $245 = 5 \cdot 7^2$ is wel een som van twee kwadraten: $245 = 49 + 196 = 7^2 + 14^2$.

De *som van de delers* van een getal n verheugt zich al sinds eeuwen in de belangstelling van rekenkundigen. Men schrijft $\sigma(n)$ voor deze som:

$$\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28.$$

Hoe kan men $\sigma(n)$ snel bepalen? Antwoord:

voor $n = \prod_p p^{a(p)}$ heeft men

$$\sigma(n) = \prod_p \frac{p^{a(p)+1} - 1}{p - 1}.$$

Voorbeeld: voor $n = 175 = 5^2 \cdot 7$ vindt men

$$\sigma(175) = \frac{5^3 - 1}{5 - 1} \cdot \frac{7^2 - 1}{7 - 1} = 31 \cdot 8 = 248.$$

Men bewijst de formule door een stel meetkundige reeksen met elkaar te vermenigvuldigen. In het gegeven voorbeeld geldt

$$\frac{5^3 - 1}{5 - 1} \cdot \frac{7^2 - 1}{7 - 1} = (1 + 5 + 5^2) \cdot (1 + 7)$$

en bij uitvermenigvuldiging verschijnen alle delers van $5^2 \cdot 7$.

De beide genoemde resultaten zijn pas bruikbaar als de priemfactorontbinding van n *bekend* is. Dit leidt tot de vraag hoe men van een gegeven getal n de priemfactorontbinding snel kan *vinden*. Dat is het voornaamste onderwerp van deze voordracht. Ik zal de tegenwoordige stand van zaken bespreken, de belangrijkste open problemen aangeven, en ingaan op de motieven die men in de loop van de geschiedenis gehad heeft om zich met het ontbinden van grote getallen bezig te houden.

Primaliteit en factorizatie

Het probleem om een gegeven getal in priemfactoren te ontbinden wordt vaak in twee deelproblemen gesplitst, die bekend staan onder de namen *primaliteit* en *factorizatie*. Het *primaliteits*probleem bestaat eruit te beslissen of een gegeven geheel getal $n > 1$ een priemgetal is of niet. Dit gebeurt met een zogenaamde *primaliteitstest*. Als het antwoord 'ja' luidt, dan is daarmee tevens de priemfactorontbinding van n gevonden: $n = n$. Is het antwoord 'nee', dan weet men zeker dat een deler d van n met $1 < d < n$ *bestaat*, maar de meeste primaliteitstests hebben de onaangename eigenschap dat ze geen enkele informatie geven over hoe zo'n deler d dan wel te vinden zou zijn. Daarmee komt men terecht bij het *factorizatie*probleem: gegeven een samengesteld getal $n > 1$, vind een deler d van n met $1 < d < n$. Dat probeert men te doen met een *factorizatiemethode*. Heeft men succes, dan kan men schrijven $n = d \cdot \frac{n}{d}$, en met de getallen d en $\frac{n}{d}$ begint men weer van voren af aan. Dit voert uiteindelijk tot de volledige priemfactorontbinding van n.

Men kan de huidige stand van zaken kort samenvatten door te zeggen dat primaliteit *gemakkelijk* is, en factorizatie *moeilijk*. Dit ga ik nader preciseren.

Testdelingen

De bekendste methode om n in priemfactoren te ontbinden bestaat uit het uitvoeren van een serie testdelingen. Voor deze methode legt men een tabel 'kleine' priemgetallen aan: 2, 3, 5, ... Deze priemgetallen worden op de rij af als mogelijke delers van n geprobeerd. Iedere gevonden priemdeler wordt zo vaak als mogelijk is uit het getal verwijderd. Men houdt op als men bij een priemgetal aankomt dat groter is dan de wortel van het overblijvende getal; dat laatste getal is dan vanzelf priem. Voorbeeld: voor $n = 19998$ vindt men achtereenvolgens de

factoren 2, 3, 3, 11, en de overblijvende factor 101 is kleiner dan 11^2 en dus vanzelf priem: $n = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 101$.
Bij deze methode hoeft men nooit testdelingen door priemgetallen groter dan $\sqrt{n}$ uit te voeren. De rekentijd is op zijn hoogst

$$c \cdot \sqrt{n} \cdot (\log n)^2.$$

Hierbij is een c een positieve constante, die afhangt van de manier waarop men de tijd meet, van de snelheid van de computer die men gebruikt, en van het grondtal dat men bij de logaritme gebruikt. De factor $\sqrt{n}$ vormt een bovengrens voor het aantal uit te voeren testdelingen. De factor $(\log n)^2$ vormt een schatting voor de tijd die een enkele testdeling in beslag neemt; merk op dat $\log n$ ruwweg evenredig is met het aantal cijfers van n. De exponent 2 kan wat verbeterd worden, maar dat is nauwelijks van belang, want de logaritmische factor valt toch al bij $\sqrt{n}$ in het niet.
De testdelingen-methode doet primaliteit en factorizatie in één klap, maar heeft bijna alleen praktische waarde voor erg kleine getallen. Als n meer dan ongeveer 25 cijfers heeft – en dat is tegenwoordig nauwelijks groot te noemen! – dan kan men letterlijk eeuwig op het antwoord wachten, tenzij men in het gelukkige maar oninteressante geval verkeert dat alle priemfactoren van n tamelijk klein zijn. We kunnen de gegeven schatting voor de rekentijd echter gebruiken als maatstaf om andere methoden tegen af te zetten.

De 'beste' methode

Er zijn meer primaliteitstests en factorizatiemethoden in omloop dan ik hier op kan sommen, en de vraag naar de 'beste' is even zinloos als de vraag wat nu eigenlijk de beste auto is. Verschillende gebruikers stellen verschillende eisen, en men gaat niet in zijn boodschappenwagen op safari. Ik zal in mijn bespreking de nadruk leggen op technieken die nog het best met race-auto's te vergelijken zijn – technieken waar de wereldkampioenen hun records mee vestigen, maar die zelden geschikt zijn voor de consumentenmarkt.

Drie primaliteitstests

Eerst laat ik drie primaliteitstests de revue passeren. De eerste twee zijn in wiskundig opzicht tamelijk geavanceerd. De *Jacobi-somtest*, door L.M. Adleman en anderen omstreeks 1983 uitgevonden, berust op de hogere reciprociteitswetten uit de algebraïsche getaltheorie, en de *complexe vermenigvuldigingstest*, door A.O.L. Atkin en anderen omstreeks 1988 ontwikkeld, op de theorie der elliptische krommen. Als men bereid is zijn computer een paar maanden te laten draaien, is elk van beide methoden in de praktijk bruikbaar voor getallen van maximaal ongeveer 1500 cijfers, en in dit bereik ontlopen ze elkaar weinig in snelheid. Voor grotere n gaan beide methoden teveel tijd in beslag nemen, maar men verwacht wel dat de tweede methode uiteindelijk sneller is. Men heeft namelijk bewezen dat men met de Jacobi-somtest in het ergste geval tijd

$$(\log n)^{c \log \log \log n}$$

kwijt is, terwijl men vermoedt dat de complexe vermenigvuldigingstest niet meer dan tijd

$$c \cdot (\log n)^5$$

kost. In beide uitdrukkingen geeft c een positieve constante aan.
In de praktijk vertonen deze tests, net als bijna alle andere primaliteitstests, een opmerkelijk gedrag: als namelijk het getal n dat men onderzoekt *niet* een priemgetal is, dan komt de test daar bijna direct achter. Als de berekening lang duurt dan kan men er praktisch zeker van zijn dat n priem is – *praktisch* zeker, maar niet *wiskundig* zeker: de tijdrovende berekeningen moet men juist uitvoeren om voldoende gegevens voor een volledig sluitend bewijs dat n priem is bijeen te zamelen. Dat bewijs berust soms op geavanceerde wiskundige theorieën.
De net genoemde eigenschap kan men gebruiken om de rekentijd van primaliteitstests aanzienlijk te bekorten. Men laat de test namelijk slechts een beetje langer lopen dan nodig is om de niet-priemgetallen te herkennen, en als de test dan nog niet gestopt is, onderbreekt men hem toch, voordat met het tijdrovende gedeelte een aanvang gemaakt wordt. Men heeft dan niet een sluitend bewijs dat n priem is, maar wel de praktische zekerheid. Dat is wetenschappelijk gesproken onbevredigend, maar voor niet-wetenschappelijke doeleinden vaak goed genoeg. Wil men bijvoorbeeld priemgetallen verhandelen – en dat gebeurt tegenwoordig! – dan mogen er best een paar kapotte tussenzitten. Dat is met CD-spelers immers ook het geval, en met een coulante garantieregeling kan men toch de klant te vriend houden.
Eén van de bekendste methoden die niet meer dan praktische zekerheid geven is de *getuigentest* van G.L. Miller en M.O. Rabin (1976). De rekentijd is slechts $c \cdot (\log n)^3$, en men kan er getallen van tienduizenden cijfers mee testen. Andere aantrekkelijke eigenschappen van de methode zijn eenvoud van implementatie, bruikbaarheid door consumenten en algemene begrijpelijkheid van de onderliggende wiskunde. Men moet ten aanzien van de 'praktische zekerheid' echter wel weten wat men doet – het bovenverhaalde Maple-fiasco was hoogstwaarschijnlijk te wijten aan een al te optimistische variant van de getuigentest.
Voor getallen van een speciale vorm zijn vaak aparte tests beschikbaar. Op het ogenblik is het getal $2^{859433} - 1$, dat 258716 cijfers heeft, het grootst bekende priemgetal. Het (wiskundig sluitende) bewijs dat dit getal priem is, berust op een test die speciaal voor getallen van de vorm $2^m - 1$ is ontworpen.

Al met al is de situatie ten aanzien van primaliteitstests redelijk bevredigend. De voornaamste open problemen zijn van theoretische aard, bijvoorbeeld: kan men een wiskundig sluitende test bedenken waarvan men kan *bewijzen* dat de rekentijd niet meer dan $(\log n)^c$ is? (Voor de complexe vermenigvuldigingstest was dit slechts een *vermoeden*.) Met enige fantasie kan men zich ook wel een *praktische* situatie voorstellen waarin de tegenwoordige stand van de wetenschap tekort schiet. Stel bijvoorbeeld dat men een getal n van zo'n 7000 cijfers tegenkomt, dat niet een speciale vorm heeft, en waarvan men praktisch zeker is dat het een priemgetal is (bijvoorbeeld omdat de getuigentest dat zegt). Stel bovendien dat men dolgraag een *bewijs* zou willen hebben dat n priem is, bijvoorbeeld omdat men daar een beroemd open probleem mee zou kunnen oplossen. In deze situatie is er geen enkele bekende methode waarmee men geholpen is.

De elliptische krommen-methode

Bij primaliteitstests maakte ik onderscheid tussen wiskundig sluitende methoden en methoden die alleen praktische zekerheid bieden. Dit onderscheid bestaat niet bij factorizatiemethoden. Immers, een factorizatiemethode heeft tot taak om van een gegeven samengesteld getal n een niet-triviale deler d te vinden, en als deze taak is uitgevoerd, kan iedereen ogenblikkelijk controleren of d inderdaad een deler van n is. Hierbij hoeft men niet op de machine te vertrouwen of kennis te hebben van de wiskundige theorie die aan de methode ten grondslag ligt.
Ik bespreek drie factorizatiemethoden. De eerste is de *elliptische krommen-methode*, die ik tien jaar geleden bedacht heb. Als ik voor iedere keer dat deze methode met succes gebruikt is een dubbeltje had gekregen dan had ik me nu op een comfortabel landgoed terug kunnen trekken. De populariteit van de methode is te danken aan een combinatie van aantrekkelijke eigenschappen die elk voor zich zeldzaam zijn bij factorizatiemethoden. Ten eerste is de methode bijzonder eenvoudig te implementeren, ondanks het feit dat de onderliggende gedachten uit de theorie der elliptische krommen afkomstig zijn. Ten tweede kan men de methode ook op kleine machines, die geen groot geheugen hebben, draaien. Ten derde is de methode bruikbaar voor getallen n uit een buitengewoon groot bereik, van slechts tien tot duizenden cijfers aan toe. Niet dat men voor de grootste van die getallen altijd *succes* heeft: de methode is gespecialiseerd in het vinden van betrekkelijk 'kleine' priemfactoren. In de praktijk betekent dit: priemfactoren van niet meer dan zo'n 35 cijfers. Op grond van theoretische analyses vermoedt men dat de methode ongeveer tijd

$$e^{\sqrt{(2+\varepsilon)\log p \log\log p}} \cdot (\log n)^2$$

nodig heeft om de priemfactor p van n te vinden; hier moet men de natuurlijke logaritme nemen, en ε is een getal dat naar 0 nadert voor $p \to \infty$. De van p afhangende uitdrukking is een nadere bestudering waard. Men kan eruit aflezen dat kleine priemfactoren sneller gevonden worden dan grote, en ook dat de methode sneller werkt dan de eerder besproken testdelingen-methode, die ongeveer tijd $p \cdot (\log n)^2$ nodig heeft om hetzelfde te doen.
In de praktijk is de elliptische krommen-methode vaak de eerste die men loslaat op een getal n dat men nooit eerder ontmoet heeft, om de kleine priemfactoren eruit te verwijderen. Als de methode enige tijd zonder succes gedraaid heeft, concludeert men dat n waarschijnlijk geen 'kleine' priemfactoren heeft. In dat geval heeft men als n niet te groot is – niet meer dan ongeveer 140 cijfers, met de tegenwoordige stand van zaken – nog een kans met een van de volgende twee methoden.

De kwadratische zeef

De *kwadratische zeef*, door C. Pomerance in 1982 uitgevonden, is in bijna alle opzichten de tegenpool van de elliptische krommen-methode. Het is een enigszins peuterig werk om er een programma voor te schrijven, hoewel de onderliggende wiskunde erg eenvoudig is. Men komt ook niet goed uit de voeten zonder een flink geheugen. De methode is toepasbaar op een veel bescheidener bereik: voor getallen van meer dan zo'n 130 cijfers loopt de rekentijd te hoog op. Daar staat tegenover dat deze rekentijd, anders dan bij de elliptische krommen-methode, in de praktijk heel goed voorspelbaar is. Deze tijd is namelijk niet afhankelijk van een onbekende grootheid, zoals de grootte van de priemfactoren van n, maar alleen van n zelf.
Er is goede reden om aan te nemen dat de rekentijd in de meeste gevallen gegeven wordt door een uitdrukking van de vorm

$$e^{\sqrt{(1+\varepsilon)\log n \log\log n}}$$

waarbij $\varepsilon \to 0$ voor $n \to \infty$. Het kost met deze methode dus evenveel tijd om kleine priemfactoren te vinden als grote! In feite vindt de methode *alle* priemfactoren op bijna hetzelfde moment. Dit mag vreemd klinken, zeker wanneer men een vergelijking trekt met de methode die op testdelingen berust en de elliptische krommen-methode. Het blijkt evenwel dat de meeste geavanceerde factorizatiemethoden deze eigenschappen met de kwadratische zeef delen – het is juist de elliptische krommen-methode die een uitzondering vormt.
Bestudeert men de bovengegeven uitdrukking voor de rekentijd dan ontdekt men dat de kwadratische zeef aanzienlijk sneller is dan de testdelingen-methode, maar veel langzamer dan de primaliteitstests die ik heb besproken. Het is een aardige opgave om te zien in welk bereik de rekentijd vergelijkbaar is met de tijd die de elliptische krommen-methode in beslag neemt.

De getallenlichamenzeef

De kwadratische zeef wordt de laatste jaren in toenemende mate overschaduwd door de *getallenlichamenzeef*, waarvan het basisprincipe in 1988 door J.M. Pollard werd aangegeven en waaraan sedertdien een hele groep mensen verbeteringen heeft aangebracht. De grondgedachten van de methode lijken erg op die van de kwadratische zeef, behalve dat men niet met elementaire getaltheorie maar met algebraïsche getaltheorie werkt; weliswaar slechts met de beginselen van deze theorie, zoals die al in de tweede helft van de negentiende eeuw bekend waren, maar omdat het hier een vak betreft waar de meeste getallen-ontbinders weinig mee vertrouwd zijn, heeft dit toch een vertragend element in de ontwikkeling van de methode gevormd. Het programmeren van de getallenlichamenzeef heeft tot verscheidene problemen aanleiding gegeven, die nu alle min of meer bevredigend zijn opgelost.
Nu de stofwolk enigszins is opgetrokken, begint duidelijk te worden dat de getallenlichamenzeef sneller werkt dan de kwadratische zeef zodra n meer dan ongeveer 105 cijfers heeft. Men heeft goede hoop dat de methode in elk geval bruikbaar zal zijn voor getallen van maximaal ongeveer 155 cijfers. Een theoretische analyse suggereert dat voor zeer grote n de rekentijd ongeveer

$$e^{1{,}923(\log n)^{1/3}(\log\log n)^{2/3}}$$

bedraagt, hetgeen uiteindelijk inderdaad minder is dan voor de kwadratische zeef.
De getallenlichamenzeef heeft nog een aantrekkelijke eigenschap: voor sommige getallen die een speciale vorm hebben, werkt hij extra snel. Een voorbeeld wordt gegeven door het getal

$$F_9 = 2^{2^9} + 1$$

dat men het *negende Fermatgetal* noemt. Het heeft 155 cijfers. Alle rekenkundigen hebben een speciale plaats in hun hart voor Fermatgetallen, en het ontbinden van Fermatgetallen is de droom van hun leven. In 1990 lukte het A.K. Lenstra en M.S. Manasse om F_9 met behulp van de getallenlichamenzeef in priemfactoren te ontbinden. Ze vonden dat

$$F_9 = p_7 \cdot p_{49} \cdot p_{99}$$

waarbij het aantal cijfers van p_7, p_{49} en p_{99} gelijk is aan 7, 49 en 99:

$$\begin{aligned} p_7 &= 2\,424833, \\ p_{49} &= 7\,455602\,825647\,884208\,337395\,736200\\ &\quad 454918\,783366\,342657, \\ p_{99} &= 741\,640062\,627530\,801524\,787141\,901937\\ &\quad 474059\,940781\,097519\,023905\,821316\,144415\\ &\quad 759504\,705008\,092818\,711693\,940737. \end{aligned}$$

Deze ontbinding nam vier maanden in beslag en maakte gebruik van honderden over de hele wereld verspreide computers. Wie hier meer over wil weten, verwijs ik naar het artikel 'The factorization of the ninth Fermat number', dat verschenen is in *Mathematics of Computation*, vol. 61 (1993), pp. 319-349.

De toekomst

Als men de rekentijd van bestaande factorizatiemethoden onderzoekt, ontdekt men dat deze zo snel toeneemt met het getal dat men wil ontbinden, dat het nauwelijks zoden aan de dijk zet wanneer men een snellere computer koopt. Stel bijvoorbeeld dat n een samengesteld getal is van 210 cijfers, en dat de eer van de mensheid ermee gemoeid is om n in priemfactoren te ontbinden, net zoals in de jaren zestig de Amerikaanse eer gemoeid was met het plaatsen van een mens op de maan. Wat te doen? Als n een kleine priemfactor bezit, heeft men met de elliptische krommen-methode een kans, maar als dit niet zo is dan is er geen enkele bekende methode waarmee de klus geklaard kan worden, zelfs niet met de beste politieke wil van de wereld. Als n maar 190 cijfers heeft, ligt het anders: het is goed voorstelbaar dat men een getal van die grootte met bestaande technische en algoritmische middelen kan ontbinden, zij het dat men aanzienlijke organisatorische en financiële problemen zal hebben te overwinnen.
Wie getallen van meer dan zo'n 200 cijfers wil ontbinden, kan er alleen maar op hopen dat iemand een snellere methode bedenkt. Dat is dan ook het voornaamste open probleem in dit vakgebied. Een ander open probleem, dat van meer theoretische aard is, bestaat eruit om de rekentijdanalyses die ik aan heb gegeven streng te bewijzen.

Factorizatie door de eeuwen

In vroeger eeuwen achtten de grootste getaltheoretici het niet beneden hun waardigheid zich bezig te houden met het ontwerpen en toepassen van methoden om grote getallen in factoren te ontbinden. In de loop van de negentiende eeuw, na Gauss, werd dit anders. Topwiskundigen hadden andere dingen om handen, en factorizatieproblemen begonnen te behoren tot het domein van de mindere goden, inclusief amateur-wiskundigen. Eén van de origineelste van de geleerden die zich toen met het onderwerp bezig hielden, was de Fransman Edouard Lucas (1842-1891), wiens naam een begrip is bij iedereen die in wiskundige puzzels geïnteresseerd is. Uit deze puzzelhoek heeft het onderwerp zich gedurende het grootste deel van de twintigste eeuw niet kunnen losmaken. Wiskundigen die zich erop toelegden, bewogen zich in de marge van de wetenschap, en hun fronsende collega's konden moeilijk verhelen dat ze de hele onderneming in intellectueel opzicht even uitdagend vonden als het verzamelen van sigarenbandjes.

Pas tegen het eind van de jaren zeventig kwam er, door twee gelijktijdige ontwikkelingen, een omslag. Eén van deze ontwikkelingen had plaats in de *cryptografie*. In 1977 vonden R.L. Rivest, A. Shamir en L.M. Adleman een systeem uit waarmee men geheime boodschappen kan versturen dat grote voordelen had ten opzichte van eerdere systemen. Meer bijzonderheden over dit zogenaamde *RSA-systeem*, dat gebruik maakt van getaltheorie, zijn te vinden in het aan het begin genoemde boek van Pomerance. Voor de constructie van de hulpgetallen die het systeem gebruikt, is het essentieel dat primaliteit een gemakkelijk probleem is, en de onbreekbaarheid van het systeem berust op de praktische onoplosbaarheid van het factorizatieprobleem voor grote getallen.

Het ligt voor de hand dat dit geleid heeft tot een sterk toegenomen belangstelling voor het vakgebied, onder andere van de kant van geheime diensten. Zuiver-wiskundigen die toepassingen toch maar vulgair vinden, moeten wel bedenken dat het hier om een toepassing van hun *onkunde* gaat: als ze het factorizatieprobleem oplossen, verdwijnt de toepassing en wordt de zuiverheid van de getaltheorie hersteld.

De tweede ontwikkeling was de opkomst van de *theoretische informatica*. In deze tak van wetenschap bestudeert men rekenmethoden niet door ze uit te proberen maar door er in een luie stoel over na te gaan denken. Eén van de dingen waar men over nadenkt is, of men kan voorspellen hoeveel tijd een computer nodig heeft om een bepaald probleem met een bepaalde methode op te lossen. Met behulp van dergelijke *rekentijdanalyses* is men in staat 'op het droge' te beslissen welke van twee methoden de beste is. Dit leidt vervolgens tot de vraag om voor een gegeven probleem een rekenmethode te ontwerpen waarbij de schatting van de rekentijd zo gunstig mogelijk uitvalt.

Het probleem om getallen in factoren te ontbinden heeft in dit verband vanwege zijn eerwaarde ouderdom en zijn fundamentele karakter altijd op de speciale belangstelling van theoretisch-informatici kunnen rekenen.

Als resultaat van deze ontwikkelingen hebben primaliteit en factorizatie hun centrale plaats in de getaltheorie opnieuw ingenomen. Men ontleent technieken aan de algebraïsche meetkunde en de algebraïsche getaltheorie, en de rekentijdanalyses berusten op analytische getaltheorie. De sigarenbandjes kunnen weer zonder schroom getoond worden.

Perfecte getallen

Men kan zich afvragen wat mensen ertoe dreef om getallen te ontbinden in de tijd dat er nog geen sprake was van cryptografische toepassingen of computers. In figuur 2 ziet men het antwoord van Gauss, aan zijn *Disquisitiones arithmeticae* ontleend.

329. Problema, numeros primos a compositis dignoscendi, hosque in factores suos primos resoluendi, ad grauissima ac vtilissima totius arithmeticae pertinere, et geometrarum tum veterum tum recentiorum industriam ac sagacitatem occupauisse, tam notum est, vt de hac re copiose loqui superfluum foret.

praetereaque scientiae dignitas requirere videtur, vt omnia subsidia ad solutionem problematis tam elegantis ac celebris sedulo excolantur.

fig. 2

In het Nederlands:

> 'Het probleem om priemgetallen van samengestelde te onderscheiden, en de laatste in hun priemfactoren te ontbinden, behoort tot de belangrijkste en nuttigste van de gehele rekenkunde. Wiskundigen van alle tijden hebben hun ijver en wijsheid eraan gespendeerd. Dit alles is zo welbekend, dat het niet nodig is er uitgebreid bij stil te staan. (...) Bovendien lijkt men het aan de waardigheid van de wetenschap verschuldigd te zijn om alle hulpmiddelen voor de oplossing van een zo elegant en beroemd probleem met vlijt te cultiveren.'

De waardigheid van de wetenschap! Wie dat antwoord niet wil horen moet de vraag niet stellen.

Het 'nut' waar Gauss op doelt, beperkt zich tot toepassingen in de getaltheorie zelf, zoals bij de berekening van de som van de delers van een getal. Waarom men die berekening wil uitvoeren, zal ik nu uitleggen.

Men noemt een getal *perfect* als het gelijk is aan de som van zijn echte delers; 'echt' betekent dat het getal zelf niet wordt meegeteld. Voorbeelden zijn 6 en 28:

$$6 = 1 + 2 + 3 \qquad\qquad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Het gaat hier om een van de oudste begrippen uit de wiskunde. Al bij Euclides vinden we een recept voor het maken ervan (zie figuur 3).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα· ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

PROPOSITIO XXXVI.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in duplâ analogiâ, quoad totus compositus primus fiat, et totus in ultimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.

fig. 3

In het Nederlands:

als $2^m - 1$ priem is, dan is $2^{m-1}(2^m - 1)$ perfect.

De voorbeelden 6 en 28 krijgt men door m gelijk te nemen aan 2 en 3. Met $m = 859433$ krijgt men het grootste bekende perfecte getal, $2^{1718865} - 2^{859432}$, dat 517430 cijfers heeft. De voorspelling die P. Barlow in 1811 deed (zie figuur 4) is dus niet uitgekomen.

> The difficulty, therefore, of finding perfect numbers, arises from that of finding prime numbers, of the form $2^n - 1$, which is very laborious. Euler ascertained, that $2^{31} - 1 = 2147483647$ is a prime number; and this is the greatest at present known to be such, and, consequently, the last of the above perfect numbers, which depends upon this, is the greatest perfect number known at present, and probably the greatest that ever will be discovered; for, as they are merely curious without being useful, it is not likely that any person will attempt to find one beyond it.

fig. 4

In een artikel van Euler dat pas in 1849 gepubliceerd werd (66 jaar na zijn dood!) werd bewezen dat alle *even* perfecte getallen door de formule van Euclides gegeven worden. Of er *oneven* perfecte getallen bestaan is een beroemd open probleem.

Meervoudig perfecte getallen

Er zijn eigenlijk te weinig perfecte getallen om plezier aan te beleven. Hierin heeft men aanleiding gevonden de eis van perfectheid wat af te zwakken. Een getal heet *meervoudig perfect* als het een *deler* is van de som van zijn delers. Met andere woorden, n is meervoudig perfect als er een geheel getal k is met

$$k \cdot n = \sigma(n)$$

waar $\sigma(n)$ de som van de delers van n aangeeft, inclusief n zelf. Met $k = 2$ krijgt men de perfecte getallen. Het getal 120 is een voorbeeld van een meervoudig perfect getal dat niet perfect is, want $\sigma(120) = 360 = 3 \cdot 120$.

Zelf meervoudig perfecte getallen maken

Het fabriceren van meervoudig perfecte getallen was in het midden van de zeventiende eeuw een populaire hobby van Fermat en zijn correspondenten, zoals men in het tweede deel van Fermat's verzameld werk kan nalezen. Het is erg leuk om te doen, en bijzonder aan te bevelen voor wie tijdens een vervelende voordracht de tijd wil verdrijven.

We willen een oplossing van de vergelijking $k \cdot n = \sigma(n)$ vinden. Vervangen we n door zijn priemfactorontbinding en $\sigma(n)$ door de eerder gegeven formule, dan staat er

$$k \cdot \prod_p p^{a(p)} = \prod_p \frac{p^{a(p)+1} - 1}{p - 1}.$$

Men gaat nu een tabel aanleggen van priemmachten p^a die men eventueel links wil opnemen. Naast iedere priemmacht p^a zet men de corresponderende factor

$$\frac{p^{a+1} - 1}{p - 1} \; (= \sigma(p^a))$$

van het rechterlid. In figuur 5 ziet men een voorbeeld van zo'n tabel.

p^a	$\frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}$
7^2	$57 = 3 \cdot 19$
3	$4 = 2^2$
19	$20 = 2^2 \cdot 5$
5	$6 = 2 \cdot 3$
3^2	13
13	$14 = 2 \cdot 7$
2	3
2^2	7
2^3	$15 = 3 \cdot 5$
2^4	31

fig. 5

De tabel is als volgt gemaakt. De priemmacht $p^a = 7^2$ uit de eerste regel is willekeurig gekozen. Met deze keuze geeft men te kennen dat men uit is op een meervoudig perfect getal dat twee factoren 7 heeft. In de rechterkolom krijgt men nu $\sigma(7^2) = 57$, hetgeen men in priemfactoren ontbindt: $57 = 3 \cdot 19$. Men ziet dus dat een factor 7^2 in de linkerkolom rechts een factor 3 en een factor 19 geeft. Deze moeten links verantwoord worden, dus 3 en 19 moeten elk ofwel in k ofwel in n voorkomen. Maar schrijft men de vergelijking als

$$k = \prod_p \frac{1 - \frac{1}{p^{a(p)+1}}}{1 - \frac{1}{p}}$$

dan ziet men dat k in het algemeen niet al te groot zal zijn en dus ook niet veel priemfactoren zal hebben. Men moet daarom serieus rekening houden met de mogelijkheid dat 3 en 19 in n zelf voorkomen. Dat geeft aanleiding tot de tweede en derde regel van de tabel, met $p^a = 3^1$ en $p^a = 19^1$, waarbij men weer de corresponderende getallen $\sigma(p^a)$ uitrekent en in factoren ontbindt. Machten van 2 zijn van later zorg, maar de factor 5 uit $\sigma(19) = 20$ geeft aanleiding tot een nieuwe regel in de tabel, met $p^a = 5^1$. De factor 3 in $\sigma(5)$ doet het vermoeden rijzen dat n wel eens *twee* factoren 3 zou kunnen hebben, zodat men niet 3^1 maar 3^2 moet gebruiken. Deze 3^2 leidt dan weer tot een 13, die zelf een 7 geeft. Dat is veelbelovend, want de twee zevens waarmee we begonnen zijn moesten immers rechts nog verantwoord worden. Er mist nu nog een enkele 7, en het is tijd om eens te gaan kijken of de tot nog toe veronachtzaamde factoren 2 hier wellicht voor gebruikt kunnen worden. Probeert men wat machten van 2 uit (de laatste vier regels van de tabel) dan ziet men dat $p^a = 2^2$ precies levert wat we nodig hebben. We zamelen de factoren 7^2, 19, 5, 3^2, 13, 2^2 bijeen, en vinden het meervoudig perfecte getal

$$n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 = 2178540$$

dat voldoet aan

$$\sigma(n) = 4n.$$

Wie aardigheid krijgt in het vervaardigen van meervoudig perfecte getallen komt er snel achter dat het nuttig is om wat hulptabellen ter beschikking te hebben. De machten van 2 waar figuur 5 mee eindigt, komt men bijna altijd tegen, dus men kan deze eens en voor altijd in een aparte tabel zetten, zoals in figuur 6. (In plaats van $2^{a+1} - 1$ verschijnt hier $2^a - 1$, wat natuurlijk dezelfde getallen geeft. Deze kleine opschuiving zal straks echter belangrijk zijn.)

Vergelijkbare tabellen voor andere kleine priemgetallen 3, 5, ... bewijzen op een gegeven ogenblik ook hun nut.

a	$2^a - 1$
1	1
2	3
3	7
4	$15 = 3 \cdot 5$
5	31
6	$63 = 3^2 \cdot 7$
7	127
8	$255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$
9	$511 = 7 \cdot 73$
10	$1023 = 3 \cdot 11 \cdot 31$
11	$2047 = 23 \cdot 89$
12	$4095 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$

fig. 6

Het treft dat er boeken zijn met dergelijke tabellen. Figuur 7 toont de titelpagina van zo'n boek uit 1925. Het is nu moeilijk te vinden, maar in 1983 werd een tabel gepubliceerd die veel verder gaat; in figuur 8 ziet men dat er in de tussenliggende 58 jaar ook in typografisch opzicht veel gebeurd is. Volgens de titelpagina's gebruikt men eveneens grondtallen die *geen* priemgetallen zijn, name-

FACTORISATION OF $(y^n \mp 1)$.

$y = 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12$
up to high powers (n).

BY

LT.-COL. ALLAN J. C. CUNNINGHAM, R.E.,
FELLOW OF KING'S COLLEGE, LONDON,

AND

H. J. WOODALL, A.R.C.Sc.

LONDON:
FRANCIS HODGSON, 89 FARRINGDON STREET, E.C.4.

1925.

fig. 7 Titelpagina van een boek over factorizatie uit 1925

CONTEMPORARY MATHEMATICS

Volume 22

Factorizations of $b^n \pm 1$
$b = 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12$
up to high powers

John Brillhart, D. H. Lehmer,
J. L. Selfridge, Bryant Tuckerman,
and S. S. Wagstaff, Jr.

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Providence • Rhode Island

fig. 8 Titelpagina van een boek over factorizatie uit 1983 lijk 6, 10 en 12: men is kennelijk langzamerhand de historische oorsprong van deze tabellen vergeten.

De kleine stelling van Fermat

Het lijdt geen twijfel dat Fermat zelf ook een tabel als in figuur 6 vervaardigde. Wie zorgvuldig tussen de regels van zijn correspondentie doorleest, kan precies volgen wat er door hem heenging toen hij de tabel bekeek. Hij merkte bijvoorbeeld op dat in de rechterkolom om de andere regel een factor 3 voorkwam; met andere woorden, $2^a - 1$ is deelbaar door 3 dan en slechts dan als a even is. Heeft men dit eenmaal opgemerkt, dan is het niet lastig te bewijzen. Op dezelfde manier komt er om de vier regels een factor 5 voor. Informatie van dit soort is natuurlijk erg handig als men de tabel naar beneden toe wil voortzetten. Een factor 7 komt om de *drie* regels voor.
Fermat kwam snel achter de wetmatigheid: als p een oneven priemgetal is, dan is de kleinste a waarvoor $2^a - 1$ een factor p heeft een deler van $p - 1$, en de andere waarden van a waarvoor $2^a - 1$ een factor p heeft, zijn juist de veelvouden van deze kleinste a. De laatste bewering is gemakkelijk te bewijzen. De eerste vereist wat meer werk, en kan als volgt geformuleerd worden: *als p een oneven priemgetal is, dan is $2^{p-1} - 1$ deelbaar door p.*
Fermat slaagde erin zijn empirisch ontdekte resultaat te bewijzen, niet alleen voor 2 maar ook voor andere grondtallen: *als p een priemgetal is, en m is een geheel getal niet deelbaar door p, dan is $m^{p-1} - 1$ deelbaar door p.*
Dit is de beroemde 'kleine stelling van Fermat', die uit 1640 dateert. Voorbeeld: 7 deelt $3^6 - 1 = 728 = 7 \cdot 104$.
Zonder overdrijving kan men de kleine stelling van Fermat de op één na belangrijkste stelling uit de getaltheorie noemen, na de hoofdstelling. Men kan zonder deze stelling geen serieuze getaltheorie bedrijven. Alle primaliteitstests berusten erop, het RSA-systeem maakt er gebruik van, en – aan de andere kant van het spectrum – een vak als aritmetische algebraïsche meetkunde is ondenkbaar zonder de kleine stelling van Fermat. Het is met technieken uit dit laatste vakgebied dat de *laatste* of *grote* stelling van Fermat in 1994 uiteindelijk is bewezen. Die dateert uit ongeveer 1638, dus van vóór de kleine stelling, die bijgevolg geen rol kan hebben gespeeld in het wonderbaarlijke bewijs dat Fermat zelf voor zijn laatste stelling meende te bezitten.
In sommige getaltheorieboeken leest men dat de Chinezen de kleine stellingvan Fermat al eeuwen voor Christus kenden, althans voor het grondtal 2. Bij nader onderzoek blijkt dit verhaal niet te kloppen; de stelling is inderdaad in China onafhankelijk ontdekt, maar dit gebeurde pas in 1872, door Lǐ Shànlán. Er is gesuggereerd dat het misverstand teruggaat op een vertaalfout van een oud Chinees manuscript. In het algemeen ontdekt men geen belangrijke stellingen door oude Chinese manuscripten verkeerd te vertalen. Dan kan men beter iets frivools doen als meervoudig perfecte getallen bestuderen.

H.W. Lenstra, Jr., Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden

Noot

[1] Bovenstaand artikel geeft de stand van zaken in 1995 weer. Nu, negen jaar later, kan men een aantal in de tekst genoemde getallen door grotere vervangen. Om twee voorbeelden te geven: primaliteitstests zijn tegenwoordig doenlijk voor getallen van wel 10000 cijfers; en het grootst bekende priemgetal is nu $2^{20996011} - 1$. Het probleem een wiskundig sluitende primaliteitstest te bedenken met rekentijd niet meer dan $(\log n)^c$ is inmiddels opgelost; de oplossing blijkt vooralsnog alleen theoretische waarde te hebben. Voor de rest is het artikel nog steeds actueel.

De wortels van de algebra

Voordracht gehouden op de Nationale Wiskunde Dagen 1995 – Bronnen en oefenmateriaal

J.P. Hogendijk
Vakgroep Wiskunde, Universiteit Utrecht

Samenvatting

Dit artikel bevat bronnenmateriaal en vertalingen van gedeelten van twee Babylonische kleitabletten uit de periode 2000-1500 voor Christus, met algebraïsche problemen. De eerste tekst geeft een stelsel van twee vergelijkingen met een oplosmethode. Wij kunnen hierin onze wortelformule voor de kwadratische vergelijking herkennen. Het tweede tablet (dat wil zeggen het gedeelte daarvan wat hier vertaald is) bevat een serie moeilijke oefenopgaven.
Daarna vertalen we een klein deel van het leerboek over algebra van al-Khwārizmī (ca. 830 na Chr.). Deze geeft niet alleen een oplosmethode voor de diverse typen kwadratische vergelijkingen, maar ook een plaatje om de oplosmethode te motiveren. (Omdat er alleen met positieve coëfficienten gewerkt werd, onderscheidde hij verschillende typen, zoals $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, enzovoorts.)
In de vertalingen is gestreefd naar letterlijkheid, om de lezer een idee te geven van de sfeer van de Babylonische en Arabische algebra. We gebruiken daarom geen moderne notaties zoals x, y, ax^2 en dergelijke die pas in of na de Renaissance ontwikkeld zijn.
Bij het materiaal worden moderne interpretaties gegeven, en ook oefeningen ter verdere verwerking.

Inleiding

In de periode voor 2000 voor Christus ontwikkelde zich in het tweestromenland (Irak) een hoogontwikkelde wiskunde. De twee belangrijkste resultaten hiervan waren het sexagesimale positiesysteem voor het noteren van (positieve) gehele getallen en breuken, en de oplossing van de kwadratische vergelijking.
Vanaf het midden van de negentiende eeuw (na Chr.) zijn honderdduizenden kleitabletten uit deze periode opgegraven in Irak en aangrenzende gebieden. Een klein aantal van deze tabletten is wiskundig van aard. In de jaren 1920-1930 zijn deze tabletten ontcijferd. De volgende vertalingen zijn gebaseerd op de Duitse vertalingen in het werk *Mathematische Keilschrift-Texte* van O. Neugebauer (*MKT*). We geven hier een korte inleiding over de Babylonische sexagesimale notatie, omdat de lezer daarmee zelf de getallen op de tabletten kan terugvinden en hiermee het contact met de bronnen kan vergroten.
Voor het noteren van de getallen 1 tot en met 59 gebruikten de Babylonische schrijvers twee tekens, te weten een verticale spijker (hier aangegeven met het symbool |) met waarde 1, en een winkelhaak (hier aangegeven met <) met waarde 10. Zo werd 23 genoteerd als << |||. Bij meer dan 3 spijkers werden de spijkers boven elkaar gezet en meer dan 3 winkelhaken werden gegroepeerd. Aan de hand van de gereproduceerde tabletten in dit artikel kan de lezer zelf nagaan hoe dit werd gedaan.

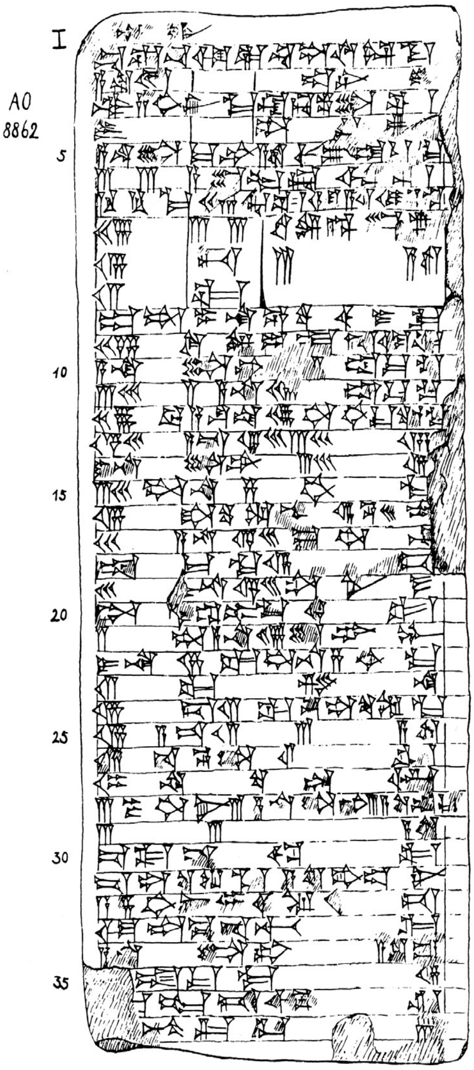
Opgave 1
Om verwarring tussen regelnummers en getallen in de tablet te vermijden, geven we de regelnummers klein en boven de regel.
Vind in de tablet op de volgende pagina in het brede gedeelte tussen de regels ^{7} en ^{8} de volgende getallen in spijkerschrift: 27, 15, 12.
Lees de getallen aan het begin (de linkerkant) van regels no. ^{12}, ^{16}, ^{17}, ^{23}, ^{24}, ^{25}.

Voor grotere getallen werd een positiesysteem gebruikt. Voorbeeld: het getal $743 = 12 \times 60 + 23$ werd door de Babyloniëers geschreven als het getal voor 12, soms gevolgd door een kleine spatie, en het getal voor 23 (dus < || << |||). Het getal $76943 = 21 \times 60^2 + 22 \times 60 + 23$ werd geschreven als << | << || << |||.

Opgave 2
Lees nu de getallen op het tablet aan de linkerkant van regels ^{6} (de spatie is vrij breed), ^{11}, ^{13}.

Helaas was er in de Oudbabylonische tijd geen teken voor de nul (dit werd pas duizend jaar later, circa 500 voor Chr., door de Babylonische astronomen ingevoerd). Daarom is in spijkerschrift $60 = 1 \times 60 + 0 \times 1$ op zichzelf niet te onderscheiden van 1, en ook niet van $3600 = 60^2$. Alleen uit de context kan blijken wat precies wordt bedoeld!

Eerder verschenen in de *Nieuwe Wiskrant*, *15*(2) 1995



Tekening van het Babylonisch kleitablet no. AO 8862. Dit tablet wordt bewaard in het Louvre in Parijs.

Hetzelfde systeem werd voor breuken gebruikt. Bijvoorbeeld: $\frac{1}{2}$ (= $\frac{30}{60}$) werd genoteerd als <<< (het teken voor 30).
$\frac{1}{8}$ wordt genoteerd als |||||| <<< (want $\frac{1}{8} = \frac{7}{60} + \frac{30}{3600}$).

Breuken zoals $\frac{1}{19}$ gaan niet op deze manier, men zei dan 'het negentiende (deel)'. Er is geen scheidingsteken tussen het gehele deel en het breukdeel. Dus zou het getal <<< ook 30 kunnen betekenen. De context maakt vaak duidelijk wat bedoeld wordt. Zo staat in regel no. [16] van het tablet: < ||||| heeft <<< als kwadraatwortel. Deze twee getallen kun je daarom niet als 15 en 30 lezen, maar wel als $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$. In vertalingen gebruiken we een notatie die aansluit bij het spijkerschrift, maar waarbij de onduidelijkheid (door het ontbreken van de 0 en het scheidingsteken) wordt weggenomen. We gebruiken daarbij een komma om de verschillende sexagesimalen te scheiden, een puntkomma als scheidingsteken tussen geheel deel en breukdeel en we schrijven wel nullen.
Voorbeelden: 3601 wordt 1,0,1. $\frac{1}{8}$ wordt 0;7,30. Nota bene: de nullen, komma's en puntkomma's staan dus niet in de tekst.

Opgave 3
Op het tablet staat aan het eind van regel [13] een getal dat als 3,30;15 kan worden geïnterpreteerd (het produkt van 14;30 aan het begin van die regel met zichzelf). Zoek dit en laat zien waar het scheidingsteken moet staan.

De tekst van het tablet

Het afgebeelde tablet is een rechthoekig blok met vier beschreven kanten, waarvan er één hier gereproduceerd en vertaald is, op basis van de Duitse vertaling in Neugebauer's *MKT*, p. 113. Het is tablet no. AO 8862 uit het Louvre in Parijs. De tekening is van Neugebauer, ontleend aan *MKT* deel 2-3. Het tablet bevat de oplossing van een 'kwadratische vergelijking'.
Eén regel in de tekst op het tablet komt overeen met één regel vertaling. De regelnummers in de vertaling zijn klein gezet. Passages in haken { } zijn onleesbaar op de tablet, maar door Neugebauer gereconstrueerd.

Vertaling van het tablet
1 Lengte, breedte. Lengte en breedte heb ik vermenigvuldigd en zo
2 de oppervlakte gemaakt,
3 wat de lengte over de breedte
4 uitsteekt
5 heb ik bij de oppervlakte opgeteld en
6 (er komt) 3,3. Verder, lengte en breedte
7 opgeteld (is) 27. Wat zijn de lengte en de breedte?

27	3,3	de sommen	
15	lengte	3	oppervlakte
12	breedte		

8 Jij bij je methode
9 27, de som van lengte en breedte
10 optellen, er komt
11 3,30. Nu 2 bij 27 optellen, $x + y = 27$.
12 (er komt) 29. De helft van 29 afbreken
13 14;30 maal 14;30 (is) 3,30;15
14 Van 3,30;15
15 aftrekken 3,30
16 0;15 is het verschil. 0;15 heeft 0;30 als kwadraat {wortel}
17 nu 0;30 bij de eerste 14;30
18 optellen, er komt 15 als lengte.
19 0;30 van de tweede 14;30
20 aftrekken, er komt 14 als breedte.
21 2 die je bij 27 opgeteld hebt
22 van 14, de breedte, aftrekken,
23 12 is de uiteindelijke breedte.
24 15, de lengte en 12, de breedte heb ik vermenigvuldigd.
25 15 maal 12 is 3,0 de oppervlakte.
26 15 lengte over 12 breedte,
27 wat steekt het uit?
28 het steekt 3 uit.

29 Deze 3 bij 3,0 de oppervlakte optellen,
30 3,3 is het resultaat.

Interpretatie van deze tekst
We schrijven x voor de lengte, y voor de breedte. De oppervlakte is dan xy. De tekst beschrijft het stelsel vergelijkingen

$$xy + (x - y) = (3{,}3 = 3 \times 60 + 3 =)\ 183, \quad x + y = 27.$$

De oplossing is gebaseerd op het idee $x + y = 27$ op te tellen bij $xy + (x - y) = 183$, dit leidt tot een nieuw stelsel

$$xy + 2x = (3{,}30 =)\ 210, \quad x + y = 27.$$

Als we een nieuwe variabele $y' = y + 2$ invoeren, krijgen we

$$xy' = 210, \quad x + y' = 2 + 27 = 29.$$

Dit stelsel

$$xy' = 210, \quad x + y' = 29$$

werd met een standaardmethode opgelost (zie de tekst, regels 12-20). Hieruit kreeg men een lengte $x = 15$, en een breedte $y' = 14$. Als oplossing van het oorspronkelijke probleem krijgen we $y = y' - 2 = 12$.
Tot slot wordt de oplossing gecontroleerd (regels 24-30).

Opgave 4
Laat zien met welke stappen de tekst het stelsel $x + y' = p$, $xy' = q$ oplost. (We schrijven p en q in plaats van 29 en 210.) Ga na dat de methode equivalent is met de wortelformule voor de kwadratische vergelijking die we krijgen door één van de onbekenden (bijvoorbeeld x) te elimineren. (Er zijn bij de wortelformule twee wortels; de tweede wortel is y.)

Een tablet met oefenopgaven

We vertalen nu gedeelten van twee kolommetjes van een tablet, dat slechts zeven centimeter lang is. Op deze kleine ruimte werden zeer ingewikkelde problemen gesteld. De tablet wordt bewaard in het Vaticaan onder nummer 7537. We vertalen alleen de aangeduide gedeelten van de voorkant (Vorseite) en de achterkant (Rückseite). De tekening is ontleend aan Neugebauer, *MKT*, deel 2-3, Tafel 48; voor een foto zie Tafel 23.

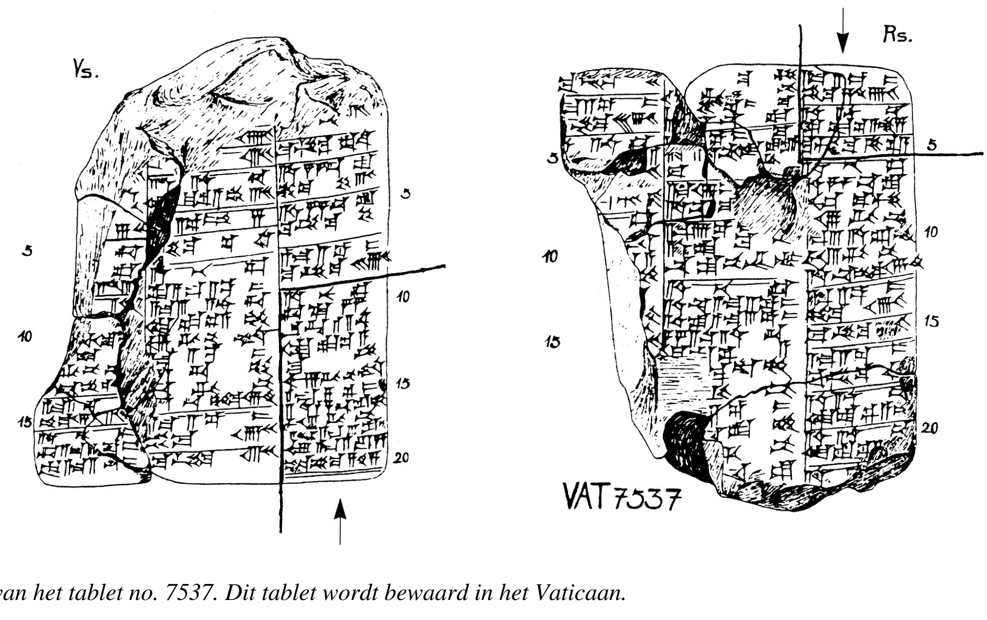
Vertaling
De vertaling van de tablet, op basis van Neugebauer (*MKT*, deel 1, pp. 470-471; het gedeelte D-E) luidt:

(Voorkant (Vs.), de rechter kolom, regel 9-20)

9 Het oppervlak (is) 1 (eše).
10 Lengte (en) breedte opgeteld
11 De helft … < plus datgene wat de lengte >
12 over de breedte uitsteekt
13 afgetrokken.
14 Het 7-e deel daarvan gekwadrateerd
15 Met 4 heb je vermenigvuldigd
16 Het oppervlak (d.i. kwadraat) van de som van lengte, breedte (hierbij) opgeteld,
17 Het 13-e deel daarvan (genomen)
18 De lengte heb je met 3 vermenigvuldigd
19 en met 2 de breedte, (dit bij elkaar) opgeteld
20 gekwadrateerd, en (samen is dit) 4,45,0.

(Achterzijde (Rs.), rechter kolom)

1 Met 2 heb je vermenigvuldigd
2 opgeteld, en het is 4,48,20.
3 Het oppervlak van wat de lengte
4 over de breedte uitsteekt, opgeteld is 5,0



Tekening van het tablet no. 7537. Dit tablet wordt bewaard in het Vaticaan.

5 Afgetrokken en dan steekt het er 1,40 boven uit.

Interpretatie

Voorzijde, kolom 3, regels 9-20: De eenheid waarin de lengtes en breedtes gerekend worden is de el (circa 50 cm). 1 eše = 600 vierkante el.
Regel 9: Schrijf de lengte x, de breedte y. Deze twee grootheden voldoen aan twee vergelijkingen, waarvan de eerste steeds dezelfde is, namelijk xy = 1 eše = 600.

De tweede vergelijking is in Regel 10 - 20:

$$(3x+2y)^2+\tfrac{1}{13}\left(4\left(\tfrac{1}{7}\left((x+y)-1\tfrac{1}{2}(x-y)\right)\right)^2+(x+y)^2\right)$$

= 4,45,0 (= 17100)

Opgave 5

Los dit stelsel vergelijkingen op.

In regel 1-2 hebben we de volgende variant:

$$(3x+2y)^2+\ 2\cdot\tfrac{1}{13}\left(4\left(\tfrac{1}{7}\left((x+y)-1\tfrac{1}{2}(x-y)\right)\right)^2+(x+y)^2\right)$$

= 4,48,20 (= 17300)

Opgave 6

Los ook dit stelsel vergelijkingen op. Wat valt op?

In regel 3-4 hebben we

$$(x-y)^2+\tfrac{1}{13}\left(4\left(\tfrac{1}{7}\left((x+y)-1\tfrac{1}{2}(x-y)\right)\right)^2+(x+y)^2\right)$$

= 5,0 (= 300)

en in regel 5

$$\tfrac{1}{13}\left(4\left(\tfrac{1}{7}\left((x+y)-1\tfrac{1}{2}(x-y)\right)\right)^2+(x+y)^2\right)-(x-y)^2$$

= 1,40 (= 100)

Opgave 7

Raad de oplossingen van deze vergelijkingen en verifieer het antwoord.

(Dit was natuurlijk van te voren bekend. Het is daarom waarschijnlijk dat de opgaven bedoeld zijn als oefenopgaven, om de oplosmethodes in te oefenen.)
De tekst gaat nu verder met een nieuwe opgave:

6 Het oppervlak is 1 (eše).
7 De oppervlakte (d.i. het kwadraat) van de som (van) lengte (en) breedte
8 Hiervan een oppervlakte van 1 (eše) afgetrokken
9 Het 19-e (deel hiervan nemen)
10 Met 3 de oppervlakte (d.i. het kwadraat van de) breedte vermenigvuldigd en opgeteld
11 Het 13-e deel daarvan (d.w.z. van dit totaal)
12 de oppervlakte (d.w.z. het kwadraat) van de lengte toegevoegd, en er komt 16,40 uit.

Opgave 8

In deze tekst wordt weer een stelsel vergelijkingen gegeven dat lijkt op het bovenstaande. Welk stelsel is dit precies? (1 eše = 600; 16,40 = 1000). Los het stelsel op. Wat valt er op?

Net zoals hiervoor is deze nieuwe opgave het begin van een serie opgaven. Steeds moet een stelsel vergelijkingen worden opgelost waarvan de eerste vergelijking xy = 600 is en de tweede een variatie op de vergelijking in de regels 6-12. De eerste van deze variaties is:

13 Met 2 heb je vermenigvuldigd,
14 opgeteld, en er komt 18,20 uit.

Opgave 9

Welke is precies de tweede vergelijking die hier bedoeld wordt?

In de volgende regel is een sexagesimaal (dat wil zeggen een getal tussen de 1 en de 59) onleesbaar (aangegeven met […]):
15 Afgetrokken, en er komt […], 20 uit.

Opgave 10

Welke sexagesimaal zou dit geweest zijn?

Opgave 11

Interpreteer nu ook de volgende regels en vul de ontbrekende sexagesimaal aan:

16 Met 2 heb je vermenigvuldigd
17 Afgetrokken, en er komt 11, […] uit.

Al-Khwārizmī's leerboek over Algebra

De oorspronkelijke titel van dit boek is Kitāb fī'l-jabr wa'-muqābala, *Verhandeling over restauratie en confrontatie*.
Muḥammad ibn Mūsā Al-Khwārizmī was afkomstig uit de stad Khwārizm (tegenwoordig Khiwa, ten zuiden van het Aral-meer) en werkte in Bagdad tijdens de regering van kalief al-Maʿmūn (813-833). Dit was de periode waarin kennis uit diverse culturen door de jonge cultuur van de Islam werd geassimileerd en waarin het Arabisch zich ontwikkelde tot taal van de wetenschap. Al-Khwārizmī stelt zich in zijn boek ten doel bestaande kennis over algebra te systematiseren. Zijn boek is echt een leerboek, met uitgebreide rekenvoorbeelden (waarvan we hier wegens ruimtegebrek maar een heel klein beetje zullen behandelen). De vergelijkingen zijn minder ingewikkeld dan die in het tweede Babylonische kleitablet dat in dit artikel vertaald is. Uit de Babylonische oudheid is ons geen enkele leertekst over algebra bekend.

Het boek van Al-Khwārizmī is in een paar middeleeuws Arabische handschriften bewaard gebleven. Het is in de twaalfde eeuw in het Latijn vertaald en heeft grote invloed gehad op de algebra in Europa. De onderstaande fragmenten zijn vertaald op basis van de editie uit 1831 van Rosen (zie de bibliografie). Verklarende opmerkingen bij de tekst staan in de voetnoten, en tussen de fragmenten in vierkante haken [ ].

Fragmenten uit het leerboek van Al-Khwārizmī

... De liefde voor cultuur en de wens om met mensen van cultuur[1] in contact te komen... hebben mij ertoe aangezet een kort boek te schrijven over het rekenen met 'restauratie en confrontatie', dat subtiele en prachtige rekenmethoden bevat, die de mensen nodig hebben[2] in het erfrecht, bij erfenissen, het verdelen van dingen, rechtszaken, in de handel, en bij alle transacties die te maken hebben met het opmeten van landerijen, het graven van kanalen, en meetkunde, en andere takken en branches. Dit bied ik (de lezer) aan met een goede bedoeling, en in de hoop dat de mensen van cultuur mij als beloning de gunst willen verlenen voor mij de zegeningen van God de Allerhoogste af te smeken ... [Rosen, Ar. p. 2, vert. p. 3-4]

... Ik heb gevonden dat de getallen die nodig zijn in het rekenen met 'restauratie [al-jabr] en confrontatie [al-muqā-bala]' van drie typen zijn, namelijk wortels, kapitalen en losse getallen, die niet gerelateerd zijn aan wortels en kapitalen. Een wortel is alles wat met zichzelf vermenigvuldigd wordt, dit kan één zijn, of een groter getal, of een kleinere breuk (modern: x). Een kapitaal is dat wat ontstaat door vermenigvuldiging van een wortel met zichzelf [modern: x^2]. Een los getal is elk getal dat aangeduid wordt zonder verband met wortel of kapitaal.
Deze drie typen kunnen gelijk zijn aan elkaar, zoals wanneer je zegt: kapitalen zijn gelijk aan wortels; of wortels zijn gelijk aan een getal; of kapitalen zijn gelijk aan een getal. [Rosen, Ar. p. 3, vert. p. 5-6]

... [hij behandelt eerst deze drie eenvoudige gevallen, modern: $ax^2 = bx$, $bx = c$, $ax^2 = c$.]

Ik heb gevonden dat deze drie typen, namelijk wortels, kapitalen en getallen, gecombineerd kunnen worden, zodat er drie gecombineerde soorten ontstaan, namelijk: kapitalen en (= plus) wortels zijn gelijk aan een getal[3], of kapitalen en een getal zijn gelijk aan wortels[4], of wortels en een getal zijn gelijk aan kapitalen.[5] [Rosen, Ar. p.5, vert. p.8]

... [al-Khwārizmī wijdt nu aan elk van deze drie typen een 'hoofdstuk'. We vertalen één van deze hoofdstukken.]

Kapitalen plus getal is gelijk aan wortels, dit is wanneer je zegt één kapitaal plus een aantal van een en twintig dirham is gelijk aan tien van zijn wortels.[6] Dit betekent: wat is het kapitaal zodat als je er een en twintig dirham aan toevoegt, de uitkomst tien wortels van dit kapitaal is?
De methode hiervoor is dat je de (dat wil zeggen het aantal) wortels halveert, dat is vijf, dan vermenigvuldig je dat met zichzelf, dat is vijf en twintig. Trek daar de een en twintig van af, waarvan je gezegd hebt dat ze bij het kapitaal moesten, er blijft vier over. Neem de wortel daarvan, dat is twee. Trek deze van de helft van de (dat wil zeggen het aantal) wortels af, er blijft drie over. Dat is de wortel van het kapitaal wat je wilt, dus het kapitaal is negen. Of als je wilt, tel de wortel bij de helft van (het aantal) wortels op, dat is zeven, en dat is de wortel van het kapitaal dat je wilt, dus het kapitaal is negen en veertig.

Opgave 12

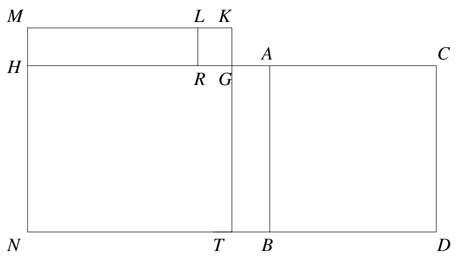
Ga na dat deze methode met onze wortelformule overeenkomt.

Als je een vraag van dit type tegenkomt, probeer dan eerst of het gaat met optellen, als dat niet zo is[7], gaat het met aftrekken altijd. Dit hoofdstuk werkt met optellen én aftrekken allebei, en dat is niet zo bij de andere twee hoofdstukken[8] waarin je de (dat wil zeggen het aantal) wortels moet halveren.

Weet dat als je in dit hoofdstuk de wortels halveert en dit met zichzelf vermenigvuldigt en het resultaat is minder dan de dirhams die bij het kapitaal worden opgeteld, dan is het probleem onmogelijk.[9] Als het resultaat gelijk is aan het aantal dirhams, dan is de wortel van het kapitaal gelijk aan de helft van de wortels, zonder aftrekking en optelling. Alles waar twee kapitalen of meer of minder in voorkomen[10], moet je terugvoeren naar één kapitaal zoals ik je in het eerste hoofdstuk heb uitgelegd. [Rosen Ar. p. 7-8, vert. p. 11-12]
...
Voor elk van deze drie hoofdstukken[11] heb ik een figuur gemaakt waarmee de reden voor het halveren van de wortels duidelijk wordt gemaakt. [Rosen, Ar. p. 8, vert. p. 13]
...
Wat betreft één kapitaal en een en twintig dirham is gelijk aan tien van zijn wortels: we maken het kapitaal een vierkant met onbekende zijde, namelijk vierkant AD.[12]

Dan voegen we er een parallelogram aan toe,[13] met breedte gelijk aan één van de zijden van het oppervlak AD, namelijk zijde HN, en het oppervlak zelf is HB. Dan wordt de lengte van de twee oppervlakken samen zijde CH. We weten dat de lengte ervan tien is, want de zijde van elk vierkant vermenigvuldigd met één is de wortel van dat oppervlak,[14] en met twee (vermenigvuldigd) is het twee maal de wortel van dat oppervlak.[15] Dus wanneer gezegd is: kapitaal plus een en twintig is gelijk aan tien wortels ervan, dan weten we dat de lengte van zijde HC tien is, omdat zijde CD de wortel van het kapitaal is. Toen hebben we zijde CH in twee helften verdeeld in punt G. Dan is duidelijk dat lijn CG gelijk is aan lijn GH, en het is duidelijk dat lijn GT gelijk is aan lijn CD. Toen

hebben we in het verlengde van lijn *GT* een stuk toegevoegd gelijk aan het overschot van *CG* over *GT*, zodat het oppervlak een vierkant wordt. Dus is lijn *TK* gelijk geworden aan lijn *KM*, en er is een vierkant oppervlak ontstaan met gelijke zijden en hoeken, namelijk oppervlak *MT*.
Het was ons duidelijk dat lijn *TK* vijf is, en de zijden (van het vierkant) zijn daaraan gelijk, dus het oppervlak (van het vierkant) is vijf en twintig. Dat is het resultaat van de vermenigvuldiging van de helft van de wortels met zichzelf, en dat is vijf keer vijf, dat is vijf en twintig.
Maar het was ons al duidelijk dat vlak *HB* de één en twintig is die we bij het kapitaal hebben opgeteld. Dus hebben we van het oppervlak *HB* met lijn *TK*, die één van de zijden van oppervlak *MT* is, (iets afgehaald), met rest oppervlak *TA*.
Daarna hebben van lijn *KM* lijn *KL* afgenomen, gelijk aan lijn *GK*. Dan is duidelijk dat lijn *TG* gelijk is aan lijn *ML*. Van lijn *MK* is lijn *LK* afgehaald, en die is gelijk aan lijn *KG*. Dus oppervlak *MR* is gelijk aan oppervlak *TA*. Dus is duidelijk dat oppervlak *HT* met oppervlak *MR* daaraan toegevoegd gelijk is aan oppervlak *HB*, en dat is één en twintig. Maar oppervlak *MT* was vijf en twintig. Dus wanneer we van oppervlak *MT* oppervlak *HT* en oppervlak *MR* afhalen, die samen één en twintig zijn, rest ons een klein oppervlak *RK*, en dat is het verschil tussen vijf en twintig en één en twintig, dat is vier, en de wortel ervan is lijn *RG*, die is gelijk aan lijn *GA*, en dat is twee.
Als je die twee van lijn *GC*, die de helft van het aantal wortels is, aftrekt, blijft lijn *AC* over, en dat is drie, en dat is de wortel van het eerste kapitaal.
Als je hem aan lijn *CG*, die de helft van het aantal wortels is, toevoegt, wordt dat zeven, en dat is lijn *RC*, en dat is de wortel van het grootste van deze kapitalen zodat als je er één en twintig aan toevoegt, dat gelijk wordt aan tien wortels ervan. Dit is de figuur ervan, en dat is wat wij wilden bewijzen. [Rosen, Ar. p. 11-13, vert. p. 16-18]



Opgave 13
Motiveer de formule voor de kleinste wortel x van de vergelijking $x^2 + q = px$ aan de hand van de figuur van al-Khwārizmī ($q = 21$, $p = 10$, $x = AC$). Breid de figuur daarna uit tot een figuur die ook de formule voor de grootste wortel x motiveert. Dit kan bijvoorbeeld door RL naar beide kanten te verlengen en een vierkant te maken met zijden CR, langs zijde RL, en langs het verlengde van DC, en x = RC te stellen.

[Al-Khwārizmī beschrijft daarna voorbeelden en het reduceren van een willekeurige kwadratische vergelijking (waarin negatieve termen mogen voorkomen) tot één van zijn zes standaardvormen met alleen positieve coëfficiënten. Het wegwerken van negatieve termen (als in de omvorming van $x^2 - 4 = 7x$ tot $x^2 = 7x + 4$) noemt hij 'restauratie' (al-jabr, spreek uit: al-dzjabr, in sommige delen van de Arabische wereld uitgesproken als al-gabr). Hiervan is de naam 'algebra' afgeleid.]

Noten

[1] Arabisch: adab
[2] Al-Khwārizmī's leerboek bevat ook hoofdstukken over erfrecht en landmeten, maar hierbij zijn op zijn hoogst lineaire vergelijkingen nodig.
[3] modern: $ax^2 + bx = c$
[4] modern: $ax^2 + c = bx$
[5] modern: $bx + c = ax^2$
[6] $x^2 + 21 = 10x$
[7] Dit is een raadselachtige passage. Misschien was al-Khwārizmī hier niet zo vertrouwd mee, hij geeft namelijk ook geen plaatje voor het geval 'met optellen'. Zie de opgave aan het eind.
[8] Dat wil zeggen: $ax^2 + bx = c$ en $ax^2 = bx + c$.
[9] Dat wil zeggen als $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < c$ dan heeft $x^2 + c = bx$ geen oplossing.
[10] Dat wil zeggen als in de vergelijking $ax^2 + c = bx$ $a \neq 1$.
[11] Dat wil zeggen voor $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$.
[12] In de Griekse en Arabische meetkunde wordt een vierhoek vaak aangegeven met twee diagonaal tegenover elkaar liggende punten, als geen verwarring mogelijk is.
[13] Al-Khwārizmī vergeet hier te vermelden dat dit parallellogram oppervlakte 21 heeft.
[14] Dat wil zeggen het vierkant.
[15] Dat wil zeggen het vierkant.

Literatuur

Opmerkingen staan tussen vierkante haken. De meeste van de genoemde boeken zijn te vinden in de bibliotheek van het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht.

Geschiedenis van de algebra
Scholz, E., Hrsg. (1990). *Geschichte der Algebra. Eine Einführung*. Mannheim-Wien-Zürich, B.I. Wissenschaftsverlag.
Waerden, B.L. van der (1985). *A history of algebra from Al-Khwārizmī to Emmy Noether*. New York etc., Springer.

Babylonische algebra
Neugebauer, O. (1935). MKT = *Mathematische Keil-*

schrift-Texte. Deel 1, Deel 2-3. Berlijn, Springer. [Bronnen]

Neugebauer, O. & A. Sachs (1945). *Mathematical cuneiform texts*. New Haven, Connecticut, American Oriental Society. [Meer bronnen, onder andere het beroemde Plimpton 322 tablet.]

Waerden, B. L. van der (1950). *Ontwakende wetenschap. Babylonische, Egyptische en Griekse wiskunde*. Groningen, Noordhoff. Historische bibliotheek voor de exacte wetenschappen deel VII. Vertaald in het Engels: B.L. van der Waerden (1961). *Science Awakening I*. New York, Oxford University Press. [Zeer goed toegankelijk. Er is ook een *Erwachende Wissenschaft c.q. Science Awakening deel II*, over geschiedenis van de sterenkunde in de oudheid.]

Neugebauer, O. (1957 of herdruk). *The exact sciences in antiquity*. Providence R.I. , Brown University Press. [paperback, heel goed als inleiding in de bronnen.] [Ook als Dover pocket te koop, circa *f*. 20,-]

Høyrup, Jens (1994). *In measure, number and weight. Studies in mathematics and culture*. Albany, State University of New York Press. ISBN 0-7914-1822-7. [Essay 3 hiervan gaat over de rol van de algebra in de Babylonische cultuur en voor het zelfbeeld van de Babylonische schrijvers.]

Arabische algebra

Berggren, J.L. (1986). *Episodes in the history of mathematics of medieval Islam*. New York etc., Springer Verlag. [Elementair. Met oefeningetjes.]

Juschkewitch, A.P. (1964). *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*. Leipzig, Teubner. [Nog steeds het beste overzicht.]

Rebstock, Ulrich (1992). *Rechnen im islamischen Orient. Die literarischen Spuren der praktischen Rechenkunst*. Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft. ISBN 3-534-11317-9.

Rosen, Frederic (ed. and tr.) (1986). *The Algebra of Mohammed ben Musa*. Hildesheim, Olms. Herdruk van de oorspronkelijke uitgave (London, 1831).

Een van de buitenlandse gastsprekers op de Nationale Wiskunde Dagen van februari 1996 was **Claudi Alsina**. Hij hield een gloedvol betoog over hoe leerlingen te verleiden tot wiskunde.

Hoe verleid ik mijn leerlingen tot wiskunde?

Wiskunde is een mooi, opwindend en vermakelijk vak. Zo komt het tenminste op mij over. Hoe kunnen we het beeld van wiskunde verbeteren en dat op de leerlingen overdragen zodat ze er ook van gaan houden?
In dit artikel geef ik eerst een korte inleiding op het *Antiverleidings Wiskunde Syndroom*. Daarna ligt de nadruk op de middelen die u kunt gebruiken voor de wiskundige verleiding: schoonheid, realiteit, uitdaging, amusement, fictie, geschiedenis, verrassing, poëzie en muziek.
Tenslotte laat ik zien wat u nog kunt doen als deze fantastische plannen niet blijken te werken.

Antiverleidings Wiskunde Syndroom

Het Anti-verleidings Wiskunde Syndroom (AWS) is een serieus syndroom dat nog steeds in omvang toeneemt en dat in alle sociale lagen en in alle landen voorkomt. Het AWS heeft het karakter van een epidemie. Het wordt van de ene op de andere generatie doorgegeven. Veel leerlingen in uw klas zullen er last van hebben. De oorsprong van het AWS is onbekend. Zeker is dat er gevallen van AWS ten tijde van Euclides zijn geconstateerd. De echte explosie van AWS vond plaats toen de Wiskundige Instituten werden opgericht. Op dit ogenblik grijpt het AWS steeds dieper in in de eerste jaren van de school. Zelfs kleuters hebben er al last van.
De eerste symptomen van AWS doen zich bij normale personen voor op tien- à elfjarige leeftijd. Het aanleren van aftreksommen schijnt de eerste duidelijke verschijnselen op te wekken. Leerlingen beginnen te huilen of te slapen als ze de uitwerkingen op het schoolbord voor zich zien. In een latere fase hebben ze hun linker arm nodig om hun hoofd in een geschikte positie te houden, totdat de hoofden steeds verder naar de tafel neigen en ze tenslotte hun arm als hoofdkussen gebruiken.
Het is heel opvallend dat de infectie met het AWS toeneemt naarmate de proefwerken dichterbij komen, maar dat geïnfecteerde personen zich in de vakantie veel beter voelen.
Het AWS is sociaal aanvaard. Ouders herkennen het AWS bij zichzelf en in sommige gevallen aarzelen ze niet om in het openbaar te beweren ‘dat het een normaal probleem is’, ‘dat ik er zelf ook last van heb’, ‘dat je moeder en ik verliefd werden omdat we beide het AWS hadden’.
Het Internationaal Comité voor het Plezier in het Leren heeft speciale programma’s ontwikkeld om het AWS te bestrijden. Maar ingrijpender maatregelen, die voorbereid zijn door wiskundedocenten, zijn noodzakelijk voor een succesvolle bestrijding.

Testen voor het AWS

Heeft u het AWS?
Kunt u het AWS overdragen op andere mensen?
Om de antwoorden op deze kernvragen te vinden, zijn twee testen beschikbaar. De eerste test bevat vragen over hoe u zich voelt tijdens het lesgeven:
- Zou u een ander beroep willen hebben?
- Denkt u aan het geld dat u verdient met het lesgeven?
- Als alle leerlingen slapen, reageert u dan negatief?
- Als geen enkele leerling slaagt voor het examen, vindt u dan dat dat hun probleem is?

Als u maar één vraag met JA hebt beantwoord, dan heeft u het AWS. Alleen als u alle vragen met NEE beantwoordde, heeft u waarschijnlijk geen AWS. In dat geval dient u de tweede test te ondergaan die gaat over de leerstof:
- Kunt u statistiek vóór de kansrekening behandelen?
- Kunt u wiskunde behandelen zonder verzamelingenleer?
- Kunt u verzamelingenleer behandelen zonder logica?
- Heeft u rekenmachines nodig?
- Heeft u realistische data nodig?

Beantwoordde u al deze vragen met NEE, dan heeft u het AWS. Zei u JA op al deze vragen, dan bent u vrij van het syndroom. Waren uw antwoorden een mengeling van JA en NEE, dan is het niet duidelijk wat er in de toekomst met u zal gebeuren.
In elk geval is een ‘plan voor wiskundige verleiding’ hard nodig in onze samenleving.

In het volgende geef ik negen overwegingen, toegelicht met concrete voorbeelden; bronnen welke u kunt gebruiken om onze leerlingen de mogelijkheid te geven de wiskundige verleiding te ontdekken.

Verleiding en schoonheid in wiskunde

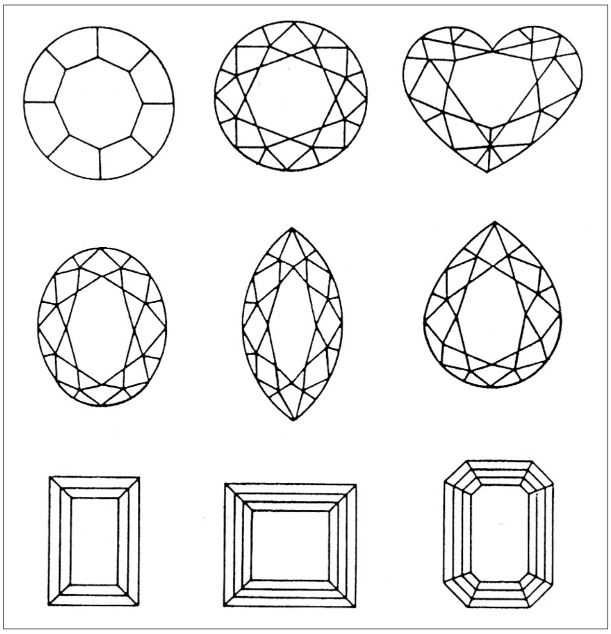


fig. 1

Alles wat we binnen en buiten het klaslokaal doen, hoort een mooie presentatie te hebben. We kunnen niet alleen maar acteurs zijn voor het schoolbord. We willen geen wiskunde in 'zwart en wit'. Onze presentaties kunnen spannend zijn. Daarbij kunt u gebruik maken van de mogelijkheden van multimedia. Ze geven een sterke uitstraling aan ons 'wiskundige laboratorium'. Enkele voorbeelden:

Welke veelhoeken en hoeken ontdek je in een paraplu? (P. Puig Adam).

Twee mensen A en B staan drie meter van elkaar af. Een derde persoon C wil zo gaan staan dat de afstand AC twee keer zo groot is als BC. Waar kan C dan gaan staan?

Welke veelhoeken kun je krijgen als doorsnede van twee rechthoeken?

Hoe kun je een elliptische boog maken in een gebouw?

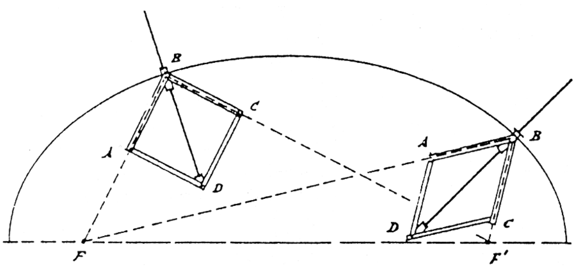


fig. 2

In bovenstaande voorbeelden kunt u kiezen voor een saaie ouderwetse presentatie. U kunt ook kiezen voor een mooie presentatie met een overhead projector, kleuren dia's, computerbeelden en concrete modellen. De manier waarop u dit alles presenteert, is belangrijk om de aandacht van leerlingen vast te houden en ze te motiveren tot leeractiviteiten.

Verleiding en realiteit

We kunnen voorbeelden en problemen uit de dagelijkse werkelijkheid toelichten en oplossen. Zowel binnen als buiten het klaslokaal. Daarbij kunnen we experimenten uitvoeren. Natuurlijk houden we rekening met het niveau en de interesse van onze leerlingen.

fig. 3

Allerlei dagelijkse gebruikszaken bevatten prachtige wiskundige problemen die verband houden met interessante situaties uit het dagelijks leven:
- *hoeveel kost een telefoongesprek?*
- *hoeveel kilo afval produceren we thuis ieder jaar?*
- *hoe plannen we een uitstapje?*
- *wat is de meetkunde achter verpakkingen?*

Verleiding en uitdaging

fig. 4

Hier kunnen we discussie en kritische opmerkingen uitlokken. Wiskunde kan helpen om democratische ideeën te ontwikkelen en voor te bereiden op tegenstellingen in het leven. Niet alles in het leven is waar of onwaar, we kunnen dus niet meer vasthouden aan de Boolese logica.

- *Bekijk de volgende zin: 'Deze zin heeft vijf woorden'. Wat is de ontkenning van deze zin?*
- *Is de oorspronkelijke zin waar?*
- *Is de ontkenning waar? Hoe kan dat?*

- *Is ons volwassen lichaam 'gelijkvormig' met dat van onszelf als kind?*
- *Hoe verandert het menselijk lichaam?*
- *In welk opzicht zijn kinderen 'gelijkvormig' met hun ouders?*

- *Hoe is 'werkeloosheid' gedefinieerd?*
- *Horen militairen bij de werkende klasse?*
- *Hebben nonnen in een klooster een baan?*

Verleiding en amusement

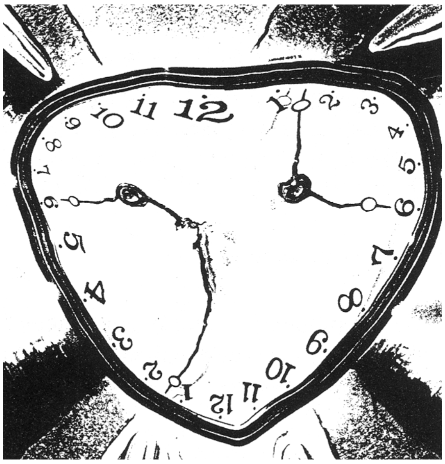


fig. 5

We kunnen laten zien dat wiskunde pret is. Mensen moeten zich prettig voelen bij ons onderwijs. Dat verdienen ze. Heeft u wel eens het genoegen gesmaakt om te zien hoe uw leerlingen u imiteren? Vertel moppen en anekdotes in de klas. Leerlingen zullen zich altijd de details blijven herinneren!

Het volgende fragment komt uit de Bijbel (Genesis, 5).
Toen Methusalem 187 jaar oud was, werd hij vader van Lamech. En nadat hij vader was geworden van Lamech, leefde Methusalem 782 jaar en kreeg hij nog andere zonen en dochters. In totaal leefde Methusalem 969 jaar en toen stierf hij.
Toen Lamech 182 jaar oud was, kreeg hij een zoon. Hij noemde hem Noach.... Na de geboorte van Noach leefde Lamech 595 jaar.... In totaal leefde Lamech 777 jaar en toen stierf hij.
Noach was 600 jaar oud toen de wateren van de vloed over de aarde kwamen. En Noach en zijn zonen en zijn vrouw en de vrouwen van zijn zonen gingen in de ark om te ontsnappen aan de wateren van de vloed.

Op een gegeven ogenblik bestudeerde de Canadese meetkundige H.S.M.Coxeter de gegevens van bovenstaande geschiedenis en deed een prachtige ontdekking. Er wordt beweerd dat Methusalem 969 jaar leefde. Terwijl men het volgende kan uitrekenen:

187 jaren + 182 jaren + 600 jaren = 969 jaren,

dat wil zeggen: Methusalem stierf toen de wateren van de vloed over de aarde kwamen. Het is duidelijk dat Methusalem niet meeging in de ark. Stierf hij een natuurlijke dood of vergat Noach zijn grootvader?

Verleiding en geschiedenis

We kunnen historische aspecten bestuderen door naar het verleden te kijken met de ogen van vandaag. Op een dag kunt in het lokaal een middeleeuws plein maken, of een Arabische markt. U kunt proberen de leerlingen ervan te overtuigen dat achter iedere wiskundige droom een wiskundige ervaring staat. En waarom zou u niet een gesprekje aanknopen met de 'oude jongens' zoals Thales of Boole of Cauchy of zelfs Pythagoras?

Een telefoongesprek met Pythagoras.
'Spreek ik met professor Pythagoras?
......
Hallo Pythagoras, ik bel hier vanuit de Nationale Wiskunde Dagen in Nederland.
......
Alles goed met u?
......
Ik bel u om u te vertellen dat we nog steeds uw stelling onderwijzen.
......
Welke stelling? Uw stelling natuurlijk: het kwadraat van de hypotenusa is gelijk aan de som van de kwadraten van de beide andere zijden in elke rechthoekige driehoek.
......

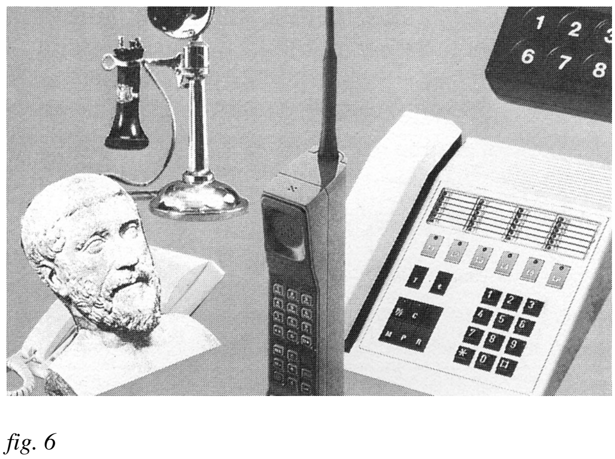


fig. 6

Pardon? Hoe kan ik nu weten dat u de resultaten nog niet heeft gepubliceerd?
....
Oh. Dat hebben anderen na u gedaan.
....
Nee, ik vertel u geen namen, ik wil de geschiedenis niet veranderen.
......
Goedendag!'

Verleiding vandaag de dag

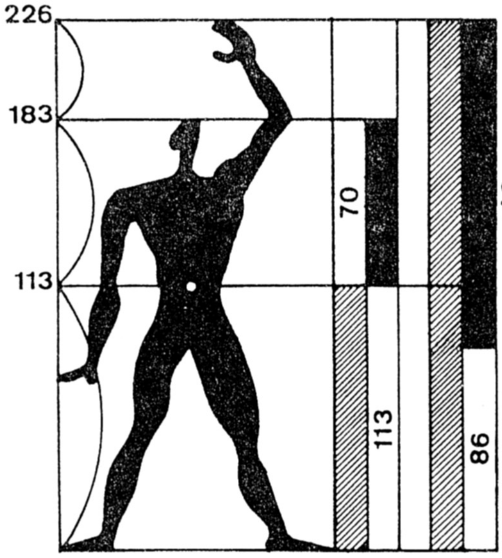


fig. 7

We moeten er rekening mee houden dat de tijden veranderen. De huidige generatie leerlingen is een andere dan onze eigen generatie. Ze herinneren zich niets van zaken die wij ons herinneren. En de hedendaagse problemen verdienen speciale aandacht.
Laten we aansluiten bij de actualiteit en minder vanuit boeken werken.

Tegenwoordig lees je dat de ideale lichaamsindex, berekend met G/h^2 (G is het gewicht in kilogrammen, h de hoogte in meters), moet liggen tussen 20 en 25. Een vroegere maat voor het ideale gewicht was $G = 100h - 100$. Als we de oude maat hanteren, weten we dan zeker of het met de nieuwe index ook in orde is? Neem aan dat $G = 110\,h - 100$. We willen nagaan of:

$$20 \leq \frac{(100h - 100)}{h^2} \leq 25$$

of, gelijkwaardig daarmee:

$$25\,h^2 - 100\,h + 100 \geq 0 \geq 20\,h^2 - 100\,h + 100$$

De eerste ongelijkheid aan de linkerkant is te vereenvoudigen tot $(h - 2)^2 \geq 0$, hetgeen voor iedere h waar is. We hoeven dus alleen maar de ongelijkheid $h^2 - 5h + 5 \leq 0$ te bekijken. Door de kwadratische vergelijking $h^2 - 5h + 5 = 0$ op te lossen, vinden we de oplossingen $2 + \phi = 3.618...$ en $2 + \phi' = 1.381...$, waarbij $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ het beroemde getal van de gulden snede is en $\phi' = 1 - \phi$. Omdat alle volwassenen lengtes hebben binnen het interval (1.381, 3.681) klopt de oude maat voor het ideale gewicht voor altijd (in alle omstandigheden!).

Verleiding en verrassing

We kunnen de suggestie wekken dat we deelnemer zijn aan de verrassing en ontdekking van nieuwe wiskundige feiten.

Op een tafel staat een gesloten doos en een liniaal. Wat is de handigste manier om de lengte van de lichaamsdiagonaal van de doos te meten?

Veel leerlingen (en bijna al hun wiskundedocenten!) geloven dat dit een probleem is dat je met Pythagoras moet aanpakken. Bijvoorbeeld door tenminste twee zijden van de doos te meten en de corresponderende berekeningen uit te voeren. Het is heel verrassend om die 2D aanpak te vergeten en onze 3D intuïtie te gebruiken. We kunnen de doos op tafel verschuiven zodat die precies aansluit naast de vroegere positie en dan kunnen we gewoon direct de diagonaal meten in de ontstane lege ruimte van de oude plaats van de doos.

Verleiding en poezie

We zouden de wiskunde ook emotioneel kunnen benaderen. We kunnen zingen, muziek maken en gedichten maken om leerlingen de kans te geven plezier aan wiskunde te beleven.

Brad Candle en Richard Candle (1992) maakten een muzikale 'rap' versie van het optellen van getallen. Laat dit horen in de klas.

In hun publicatie 'Giants' laten P. Martin en Marjorie Carss zien hoe de voetafdruk van een reus in de klas, vergezeld van briefjes aan de leerlingen, weet aan te zetten tot prachtig werk over getallen, meetkunde, verhoudingen en maten.

Een oud suggestief gedicht van Dr. W. Whewell (1794-1866):

Geen kracht op aard, zo sterk
Kan spannen een snaar zo fijn
In een horizontale lijn
Die absoluut recht zal zijn.

Een ander interessant gedicht van V. Lindsay:

Oude Euclides tekende een cirkel
Op het strand lang geleden

Van binnen en buiten tekende hij bogen
Ook van boven en beneden
....
Van ’s ochtends tot ’s middags
Een stil kind keek het aan
Want hij tekende van die mooie
Plaatjes van de maan.

Verleiding en toetsing

We kunnen onze vaste toetsprocedures openbreken en afstappen van het idee dat de ‘klassieke wiskunde-examens’ de enige manier zijn om een succesvol einde van een cursus vast te stellen. Observaties in de klas, open opdrachten, projecten, mondelinge vragen zijn middelen die ook gebruikt kunnen worden. Voorbeelden:

Twee personen A en B moeten een auto ‘verdelen’. A kent de waarde a toe aan de auto en B de waarde b (b>a). B krijgt de auto en betaalt het bedrag $\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}(b - a)$ *aan A. Is dit een eerlijke verdeling? (S. Garfunkel).*

Maak een radioverslag van de informatie die staat in een cartesische grafiek (bijvoorbeeld krommen die het verband aangeven tussen tijd en afstand voor verschillende atleten). (Shelle Centre).

In het prachtige werk van het Freudenthal instituut vindt u de beste toetsvoorbeelden die in de laatste tien jaar zijn gemaakt.

Wat u kunt doen als het plan niet werkt

Stel, u bent de meest opwindende wiskundedocent van de wereld. U bereidt uw lessen tot in de kleinste details voor. U probeert uw leerlingen te verleiden met indrukwekkende voorstellingen, door te zingen, door uitdagend gedrag, door geschiedenis en realistische problemen in de klas te halen, door muziek te maken. Maar dit alles slaat niet aan! U kunt niet meer terug. Nooit meer. U kunt iets anders proberen. Bijvoorbeeld door uw kleding aan te passen en met uw leerlingen op ‘vriendschappelijke basis’ verder te gaan. U kunt ze vertellen dat u niet meer kunt slapen als ze zakken voor het examen, dat u het gebeuren in de klas meeneemt naar huis en wat dat allemaal niet voor gevolgen heeft voor uw vrouw en kinderen, dat u uw eigen succes verwacht te vinden in hun succes en dat het ontvangen van een ansichtkaart van een leerling voor u het mooiste ogenblik van het jaar is.

Een stelling die niet verloren gaat

Ik heb geprobeerd u wat ideeën te geven en wat positieve voorstellen te doen voor een wiskundeonderwijs dat zowel voor u als voor de leerlingen opwindend kan zijn. Samengevat vindt u dit terug in de volgende stelling:

STELLING

Als wiskundedocent bent u dan en slechts dan een verleider als u tegelijkertijd van uw leerlingen en van de wiskunde kunt houden.

Dat is de kern van alles. Ons wiskundige werk kan niet worden losgemaakt van emoties en gevoelens. Ik gebruikte het woord ‘stelling’ voor mijn laatste bewering. Als u er een volledig bewijs van heeft, proficiat! Bent u nog niet overtuigd, dan hebt u nog een heel leven voor u om het te bewijzen.

Literatuur

Alsina, C. (1995). *Una matemática feliz y otras conferencias*. OMA, Buenos Aires.
Bolt, B. and D. Hobs (1989). *101 mathematical projects: a resource book*. Cambridge UP, Cambridge.
COMAP (1988). *For all Practical Purposes* (book and videos). Freeman/COMAP.
Freudenthal instituut, diverse projecten en publicaties, Utrecht.
Krantz, S.G. (1993). *How to teach mathematics: a personal perspective.* AMS, Providence.
Martin, P. and Marjorie Carss (1994). *Giants*. COMAP, Lexington.
Steen, L. et al. (1988). ‘Everybody Counts NRC’, *The Elementary Mathematician*. COMAP, Lexington.

Prof. C. Alsina is hoogleraar aan de Universiteit Politecnica de Catalunya, Barcelona.

Het succes van de compact disc (een Nederlandse uitvinding!) is te danken aan allerlei technische innovaties, maar ook aan een flinke portie wiskunde. In de openingslezing van de Nationale Wiskunde Dagen 1998 ging **Jack van Lint** in op de wiskundige principes die hierbij een rol spelen.

Wiskunde en de compact disc

0-1 Rijen met *d – k* beperking

Als aanloop beschouwen we een bekend probleem uit de combinatoriek. We hebben een rij van n kooien. In iedere kooi kan wel of niet een leeuw zitten. Als twee leeuwen in aangrenzende kooien zitten, irriteren ze elkaar en gaan brullen. Dat willen we voorkomen. Een configuratie van kooien waarbij het niet gebeurt dat twee leeuwen in naast elkaar gelegen kooien zitten, noemen we 'toegestaan'. We representeren zo'n configuratie door een rij 0'en en 1'en (van lengte n). Daarbij geeft een 1 een kooi met leeuw aan en een 0 een lege kooi. Laat $a(n)$ het aantal toegestane rijen van lengte n zijn (en $a(0) = 1$).

Voorbeeld: Voor $n = 3$ zijn 000, 100, 010, 001 en 101 toegestaan. Dus is $a(3) = 5$.

Stelling
Voor $n \geq 2$ geldt: $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$.

Bewijs
Een toegestane rij die eindigt op een 1 heeft 01 als laatste twee symbolen en daarvoor een toegestane rij van lengte $n - 2$. Er zijn $a(n-2)$ zulke rijen. Is het laatste symbool een 0, dan komt daarvoor een willekeurige toegestane rij van lengte $n - 1$ en daarvan zijn er $a(n-1)$.

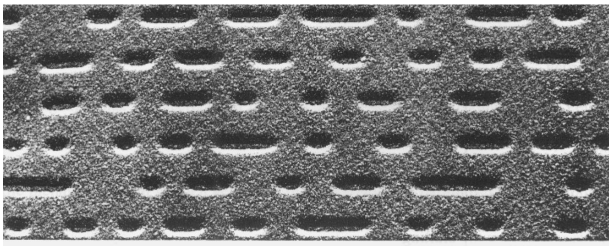
We zien dus dat de rij $a(n)$ de bekende rij van Fibonacci is, namelijk 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Definitie
Een 0-1 rij met $d - k$ beperking is een rij met de eigenschap dat tussen twee opvolgende 1'en ten minste d 0'en staan en er nergens meer dan k nullen achterelkaar staan. Ons eerste voorbeeld had $d = 1$ en $k = \infty$.

Opgave
Laat $a(n)$ het aantal 0-1 rijen van lengte n zijn met $d - k$ beperking waarin $d = 2$, $k = 3$. Toon aan dat voor $n \geq 6$ geldt:

$$a(n) = a(n-3) + a(n-4).$$

Aanwijzing: druk alles uit in $b(n)$: = het aantal zulke rijen beginnend met een 1.
Opmerking: Als we hier door kleine gevallen te analyseren een vermoeden proberen te krijgen, kunnen we op een dwaalspoor komen! Ga na dat $a(n) = n + 1$ voor $n \leq 6$ (maar verder niet).



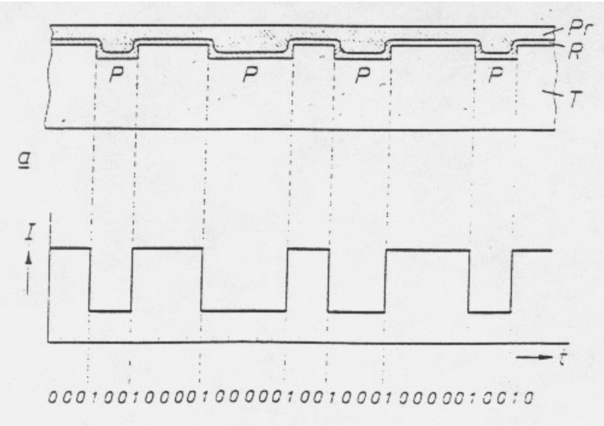
Sporen op een CD-plaat

Het spoor op een CD is een vijf kilometer lange spiraal met een spoorbreedte van 0,6 μm (en spoed 1,6 μm). Het spoor bestaat uit zogenaamde *putten* (diepte 0,12 μm) met daartussen zogenaamde *dammen*. De lengte van een put of dam is maximaal 3,3 μm en minimaal 0,9 μm. Een *bit* (dat is een 0 of een 1) op de plaat heeft een lengte van 0,3 μm. Bij het aflezen van de plaat (met een laserbundel) wordt een overgang van een put naar een dam (of omgekeerd) als een 1 gelezen en daarna 0'en tot de volgende overgang (= *flank*). Een put van lengte 1,8 μm wordt dus geïnterpreteerd als 100000, de kortste dam als 100, enzovoort.
In de terminologie van hierboven hebben we dus te maken met een rij met $d - k$ beperking met $d = 2$ en $k = 10$.

Waarom deze beperkingen? De lichtbundel wordt door de plaat teruggekaatst. Idealiter is de diepte van een put een kwart van de golflengte van het gebruikte licht waardoor invallend en teruggekaatst licht elkaar uitdempen en de put donker lijkt. Dit is niet helemaal het geval, maar er is duidelijk verschil tussen putten en dammen. De lichtvlek ziet dus steeds flanken passeren, maar de zaak zou in de war raken als die vlek twee flanken tegelijk zag. Dit heet *intersymbol interference*. Daarom mogen twee 1'en

Eerder verschenen in de *Nieuwe Wiskrant*, *18*(2) 1998

niet te dicht bij elkaar staan. De bit-klok, die de overgang van een bit naar de volgende bijhoudt, wordt steeds gelijkgezet als een flank wordt gepasseerd. Om te zorgen voor goede synchronisatie mag het na zo'n flank niet te lang duren voor de volgende flank langskomt. Daarvoor is $k = 10$ gekozen.



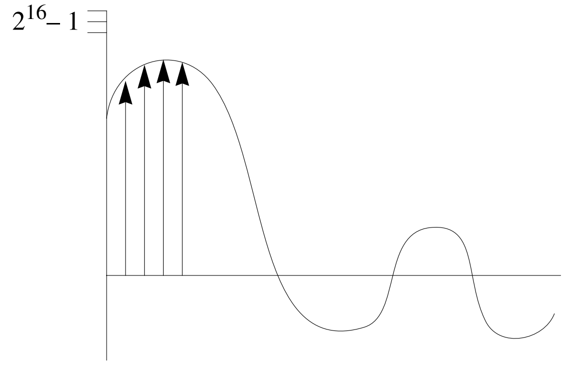
Codering van putten en dammen

We zullen zien dat bij de omzetting van muziek als analoog signaal naar een digitale representatie en de daarop volgende codering uiteindelijk een rij symbolen ontstaat (die we overigens *letters* van ons *alfabet* zullen noemen) waarin elk van die symbolen (= letters) een rij van acht 0'en en 1'en is, een *byte*. Zo is 11011101 één van de letters van dat alfabet, dat dus uit $2^8 = 256$ letters bestaat.
Deze letters kunnen we *niet* op de plaat vastleggen, omdat ze niet aan de $d - k$ beperking voldoen. In brochures over de CD vindt men vaak de kreet 'het EFM modulatie systeem' en dat staat heel duur. Het betekent 'Eight to Fourteen Modulation' en die kunnen we nu begrijpen. De 256 bytes moeten vertaald worden naar rijtjes die wel aan de beperkingen voldoen. Via een recurrente betrekking als we boven zagen (in voorbeeld en opgave), kunnen we uitrekenen dat de kleinste n waarvoor er ten minste 256 rijtjes zijn met 2 – 10 beperking $n = 14$ is. Er zijn dan 267 toegestane rijtjes, waarvan we er (gelukkig) elf niet hoeven te gebruiken. Er is namelijk een *koppelingsprobleem*! Een toegestaan rijtje eindigend op een 1 kan niet opgevolgd worden door een toegestaan rijtje dat met 1 of 01 begint, want dan staan tussen die twee 1'en niet ten minste twee 0'en. Als we de koppeling willen realiseren met een vast aantal bits, dan krijgen we problemen met rijtjes die op tien 0'en eindigen of beginnen. Daar moeten vier symbolen tussen om aan de eisen te voldoen. Gelukkig kunnen we de ergste boosdoeners weglaten en het blijkt dat we met drie koppelingsbits de rijtjes aan elkaar kunnen plakken. Daarbij hebben we nog zo veel vrijheid, dat we ervoor kunnen zorgen dat uiteindelijk op de CD op een redelijk 'lang' stuk spoor (zeg een halve mm) de totale lengte van de putten respectievelijk dammen ongeveer gelijk is.

We onthouden: *De CD-speler 'weet' dat voortdurend ongeveer de helft van het gereflecteerde licht helder is en de helft donker.*

Analoog-digitaal conversie

Een tweede technische term die men vaak tegenkomt bij het lezen over de CD is PCM (Pulse Code Modulation). Dit werkt als volgt. Een analoog signaal (zie figuur) wordt bemonsterd met een frequentie van 44100 keer per seconde (44,1 kHz).



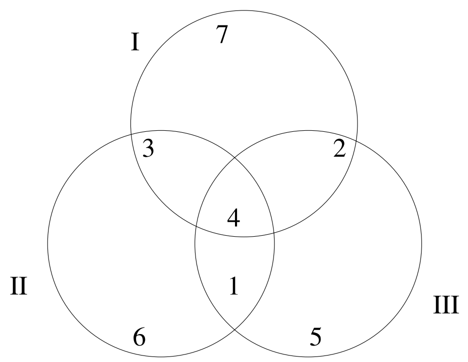
Deze frequentie is gekozen om aan te sluiten bij de televisie standaard (PAL) die ook voor videorecorders wordt gebruikt. Volgens de signaaltheorie heeft deze bemonsteringsfrequentie tot gevolg dat het op de plaat vastgelegde audiosignaal een bandbreedte van 20 kHz heeft (genoeg voor het menselijk oor).
De monsters worden gemeten op een schaal van 0 tot $2^{16} - 1$ en binair geschreven. Aangezien we met stereomuziek te maken hebben (twee kanalen), betekent dit dat één bemonstering 32 bits oplevert en dat zijn vier bytes (de symbolen waarmee de wiskunde wordt bedreven).
Bedenk dat bij het opnemen van muziek dus $1{,}4 \cdot 10^6$ bits/sec worden gelezen. Dit zijn zogenaamde *audiobits* (nog niet geschikt om op de CD te worden geschreven).

Foutenverbetering

Als er uiteindelijk op de CD geregistreerd wordt, komen er niet $5 \cdot 10^9$ audiobits, maar ongeveer drie keer zoveel zogenaamde *kanaalbits* op. Door deeltjes en luchtbellen in de plaat, onnauwkeurigheden ontstaan bij het persen, vuil op de plaat, vingerafdrukken en krassen ontstaan afleesfouten. Bij de terugvertaling naar audiobits kunnen er wel 500.000 fout zijn (dat wil zeggen dat een 1 als 0 wordt gelezen of omgekeerd). Als hier niets aan gedaan wordt, is de muziek niet om aan te horen. Hier komt de theorie van *foutenverbeterende* codes ons te hulp.

Voorbeeld
We geven eerst een heel eenvoudig voorbeeld van het toevoegen van *redundante symbolen* aan informatie om daarmee eventueel optredende fouten bij transmissie of opslag te kunnen verbeteren.
We beginnen met een alfabet van slechts twee symbolen,

namelijk 0 en 1. De informatie is een lange rij 0'en en 1'en (bits). We verdelen deze rij in blokken van vier bits en aan elk viertal voegen we drie extra symbolen (redundante bits) toe.
In onderstaand Venn-diagram zijn de zeven cirkeldelen genummerd van 1 tot en met 7. In de delen 1 tot en met 4 schrijven we de vier 'informatiebits' a_1, a_2, a_3, a_4. De drie redundante bits a_5, a_6, a_7 voldoen aan de regel: *iedere cirkel heeft een even aantal 1'en*.
Het zevental dat zo wordt gevormd, noemen we een *codewoord*. Stel nu dat in zo'n zevental één van de bits wordt veranderd in de andere mogelijkheid ($0 \to 1$ of $1 \to 0$). Van ieder van de drie cirkels kunnen we vaststellen of de gemaakte fout wel of niet in die cirkel zit. Daarmee is het cirkeldeel waarin de fout zit, gelokaliseerd en dan kunnen we de fout verbeteren omdat het alfabet maar twee symbolen heeft.



Dit is een voorbeeld van wat een één fout verbeterende code heet. We zeggen dat de code lengte 7 heeft en *informatiedichtheid* 4/7 (omdat vier van de zeven symbolen van een woord de informatie bevatten en de andere drie redundant zijn).
De code die we in dit voorbeeld hebben behandeld, heet de *Hamming code*. In de terminologie van coderingstheorie is het een [7,4]-code over $\mathbf{F}_2$.
Op de CD-plaat is de informatiedichtheid 24/32 (dus 3/4). Daar bestaat het alfabet niet uit bits maar uit bytes. Dat impliceert dat we niet alleen de plaatsen waar fouten optreden moeten opsporen, maar ook moeten bepalen welke symbolen er op die plaatsen wél moeten staan.

De codes van de CD berusten op het feit dat bytes kunnen worden opgevat als elementen van een eindig lichaam, te weten $\mathbf{F}_{2^8}$. Dit betekent dat we met de bytes de rekenkundige operaties optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen (behalve door 00000000) kunnen uitvoeren. Bij de decodering *berekent* een algoritme de *plaats* en de *waarde* van de fout. Als op de i-de plaats het symbool a is veranderd in b, dan zeggen we dat de waarde van de gemaakte fout $b - a$ is. Deze waarde wordt eerst berekend en dan van b afgetrokken. Zo vinden we a terug.
Om dit uit te leggen, voert veel te ver. Daarom geven we een voorbeeld van het soort code dat voor de CD wordt gebruikt, maar we maken het rekenwerk veel eenvoudiger door met een ander alfabet te werken. We kiezen hiervoor de getallen 0 tot en met 30 waarmee we *modulo 31* zullen rekenen. Met andere woorden: we gebruiken het lichaam $\mathbf{F}_{31}$. De letters *a* tot en met *z* van ons alfabet zullen we vertalen naar 1 tot en met 26 en we gebruiken de overgebleven getallen 0, 27 tot en met 30 voor de spatie en wat leestekens. Dan is het voorbeeld wat minder abstract.

Voorbeeld
We coderen gewone tekst met een [6,4]-code over $\mathbf{F}_{31}$. Dat wil dus zeggen dat we steeds vier letters of leestekens tegelijk nemen, deze omzetten in getallen uit de reeks 0 tot en met 30 en daaraan twee redundante getallen toevoegen volgens een nog te noemen voorschrift.
Laten we het woord CODE in een woord van onze code omzetten. Eerst worden de vier letters vertaald naar 3, 15, 4, 5. Dit zullen de letters a_2, a_3, a_4, a_5 zijn van het codewoord (a_0, a_1, …, a_5). Het wordt dus (*, *, 3, 15, 4, 5) waarvan de eerste twee symbolen moeten worden berekend. We kiezen als rekenregels:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \equiv 0 \pmod{31}$$
$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 \equiv 0 \pmod{31}$$

Uit de tweede regel vinden we $a_1 = 1$ en daarna uit de eerste regel $a_0 = 3$. Het codewoord voor CODE is dus (3, 1, 3, 15, 4, 5) of zo men wil CACODE.

Stel dat we het woord XGFOPT = (24, 7, 6, 15, 16, 20) zien staan. We zien direct dat hier een fout in zit (misschien wel meer). De som van de zes symbolen is namelijk 26 (mod 31) en niet 0. Als we geen redundante symbolen hadden, stond er (6, 15, 16, 20) = FOPT maar dit woord fopt ons niet! We weten al wat de waarde van de fout is, namelijk -5. Immers $26 + 5 \equiv 0 \pmod{31}$. Waar zit die fout? We nemen aan dat a_i is veranderd in $a_i + e$ waarbij we al weten dat $e = -5$. We vullen de getallen in in de tweede regel en vinden:

$$1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 16 + 5 \cdot 20 =$$
$$= (1 \cdot a_1 + \ldots + 5 \cdot a_5) + ie \equiv ie \equiv 11 \equiv -20 \pmod{31}$$

Nu kunnen we door deling van ie door e vinden dat $i = 4$. Dus moet op de vierde plaats niet 16 staan, maar 21 en het goede woord is FOUT (in code XGFOUT).
Ook in dit voorbeeld is sprake van een één fout verbeterende code. (Het moet duidelijk zijn dat we altijd één fout kunnen verbeteren.)

Bij de CD wordt twee keer achterelkaar gecodeerd (en later gedecodeerd) en wel met een [28,24]-code over $\mathbf{F}_{2^8}$ en daarna met een [32,28]-code. Elk van die codes kan twee fouten verbeteren, maar door een samenwerking kunnen ze meestal zeer veel meer. Het voert te ver om dit hier uit te leggen.

Opgave
Een [12,8]-code over $\mathbf{F}_{31}$ (dus dezelfde informatiedichtheid als in ons voorbeeld) wordt als volgt gedefinieerd. Een woord van acht letters (of leestekens) wordt eerst omgezet in acht getallen uit 0 tot en met 30. Dit worden de letters a_4 tot en met a_{11} van het codewoord $(a_0, a_1, \ldots, a_{11})$. De regels om a_0 tot en met a_3 te berekenen zijn:

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{11} \equiv 0 \pmod{31}$$
$$1^k \cdot a_1 + 2^k \cdot a_2 + \ldots + 11^k \cdot a_{11} \equiv 0 \pmod{31}$$
voor $k = 1, 2, 3$.

Nu zien we ergens het woord:

(25, 18, 3, 27, 2, 5, 18, 20, 5, 4, 5, 14).

Als we de vier redundante symbolen negeren, staat er BERTEDEN. Wat zou dit moeten zijn? Misschien BETREDEN? Kan ook BESTEDEN zijn of wellicht VERMEDEN (allemaal ten hoogste twee fouten). We hebben te maken met een code die *twee* fouten in een woord kan verbeteren.
Neem aan dat a_i is veranderd in $a_i + e$ en dat a_j is veranderd in $a_j + f$. Bereken dan i, j, e en f. Hiertoe moeten vier vergelijkingen opgesteld worden van het type $e + f \equiv \alpha_0 \pmod{31}$ en $i^k \cdot e + j^k \cdot f \equiv \alpha_k \pmod{31}$ met $k = 1, 2, 3$. Hieruit kan men een vierkantsvergelijking voor i vormen (waarvan j uiteraard de andere wortel is).

Opgave
(Voor de liefhebbers van waarschijnlijkheidsrekening.)
Een boek (200 bladzijden van elk ongeveer 3000 letters) wordt gedrukt met een gebrekkig procédé dat een kans van 0,001 heeft dat een verkeerde letter wordt gedrukt. Dit betekent dat we gemiddeld drie drukfouten per bladzijde in het boek kunnen verwachten! We besluiten om het boek te drukken met de [6,4]-code van ons voorbeeld, maar we willen het boek niet dikker maken. Dan moeten we dus niet 3000 letters op een bladzijde drukken, maar 4500 symbolen van de code. Tot onze schrik vertelt de drukker ons dat het gebruik van deze kleinere letter tot gevolg heeft dat de kans op een drukfout verdubbelt! Nu staan er dus gemiddeld negen per bladzijde. Maar ... het is een code die één fout in een zestal kan verbeteren. Dus zullen na het decoderen alleen die woorden waarin meer dan één fout zat nog steeds fout zijn.

1. Ga na dat we na decoderen slechts één fout per vier bladzijden kunnen verwachten.
2. Nu gebruiken we de [12,8]-code van de vorige opgave. Deze heeft ook informatiedichtheid 2/3. Dus weer verwachten we negen fouten per bladzijde vóór decoderen. Ga na dat we na decoderen *in het hele boek* slechts twee drukfouten verwachten.

N.B. Ook in allerlei praktische toepassingen van codering (zoals op de compact disc) moeten we er rekening mee houden dat het toevoegen van redundante symbolen vaak de kans op fouten verhoogt. Pas na decodering zien we de winst.

Het lezen van de plaat

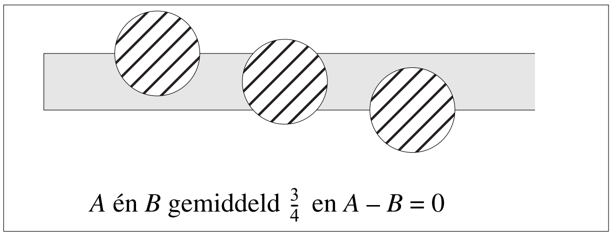
We hebben al gezien dat één bemonstering van het analoge signaal (de muziek) vier bytes oplevert. Uit zes bemonsteringen wordt een informatiewoord van 24 letters (= bytes) gemaakt. Via de twee coderingen die we eerder noemden, worden hieruit codewoorden van 32 letters gemaakt. Daar komt nog één letter bij die voor 'control and display' informatie zorgt. Na EFM en toevoeging van de koppelingsbits hebben we dan $33 \cdot 17$ kanaalbits. Daar worden nog 27 bits aan toegevoegd die voor woordsynchronisatie zorgen (met behulp van rijtjes die herkenbaar zijn omdat ze niet uit de codering kunnen ontstaan).

Bij het lezen (met een AlGaAs halfgeleider-laser) worden de overgangen van licht naar donker en omgekeerd (bij het teruggekaatste licht) gebruikt om de kanaalbits in de speler te registreren. Via een opgeslagen 'woordenboek' worden de codewoorden (nog met fouten erin) gereconstrueerd. Een algoritme verbetert de fouten. Daar waar de boel toch nog misgaat, worden *interpolatie* en *maskeringstechnieken* gebruikt. Ten slotte wordt de muziek weer in analoge vorm uitgezonden.
Bedenk dat al het rekenwerk zó snel moet gebeuren dat de luisteraar niet hoeft te wachten tot de muziek eindelijk begint!

Bij een grammofoon zit de naald in het spoor op de plaat. Bij de CD is er slechts licht dat wordt teruggekaatst. Dat brengt heel wat problemen met zich mee. De afstand tot de plaat wordt constant gehouden doordat een deel van het teruggekaatste licht wordt afgebogen naar een servomechanisme dat via de afstand van twee lichtvlekjes ziet of de laser te dicht bij de plaat zit of te ver ervandaan. Dit is allemaal fysica. Er zijn twee andere regelmechanismen die sterk afhangen van het gebruik van de $d - k$ begrensde rijen. Zoals gezegd, is een deel van het gereflecteerde licht helder en een deel donker. De lezer moet een *beslissingsniveau* hebben waarboven het 'helder' heet en waaronder 'donker'. Maar een vlek of vingerafdruk kan de lichtsterkte zo beïnvloeden dat alles donker wordt genoemd! Dit gebeurt niet, omdat de lezer weet dat de helft steeds licht moet zijn (ongeveer) en de helft donker. Dus kan het beslissingsniveau steeds worden bijgesteld om aan die voorwaarde te blijven voldoen (ondanks de vingerafdruk).
Van hetzelfde feit wordt gebruik gemaakt om iets nog verrassenders te regelen. De laservlek springt niet van een spoor naar een buurspoor dat toch slechts 1,6 μm ernaast ligt. Een van de systemen die hiervoor worden gebruikt, werkt als volgt.
In plaats van één lichtvlek zijn er drie: de middelste om het spoor af te lezen, één (A) iets daarvoor en iets naar rechts en één (B) iets daarachter en iets naar links. Als we 'licht' waarde 1 geven en 'donker' waarde 0, dan ziet de middelste vlek dus gemiddeld waarde 1/2. De andere twee lopen voor de helft over volledig reflecterend mate-

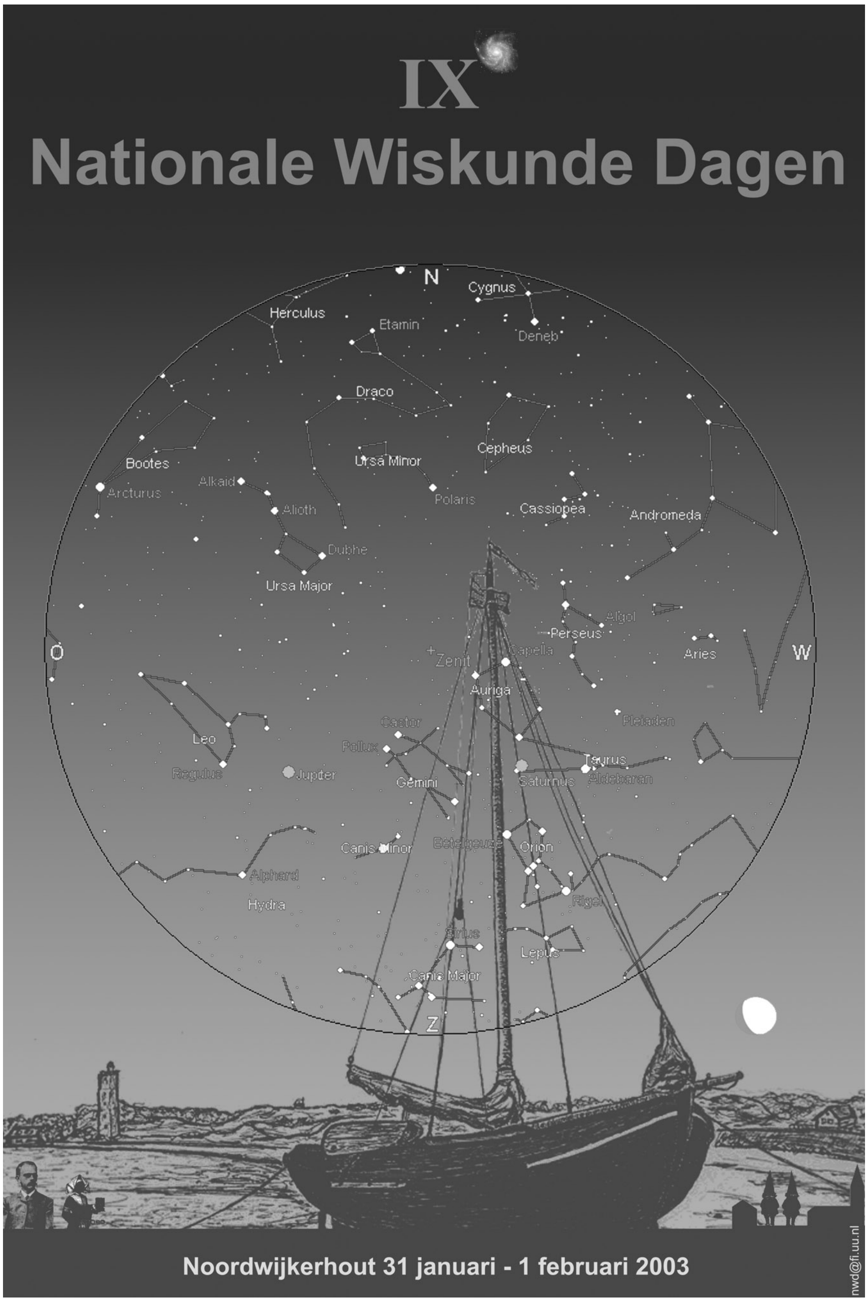
riaal en zien dus een gemiddelde sterkte van 3/4. Het mechanisme kijkt naar $A - B$. Dit moet waarde 0 hebben (gemiddeld). Wordt het positief, dan zit het drietal te ver naar rechts (en bij negatief, te ver naar links). Hiermee kan een servomechanisme voortdurend corrigeren en zo de middelste vlek op het te volgen spoor houden.

We hebben hiermee enkele van de technische hoogstandjes die het grote succes van de CD mogelijk maakten, beschreven. De lezer die meer details wil lezen, verwijzen we naar ‘Compact Disc Digital Audio’, *Philips Technisch Tijdschrift 40*(9), 1981/82.



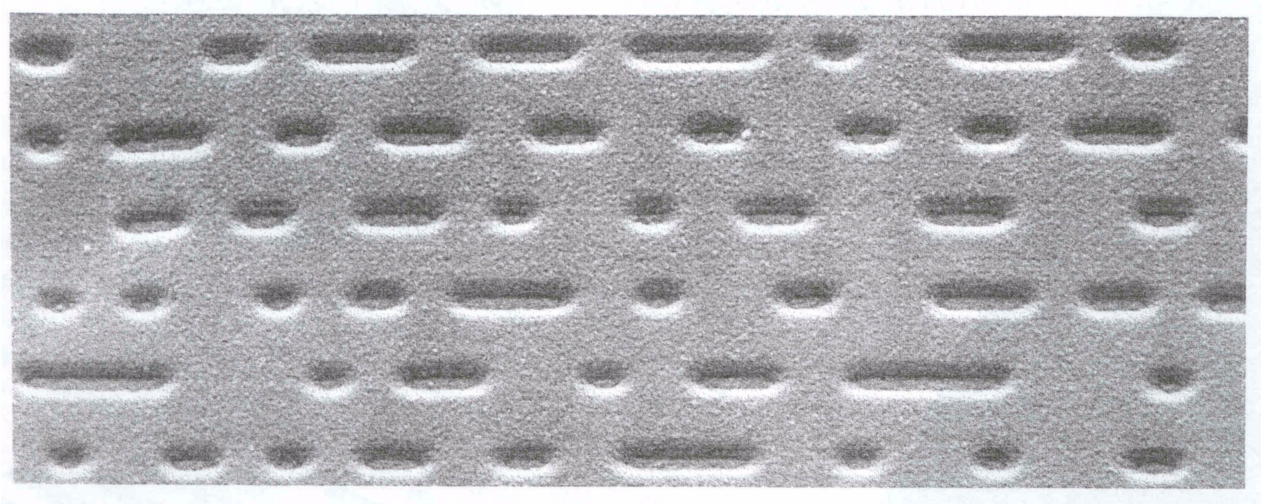
Spoor volgen

Prof. dr. J.H. van Lint, Stan Ackermans Instituut, TU Eindhoven



Werkblad: Fibonacci en de compact disc

Lesidee naar aanleiding van de voordracht van J. van Lint op de Nationale Wiskunde Dagen 1998.



De reeks getallen die ontstaat door een nieuw getal te maken uit de som van de twee voorafgaande, startend met 0 en 1, wordt de rij van Fibonacci genoemd. De rij is vernoemd naar de beroemde Italiaanse wetenschapper Leonardo van Pisa, die leefde van ca 1170 tot na 1240. Op internet kun je veel over deze rij getallen vinden.

1. De recurrente betrekking voor de rij van Fibonacci is: $F(n) = F(n\text{-}1) + F(n\text{-}2)$, met $F(0) = 0$ en $F(1) = 1$. Bereken de volgende vijf getallen uit de rij.

De rij van Fibonacci heeft veel verrassende toepassingen. Eén daarvan is de architectuur van compact discs.
Het spoor op een CD is 5 kilometer lang en bestaat uit putten en dammen (zie de figuur). Als de laserbundel de CD leest, dan interpreteert hij de overgang van een put naar een dam (of omgekeerd) als een 1, en daarna 0-en tot de volgende overgang. De lengte van een 0 is 0.3 μm (dat is heel kort).
Twee overgangen kunnen niet direct op elkaar volgen. Dan raakt de laserbundel in de war. Deze beperking heeft tot gevolg dat je niet twee 1-en na elkaar kunt lezen.
Om muziek op een CD te kunnen zetten, wordt die gecodeerd in groepjes 0-en en 1-en, met de extra eis dat er geen twee 1-en naast elkaar voor mogen komen. In vaktaal heet een enkel symbool een bit, en een groepje van 8 bits een byte.

2. Stel dat zo'n groepje uit een rijtje van acht 0-en en 1-en bestaat en dat die extra eis niet van toepassing is. Hoeveel verschillende rijtjes van acht symbolen (bytes) zijn er dan?

Door de extra eis wordt het tellen van het aantal mogelijke rijtjes gecompliceerder. Bij 3 bits bijvoorbeeld, is het rijtje 000 goed en het rijtje 110 fout.

3. Laat zien dat je met 1, 2, 3 en 4 bits achtereenvolgens 2, 3, 5 en 8 goede rijtjes kunt maken.

Deze getallen komen voor in de rij van Fibonacci, en je kunt je afvragen of daar een verklaring voor te vinden is. De volgende vragen helpen je bij deze verklaring.

4. Probeer te beredeneren waarom $a(5) = a(4) + a(3)$, als $a(5)$ het aantal goede rijtjes bij 5 bits is.
   TIP: een rijtje van 5 kun je splitsen in een rijtje van 4 + het laatste symbool.
   Dit laatste symbool is óf een 0, of een 1. Behandel die twee gevallen apart.

5. Geldt je redenering ook voor een rijtje van willekeurige lengte?

6. Hoeveel verschillende goede rijtjes zijn er mogelijk bij 10 bits?

7. Welke lengte moet een rijtje hebben, opdat er tenminste 256 verschillende mogelijkheden zijn met dat rijtje?

Het antwoord op de vorige vraag laat zien met hoeveel bits een rijtje van 8 (een byte) uitgebreid moet worden, als de eis van de 1-en van toepassing is!

Op internet is meer te vinden over dergelijke toepassingen van de rij van Fibonacci. Zo vonden we bijvoorbeeld dat deze rij ook een rol speelt bij de conversie van digitale informatie naar analoog geluid (via:
http://www.branta.connectfree.co.uk/fibonacci.htm
na zoeken naar 'fibonacci' + 'compact disc').

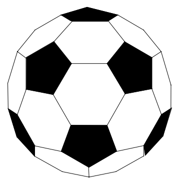
Vele vlakjes maken een bol. De architectuur die hierbij wordt gebruikt, berust op een mengeling van meetkunde en combinatoriek. Een rijk onderwerp dat helaas niet past in het reguliere wiskundeonderwijs, maar wel geknipt lijkt voor een zebra of praktische opdracht. **Martin Kindt** ontvouwt een aantal kanten in zijn artikel naar aanleiding van zijn lezing op de Nationale Wiskunde Dagen 1997.

Geodes en fullerenen

De toren van het KNMI in De Bilt was tot januari '97 getooid met een bolachtig veelvlak. Het skelet van de bol bestond, zoals op de foto duidelijk te zien is, geheel uit driehoeken. In een eerste opwelling zou je kunnen denken dat er om elk hoekpunt van het skelet *zes* driehoeken samenkomen, maar als je goed kijkt, zie je op de foto vier punten waaromheen *vijf* driehoekjes zijn gegroepeerd. Een gril van de ontwerper? Die lijkt dan wel besmettelijk, want ook bij andere getrianguleerde koepels worden groepjes van zes afgewisseld door groepjes van vijf, al is dat soms lastig te ontdekken.

Voormalige koepel KNMI, De Bilt. Foto: Dhr. van Dijk

Dit artikel gaat over de structuur van zulke 'geodetische koepels', kortweg 'geodes' genoemd. Met verrassend elementaire wiskunde kan een classificatie worden gevonden en dit geeft de knutselaar een middel in handen om fascinerende bouwsels te maken.
De structuur van geodes blijkt ten nauwste samen te hangen met molecuulstructuren die thans in de scheikunde worden bestudeerd, de 'fullerenen' (ook wel: 'buckeyballen), waarvan het eenvoudigste voorbeeld de voetbal is, gemaakt van vijf- en zeshoekige lapjes.



Aan de voetbal valt het een en ander te tellen. In bovenstaand plaatje is precies de helft van het aantal zwarte vlakjes zichtbaar, in totaal zijn er 12. Net zo kun je 'zien' dat er 20 witte zeshoekjes zijn. Om elk vijfhoekje ligt een krans van 5 zeshoekjes en elk zeshoekje grenst aan 3 vijfhoekjes. Proef op de som: $12 \times 5 = 20 \times 3$.
In totaal heeft het 'voetbalveelvlak' $12 + 20 = 32$ zijvlakjes. Al redenerend kun je vinden dat het voetbalveelvlak 90 ribben (12 vijfhoekjes hebben 60 ribben, 20 zeshoekjes hebben er 120, elke ribbe ligt in 2 vlakjes) en 60 hoekpunten (analoog verhaal, maar het kan hier ook simpeler) moet hebben. Terzijde: het geven en het netjes opschrijven van zo'n typisch combinatorische redenering lijkt me heel nuttig voor jonge HAVO/VWO-leerlingen.
Als je het aantal hoekpunten (60) en het aantal zijvlakken (32) bij elkaar optelt, kom je in de buurt van het aantal ribben. Het scheelt slechts 2. Dit is exemplarisch voor een van de mooiste formules uit de wiskunde (formule van Euler):

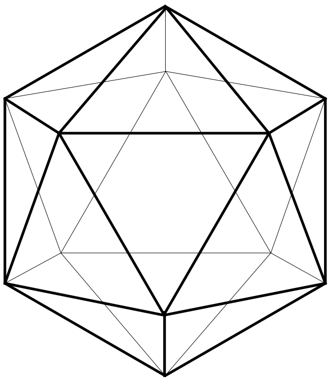
$$Z + H = R + 2$$

met Z, H, R voor respectievelijk de aantallen zijvlakken, hoekpunten en ribben.
Deze wet, geldig voor alle 'gezonde' veelvlakken, heeft het nooit tot verplichte schoolstof gebracht. Ik heb dat altijd betreurd. Mijn ervaring is dat leerlingen zich snel uitgedaagd voelen om de validiteit van de formule aan allerlei figuren te onderzoeken. Dit geeft bovendien aanleiding tot zinvolle algebra: test de formule van Euler voor de n-zijdige piramide, het n-zijdige prisma en eventuele combinaties hiervan (dubbelpiramide, toren met spits, ...). En: hoe veranderen Z, H, R als je van een veelvlak een puntje afzaagt? In het kader van Euler's formule past ook mooi een kennismaking met de vijf regelmatige (of Platonische) veelvlakken.

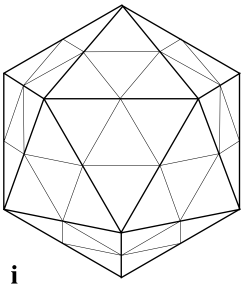
Eerder verschenen in de *Nieuwe Wiskrant*, *19*(1) 1999

Icosaëder in moederrol

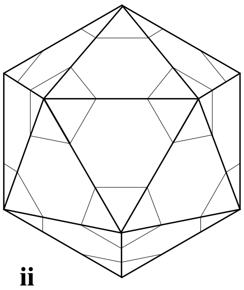
Van de vijf Platonische veelvlakken kies ik nu de allermooiste, het regelmatig twintigvlak of *icosaëder* ($Z = 20$, $H = 12$, $R = 30$) als startpunt van onderzoek naar de geode-structuur. Een vlak door het middelpunt van de omgeschreven bol van de icosaëder en een ribbe snijdt het boloppervlak volgens een ‘geodetisch boogje’ dat twee hoekpunten van het viervlak verbindt. Op deze wijze ontstaan er dus 30 boogjes, die als het ware een geraamte van de bol vormen.



Zo’n geraamte van (bol)driehoekjes noemt men een geodetische koepel of een geode. In het spraakgebruik veroorloven we ons enige soepelheid: ook het veelvlak waarvan de ribben de koorden zijn bij de geodetische boogjes wordt een geode genoemd.
Met de icosaëder als basis kunnen nu fijnere bolskeletten worden geconstrueerd:



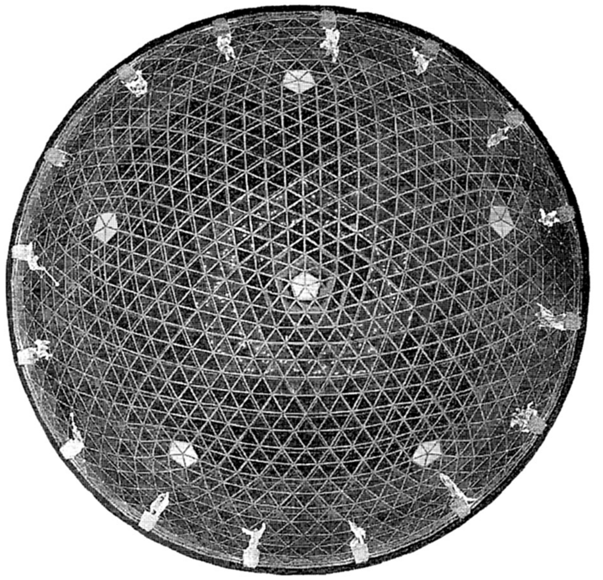
i



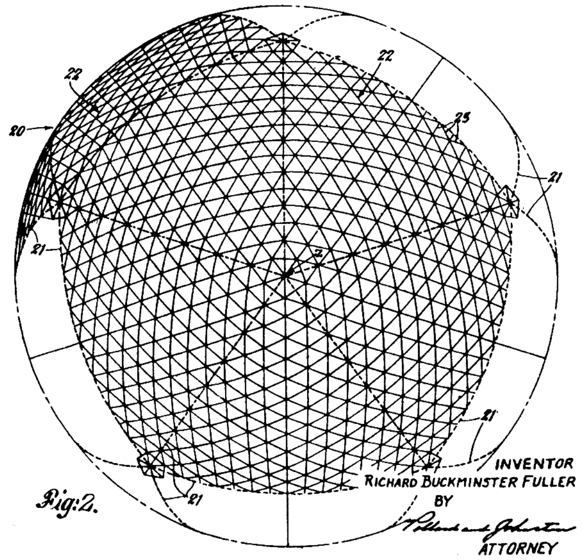
ii

In figuur **i** is elk zijvlak verdeeld in vier gelijkzijdige driehoeken. De 80 ($= 20 \times 4$) driehoekjes die je nu krijgt, kunnen vanuit het centrum worden geprojecteerd op de omgeschreven bol van de icosaëder en zo ontstaat een geode met 80 zijvlakken.
In figuur **ii** is elke ribbe in drie gelijke stukken verdeeld, waardoor 20 regelmatige zeshoeken en 12 regelmatige vijfhoeken ontstaan. Als je vervolgens de piramides op de vijfhoeken wegsnijdt, krijg je een half-regelmatig (of Archimedisch) veelvlak, dat je dan weer tot bol kunt buigen zodat de voetbal, een lid van de familie van ‘fullerenen’, ontstaat. Op de architectuur van fullerenen kom ik later terug, voorlopig richt ik me op de geodes.
Figuur **i** geeft gemakkelijk een idee om oneindig veel verschillende geodes te maken. Je verdeelt alle ribben van de icosaëder in n gelijke stukken en na projectie op de bol krijg je dan een geode met $20 \times n^2$ vlakjes.

Een mooi voorbeeld van dit type geode is de koepel van het Dali-museum in Figueras.

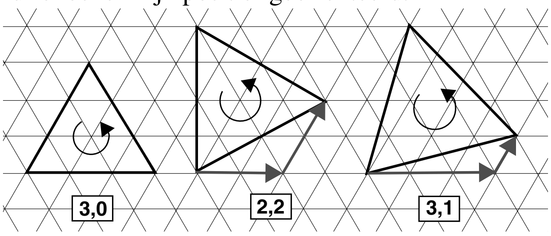


De vijfhoekjes markeren de hoekpunten van het moedertwintigvlak. Enig telwerk leert dat $n = 12$, dus het geraamte van de koepel is een deel van een 2880-vlak.
Andere beroemde voorbeelden van dit type zijn: de Expohal in Montreal ($n = 16$) en La Géode in Parijs ($n = 18$).
Als pionier op het gebied van geodetische koepels geldt de architect Richard Buckminster Fuller, wiens eerste ontwerp hieronder is afgebeeld.



Het driehoekjespatroon ligt ten opzichte van een zijvlak van het moedertwintigvlak nu gedraaid, en wel over een hoek van 30°. Merk op dat er per ribbe van het twintigvlak nu 16 ‘grensdriehoekjes’ zijn. Het is geen heksenwerk om uit te zoeken dat de oppervlakte van de grote driehoek 192 ($= 3 \times 64$) kleine driehoekjes bedraagt. Na projectie op de omgeschreven bol verdwijnt de knik uit de grensdriehoekjes en ontstaat er een geode met 3840 driehoekjes.

Vanuit een twintigvlak kun je dus op twee manieren tot een geode komen. Maar daarmee is de kous niet af. Er zijn ook oneindig veel asymmetrische manieren om een isometrisch rooster op een twintigvlak te plakken.
Zo'n manier kan worden gekarakteriseerd door een paar gehele getallen, zeg x en y. Het plaatje hieronder laat zien hoe dat werkt voor de paren $(x, y) = (3, 0)$, $(2, 2)$ en $(3, 1)$. De driehoeken zijn positief georiënteerd.



Het eerste geval ($y = 0$) correspondeert met een koepel zoals die van Dali, het tweede geval ($x = y$) met eentje zoals in het ontwerp van Buckminster Fuller.
De figuur hiernaast toont de uitslag van een icosaëder getekend op een isometrische ondergrond, op basis van het paar $(x, y) = (1, 2)$. Als je nu het twintigvlak in elkaar zet, merk je dat stukjes van driehoeken op de ribben elkaar precies aanvullen (gevolg van rotatiesymmetrie!) en zo kun je begrijpen dat bij het 'opbollen' weer complete driehoekjes ontstaan. Omdat de oppervlakte van één grijze driehoek gelijk is aan 7 driehoekscellen, krijg je zo een geode met 140 driehoekjes. Dit blijkt juist de structuur te zijn van de voormalige koepel in De Bilt!
Het getal 7 is te vinden via knippen en plakken, maar deze strategie is zeer onhandig als x en y een stuk groter zijn. Met hulp van de cosinusregel kun je de zijde (= r) van een in het rooster geplaatste (x, y)-driehoek gemakkelijk uitdrukken in x en y. Als x en y beide positief (of beide negatief) zijn, geldt immers:

$$r^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120°$$
$$\text{ofwel} \quad r^2 = x^2 + xy + y^2$$

Eenvoudig is na te gaan dat als x en y verschillend teken hebben, dezelfde betrekking wordt gevonden.
De oppervlakte van een (x, y)-driehoek uitgedrukt in roostercellen is dus gelijk aan het gehele getal r^2.
Gevolg: voor de geode gebouwd op de (x, y)-icosaëder, voortaan genaamd de 'geode $[x, y]$', geldt:

$$Z = 20(x^2 + xy + y^2)$$

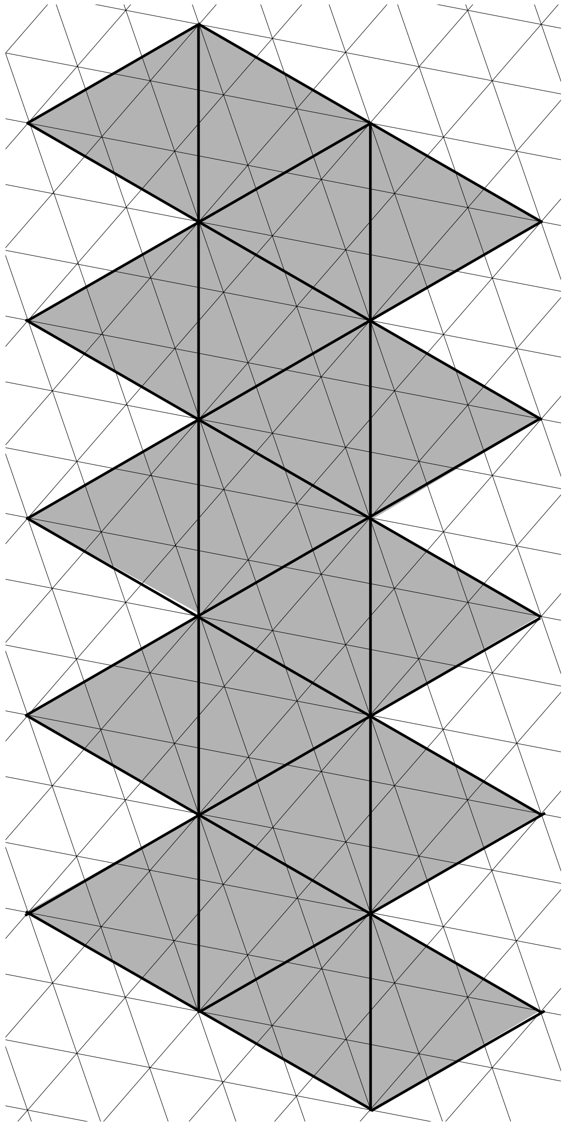
Uit $Z \times 3 = R \times 2$, volgt direct:

$$R = 30(x^2 + xy + y^2)$$

Omdat er 12 hoekpunten zijn (die van de icosaëder) waarin 5 driehoekjes samenkomen, terwijl dat aantal in de ander hoekpunten 6 is, geldt:

$$Z \times 3 = 12 \times 5 + (H - 12) \times 6$$
$$\text{ofwel}$$
$$H = \tfrac{1}{2}Z + 2 = 10(x^2 + xy + y^2) + 2$$

En dit alles past weer mooi in de formule van Euler!



Met behulp van de zojuist gevonden formules kan nu een geode-tabel met aantallen zijvlakken worden opgesteld:

x	y	r^2	Z
1	0	1	20
1	1	3	60
2	0	4	80
2	1	7	140
2	2	12	240
3	0	9	180
3	1	13	260
3	2	19	380
3	3	27	540

Hoe ordelijk zijn geodes?

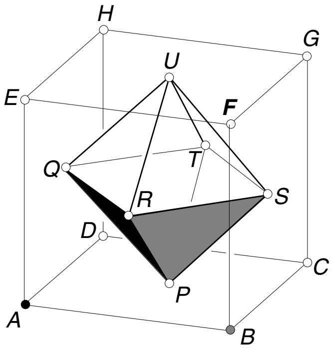
Het aantal driehoekjes dat samenkomt in een hoekpunt van een veelvlak begrensd door driehoekjes, noemen we de *orde* van dat hoekpunt. Het aantal hoekpunten van de orde n ($n \geq 3$) noteer ik verder als H_n.
Voor 'homogene driehoeksstructuren' (alle punten van dezelfde orde H_n) geldt: $Z \times 3 = H_n \times n$.
In combinatie met $Z \times 3 = R \times 2$ en $Z + H_n = R + 2$, leidt dit na wat algebra tot $(6 - n)H_n = 12$.
$6 - n$ is alleen deelbaar op 12 voor $n = 3, 4, 5$ en die waarden corresponderen juist met drie Platonische veelvlakken: tetraëder, octaëder en icosaëder.
Veel ingewikkelder wordt het voor heterogene driehoeksstructuren. Uit elk veelvlak met omgeschreven bol kun je via triangulatie van de zijvlakken een geode produceren: zo kom je tot een bonte verzameling. Het leven wordt een stuk overzichtelijker indien je als extra eis stelt dat een geode slechts punten van de orde 5 en 6 mag hebben!
Er geldt dan: $H = H_5 + H_6$ en $2R = 3Z = 5H_5 + 6H_6$.
Dit combineren we nu met $H + Z = R + 2$ of makkelijker met $6H + 6Z = 6R + 12$.
Er komt dan:

$$6H_5 + 6H_6 + 10H_5 + 12H_6 = 15H_5 + 18H_6 + 2$$

Verrassing! De term met H_6 rolt eruit en er volgt $H_5 = 12$.
Er zijn onherroepelijk precies 12 punten van de orde 5. Als je die 12 punten gelijkmatig over het oppervlak van de geode wilt verdelen, zit er niets anders op dan uit te gaan van de oervorm: de geode [1, 0] ofwel de icosaëder.

Dualiteit

Drie *punten* niet op één lijn, bepalen één *vlak* en drie *vlakken* niet door één lijn, bepalen één *punt* (dat punt kan eventueel 'oneigenlijk' zijn).
Dit is een voorbeeld van wat in de projectieve ruimtemeetkunde het *dualiteitsbeginsel* wordt genoemd.
Als een uitspraak over punten, lijnen en vlakken uitsluitend betrekking heeft op *incidentie* (dat wil zeggen op relaties zoals 'ligt op', 'gaat door', enzovoort), dan kun je in die uitspraak systematisch de woorden *punt* en *vlak* verwisselen en je krijgt weer een geldige uitspraak.
Volgens het principe van de punt-vlak-verwisseling kun je bij elk veelvlak een zogenaamd duaal veelvlak maken.



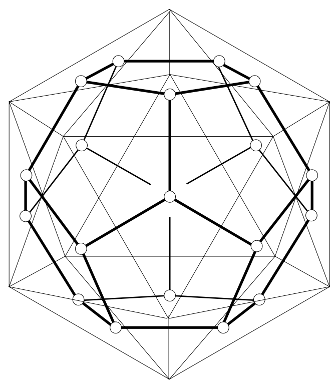
duale kubus = achtvlak

Zo is het achtvlak (octaëder) duaal met de kubus.
De correspondentie:

$$ABCD \to P,\ ADHE \to Q,\ ...$$
$$A \to PQR,\ B \to PRS,\ ....$$
$$AD \to PQ,\ AE \to QR,\ ...$$

noem ik een *dualiteit.*
Zo'n dualiteit koppelt *hoekpunten* aan *zijvlakken*, *ribben* aan *ribben*, *zijvlakken* aan *hoekpunten* en is bovendien *incidentietrouw.*
Zo wordt in het voorbeeld van kubus en octaëder de snijribbe AD van de zijvlakken $ABCD$ en $ADHE$ gekoppeld aan de verbindingsribbe van de met die vlakken corresponderende hoekpunten P en Q.
Snijding (van vlakken) en *verbinding* (van punten) zijn blijkbaar duale begrippen!

Een ander stel duale veelvlakken is: dodecaëder (regelmatig twaalfvlak) en icosaëder. Als je de zwaartepunten van de twintig zijvlakken van de icosaëder als hoekpunten neemt en juist die hoekpunten verbindt die in 'buurvlakken' liggen, ontstaat het regelmatige twaalfvlak.
Het is een leuk spel om bij veelvlakken het duale veelvlak te vinden.



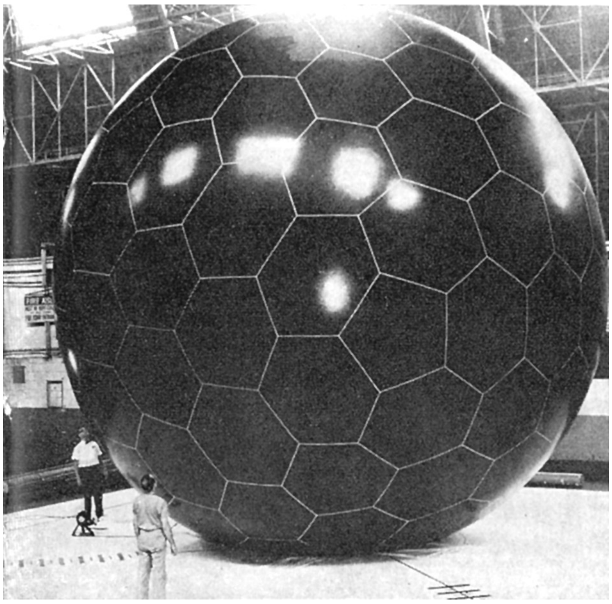
duaal twintigvlak = twaalfvlak

Soms vinden we bij het dualiseren dezelfde vorm terug (piramide!) en men spreekt dan van een zelfduale figuur.
En als je met een duale blik naar de formule van Euler kijkt, begrijp je waarom die symmetrisch in H en Z is.

Fullerenen

Het duale veelvlak van een 'ordelijke geode' bestaat uit vijfhoekjes en zeshoekjes. De orde van een hoekpunt van de geode bepaalt of dat punt met een vijf- dan wel een zeshoek correspondeert.
Een duale geode heet (naar Richard Buckminster Fuller) *buckybal, buckminsterfullereen* of kort *fullereen*.
Omdat een geode precies 12 punten van de orde 5 heeft, moet een fullereen altijd precies 12 vijfhoekige zijvlakjes hebben!
De fullerenen kunnen, als duale geodes, ook worden gekarakteriseerd door paren natuurlijke getallen.
De (oer-) fullereen [1, 0] is de dodecaëder en het fullereen [1, 1] is de bekende voetbal.

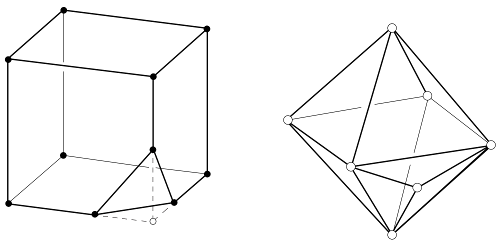
Onderstaande foto, afkomstig uit *Pythagoras 6*(6), toont de fullereen [4, 0]. Via de formules voor de geode wordt duidelijk dat de bol uit 162 vlakjes is gemaakt, waarvan 12 vijfhoeken. Verder zijn er 320 hoekpunten en 480 ribben.



De voetbalfullereen [1, 1] staat model voor de molecuulstructuur van koolstof 60 (C_{60}), een in 1985 gevonden stof met bijzondere eigenschappen: veerkrachtig en sterker dan diamant. In 1996 ontvingen Curl, Kroto en Smalley de Nobelprijs voor scheikunde voor die ontdekking.
Inmiddels droomt men van grotere molecuulstructuren als C_{240}, C_{540}, C_{960} die corresponderen met de fullerenen [2, 2], [3, 3] en [4, 4]. Er bestaan ook minder regelmatige koolstofverbindingen, C_{70} bijvoorbeeld, waarbij een aantal extra zeshoeken zijn tussengevoegd in de voetbal.
Uit de dualiteit met de geode volgt dat het aantal hoekpunten van een fullereen type [x, y] gelijk moet zijn aan $20(x^2 + xy + y^2)$.

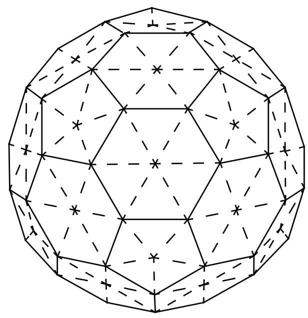
Afknotting en uitstulping

Uit een veelvlak kun je een nieuw veelvlak maken door een piramidetje af te knotten bij één, of meer, hoekpunten. De duale actie hiervan is uitstulpen: je kunt het duale veelvlak uitbouwen met een piramide op een (of meer) zijvlakken.



afknotten ***uitstulpen***

De figuur toont die transformaties toegepast op duale veelvlakken. De afgeknotte kubus heeft 10 hoekpunten, 15 ribben en 7 zijvlakken; het uitgestulpte achtvlak, duaal met de afgeknotte kubus, heeft 7 hoekpunten, 15 ribben en 10 zijvlakken.
Al eerder zagen we dat complete afknotting van het twintigvlak de voetbal geeft, dus uit de geode [1, 0] ontstaat de fullereen [1, 1].
Dualiter ontstaat uit het twaalfvlak door complete uitstulping de geode [1, 1].
Er is dus, behalve de dualiteit, een tweede manier om een geode om te toveren tot fullereen of vice versa, namelijk complete afknotting of uitstulping.
Als je bovenstaande figuur nauwkeurig bekijkt, dan kun je zien dat door uitstulping van de voetbalfullereen [1, 1] de geode [3, 0] ontstaat.



Bij uitstulping (afknotting) van een fullereen (geode) veranderen de parameters. Allicht, want het aantal ribben neemt flink toe. Dat dit aantal in feite met drie wordt vermenigvuldigd, is eenvoudig aan de hand van een uitgestulpt fullereen te beredeneren.
Voor de fullereen geldt namelijk:

$$12 \times 5 + (Z - 12) \times 6 \; = \; R \times 2$$

In het linkerlid staat precies het aantal ribben dat door uitstulping wordt toegevoegd! Het nieuwe aantal ribben is dus $R + 2R = 3R$.

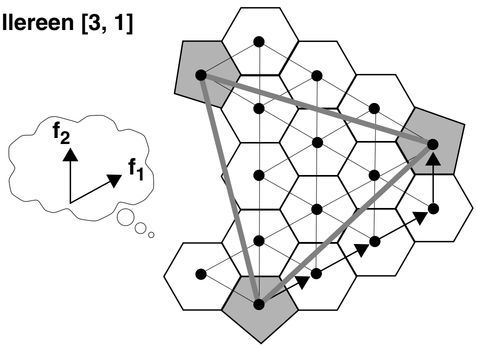
De vragen die bij mij rezen, waren:
- als de fullereen/geode [x, y] uitgestulpt/afgeknot wordt tot de geode/fullereen [X, Y], welk verband bestaat er dan tussen [x, y] en [X, Y]?
- welke geodes/fullerenen kunnen worden verkregen door uitstulping/afknotting?

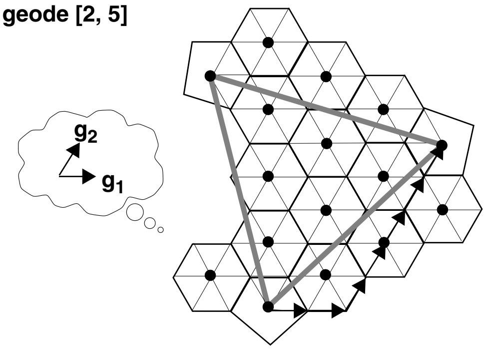
Uit bovenstaande redenering over de aantallen ribben volgt in elk geval dat moet gelden:

$$X^2 + XY + Y^2 \; = \; 3(x^2 + xy + y^2)$$

Als je even uitgaat van een lineair verband tussen de paren [x, y] en [X, Y] kun je na wat algebraïsch puzzelwerk vermoeden dat: X en Y in een of andere volgorde gelijk moeten zijn aan $x + 2y$ en $x - y$.
Dit vermoeden klopt inderdaad met de meest eenvoudige voorbeelden: icosaëder → voetbal → geode [3, 0].

Neem nu bijvoorbeeld fullereen [3, 1]. Hieronder zie je daar een platgewalst en vertekend stukje van. Uitstulpen heeft een fijnere triangulatie tot gevolg en volgens de formule zou dan een stukje van de geode [5, 2] of zijn spiegelbeeld [2, 5] zichtbaar moeten worden. Het laatste blijkt het geval te zijn.





Voor degenen die hun lineaire algebra niet vergeten zijn: er is duidelijk sprake van een basistransformatie. De twee netten van driehoekjes (die voor het gemak gelijkzijdig getekend zijn, maar dat op de bol beslist niet zijn) worden opgespannen door de bases $\{\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}\}$ en $\{\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}\}$.
Als je de netten over elkaar legt, volgt eenvoudig:

$$\mathbf{f_1} = \mathbf{g_1} + \mathbf{g_2} \text{ en } \mathbf{f_2} = -\mathbf{g_1} + 2\mathbf{g_2}$$

Met als gevolg:

$$\begin{aligned} &x\mathbf{f_1} + y\mathbf{f_2} = \\ &x(\mathbf{g_1} + \mathbf{g_2}) + y(-\mathbf{g_1} + 2\mathbf{g_2}) = \\ &(x - y)\mathbf{g_1} + (x + 2y)\mathbf{g_2} \end{aligned}$$

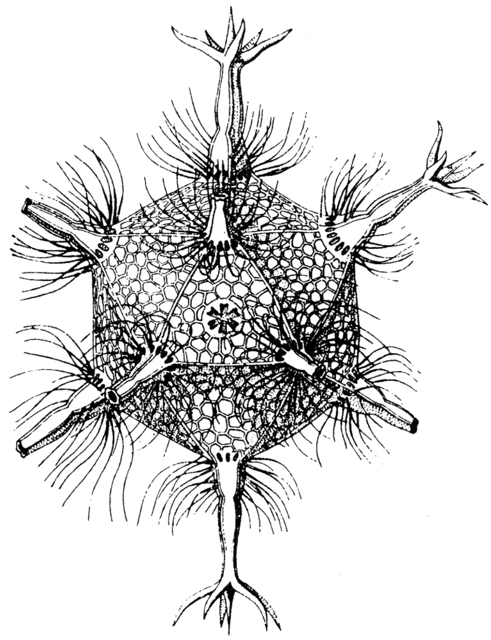
waarmee het vermoeden is aangetoond.

Het blijkt gemakkelijk dat je door uitstulping/afknotting precies die geodes/fullerenen $[X, Y]$ krijgt met de eigenschap dat $X^2 + XY + Y^2$ een drievoud is. Dat komt erop neer dat X en Y dezelfde rest moeten hebben bij deling door 3. Met een beetje rekenen modulo 3 is dat snel duidelijk.

Geodes en fullerenen geven op natuurlijke wijze aanleiding tot combinatoriek en algebra. Een geheel ander aspect is de metrische kwestie: hoe zit het met de lengte van de ribben? Bij het regelmatige twintigvlak en twaalfvlak zijn ze even lang, maar bij alle andere geodes en fullerenen kan dat onmogelijk het geval zijn! Om daadwerkelijk een geode te bouwen, heb je meer nodig dan inzicht in de topologische structuur.

Hoe maak je een goede geode?

Met limonaderietjes en pijpenragers kun je geodes bouwen. Bij een beetje geode zijn er echter al gauw aardig wat verschillende lengten nodig en dat vraagt veel rekenwerk. In het boek *Polyhedra, a visual approach* (4b) zijn in een appendix lijsten van 'koorde-factoren' opgenomen. De getallen zijn gerelateerd aan de straal van de omgeschreven bol van het moedertwintigvlak. Daarbij heeft de auteur zich beperkt tot de types $[x, 0]$ met $x = 1, ..., 9$ en $[x, x]$ met $x = 1, ..., 4$. Het gaat dan om de ribben van een echt veelvlak. Ook voor bolveelvlakken (of moet het 'veelbolvlakken' zijn?) zijn er nog enige gegevens opgenomen.
Als je voor de verschillende lengten verschillende kleuren neemt (en voor dezelfde lengte dezelfde kleur), krijg je fraai ogende modellen.
Als je bijvoorbeeld de geode [1, 1] wilt maken, dan kan dat bijvoorbeeld met 30 blauwe staafjes van 7.14 cm en 60 rode van 6.41 cm. De blauwe staafjes vormen dan een dodecaëder die de geode door uitstulping heeft voortgebracht. Als je dit bouwwerk zou willen maken met Zometool (zeer fraai, maar kostbaar materiaal voor het maken van veelvlakken door middel van staafjes), dan zit je met het probleem dat je geen invloed hebt op de lengten.
Wel kun je (met de zojuist genoemde kleuren) een veelvlak met 60 driehoeken maken, maar die blijken in tweetallen in één vlak te liggen, zodat je eigenlijk een 30-vlak in handen hebt. Dat is trouwens wel een hele mooie: het zogenaamde ruiten-dertigvlak. De blauwe staafjes zijn dan diagonalen van de rode ruiten, maar die kun je beter niet weghalen (de driehoeken garanderen stevigheid!).



Afbeelding van micro-organisme uit Haeckel's 'Monograph of the Challenger Radiolaria'. Bron: D'Arcy Thompson, On Growth and Form

Opmerkingen over literatuur

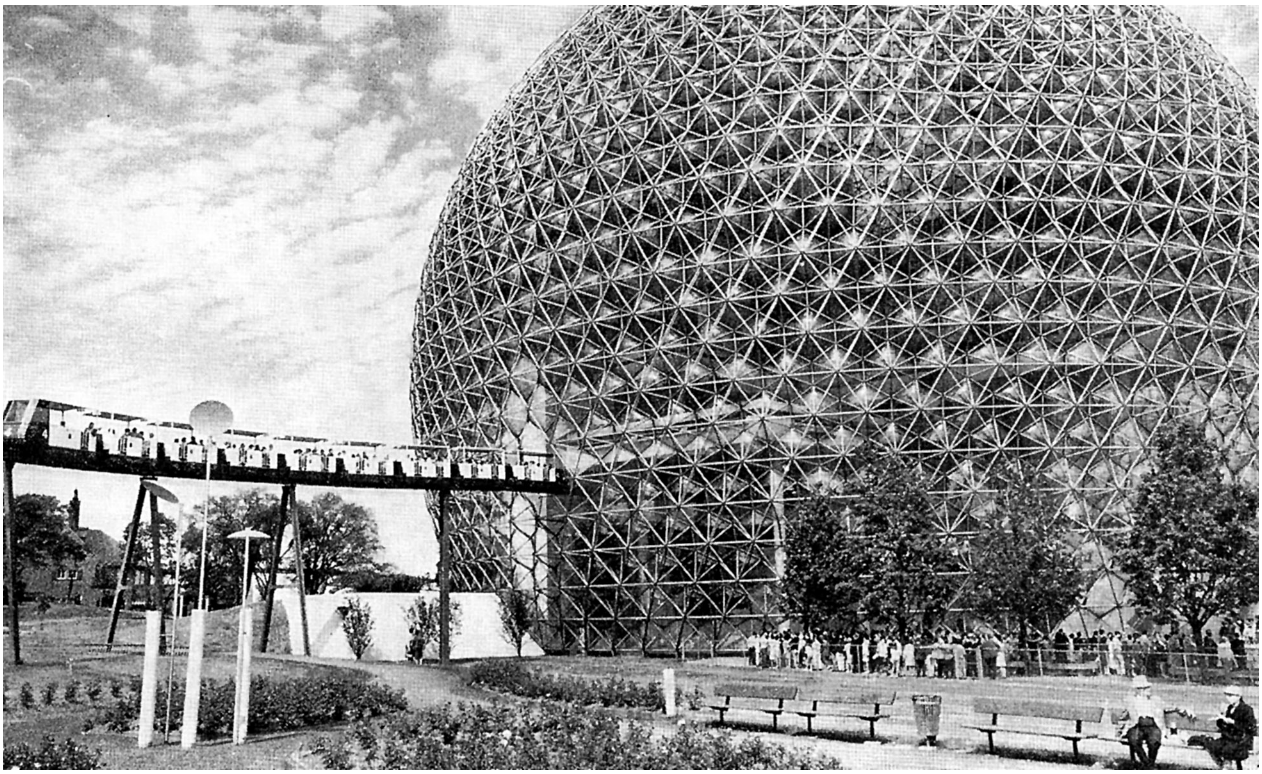
In Ian Stewart's *Game, Set and Math* is een zeer geestig hoofdstuk (getiteld 'Build your own virus') gewijd aan geodes en fullerenen. Een wiskundige bezoekt een arts die zich afvraagt of wiskunde ooit iets voor geneeskunde heeft gedaan. Het gesprek komt, ook al vanwege het ziektebeeld van de wiskundige, al gauw terecht op virussen die de geodestructuur blijken te hebben. Een aantal voorbeelden passeert de revue, waaronder het adenovirus type 12 die volgens de mathematicus de structuur van de geode [5, 0] heeft. Naast de macro-architectuur (de geweldige koepels en paviljoens die overal ter wereld als geodes of fullerenen gebouwd zijn) bestaat er dus in de natuur een gelijkvormige micro-architectuur!
In dit verband is het ook aardig om in het klassieke *On growth and form* te bladeren waarin fraaie afbeeldingen van allerlei micro-organismen staan.
Een werkelijk prachtig geïllustreerd en zeer recente uitgave is *Your private sky, R. Buckminster Fuller.* Het behelst een biografie van de architect en talloze voorbeelden van zijn curieuze ontwerpen. De geodes (ze worden ook geoscopen genoemd) zijn zeer prominent aanwezig.
Het reeds genoemde *Polyhedra, a visual approach* is deel van een serie waarin ook de titels *Geodesic Math and how to use it* en *Introduction to Tensegrity* voorkomen. Het zijn praktisch georiënteerde boekjes waarin de meetkunde heel concreet en constructiegericht ter sprake komt.
Ook op het web is veel informatie te vinden over Buckminster Fuller en geodesic domes.

Een belangrijke inspiratiebron voor dit artikel was het eerder genoemde hoofdstuk van Ian Stewart. Op de Nationale Wiskundedagen heb ik twee keer een voordracht over dit onderwerp mogen houden en daartoe heb ik met veel plezier een aantal modellen gebouwd. Dat gaf mij meer inzicht in de wiskundige structuur en de aansporing zelf wat onderzoek te doen. Zo ontdekte ik de transformatieformules bij afknotting en uitstulping.
Ik ben ervan overtuigd dat het onderwerp ook HAVO/VWO-leerlingen tot onderzoek kan uitdagen. Dat hoeft natuurlijk niet zo ver te gaan als dit artikel. Een sterke troef is het aspect van de handvaardigheid, of zo men wil, techniek; want een werkstuk over dit onderwerp zal toch moeten uitmonden in een fraai bouwwerk.

Martin Kindt, Freudenthal Instituut

Literatuur

Stewart, I. (1991). *Game Set and Math*, Penguin.
Thompson, Sir D'Arcy W. (1961). *On Growth and Form.* Cambridge University Press.
Krausse J. en C. Liechtenstein (1999). *Your private sky, R. Buckminster Fuller.* Baden/Switzerland: Lars Muller Publishers.
Kenner, H. (1976). *Geodesic Math and how to use it.* Berkeley: University of California Press
Pugh A. (1976). *Polyhedra, a visual approach.* Berkeley: University of California Press
Pugh A. (1976). *Introduction to Tensegrity.* Berkeley: University of California Press



De bol van Montreal. Bron: Pythagoras, wiskundetijdschrift voor jongeren 12(4), 1972/1973.

Is Wiskundige Kennis van Enig Belang voor Inzicht in Onze Cultuur? Dat was de titel van de plenaire voordracht die **Professor Doorman** hield op de Nationale Wiskunde Dagen 1999. In dit filosofisch getinte betoog onder meer aandacht voor de verwantschap tussen wiskunde en muziek.

Wiskunde en culturele vorming

'Alfa-getekenden'

In een muziekprogramma voor de radio werd mij onlangs de vraag voorgelegd of de liefde die wiskundigen vaak koesteren voor klassieke muziek, zijn oorsprong vindt in onze hersenen. Ik antwoordde dat kennis van onze hersenen nog veel te beperkt is om daar iets over te kunnen zeggen. Ik suggereerde vervolgens dat overigens zowel het componeren van als het luisteren naar muziek interessante algoritmische kenmerken heeft. Ik lichtte die suggestie toe met een verwijzing naar 'componerende' computers. De vragensteller schrok van dit antwoord en stelde vervolgens een retorische vraag: 'Een computer, die op basis van een of ander programma componeert, zal ons toch in ieder geval nooit met zijn composities kunnen ontroeren?!' Waarop ik antwoordde met de wedervraag 'Waarom niet?' De consternatie van mijn ondervrager nam toe en na enige discussie over en weer besloot hij de discussie met de verzuchting 'Tja, ik ben maar een alfa, dus laten wij maar verder gaan met iets anders'. De klemtoon, hierbij gelegd op 'maar' kon op zowel gecamoufleerde trots als op werkelijke onkunde wijzen.
Wiskunde wordt vaak gezien als een vak dat moeilijk toegankelijk is voor creatieve, fantasierijke mensen; alles ligt bij dit vak vast in dwingende regels, die het vrije spel van onze verbeeldingskracht in de weg staan. Dat maakt wiskunde wel geschikt voor het bestuderen van de natuur, waar het immers om vaste wetmatigheden gaat; doch met cultuur heeft zij niets te maken.
Met name diegenen die zich 'een echte alfa' noemen, lijden aan deze beeldvorming van de wiskunde. Ik zal hen in het vervolg 'alfa-getekenden' noemen.
Het lijkt mij tegen deze achtergrond verstandig om leerlingen die in het kader van het Cultuur & Maatschappij profiel met wiskunde in aanraking komen, ook eens wat meer van een zekere afstand naar wiskunde te laten kijken, teneinde een meer open intellectuele houding ten aanzien van de wiskunde juist bij die leerlingen te bevorderen. Natuurlijk, zij zullen ook in voldoende mate moeten leren om wiskundig over allerlei problemen na te denken; de hieronder gemaakte opmerkingen zijn slechts bedoeld om deze leerlingen óók over de samenhang tussen aard van het wiskundig denken en de culturele betekenis van de wiskunde in verleden en heden te laten nadenken.

De kernvraag luidt derhalve: 'In hoeverre is wiskunde vormend geweest in het verleden (en is zij dat nu nog) voor de westerse cultuur?'
Deze vraag wil ik hier toespitsen op drie kwesties:

1. De axiomatische betoogtrant als een methode om zich over een discipline of een stelsel van geloofsopvattingen zodanig nauwkeurig uit te drukken, dat enerzijds alle vaak verzwegen aannames volledig expliciet zijn gearticuleerd en anderzijds alle gevolgtrekkingen op een controleerbare wijze worden voortgebracht. Enig inzicht in de aard van die methode kan een belangrijke rol spelen in het karakteriseren van de intellectuele aspecten van onze culturele traditie.
2. De wiskundige aspecten van muziek, die ik hierboven ter sprake bracht.
3. De rol die computers spelen in het hedendaagse menselijke zelfbeeld. De (overigens omstreden) opvatting dat de menselijke geest in beginsel vergelijkbaar is met een computer, kan van invloed zijn op de verdere ontwikkeling van onze cultuur. Wat voor taken kunnen in de toekomst aan computers worden overgelaten? Hierbij kan bijvoorbeeld aan rechtspraak of psychotherapie worden gedacht.

Expliciete articulatie van kennis en opvattingen

De axiomatische methode werd oorspronkelijk in de context van de Griekse wiskunde ontwikkeld. Toen Aristoteles (filosoof en onderzoeker van natuur en mens) haar in de loop van de vierde eeuw voor Chr. nauwkeurig beschreef, had hij overigens reeds meer algemene toepassingen van de axiomatische betoogtrant op het oog. Bij deze betoogtrant ligt de nadruk op twee belangrijke eisen bij het uiteenzetten of samenvatten van een kennisgebied of een samenhangende verzameling van opvattingen:

1. *Begripsvorming*
   De betekenis van ieder gebruikt begrip moet met behulp van (eventueel een keten van) definities zijn

vastgelegd in termen van een vooraf gespecificeerde lijst van primitieve begrippen, waarvan een manifeste betekenis 'zonder meer' als begrijpelijk wordt beschouwd.

2. *Beweerbaarheid*
   Alle beweringen moeten deduceerbaar zijn uit een vooraf gespecificeerde lijst van axioma's met behulp van een eveneens vooraf gespecificeerde lijst van afleidingsregels.

Voor Aristoteles was dit de enige manier om voor ieder kennisgebied of domein van opvattingen duidelijk te maken wát de eerste beginselen waren op grond waarvan alle kennisbeweringen respectievelijk opvattingen van het beschouwde domein konden worden verdedigd. De vruchtbaarheid van deze methode werd voor de meetkunde schitterend aangetoond door de *Elementen* van Euclides (circa 300 voor Chr.).
In onze intellectuele traditie is deze vorm voor het uiteenzetten van inzichten op twee manieren gebruikt. In de eerste plaats kan de methode gezien worden als de ideale verzekering van waarheid voor de geaxiomatiseerde beweringen. Daarbij dient dan wel een zogenoemd evidentie-postulaat voor de axioma's te worden toegevoegd; als men er zich namelijk op kan beroepen dat de axioma's evident (!) waar zijn en voorts de bewijsregels invariantie van waarheid bij de overgang van premissen naar de conclusie garanderen, dan is daarmee de waarheid van alle bewijsbare beweringen van het axiomatische systeem gegarandeerd. Dit was precies de opzet van Euclides. De filosoof Spinoza (1632-1677) is een typisch voorbeeld voor dit gebruik van de axiomatische betoogtrant. In zijn hoofdwerk probeerde hij zijn metafysische en ethische opvattingen te axiomatiseren om daarmee een 'onbetwijfelbaar' filosofisch systeem van stellingen op beide gebieden te presenteren.
De axiomatische methode kan echter óók worden beschouwd als een middel om in de verzameling thesen die men wil verdedigen, een zodanige orde aan te brengen dat daarmee expliciet duidelijk wordt wélke aannames feitelijk aan die thesen ten grondslag liggen. Het gaat in dit geval voornamelijk om een zo volledig en expliciet mogelijke uiteenzetting van inzichten, zonder dat 'waarheids'verzekering in het beding behoeft te zijn. De Engelse filosoof A.N. Whitehead (1861-1947) achtte dit gebruik van de axiomatische betoogtrant van groot belang voor het onderzoek van wereldbeschouwingen: door een op deze methode gebaseerd onderzoek reduceert de vergelijking van wereldbeschouwingen zich dan tot de vergelijking van de fundamentele aannames die er de basis van vormen.
Een aardig voorbeeld uit de muziekgeschiedenis levert de Franse componist en muziektheoreticus J.Ph. Rameau op. In 1722 wordt zijn *Harmonieleer* gepubliceerd; Rameau maakt bij de uiteenzetting van zijn ideeën over harmonieleer gebruik van de axiomatische methode. In de inleiding tot zijn verhandeling schrijft hij: 'Ik moet bekennen dat het aan de wiskunde te danken is dat mijn ideeën helder werden, waardoor een zekere obscuurheid werd vervangen door licht'. De axiomatische ordening verschaft het complexe geheel van zijn ideeën kennelijk ook voor hemzelf een onverwachtse luciditeit.
Alfa-getekenden zouden vooral uit dit tweede gebruik van de axiomatische methode een belangrijke les kunnen trekken. In plaats van zich aan het versleten cliché over een vermeend verschil tussen α- en β-denkers te onderwerpen, lijkt het verstandiger een open oog te hebben voor pogingen om culturele verschijnselen zo nauwkeurig mogelijk te begrijpen. De hier beschreven, aan de wiskunde ontleende, methode voor de ordening van ideeën kan hiervoor goede aanknopingspunten opleveren.

Wiskundige aspecten van muziekbeleving

Wiskunde heeft in de ontwikkeling van de beeldende kunsten een vruchtbare rol gespeeld. In dit verband wordt meestal gewezen op de geschiedenis van het perspectief in de schilderkunst gedurende de Renaissance en op de rol van mathematische verhoudingen in de architectuur van de verlichting. Alfa-getekenden zullen wellicht tegenwerpen dat deze nadruk op wiskundige aspecten van de kunstbeleving er meestal toe leidt dat de echte schoonheidservaringen worden weggeredeneerd. Hun ergenis over de rekenmeesters vindt steun bij de Ierse politicus en filosoof E. Burke (1729-1798), die met zijn *Philosophical Enquiry into the Origin of Our Ideas of the Sublime and the Beautiful* (1757) de negentiende eeuwse romantische reactie op het classicisme voorbereidde. Burke had een grondige afkeer van de klassieke theoretici met hun gulle aandacht voor wiskundige verhoudingen en constructies in de kunsten. Volgens hem moet de oorsprong van de schoonheidservaringen gezocht worden in diepliggende instincten en gevoelens. Kunst is bij uitstek het domein van het gevoel. De emotioneel overweldigende aanblik van Shakespeare's oude koning Lear, die door het lot vernietigd ronddwaalt tijdens een hevige uitbarsting van donder en bliksem, illustreert de ervaring van het sublieme, die voor Burke onze schoonheidsbeleving karakteriseert.
In de muziekgeschiedenis heeft zowel de opvatting dat muziek een grote verwantschap heeft met wiskunde als de theorie dat muziek een (gevoels-)expressieve kunst bij uitstek is, een lange geschiedenis. Lang bestonden deze opvattingen zelfs naast elkaar: tonale verhoudingen en modulaties, die te beschrijven zijn met nauwkeurige wiskundige verhoudingen, corresponderen met bepaalde emotionele stemmingen en hun dynamiek. Daarom kon de filosoof en wiskundige G.W. Leibniz (1646-1716) verklaren: 'Muziek is een onbewuste oefening in rekenkunde, waarbij het intellect niet weet dat het aan het tellen is'. Bij hem vereist het uitvoeren van een werk naast zuiver muzikale vaardigheden ook een wiskundige activiteit. Laten wij een voorbeeld bekijken waarbij Leibniz' dictum in een meer uitgebreide zin kan worden verduide-

lijkt, namelijk de fuga. Deze muziekvorm laat zich ruw (!) aldus beschrijven: één stem introduceert een thema (het subject), dat vervolgens wordt overgenomen door een tweede stem in een andere ligging, terwijl de eerste stem voortgaat met een contrapuntische voortzetting of een tegenmelodie (contrasubject). Bij een tweestemmige fuga kan het spel beginnen. De fuga wordt verder ontwikkeld via de toepassing van muzikale operaties, die door conventies zijn vastgelegd (canon, thema-omkering, segmentering en recombinatie, harmonische modulaties, enzovoort). Voor ons doel is het niet van belang wát deze operaties precies inhouden; het gaat erom dat het in veel opzichten vastgelegde operaties zijn. De ontwikkeling moet tenslotte leiden naar een harmonisch-dynamische climax.

Het wonderbaarlijke en opwindende van muziek is overigens dat zo'n cerebrale vorm als de fuga in de handen van een groot componist, zoals bijvoorbeeld J.S. Bach, diep-emotionele luisterervaringen kan opleveren: de 'berekende' ontwikkeling gaat dan gepaard in het aandachtig luisterende oor met díe merkwaardige muzikale verrukking, waarbij de intellectuele bewondering en het emotioneel meegesleept worden, samenvallen.

Hoe laat zich nu het componeren van een fuga beschrijven? J.A. Sloboda betoogt in *The Musical Mind; the cognitive psychology of music* (1985) op grond van mededelingen van componisten en experimentele gegevens het volgende. Het componeren omvat een proces van reflectie op de *muzikale* gevolgen van het toepassen van *muzikale* operaties op een *muzikale* structuur of constructie. Een enkele componist emancipeert daarbij de bestaande muzikale operaties of introduceert zelf een geheel nieuw systeem.

De verwantschap van muziek en wiskunde, in eerste benadering uitgedrukt in het dictum van Leibniz, wordt nu duidelijk. In de wiskunde gaat het immers vaak om reflectie op de *wiskundige* gevolgen van het toepassen van reeds bestaande of nieuw geconstrueerde *mathematische* operaties op een abstracte *wiskundige* structuur.

Naast de fuga zijn talrijke muziekvormen te noemen die evenzeer aan de hier gegeven algemene beschrijving voldoen. Ik noem als typische voorbeelden de variatievorm en de klassieke sonate. Edward Ruthstein geeft in zijn *Emblems of Mind: the inner life of music and mathematics* (1995) een aantal fraaie voorbeelden van de wijze waarop ons 'horen' van het materiaal (het motief dat aan variaties wordt onderworpen, respectievelijk het hoofd- en neventhema van een sonatedeel) tijdens de beluistering veranderingen ondergaat.

Om dit toe te lichten wil ik hier volstaan met een mijn insziens sprekend voorbeeld van dit verschijnsel. Mozarts strijkkwartet in A-dur KV 464 bevat als derde deel een andante dat bestaat uit variaties op een bijzonder eenvoudig, weinig verrassend thema. Iedere daarop volgende variatie kan gehoord worden als het resultaat van de toepassing van enkele gemakkelijk te herkennen muzikale operaties op het thema (verandering van maat, toonsoort, instrumentatie respectievelijk omspelingen en wijzigingen van het thema, enzovoorts). Ten slotte keert het oorspronkelijke thema weer terug in een afsluitende vorm en hierbij doet zich iets merkwaardigs voor. Het thema klinkt 'diep': het is alsof rond het oorspronkelijk naïeve thema een muzikale ruimte is gecreëerd die vanwege zijn onverwachte (!) mogelijkheden ons muzikale denken verrast en ons uiteindelijk zelfs ontroert op een wijze die aanvankelijk geenszins voorhanden lag.

In feite heb ik hiermede al aangegeven dat Leibniz' dictum in de hiergegeven uitbreiding evenzeer geldt voor het luisterproces. Luisteren naar muziek omvat een vorm van constructie, waarbij kernachtige patronen (thema, harmonische progressie, maatsoort, enzovoorts) worden herkend en de bewerkingen van die patronen worden gevolgd. De geoefende luisteraar kan zich expliciet rekenschap geven van dit proces; ik acht het zeer waarschijnlijk dat bij iedere luisteraar een dergelijk proces plaats vindt. Het is overigens als met schaken: een luisteraar met ervaring hoort meer structuur en ontwikkeling dan iemand die begint of zich tot decormuziek beperkt.

Naar muziek leren luisteren is vooral het oefenen van (akoestische) patroonherkenning en het verkrijgen van steeds beter inzicht in de werking van de muzikale operaties die de temporele dynamiek van een werk bepalen. Ik onderschrijf de these van Rothstein dat een compositie opgevat kan worden als de exploratie van een muzikale tijds-ruimte, welke zijn eigen topologie creëert.

Het is hierboven reeds gezegd: muziek kan met haar abstracte uitdrukkingsmiddelen grote emotionele effecten bewerkstelligen. Bepaalde harmonische overgangen kunnen verwachtingen oproepen en vervolgens de 'bevrediging' ervan uitstellen, daarmee een vreemde spanning oproepend (vergelijk Wagners *Tristan en Isolde*); slimberekende oplossingen van harmonische conflicten kunnen juist ervaren worden als emotionele ontladingen, als ontspanning.

Samenvattend zou ik het luisteren naar muziek willen beschrijven als het steeds opnieuw oefenen van de subtiele samenwerking van enerzijds formeel-cognitieve vermogens die een sterke verwantschap hebben met bepaalde aspecten van wiskundig denken en anderzijds ons repertoire van mogelijke gevoelsbewegingen waaraan bepaalde muzikale patronen en hun ontwikkeling kennelijk appelleren.

Beter inzicht in de wiskundige aspecten van muziek draagt derhalve juist bij aan het verdiepen van onze luisteractiviteiten. De door alfa-getekenden geïntroduceerde romantische scheiding tussen het domein van het cognitieve en dat van het gevoel, verhindert in feite dieper begrip van onze (muzikale) schoonheidservaringen.

Een computationeel zelfbeeld?

Reeds in de jaren vijftig is de discussie ontbrand over de vraag of computers opgevat kunnen worden als mogelij-

ke modellen voor het menselijk denken. Kan de menselijke geest worden opgevat als een DNA-gebaseerde computer? Het moge duidelijk zijn dat deze vraagstelling de alfa-getekenden een gruwel is. Zij baseren zich daarbij vaak op de curieuze intuïtie dat een algoritme altijd iets 'doms' is. Wie zich door zo'n intuïtie laat leiden, onderschat gemakkelijk de complexiteit en daarmede ook de toepassingsmogelijkheden van computers. En die onderschatting is, gegeven de belangrijke rol die computers in onze maatschappij thans reeds spelen, niet zonder risico's. De vraag die ons sinds de jaren vijftig achtervolgt, moet dus niet worden verwaarloosd. Een verstandige discussie over deze kwestie kan leerlingen van het C&M-profiel een idee geven van de betekenis die wiskunde óók kan hebben voor het beter begrijpen van ons brein en daarmede tegelijkertijd *te* simpele voorstellingen elimineren over de toepassingsmogelijkheden van moderne computers.
Het feit dat ons brein kennelijk een exceptioneel complex systeem is, maakt het alleen maar interessanter om te onderzoeken of wij de complexiteiten van de verschillende breinfuncties (waarnemen, taal, leren, enzovoorts) beter kunnen doorzien. Onderzoek naar artificiële intelligentie (AI) dat onder andere wiskunde, computerwetenschap en psychologie combineert, tracht zulke inzichten te verwerven door te proberen zulke breinfuncties algoritmisch te karakteriseren en vervolgens software te ontwikkelen waarmee zo'n karakterisering getoetst kan worden. Anders gezegd: wij kunnen nagaan of een computer, na implementatie van die software de bestudeerde functie adequaat kan simuleren.
De afgelopen dertig jaren hebben naast verrassende successen (schaakcomputers) ook interessante negatieve resultaten opgeleverd (visuele waarneming!). Juist die negatieve resultaten zijn uiterst informatief over de ingewikkeldheid van ons brein. Doch alleen wie althans enig idee heeft van de complexiteit van het gebruikte rekentuig (en dus van het geenszins 'domme' karakter van algoritmen) kan dit waarderen en daardoor inzien dat AI-onderzoek vage intuïties over het bijzondere karakter van ons brein kan omzetten in exacte inzichten. De Engelse filosofe M. Boden bracht dit onlangs bondig tot uitdrukking in haar these '... computer models of the mind can be positively rehumanizing ...'.
Aldus kan AI-onderzoek, dat zijn oorsprong heeft in de wiskunde (algoritmentheorie) en vaak verdacht wordt van een dehumaniserende kijk op mensen, leiden tot kennis die cultureel van groot belang is.

Besluit

Het C&M-profiel voor het VWO geeft een specifieke context waarin terloops ook algemene ideeën over de betekenis van wiskunde kunnen worden besproken; in die context speelt echter een romantische afkeer van het veronderstelde dwangmatig exacte en onmenselijke karakter van het wiskundig denken een niet onbelangrijke rol. Met de hier gegeven voorbeelden heb ik gepoogd te illustreren dat wiskundig denken juist vanwege exactheid en het constructieve karakter van dat denken heel goed kan dienen voor een beter begrip (en dus een dieper beleven, want waarnemen!) van artistieke activiteiten en zelfs kan bijdragen aan onze zelfkennis.
Welk voorbeeld men kiest om te bespreken hangt uiteraard af van eigen kennis en interesse; doch ieder van hen laat iets zien van de culturele betekenis van de wetenschap wiskunde.

S.J. Doorman, emeritus hoogleraar Delft

Literatuur

In dit artikel is naast de reeds geciteerde literatuur gebruik gemaakt van:

Dalhhaus, Carl (1967). *Musikästhetik*. Köln: Gerig.
Boden, Margareth (1990). 'Computer models of the Mind' in: K.A. Mohyeldin Said e.a., eds. *Modelling the Mind*. Oxford: Clarendon Press.

Op een schilderij van vijfhonderd jaar geleden is een wiskundeles vereeuwigd. De Franciscaan Pacioli tekent een meetkundige figuur, onder het toeziend oog van een leerling. **Michel Roelens** analyseert het schilderij en gaat in op de wiskunde die erachter zit. Dit artikel is de neerslag van een workshop op de Nationale Wiskunde Dagen 1998.

Een schilderij komt tot leven

Op een lei wordt een meetkundige figuur getekend. Het is een detail van een doek van vijfhonderd jaar geleden, waarop een wiskundeles is vereeuwigd. Van welke leraar is de hand? Wie schildert? Wie krijgt les? Waarover gaat de les?

Vertrekkend van het schilderij proberen we deze historische wiskundeles te reconstrueren en aan te passen aan onze leerlingen van het jaar 2000. Dit leidt ons tot de *Elementen* van Euclides, tot wiskundige kunstenaars van de Renaissance en tot de geschiedenis van de veelvlakken.

Het schilderij

Het doek hangt in het statige *Museo di Capodimonte*, op een groene heuvel met uitzicht op Napels. Voor de meeste bezoekers van het museum is dit maar één van de vele schilderijen; voor ons wiskundeleraren vormt het een belangrijk document over de geschiedenis van de meetkunde en het meetkundeonderwijs, althans als Nick MacKinnon (1993) het bij het rechte eind heeft.
Het doek werd ruim een half millennium geleden, in volle Renaissance, in Venetië geschilderd. De leraar in het

fig. 1 Het portret van Luca Pacioli, Museo di Capodimonte, Napels

midden is de Franciscaan Luca Pacioli, geboren in 1445 in Borgo San Sepolcro, een dorp in Umbria (Midden-Italië) waar ook de schilder en wiskundige Piero della Francesca geboren is. Pacioli en della Francesca hebben elkaar trouwens goed gekend. Pacioli is de auteur van een encyclopedisch boek over wiskunde, de *Summa de aritmetica, geometria, proporzioni e proporzionalità*, gepubliceerd in het Italiaans (en niet in het Latijn) in Venetië in 1494. Het bevat onder meer een praktische samenvatting van de *Elementen* van Euclides. De *Summa* is rechts op het schilderij te zien, onder het regelmatig twaalfvlak. Een ander werk van Pacioli is *La divina proporzione*, een boekje over veelvlakken en de gulden snede, voor een groot stuk overgeschreven uit de *Libellus* van Piero della Francesca. De prachtige illustraties in *La divina proporzione* zijn verzorgd door niemand anders dan Leonardo da Vinci, waar Pacioli mee bevriend was. Pacioli was geen grote vernieuwer van de wiskunde, maar eerder een echte leraar die de (oorlogvoerende) stadsstaten van het huidige Italië afreisde om wiskunde te onderwijzen.

We zien dat Luca Pacioli op een lei een meetkundige figuur tekent, terwijl hij met de andere hand een passage aanwijst in een boek dat op de tafel openligt. Hebben we te maken met een 'portret van een wiskundige omringd door wiskundige attributen', zoals verscheidene kunsthistorici beweren? Of gaat het eerder om een 'verslag' van een wiskundeles die echt heeft plaatsgevonden, op doek vastgelegd bij gebrek aan een videocamera? We zullen het wellicht nooit met zekerheid weten, maar de tweede mogelijkheid is voor ons en onze leerlingen veruit de interessantste.

De figuur op de lei stelt een cirkel voor met daarin ingeschreven een gelijkzijdige driehoek en een lijn die Pacioli aan het tekenen is. Die lijn is een zijde van een regelmatige vijfhoek ingeschreven in diezelfde cirkel (figuur 2).

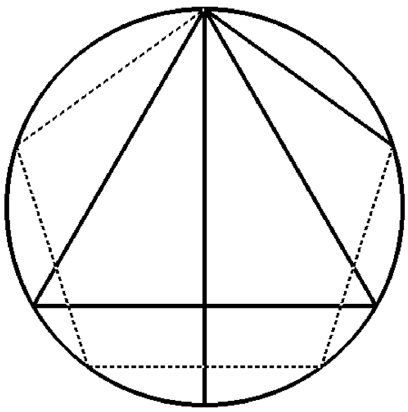


fig. 2 De figuur op de lei

Het boek dat op de tafel openligt, is een Latijnse vertaling van de *Elementen* van Euclides, in 1482 door Erhald Ratdolt gedrukt in Venetië. MacKinnon slaagde er zelfs in de juiste bladzijde te identificeren en de eigenschap waar Pacioli naar wijst. Die luidt: *het kwadraat van een zijde van een gelijkzijdige driehoek is het drievoud van het kwadraat van de straal van de omgeschreven cirkel*. Dit houdt inderdaad verband met de figuur op de lei. Maar wat is het verband met veelvlakken? Het eigenlijke onderwerp van de les op het schilderij, volgens de interpretatie van MacKinnon, is niet de vlakke figuur op de lei op zich, maar een belangrijke eigenschap van regelmatige veelvlakken die ermee samenhangt. De lezer zal deze eigenschap ontdekken aan het einde van dit artikel.

Wie is de leerling rechts op het doek? Het doek is opgedragen aan Guidobaldo, zoon van Federico di Montefeltro, de hertog van Urbino. Sommigen leiden hieruit af dat Guidobaldo de leerling moet zijn. Maar: hij lijkt er niet op. De gelijkenis met Albrecht Dürer is een stuk sterker (figuur 3).

fig. 3 Links: detail van een portret van Guidobaldo door Giacomo Francia; in het midden: zelfportret van Dürer in 1493 (detail in spiegelbeeld); rechts: zelfportret van Dürer in 1498 (detail in spiegelbeeld)

De ontmoeting tussen Pacioli en Dürer is niet bewezen, maar men weet wel dat Dürer tijdens de winter 1494-1495 in Venetië vertoefde en er heel wat bijgeleerd heeft over meetkunde en schilderkunst. Ook Pacioli zat in Venetië voor de publicatie van zijn *Summa*. Dürer sprak echter niet vloeiend Italiaans noch Latijn, maar de Duitse uitgever van de *Summa*, dezelfde Ratdolt die de *Elementen* had gedrukt, kan best als tussenpersoon gediend hebben.
Een andere mogelijke band tussen Pacioli en Dürer is de schilder. Het doek is ondertekend met 'Jaco. Bar'. De schilder is waarschijnlijk Jacopo de' Barbari, ofschoon sommige kunsthistorici dit betwisten en het doek toeschrijven aan een mysterieuze schilder die geen andere werken zou hebben nagelaten. Men weet dat De' Barbari zowel Dürer als Pacioli gekend heeft. Dit wordt door MacKinnon (1993) uitgebreid beargumenteerd.
Het glazen veelvlak dat half gevuld is met water, is waarschijnlijk later bijgeschilderd door Leonardo da Vinci. De weerkaatsing van het licht van de vensters in het glas en in het water is zo perfect afgebeeld, dat enkel Leonardo tot een dergelijke stunt in staat was. Pacioli bezat een verzameling glazen veelvlakken en men weet ook dat Da Vinci en Pacioli bevriend waren en zelfs samengewoond hebben.

Regelmatige en halfregelmatige veelvlakken

Om het historische belang van de geschilderde wiskundeles te begrijpen, moet je iets afweten van de geschiedenis van de veelvlakken.

Een convex veelvlak wordt *regelmatig* genoemd als de zijvlakken gelijke regelmatige veelhoeken zijn en als bovendien in elk hoekpunt eenzelfde aantal zijvlakken samenkomen. Een redenering over het aantal zijvlakken per hoekpunt toont aan dat er niet meer dan vijf mogelijkheden zijn. In elk hoekpunt moeten immers minstens drie zijvlakken samenkomen en de som van de hoeken die er samenkomen moet kleiner zijn dan 360°. In elk hoekpunt kun je bijgevolg enkel drie, vier of vijf gelijkzijdige driehoeken hebben, of drie vierkanten of drie regelmatige vijfhoeken. Deze redenering toont aan dat er *niet meer* dan vijf mogelijkheden zijn. Aantonen dat de vijf regelmatige veelvlakken *bestaan*, gebeurt door ze te *construeren*. Hun Griekse namen verwijzen naar het aantal zijvlakken: *tetraëder, octaëder, icosaëder, hexaëder* (kubus) en *dodecaëder*. Hoewel ze al vóór Plato (vierde eeuw v. C.) bekend waren, worden ze *Platonische lichamen* genoemd. Deze filosoof en wiskundige associeerde de regelmatige veelvlakken met de *elementen* waaruit de natuur zou zijn samengesteld: vuur, lucht, water, aarde en het universum (figuur 4).

De hierboven geschetste redenering die aantoont dat er niet meer dan vijf regelmatige veelvlakken bestaan, komt voor in een tekst van Theaitetos, een leerling van Plato.

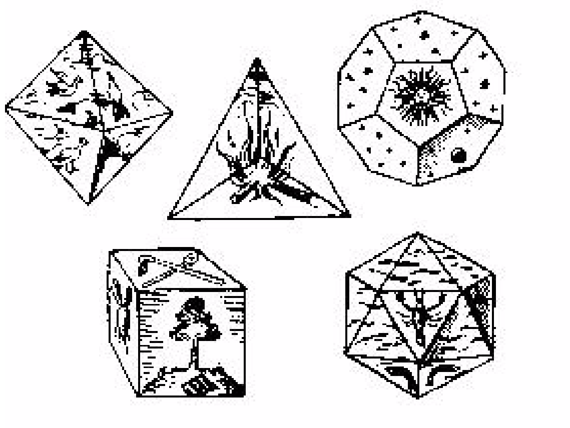


fig. 4 De vijf Platonische lichamen geassocieerd met de 'elementen' (tekening van Kepler)

De *Elementen* van Euclides monden uit, in het dertiende boek, in de constructie (en dus het bestaansbewijs) van de vijf Platonische lichamen. Die bekleden in de Griekse meetkunde dus een ereplaats. Het is de apotheose waar in de *Elementen* naartoe gewerkt wordt.

De astronoom, astroloog en wiskundige Johannes Kepler (rond 1600) was zo onder de indruk van de schoonheid van de regelmatige veelvlakken, dat hij ze gebruikte om er de harmonie van het zonnestelsel mee uit te leggen. De banen van de zes toen gekende planeten zouden op boloppervlakken liggen in- en omgeschreven aan de vijf Platonische lichamen (figuur 5). Later, toen nauwkeuriger waarnemingen voorhanden waren, moest hij dit model laten varen en vervangen door de 'wetten van Kepler' die nu nog onderwezen worden.

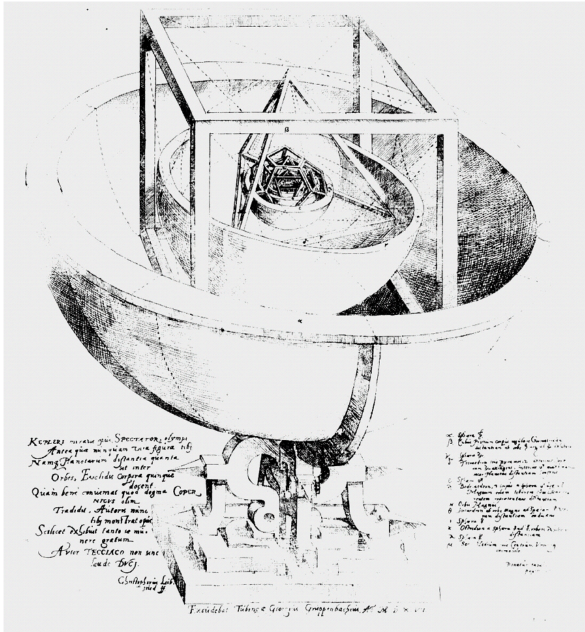


fig. 5 Kosmologisch systeem van Kepler (Mysterium cosmographicum, 1596)

Een convex veelvlak heet *halfregelmatig* wanneer de zijvlakken regelmatige veelhoeken zijn van meer dan één soort en in elk hoekpunt hetzelfde patroon voorkomt. De dertien *Archimedische lichamen* voldoen aan deze definitie, alsook twee oneindige families: de prisma's en de antiprisma's (figuur 6). De dertien Archimedische lichamen zijn ontdekt door Archimedes (derde eeuw v. C.), maar zijn tekst hierover is verloren gegaan. In de Renaissance werden een deel van deze dertien veelvlakken herontdekt door Piero della Francesca, Pacioli, Dürer, … Pas bij Kepler vinden we een beschrijving van alle dertien Archimedische lichamen.

Het veelvlak op het schilderij (figuur 1), half gevuld met water, is één van deze dertien, de rhombi-kubo-octaëder (nummer 10 op figuur 6). Dit lichaam bezit merkwaardig genoeg een minder symmetrisch 'broertje' dat eveneens aan de definitie van halfregelmatig veelvlak voldoet (figuur 7). Je zou dus kunnen stellen dat er naast de prisma's en de antiprisma's 13,5 halfregelmatige veelvlakken bestaan. De rhombi-kubo-octaëder van het schilderij symboliseert op een dubbele manier de vier elementen. Als veelvlak bestaande uit vierkanten en gelijkzijdige driehoeken verwijst hij naar de eerste vier Platonische lichamen. Daarenboven zit er water en lucht in; het glas (vaste stof) verwijst naar de aarde en het vuur is aanwezig in de vorm van de lichtweerkaatsing.

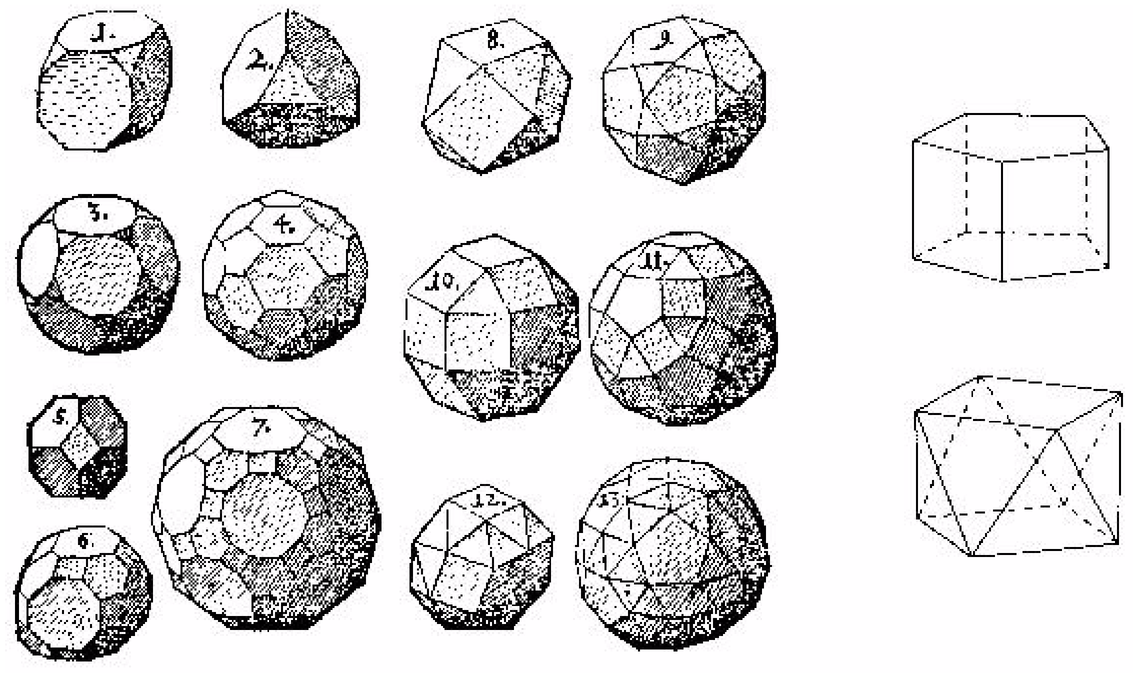


fig. 6 De dertien Archimedische lichamen (tekeningen van Kepler); rechts een prisma en een antiprisma

De dodecaëder en de icosaëder volgens Euclides en Pappos

Laten we op zoek gaan naar het precieze onderwerp van de les die Pacioli aan Dürer geeft. We moeten dus een verband vinden tussen de figuur op de lei (figuur 2) en de regelmatige veelvlakken. (De rhombi-kubo-octaëder die later toegevoegd is, laten we hierbij links liggen.)
Euclides construeert de dodecaëder vertrekkend van een kubus met rechthoekige 'kammen' (figuur 8). De eindpunten van deze kammen worden verbonden met de hoekpunten van de kubus zodat vijfhoeken ontstaan. Het komt erop aan te bewijzen dat je de afmetingen van de kammen zo kunt kiezen, dat deze vijfhoeken vlak en regelmatig zijn (gelijkzijdig en gelijkhoekig). In plaats van regel per regel de bewijzen van Euclides te overlopen, doen we het liever op onze manier, met anachronistische algebraïsche berekeningen. Merk eerst op dat we ons dankzij de symmetrie slechts met één vijfhoek hoeven bezig te houden.
In een regelmatige vijfhoek is de verhouding diagonaal/zijde gelijk aan:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

de gulden verhouding. (We herinneren eraan dat $\varphi^2 = \varphi + 1$ en $\varphi^{-1} = \varphi - 1$. Deze gelijkheden zullen nuttig zijn voor de lezer die de berekeningen hieronder wenst te

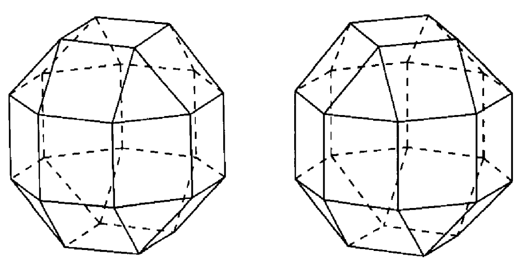


fig. 7 De rhombi-kubo-octaëder en zijn 'broertje'

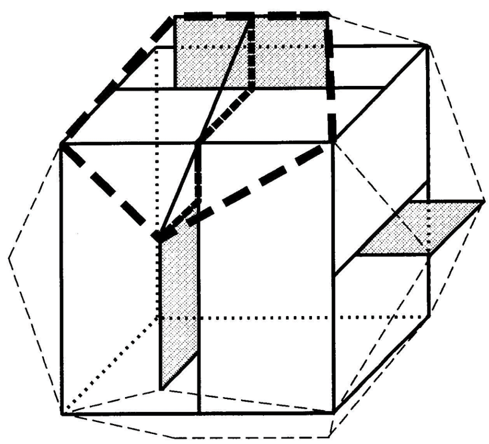


fig. 8 Constructie van de dodecaëder volgens Euclides

verifiëren.) Hier is de diagonaal van de vijfhoek de ribbe van de kubus. Laten we dus vertrekken van een kubus met zijde φ om een vijfhoek met zijde 1 te verkrijgen. Dan ligt de lengte van de rechthoekige kammen vast, namelijk 1. We moeten dus enkel nog de *breedte u* van de kammen bepalen. Opdat de vijfhoek *vlak* zou zijn, moeten de twee 'treden' van het trapje in figuur 8 dezelfde helling hebben. Dit levert ons de volgende vergelijking:

$$\frac{u}{\frac{\varphi}{2}} = \frac{\frac{\varphi - 1}{2}}{u}$$

met als oplossing: $u = \frac{1}{2}$. De kammen zijn bijgevolg 'dubbele vierkanten'.

Laten we nu nagaan of deze vlakke vijfhoek werkelijk regelmatig is. Voor de *gelijkzijdigheid* volstaat het dat *een* zijde die een eindpunt van een kam verbindt met een hoekpunt van de kubus, lengte 1 heeft. En dit is het geval, want:

$$\left(\frac{\varphi - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

De *gelijkhoekigheid* van de vijfhoek kan als volgt beargumenteerd worden: van alle gelijkzijdige vijfhoeken met zijde 1 en met een diagonaal van lengte φ is de regelmatige vijfhoek de enige die symmetrisch is ten opzichte van de middelloodlijn van deze diagonaal (figuur 9).

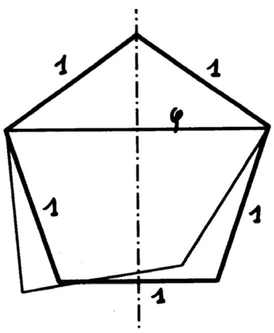


fig. 9 Symmetrieargument voor de gelijkhoekigheid

Merk op: als je de 'basissen' van de kammen verbindt, krijg je een icosaëder (figuur 10). Volgens de commentaar in de uitgave Euclid (1956) van de *Elementen* is deze constructie toe te schrijven aan een zekere H.M. Taylor. De constructie van Euclides is lichtjes verschillend.

Zijn we tot nu toe al ergens een gelijkzijdige driehoek en een regelmatige vijfhoek tegengekomen die ingeschreven zijn in een zelfde cirkel, zoals op de lei? Helaas niet. We vervolgen derhalve onze zoektocht.

Pappos, een Griekse wiskundige uit Alexandrië (in het huidige Egypte), construeerde rond 300 n. C. een dodecaëder en een icosaëder vertrekkend van een boloppervlak (figuur 11). De hoekpunten van de veelvlakken worden op vier horizontale 'verdiepingen' geplaatst. Pappos

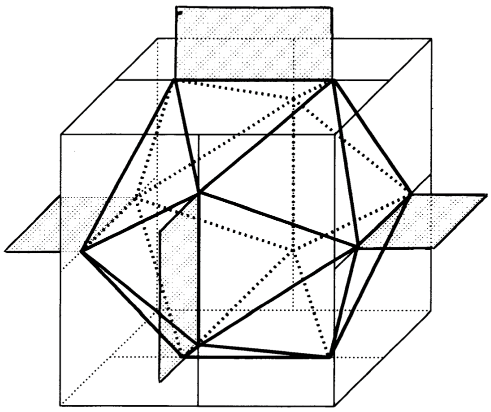


fig. 10 Constructie van de icosaëder volgens Taylor

toont aan dat het mogelijk is om de hoogtes van deze verdiepingen zo te bepalen, dat deze veelvlakken regelmatig zijn. Laten we deze hoogtes bepalen, gemeten vanaf het evenaarsvlak en met de straal van de bol als eenheid van lengte. We beperken ons tot de hoogte van de bovenste verdieping.

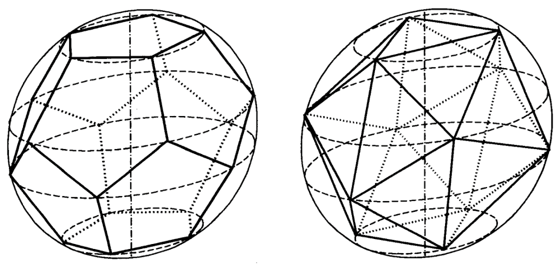


fig. 11 Constructie van de dodecaëder en de icosaëder volgens Pappos

Eerst de dodecaëder. We veronderstellen dat hij regelmatig is en berekenen de hoogte van de bovenste verdieping. Om h te kennen, volstaat het de straal r te kennen van de cirkel omgeschreven aan het bovenvlak van de dodecaëder (figuur 12):

$$h = \sqrt{1 - r^2}.$$

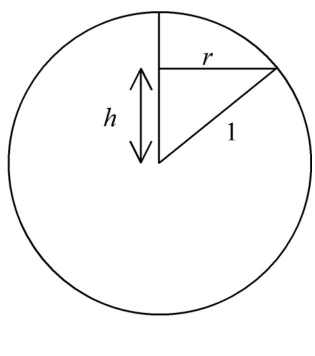


fig. 12

We herinneren de lezer eraan dat de zijde z van een regelmatige vijfhoek en de straal r van zijn omgeschreven cirkel zich aldus tot elkaar verhouden:

$$z = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\,.$$

Dit geeft:

$$h = \sqrt{1 - \frac{2z^2}{5-\sqrt{5}}}\,. \qquad (*)$$

Het volstaat dus de lengte z te bepalen van de ribbe van de dodecaëder ingeschreven in een bol met straal 1.

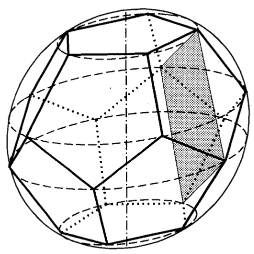


fig. 13a

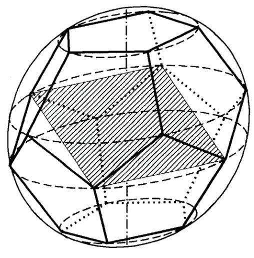


fig. 13b

De vierhoek van figuur 13a is een vierkant. Immers, vermits twee zijden evenwijdig zijn, is de vierhoek vlak. Een vlakke vierhoek waarvan de hoekpunten op een boloppervlak gelegen zijn, is een koordenvierhoek. En vermits bovendien de vier zijden even lang zijn, hebben we te maken met een vierkant. De zijde van dat vierkant meet φz, waarbij z staat voor de ribbe van de dodecaëder. De vierhoek van figuur 13b is een rechthoek, want de diagonalen zijn even lang en snijden elkaar middendoor. De breedte is φz en de lengte $\sqrt{2}\,\varphi z$, want dat is de diagonaal van het vierkant van figuur 13a. De diagonaal van deze rechthoek is 2. De stelling van Pythagoras levert ons dus de waarde van z op:

$$(\varphi z)^2 + (\sqrt{2}\;\varphi z)^2 = 2^2$$

$$z = \frac{2}{\varphi\sqrt{3}}\,.$$

We vervangen dit in (*):

$$h = \sqrt{1 - \frac{\frac{8}{3\varphi^2}}{5-\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \qquad (**)$$

$$\approx 0{,}7947.$$

Dit is dus de hoogte van de bovenste verdieping voor de dodecaëder. In plaats van nu de hoogte van de verdieping daaronder te berekenen, schakelen we over naar de icosaëder. We berekenen de hoogte h' van de bovenste verdieping, nog steeds vanaf het evenaarsvlak en met de straal van de bol als eenheid van lengte.

Net zoals bij de dodecaëder, hebben we:

$$h' = \sqrt{1 - r'^2}$$

waarbij r' de straal is van de omgeschreven cirkel van het bovenvlak. De verhouding tussen de zijde van een gelijkzijdige driehoek en de straal van de omgeschreven cirkel wordt gegeven door:

$$z' = \sqrt{3}\,r'$$

zodat:

$$h' = \sqrt{1 - \frac{z'^2}{3}}\,. \qquad (***)$$

Laten we dus op zoek gaan naar de lengte z' van de ribbe van een icosaëder ingeschreven in een bol met straal 1.

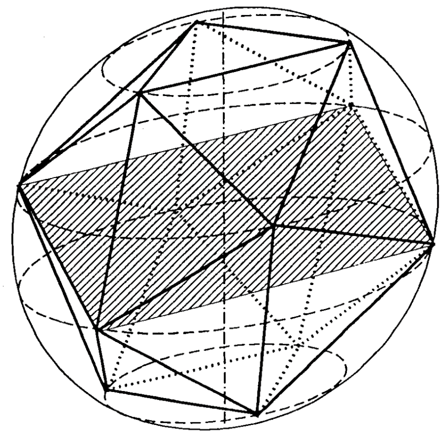


fig. 14

De vierhoek van figuur 14 is een rechthoek, want de diagonalen zijn even lang en snijden elkaar middendoor. Het is zelfs een 'gulden rechthoek': de breedte is z' en de lengte is de diagonaal van een regelmatige vijfhoek met zijde z', dus $\varphi z'$. De stelling van Pythagoras geeft ons de waarde van z':

$$z' + (\varphi z')^2 = 2^2$$

$$z' = \frac{2}{\sqrt{\varphi + 2}}\,.$$

We vervangen in (***):

$$h' = \sqrt{1 - \frac{3}{3(\varphi+2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\,.$$

Dit is exact dezelfde waarde als (**)! De hoogte van de bovenste verdieping is dus dezelfde als bij de dodecaëder. Hier volgt uit dat *een dodecaëder en een icosaëder, ingeschreven in even grote bollen, ook even grote ingeschreven bollen hebben*. Er is nog een tweede conclusie te trekken uit de gelijkheid van die hoogtes: *de zijvlakken van een dodecaëder en een icosaëder, ingeschreven in even grote bollen, hebben even grote omgeschreven cirkels.* Dit is de figuur van de lei!

Heeft Pacioli deze eigenschap uitgelegd aan Dürer ruim een half millennium geleden in Venetië? Men kan opwerpen dat het werk *Collecties* van Pappos in die periode in Italië niet volledig beschikbaar was. Maar hetzelfde resultaat vinden we terug in het veertiende boek van de *Elementen* van Euclides. De *Elementen* bevatten dertien boeken, maar na de dood van Euclides werden een veertiende en een vijftiende boek als bijlagen toegevoegd. De auteur van het veertiende boek is een zekere Hypsicles. De eigenschap die we zopas ontdekten via de constructie van Pappos is de tweede propositie van dat veertiende boek. Het bewijs van Hypsicles steunt rechtstreeks op … de stelling die Pacioli met de linkerhand aanduidt in het open boek! Hypsicles leidt er een beetje verder uit af dat *de verhouding tussen de oppervlaktes van de dodecaëder en de icosaëder gelijk is aan de verhouding van hun volumes*. (Dit volgt onmiddellijk uit ons resultaat $h = h'$.) En in het bewijs van dit gevolg prijkt precies… de figuur van de lei!

Als deze hypothese klopt, wat ik graag geloof, dan heeft de schilder niets per toeval op het doek aangebracht. De les van Pacioli betreft de apotheose van de Griekse meetkunde, tijdens de Middeleeuwen bewaard dankzij de Arabieren en in de Renaissance weer verspreid in Italië. Hij geeft deze eeuwenoude kennis door aan Dürer die ze op zijn beurt boven de Alpen zal verspreiden. Een historisch moment, waarvan wij getuigen zijn als we naar dat schilderij kijken!

Dit artikel is de neerslag van een workshop op de Nationale Wiskundedagen 1998. Deze workshop werd herhaald op de Derde Europese Zomeruniversiteit 'Geschiedenis en Epistemologie in het Wiskundeonderwijs' (Louvain-la-Neuve en Leuven, 15 tot 21 juli 1999). Deze tekst verschijnt ook, in het Frans, in de Proceedings van deze Zomeruniversiteit.
Hierbij wil ik Nick MacKinnon bedanken voor de toestemming om zijn interpretatie van het schilderij als basis voor mijn workshop te gebruiken.

Michel Roelens, Katholieke Hogeschool Limburg Departement Lerarenopleiding (Hasselt) en Maria Boodschaplyceum (Brussel), Michel.Roelens@ler.khlim.be.

Literatuur

Boonen, N. (1999). *Platonische en Archimedische lichamen*. (onuitgegeven scriptie). Hasselt: KHLim Lerarenopleiding.

Cromwell, P.R. (1997). *Polyhedra*. Cambridge, New York, Melbourne: Cambridge University Press.

Euclid (1954). *The thirteen books of the Elements*, *Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, Volume III*. New York: Dover Publications.

Field, J.V. (1997). *The invention of infinity. Mathematics and Art in the Renaissance*. Oxford, New York, Tokyo: Oxford University Press.

MacKinnon, N. (1993). 'The portrait of Fra Luca Pacioli', *The Mathematical Gazette 77*(479), 129-219.

Een van de thema's op de Nationale Wiskunde Dagen 2001 was getaltheorie. Naast de 'professionals' voelen ook veel amateurs en zelfs leken zich tot dit vakgebied aangetrokken doordat de problemen vaak zo voorstelbaar zijn. In dit artikel bespreekt **Frits Beukers** het platzakprobleem.

Het platzakprobleem

Het probleem

Stel we hebben een bepaald bedrag op zak, zeg *f* 24,93, en we willen dit bedrag in zijn geheel besteden aan postzegels van 62 en van 37 cent. Vraag: kan dat?

Ik geef direct toe dat dit probleem niet actueel is. Postzegels met dergelijke waarden hebben vroeger bestaan, maar zijn nu niet meer geldig. Ook is het maar de vraag of je al je geld aan postzegels zou willen besteden. Hoe dan ook, het voorbeeld is illustratief voor een klasse van problemen waarin we te maken hebben met een tweetal artikelen met prijzen die we a en b zullen noemen. Vraag luidt: welke bedragen n kunnen we volledig besteden aan de aankoop van deze artikelen? Aan het eind van de transactie zijn we dan platzak, hetgeen de titel van dit verhaal verklaart. Wiskundiger gesteld luidt de vraag:

Vraag 1.1. Gegeven positief gehele getallen a en b. Bij welke n bestaan er gehele getallen x, $y \geq 0$ zó dat $n = ax + by$?

Tegenwoordig (dat wil zeggen het jaar 2001) eindigen prijzen van artikelen vaak op een 5 of 0. Het zal duidelijk zijn dat combinaties van dergelijke artikelen een totaalprijs hebben die ook op 5 of 0 eindigt. In dit geval zijn de bedragen a en b deelbaar door 5 en hetzelfde geldt natuurlijk voor het eindbedrag. Het ligt daarom voor de hand om deze 5 uit a en b weg te delen, en het platzakprobleem voor de nieuwe getallen $\frac{a}{5}$ en $\frac{b}{5}$ te bekijken. Mochten deze twee getallen nog een gemeenschappelijke deler hebben, dan delen we die ook weg. Kortom, we nemen voortaan aan dat $ggd(a, b) = 1$, zonder daarbij ons verhaal tekort te doen. In het geval dat $a = 37$ en $b = 62$ zal het direct duidelijk zijn dat de bedragen 1, 2, 3, … , 36 niet besteedbaar zullen zijn aan onze postzegels. Maar ook het bedrag 2195 cent is niet besteedbaar. Dat is wat lastiger in te zien en de enige manier om daar achter te komen, is gewoon voor $x = 0,1,2,3,l\ldots$ proberen of $2195 - 37x$ een veelvoud van 62 is. Vanaf gegeven moment zal $2195 - 37x$ negatief worden en kunnen we stoppen met onze zoekactie. Het blijkt dat geen enkele x aan onze voorwaarde voldoet. Het zal duidelijk zijn dat een dergelijke zoekactie het beste op een computer kan worden uitgevoerd. Een dergelijk programma, in Java geschreven, staat op de webpagina www.math.uu.nl/people/beukers/frobenius. Laten we voor een groot aantal waarden in de buurt van 2195 de computer lopen, dan vinden we het resultaat op de volgende bladzijde in een tabel. De vetafgedrukte bedragen in zijn niet besteedbaar, de andere bedragen wel.

Wat opvalt is dat na 2195 alle bedragen in de tabel besteedbaar zijn, terwijl we onder 2195 meerdere niet besteedbare bedragen zien. Dat is geen toeval, het blijkt inderdaad dat er bij elke $n > 2195$ gehele x, $y \geq 0$ bestaan, zó dat $n = 37x + 62y$. Wat nog opmerkelijker is, dit gebeurt bij elke a, b. Dat wil zeggen, er bestaat een waarde die zelf niet besteedbaar is, maar waarboven alle andere waarden besteedbaar zijn door middel van a, b. Dit getal is gelijk aan $ab - a - b$. We formuleren deze eigenschap als een stelling.

Stelling 1.1
Gegeven twee positief gehele getallen a en b met $ggd(a, b) = 1$. Er bestaat een grootste getal n, zó dat

$$n = ax + by$$

geen oplossing heeft in gehele getallen x, $y \geq 0$.
De waarde is gelijk aan $n = ab - a - b$.

In ons voorbeeld met $a = 37$, $b = 62$ krijgen we als grootste niet besteedbare bedrag het getal

$$37 \times 62 - 37 - 62 = 2195.$$

In de volgende paragraaf zullen we uitleggen waarom Stelling 1.1 waar is.

Eerder verschenen in de *Nieuwe Wiskrant*, *20*(4) 2001

Voor we dat gaan doen, nog enkele opmerkingen over het soortgelijke probleem met drie of meer artikelen. Stel we hebben een r-tal artikelen met prijzen $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Neem wederom aan dat hun grootste gemeenschappelijke deler 1 is. Een specifieke vraag zou zijn:

Vraag 1.2
Wat is de grootste waarde van n zó dat
$n = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_rx_r$
niet oplosbaar is in gehele getallen $x_1, x_2, \ldots, x_r \geq 0$*?*

Een andere vraag zou zijn:

Vraag 1.3
Gegeven n, is er een snelle manier om te bepalen of er gehele getallen $x_1, x_2, \ldots, x_r \geq 0$ *zijn zó dat*
$$n = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_rx_r?$$

Als r, het aantal a_i, klein is, dan kan vraag 1.3 gemakkelijk met een computer beantwoord worden. Als r echter groot is, bijvoorbeeld 500 of 1000, dan biedt ook de computer weinig soelaas. We hebben dan te maken met een probleem dat in principe wel oplosbaar is, maar waarvan de tijd om het op te lossen eeuwen in beslag kan nemen. Van dergelijke problemen wordt onder andere in de cryptografie gebruik gemaakt.
Wat betreft vraag 1.2, in het geval van twee artikelen, $r = 2$, zagen we dat $a_1a_2 - a_1 - a_2$ het antwoord is. Als $r = 3$, dan ligt de zaak een stuk ingewikkelder. Er is weliswaar een methode om de gevraagde waarde uit te rekenen, maar die is vele malen ingewikkelder dan de formule in het geval $r = 2$. Als $r > 3$, dan zijn er helemaal geen formules bekend.
In het geval van drie of meer artikelen is het leuk om speciale gevallen te nemen. Je kunt voor a_1, a_2, a_3 bijvoorbeeld drie opeenvolgende getallen k, $k + 1$, $k + 2$ nemen, en dan kijken wat het antwoord op onze vraag is. Op de computer kun je experimenteren met dergelijke simpele keuzen. Soms blijken er regelmatige patronen in het antwoord te zitten. Het is een leuke sport om te proberen die op te sporen. De volgende taak is dan deze patronen te verklaren. Hier is veel ruimte om zelf aan de slag te gaan. Als hulpmiddel kun je hierbij het bovengenoemde Java-programma gebruiken, dat voor $r \leq 4$ het antwoord op onze vraag berekent. Zoek op internet de eerder genoemde pagina en je kunt meteen beginnen.
Andere benamingen voor problemen van bovenstaand type zijn *knapzakprobleem*, *geldwisselprobleem* of *Frobeniusprobleem*, naar de Duitse wiskundige G. Frobenius (1847-1917).

Twee artikelen

In deze paragraaf laten we zien dat Stelling 1.1 waar is. We zeggen dat een getal *n positief representeerbaar* is door a en b als $n = ax + by$ een oplossing in gehele x, $y \geq 0$ heeft. Om even te wennen aan deze terminologie, volgens Stelling 1.1 is $2195 = 37 \times 62 - 37 - 62$ het grootste getal dat niet positief representeerbaar is door 37 en 62. Als eerste laten we zien:

Het getal $n = ab - a - b$ *is niet positief representeerbaar door a en b.*

Stel namelijk dat er gehele x, $y \geq 0$ bestaan zó dat $ab - a - b = ax + by$. Tel aan beide zijden $a + b$ op. We vinden dan $ab = a(x + 1) + b(y + 1)$. Twee van deze termen, ab en $a(x + 1)$, zijn deelbaar door a. Dus is ook de derde term, $b(y + 1)$, deelbaar door a. De getallen a en b hebben geen gemeenschappelijke factoren. Dus uit a deelt

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	**2009**	**2010**	2011	2012	2013	2014	2015
2016	2017	2018	2019	2020	2021	**2022**	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030
2031	2032	2033	**2034**	2035	2036	2037	2038	2039	2040	2041	2042	2043	2044	2045
2046	**2047**	2048	2049	2050	2051	2052	2053	2054	2055	2056	2057	2058	**2059**	2060
2061	2062	2063	2064	2065	2066	2067	2068	2069	2070	**2071**	2072	2073	2074	2075
2076	2077	2078	2079	2080	2081	2082	2083	**2084**	2085	2086	2087	2088	2089	2090
2091	2092	2093	2094	2095	**2096**	2097	2098	2099	2100	2101	2102	2103	2104	2105
2106	2107	2108	2109	2110	2111	2112	2113	2114	2115	2116	2117	2118	2119	2120
2121	2122	2123	2124	2125	2126	2127	2128	2129	2130	2131	2132	**2133**	2134	2135
2136	2137	2138	2139	2140	2141	2142	2143	2144	2145	2146	2147	2148	2149	2150
2151	2152	2153	2154	2155	2156	2157	**2158**	2159	2160	2161	2162	2163	2164	2165
2166	2167	2168	2169	2170	2171	2172	2173	2174	2175	2176	2177	2178	2179	2180
2181	2182	2183	2184	2185	2186	2187	2188	2189	2190	2191	2192	2193	2194	**2195**
2196	2197	2198	2199	2200	2201	2202	2203	2204	2205	2206	2207	2208	2209	2210
2211	2212	2213	2214	2215	2216	2217	2218	2219	2220	2221	2222	2223	2224	2225
2226	2227	2228	2229	2230	2231	2232	2233	2234	2235	2236	2237	2238	2239	2240
2241	2242	2243	2244	2245	2246	2247	2248	2249	2250	2251	2252	2253	2254	2255
2256	2257	2258	2259	2260	2261	2262	2263	2264	2265	2266	2267	2268	2269	2270
2271	2272	2273	2274	2275	2276	2277	2278	2279	2280	2281	2282	2283	2284	2285
2286	2287	2288	2289	2290	2291	2292	2293	2294	2295	2296	2297	2298	2299	2300

$b(y + 1)$ volgt dat a een deler is van $y + 1$. Samen met het feit dat $y + 1 > 0$, volgt hier weer uit dat $y + 1 \geq a$. Maar nu komen we in de problemen.
De ongelijkheden $y + 1 \geq a$ en $x + 1 \geq 1$ impliceren dat $a(x + 1) + b(y + 1) \geq a + ab > ab$. Maar $a(x + 1) + b(y + 1)$ had gelijk moeten zijn aan ab. We hebben een tegenspraak gekregen en concluderen dat $ab - a - b$ niet positief representeerbaar is door a, b.

Om Stelling 1.1 helemaal aan te tonen, moeten we ook laten zien dat elk getal $n > ab - a - b$ wél positief representeerbaar is door a en b.
In het bijzonder zou $ab - a - b + 1$ positief representeerbaar moeten zijn. Maar de bijbehorende waarden van x en y zijn absoluut niet duidelijk. In het voorbeeld $a = 37$, $b = 62$ zouden er gehele $x, y \geq 0$ moeten zijn zó dat $2196 = 37x + 62y$. Weinig mensen zien hier meteen een oplossing voor. In de rest van deze paragraaf gebruiken we dit voorbeeldprobleem ter illustratie.
Om verder te kunnen, doen we eerst als het ware een stapje terug, om later een grotere sprong te kunnen maken. We zeggen dat een getal n *representeerbaar* is door a en b als er gehele x, y bestaan zó dat $n = ax + by$. Bij het begrip representeerbaar laten we de eis dat $x, y \geq 0$ voorlopig even vallen. We bewijzen nu de volgende stelling.

Stelling 2.1
Zij a, b een tweetal positief gehele getallen met ggd(a, b) = 1. Dan is elk geheel getal representeerbaar door a en b.

Om deze stelling aan te tonen, gaan we laten zien dat het getal 1 altijd representeerbaar is. Met andere woorden, er bestaan gehele x, y zó dat $1 = ax + by$. Als we dit eenmaal hebben, zijn we klaar. Immers uit $1 = ax + by$ volgt $n = a(nx) + b(ny)$ voor elke gehele n.
Laat d het kleinste positieve gehele getal zijn dat geheel representeerbaar is door a en b. Zij n een willekeurig positief representeerbaar getal. Dat wil zeggen, er zijn gehele x, y, x', y' zó dat

$$n = ax + by$$
$$d = ax' + by'.$$

Stel dat n gedeeld door d gelijk is aan 'k rest r'. Trekken we k maal de tweede gelijkheid van de eerste af, dan vinden we

$$r = n - kd = a(x - kx') + b(y - ky').$$

Met andere woorden, de rest r is ook representeerbaar door a en b.
Aangezien $0 \leq r < d$, r representeerbaar en d het kleinste positieve geheel representeerbare getal is, kunnen we alleen maar concluderen dat $r = 0$. Met andere woorden, het kleinst representeerbare getal d deelt elk ander representeerbaar getal n. In het bijzonder zijn $a = a \cdot 1 + b \cdot 0$ en $b = a \cdot 0 + b \cdot 1$ representeerbaar en dus ook deelbaar door d. We hadden echter aangenomen dat a en b geen gemeenschappelijke delers hebben, behalve 1. Conclusie: $d = 1$. Het getal 1 is dus representeerbaar door a en b.

Bovenstaand bewijs is een voorbeeld van een *existentiebewijs*. We laten zien dat een oplossing voor $1 = ax + by$ in gehele x, y bestaat (existentie), maar geven geen methode om deze te bepalen. Dergelijke bewijzen komen vaak voor in de wiskunde en veelal geeft zo'n existentiebewijs geen enkele aanwijzing om te komen tot een daadwerkelijke constructie van de oplossing. Gelukkig geeft het fundamentele idee in bovenstaand bewijs ons wel een aanwijzing hoe eventuele x, y te vinden. We lichten dit toe aan de hand van de vergelijking $1 = 37x + 62y$ in x, y geheel. Ervan uitgaand dat niemand meteen een oplossing ziet, gaan we als volgt te werk. Van de voor de hand liggende gelijkheid

$$62 = 37 \cdot 0 + 62 \cdot 1$$

trekken we 1 maal de gelijkheid

$$37 = 37 \cdot 1 + 62 \cdot 0$$

af. We vinden

$$25 = -37 \cdot 1 + 62 \cdot 1.$$

Trek deze 1 maal van de voorgaande af. We vinden

$$12 = 37 \cdot 2 - 62 \cdot 1.$$

Trek deze 2 maal van de voorgaande af. We vinden

$$1 = -37 \cdot 5 + 62 \cdot 3.$$

We zien de oplossing $x = -5$, $y = 3$ van $1 = 37x + 62y$ te voorschijn komen.
Hopelijk wordt uit dit voorbeeld duidelijk hoe je in het algemeen een gehele oplossing x, y van $1 = ax + by$ vindt. De methode staat bekend als het *algoritme van Euclides*, naar de beroemde Griekse wijsgeer en wiskundige Euclides (365 v. Chr.-300 v. Chr.).
Ons getal 2196 is nu ook representeerbaar. Vermenigvuldig $1 = 37 \cdot (-5) + 62 \cdot 3$ aan beide zijden met 2196. We vinden

$$2196 = 37 \cdot (-10980) + 62 \cdot 6588.$$

In ieder geval is 2196 representeerbaar. We wilden echter laten zien dat dit getal *positief* representeerbaar is. Daarvoor hebben we nog één extra idee nodig.
Als we een gehele oplossing x_0, y_0 van $n = ax + by$ hebben, dan is dit niet de enige oplossing. Immers $x_0 + b$, $y_0 - a$ is ook een oplossing, zoals we uit $a(x_0 + b) + b(y_0 - a) = ax_0 + by_0 = n$ zien.
Evenzo zien we

$$n = ax_0 + by_0 = a(x_0 + b) + b(y_0 - a) = a(x_0 + 2b) + b(y_0 - 2a) = a(x_0 + 3b) + b(y_0 - 3a) = \ldots$$

Met andere woorden, als x_0, y_0 een oplossing van $n = ax + by$ is, dan is $x_0 + kb, y_0 - ka$ dat ook voor elke keuze van k. De waarde van y in de oplossing kan met stapjes ter lengte a verschoven worden. Door k juist te kiezen, kunnen we er dus voor zorgen dat $0 \leq y - ka \leq a - 1$. Met behulp van deze opmerking kunnen we Stelling 2.1 nog iets verfijnen.

Stelling 2.2
Zij a, b een tweetal positief gehele getallen met ggd(a, b) = 1. Dan zijn er bij elk geheel getal n gehele getallen x, y te vinden zó dat n = ax + by en 0 ≤ y ≤ a – 1.

Dit is een stap in de richting van positieve representeerbaarheid. We kunnen de waarde van y immers positief krijgen. Laten we dit schuifprincipe toepassen op ons voorbeeld $2196 = 37 \cdot (-10980) + 62 \cdot 6588$. Merk op dat 6588 gedeeld door 37 gelijk is aan 178 rest 2. Trek 178 maal 37 van 6588 af en tel 178 maal 62 bij -10980 op. We vinden

$$2196 = 37 \cdot 56 + 62 \cdot 2,$$

waarmee we zien dat 2196 positief representeerbaar is. Door y tussen 0 en 36 te kiezen, hebben we een gratis bonus gekregen, namelijk een positieve waarde van x. Het aardige is dat dit altijd werkt. We laten nu zien:

Elk getal $n > ab - a - b$ is positief representeerbaar door a en b.

Stel $n > ab - a - b$. We weten op grond van Stelling 2.2 dat er gehele getallen x, y bestaan zó dat $n = ax + by$ met $0 \leq y \leq a - 1$.
Uit de laatste ongelijkheid volgt dat $by \leq ab - b$. Omdat $n > ab - a - b$ betekent dit dat

$$ax = n - by > (ab - a - b) - (ab - b) = -a.$$

En dus $x > -1$. Maar omdat x geheel is, impliceert $x > -1$ dat $x \geq 0$. Het getal n is positief representeerbaar. Daarmee is Stelling 1.1 bewezen.

Een beetje experimenteren met de Java-applet brengt nog een aantal feiten aan het licht die met bovenstaande theorie te verklaren zijn. Hier zijn er een paar. Kijk of je ze experimenteel ziet gebeuren en geef een verklaring. Van a, b veronderstellen we dat $ggd(a, b) = 1$ en $a < b$.

1. $ab - 2a - b$ is niet positief representeerbaar.
2. Als $a > 1$ dan is $ab - a - b - 1$ positief representeerbaar.
3. Als $a > 1$ dan zijn $ab - a - b - 1$, $ab - a - b - 2$, …, $ab - 2a - b + 1$ positief representeerbaar.

Behalve het bovengenoemde kun je zelf misschien ook nog andere regelmatigheden observeren.

Frits Beukers, Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht, beukers@math.uu.nl

Perspectiefkastjes, in de zeventiende eeuw korte tijd populair, zijn kijkkastjes met vakkundig geschilderde interieurs. Door het kijkgat bekekengeven ze een perspectivisch beeld. In dit artikel wordt beschreven welke meetkunde ten grondslag ligt aan deze kunstvoorwerpen. In het artikel geschreven naar aanleiding van haar voordracht op de Nationale Wiskunde Dagen 2001 zet **Agnes Verweij** de perspectief van de kastjes in het juiste perspectief ...

Perspectief in een kastje

Inleiding

In het midden van de zeventiende eeuw waren perspectiefkastjes in Nederland in de mode. Dit zijn lege kijkkastjes, gemaakt door interieur- en architectuurschilders, waarvan de wanden beschilderd zijn met een perspectiefafbeelding van het interieur van een huis of een kerk. Wanneer men door het kijkgat in het voorpaneel zo'n kastje inkijkt, veroorzaakt dit perspectief een verrassend ruimtelijke effect, waardoor men het gevoel heeft zich daadwerkelijk in de ruimte te bevinden.
Slechts enkele van deze perspectiefkastjes zijn bewaard gebleven. In dit artikel bespreken we de opzet van de perspectief in de kast van Elinga, die te zien is in Museum Bredius in Den Haag[1]. Verder besteden we aandacht aan een meer eigentijds perspectiefdoosje, dat ook als voorbeeld voor een werkstuk van leerlingen kan worden gebruikt. Maar eerst herhalen we enkele beginselen van perspectief en leiden daaruit af hoe perspectivische afbeeldingen het beste bekeken kunnen worden.

Lineair perspectief met vluchtpunten

Figuur 1 geeft het basisprincipe van het afbeelden in lineair perspectief weer. De kunstenaar kijkt met één oog vanuit een vast punt door een vlakke glasplaat, het tafereel, naar een ruimtelijk object en 'trekt' op het tafereel 'over' wat hij ziet.
Rechte lijnen die evenwijdig zijn aan het tafereel worden getekend als rechte lijnen, waarbij richting en verhoudingen tussen afstanden bewaard blijven. Dat is niet zo bij rechten die niet evenwijdig aan het tafereel zijn. In dat geval krijgen we te maken met een vluchtpunt.
Stel dat een kunstenaar met behulp van een glazen tafereel een lijn l, niet evenwijdig met het tafereel, in beeld brengt. We nemen aan dat hij hierbij gebruik maakt van een rij van punten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ die zo op l gekozen zijn, dat hun afstand tot het tafereel onbegrensd toeneemt (zie figuur 1). De punten waarin de kijklijnen uit het oog O van de kunstenaar naar $A_1, A_2, A_3, \ldots$ het tafereel snijden, noemen we $A_1', A_2', A_3', \ldots$. Deze punten liggen op het perspectiefbeeld l' van l.

De hoeken die de kijklijnen $OA_1, OA_2, OA_3, \ldots$ met l maken, worden steeds kleiner en hun grootte gaat naar 0. Dus: als n naar oneindig gaat, gaat de richting van OA_n en daarmee de richting van OA_n' naar de richting van l. Hieruit volgt dat de rij $A_1', A_2'. A_3', \ldots$ convergeert naar – en dat l' dus eindigt in – het punt V van het tafereel waarvoor geldt dat OV evenwijdig is met l. Dit punt V wordt het *vluchtpunt* van de lijn l genoemd.

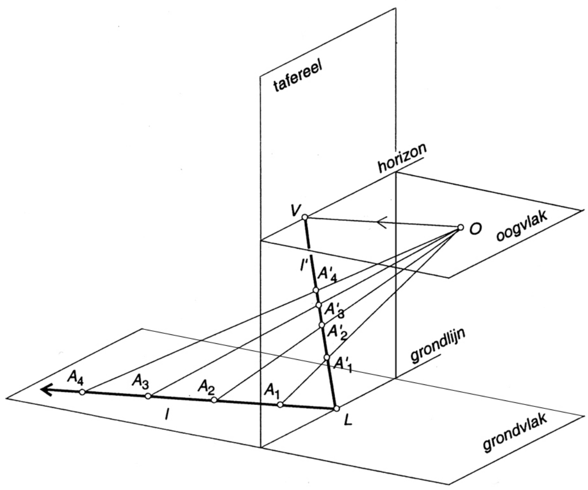


fig. 1 Lineair perspectief met vluchtpunt

Stelling
Het vluchtpunt V van een rechte lijn l in een perspectiefafbeelding is het punt waarin het vlak van die afbeelding gesneden wordt door de kijklijn die vanuit het 'juiste' gezichtspunt evenwijdig met l getrokken wordt.

Als l een horizontale lijn is, bijvoorbeeld zoals in de situatie van figuur 1 een lijn die in het horizontale *grondvlak* ligt, dan impliceert de stelling dat het vluchtpunt V van l op een horizontale kijklijn ligt. Deze kijklijn ligt dan in het zogenaamde *oogvlak*, dat is het horizontale vlak door het oog O, en V ligt dus op de *horizon*, dat is de snijlijn van het oogvlak met het tafereel.

Bewerking van eerder verschenen artikel in de *Nieuwe Wiskrant*, *21*(2) 2001

De positie van het oog

In de tijd van Leonardo da Vinci (1452-1519) was dit alles al bekend, waardoor het gebruik van een glasplaat gedeeltelijk of geheel overbodig werd en ook gefantaseerde ruimtelijke objecten in perspectief afgebeeld konden worden.
Figuur 1 maakt duidelijk dat je in een tweedimensionaal perspectiefbeeld 'diepte' ziet als je met één oog vanuit één bepaald punt kijkt. Dat punt is precies het punt waar de kunstenaar, in werkelijkheid of in theorie, zijn oog gehouden heeft. Het is dan ook jammer dat perspectiefschilderijen in musea vaak zo zijn opgehangen, dat je door de knieën moet zakken of op een stoel of zelfs op een ladder zou moeten gaan staan om de juiste ooghoogte te bereiken. Wanneer de hoogte wel in orde is, is de positie van het oogpunt meestal niet aangegeven.
In de zeventiende eeuw had men nog weinig ervaring met het interpreteren van perspectiefbeelden, zoals wij die bijvoorbeeld door fotografie, film en tv wel hebben. Het is dan ook niet zo vreemd dat in die tijd in de kring van de Hollandse architectuur- en interieurschilders de perspectiefkast bedacht is als middel om op een natuurlijke manier 'goed' kijken af te dwingen. Met het kijkgat op de juiste plaats, een gat zo klein dat je er niet met twee ogen tegelijk door kúnt kijken, gaat het allemaal vanzelf goed. Een bijkomend voordeel is dat de beschouwer van de afbeeldingen in de perspectiefkast niet afgeleid wordt door andere zaken in zijn omgeving. Als die afbeeldingen niet alleen de wand tegenover het kijkgat beslaan, maar ook de door het kijkgat zichtbare delen van de overige wanden, krijgt de kijker zelfs de illusie dat hij zelf deel uitmaakt van de afgebeelde ruimte.

Distantiepunten

Nu bekijken we de situatie waarin het tafereel verticaal opgesteld is, terwijl het in perspectief af te beelden object gekenmerkt wordt door lijnen die loodrecht op het tafereel staan en een aantal in horizontale of verticale vlakken gelegen lijnen die een hoek van 45° met het tafereel maken. Zo'n situatie is te zien in figuur 2, waarin *ABCD.EFGH* een kubus is. Uit de bovengenoemde stelling volgt dat de kijklijn naar het vluchtpunt van de lijnen loodrecht op het tafereel, dat zijn in de figuur de lijnen *AD*, *BC*, *EH* en *FG*, zelf ook loodrecht op het tafereel staat. Dit vluchtpunt is dus de loodrechte projectie van het punt *O* op het tafereel en wordt daarom het *oogpunt* genoemd, aangeduid met de letter *P*. Dit punt ligt in zo'n geval op de horizon.
In figuur 2 zijn ook vier vluchtpunten getekend van lijnen die een hoek van 45° met het tafereel maken: D_1, D_2, D_3 en D_4. De punten D_1 en D_2 zijn de vluchtpunten van horizontale zijvlaksdiagonalen, D_1 van *BD* en *FH*, D_2 van *AC* en *EG*, en liggen dus op de horizon. D_3 en D_4 zijn de vluchtpunten van diagonalen van verticale zijvlakken van de kubus. Alle zijvlaksdiagonalen maken hoeken van 45° met het tafereel en met de richting loodrecht op het tafereel. Volgens de stelling geldt dan hetzelfde voor de kijklijnen OD_1, OD_2, OD_3, en OD_4.

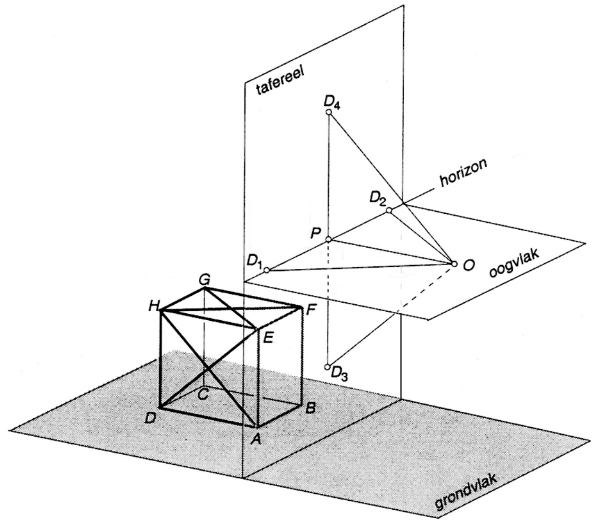


fig. 2 Perspectief van een kubus met distantiepunten

De driehoeken OPD_1, OPD_2, OPD_3 en OPD_4 hebben dus twee hoeken van 45° en een rechte hoek en hieruit volgt: $OP = PD_1 = PD_2 = PD_3 = PD_4$. De *distantie*, dat is de afstand van *O* tot het tafereel, is gelijk aan *OP* en dus ook gelijk aan de afstand van *P* tot de punten D_1, D_2, D_3 en D_4. Dit verklaart dat de punten D_1, D_2, D_3 en D_4 *distantiepunten* genoemd worden.
Zodra de perspectieftekenaar de positie van zijn oog *O* ten opzichte van het tafereel heeft vastgelegd, kan hij dus gemakkelijk het oogpunt *P* en de distantiepunten D_1, D_2, D_3 en D_4 bepalen. Deze punten kan hij vervolgens bij de constructie van de perspectiefafbeelding gebruiken als vluchtpunten van de kenmerkende lijnen van zijn object. Wie kant-en-klare perspectieftekeningen goed wil bekijken, moet hierin dan ook zoeken naar het vluchtpunt van lijnen die in werkelijkheid loodrecht op het tafereel hebben gestaan en een vluchtpunt van horizontale of verticale lijnen die een hoek van 45° met het tafereel maakten. Op basis van dezelfde kennis kan dan met behulp van deze punten het juiste gezichtspunt *O* bepaald worden.

Een- en tweepunts perspectief

De zeventiende-eeuwse Hollandse architectuur- en interieurschilders beschikten vrijwel zeker niet over de kennis van vluchtpunten in de hierboven gepresenteerde vorm. Wél kenden zij, met name door de voorbeeldboeken van Hans Vredeman de Vries[2] uit 1604-1605, de constructieregels voor situaties waarin het oogpunt en de distantiepunten op de horizon als vluchtpunten optreden. Meestal gebruikten zij *eenpunts perspectief*, perspectief waarbij de meest kenmerkende lijnen evenwijdig zijn met of loodrecht staan op het tafereel, en dus óf geen vluchtpunt óf het oogpunt als vluchtpunt hebben. Bekende voorbeelden zijn de huiskamers van Johannes Vermeer (1632-1675)[3] en de kerken en kerkinterieurs van Pieter Jansz. Saenredam (1597-1665)[4], waarbij het tafereel steeds evenwijdig met een van de wanden van het af te beelden gebouw of interieur gekozen is. De distantiepunten op de horizon spelen hierin hoogstens een rol als vluchtpunt van de diagonalen – of, als de tegels diagonaal gelegd zijn, van de zijden – van vierkante vloertegels en soms van de zijden van een enkel diagonaal geplaatst meubel.

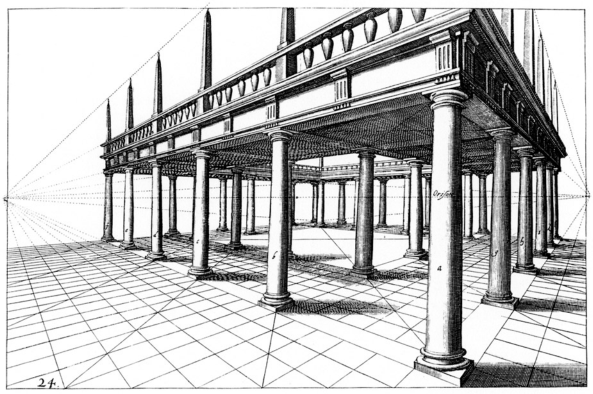


fig. 3 Hans Vredeman de Vries, Perspective, Eerste deel, Leiden: Hendrick Hondius, 1604, fig. 24

boeken van Vredeman de Vries bevatten ook enkele afbeeldingen in een perspectief dat ontstaat als het tafereel zo opgesteld wordt dat het hoeken van 45° met de opstaande wanden van het af te beelden gebouw of interieur maakt, zie bijvoorbeeld figuur 3. In zo'n geval zijn de twee distantiepunten op de horizon de belangrijkste vluchtpunten, terwijl het oogpunt een ondergeschikte rol als vluchtpunt speelt. Met deze bijzondere vorm van tweepunts perspectief, het *diagonaal tweepunts perspectief*, kan een levendiger effect bereikt worden dan met eenpunts perspectief, terwijl de benodigde kennis over vluchtpunten dezelfde is. Toch heeft slechts een handjevol schilders in het zeventiende-eeuwse Holland zich aan deze soort perspectief gewaagd. Dat waren vooral schilders van kerkinterieurs, bijvoorbeeld Gerard Houckgeest (circa 1600 – 1661)[5].

De perspectiefkast van Elinga

De enige nog in Nederland aanwezige zeventiende-eeuwse perspectiefkast wordt permanent tentoongesteld in Museum Bredius in Den Haag[6]. De *driehoekige* kast dateert uit circa 1670 en wordt toegeschreven aan Pieter Janssens Elinga (1623- voor 1682). De kast toont het interieur van een rechthoekig Hollands voorhuis. Het voorpaneel met het kijkgat midden in de onderzijde en de lichtopening daarboven, is niet bewaard gebleven. Figuur 4 laat een vooraanzicht zien dat ook, in kleur, te vinden is op de website van het museum. De kast is 82 cm hoog, 84 cm breed en 42 cm diep[7]. De zijwanden maken een hoek van 90º met elkaar en een hoek van 45° met de voorzijde van de kast. Dit maakte deze wanden bij uitstek geschikt voor het afbeelden van een rechthoekig interieur in diagonaal tweepunts perspectief, wat Elinga dan ook – anders dan zijn gewoonte was[8] – hier gedaan heeft. Om de perspectief van deze kast te begrijpen, stellen we ons voor dat de schilder met een glazen kast van dezelfde vorm en grootte in een werkelijk bestaand rechthoekig interieur gewerkt heeft (zie figuur 5). Omdat de boven- en onderzijde van de kast evenwijdig zijn met de boven- en onderzijde van het voorhuis, hebben de delen van het balkenplafond en de vloertegels die hierop afgebeeld zijn hun ware vorm behouden. De poten van de gedeeltelijk op de bodem van de kast afgebeelde stoel (die in figuur 5 niet getekend is) hebben als vluchtpunt het in de figuur aangegeven oogpunt P''. Dit punt, de loodrechte projectie van het oog O op de bodem van de kast, ligt nu midden op de rand aan de voorzijde van de kastbodem.

fig. 4 (Toegeschreven aan) Pieter Janssens Elinga, Interieur, circa 1670. Perspectiefkast, Museum Bredius, Den Haag

Interessanter is de perspectief op de zijwanden van de kast. In figuur 5 zijn op de horizon van die wanden de oogpunten P en P' en de distantiepunten D_1 en D_2, links, en D_1' en D_2', rechts, aangegeven. Deze punten liggen alle in het oogvlak, dat is het horizontale vlak door O. Figuur 10 geeft een bovenaanzicht, waarin voor de duidelijkheid de perspectiefkast en de tegels in verhouding tot de afmetingen van het interieur te groot getekend zijn. We zien dat, door de bijzondere vorm van de kast en de manier waarop deze in het interieur is opgesteld, de kijklijnen OP en OP' evenwijdig zijn met de zijden van de diagonaal gelegde vloertegels. Uit de hierboven geformuleerde stelling volgt nu dat P en P' de vluchtpunten van die zijden op de linker- en de rechterzijwand van de perspectiefkast zijn.

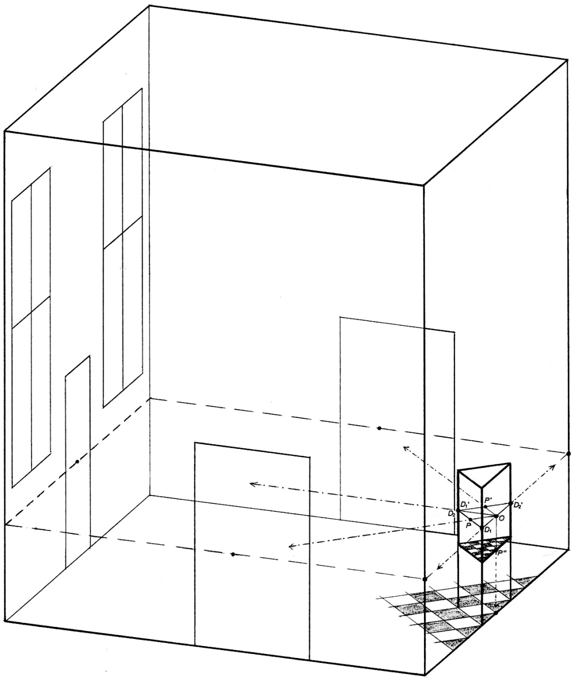


fig. 5 De positie van de perspectiefkast in het afgebeelde interieur. Ingenieursprojectie, schaal 1 : 72

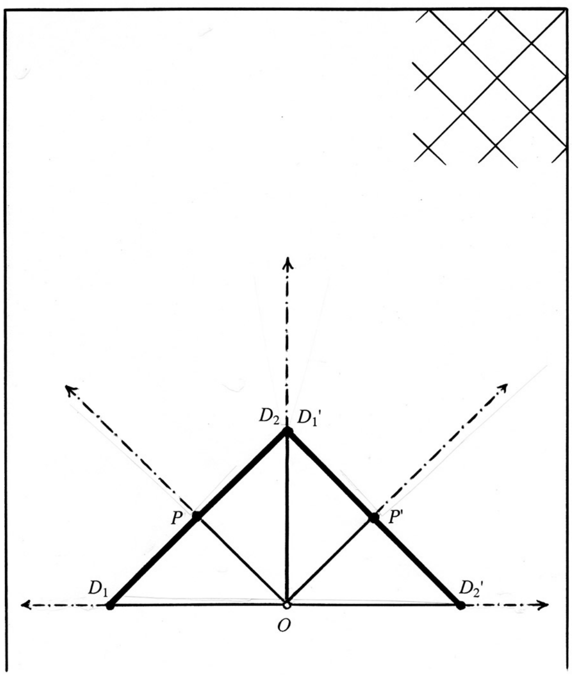


fig. 6 Bovenaanzicht van de situatie van figuur 5, niet in de juiste verhoudingen getekend

Verder blijkt uit figuur 6 dat de vorm van de kast en de plaats van het kijkgat maken dat de punten D_1 en D_2' precies op de aansluiting van de zijpanelen met de voorzijde van de perspectiefkast liggen, terwijl de punten D_2 en D_1' samenvallen op de aansluiting van de zijpanelen met elkaar. Deze distantiepunten zijn belangrijker voor de perspectief op de zijpanelen dan de oogpunten. Immers, OD_1 en OD_2' zijn niet alleen evenwijdig met diagonalen van vloertegels, maar ook met de horizontale lijnen in de achterwand van het interieur. D_1 is dus op het linkerpaneel en D_2' op het rechterpaneel van de kast het vluchtpunt van deze lijnen. Kijklijn $OD_2 = OD_1$' is ook evenwijdig met diagonalen van vloertegels, maar bovendien evenwijdig met de horizontale lijnen van de zijwanden van het interieur. Het punt $D_2 = D_1$' is dus het vluchtpunt van deze lijnen op de zijpanelen van de perspectiefkast.

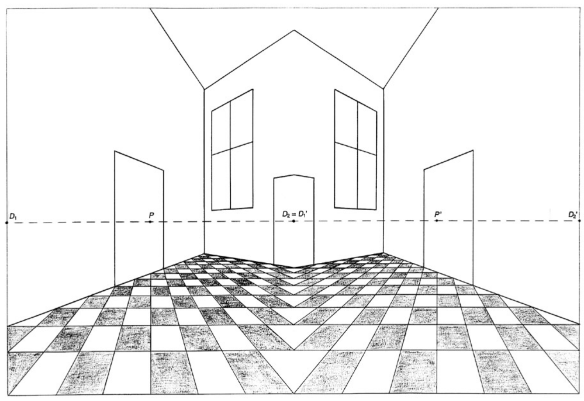


fig. 7 Uitslag van de zijpanelen van de perspectiefkast van Elinga. Schaal 1 : 16

Figuur 7 geeft een verkleinde uitslag van de zijpanelen van de perspectiefkast met een schets van de hoofdlijnen van hun beschildering. In de figuur zijn ook de horizon en de bovengenoemde oogpunten en distantiepunten aangegeven. Aan de hand van deze figuur is na te gaan dat de constructie van Elinga's diagonaal tweepunts perspectief in overeenstemming is met wat hierboven over de vluchtpunten van de kenmerkende horizontale lijnen van de wanden en de vloer van het interieur gezegd is. Zo blijken de verlengden van de boven- en de onderzijde van het linkerraam door D_1 te gaan, terwijl de verlengden van de boven- en de onderzijde van de linkerdeur door D_2 gaan. Figuur 7 kunt u ook gebruiken om – zonder naar Den Haag te hoeven gaan – het effect te ervaren dat de perspectief van de zijwanden van de kast van Museum Bredius bij de goede manier van kijken geeft. Vergroot hiertoe de figuur[9], liefst tot ongeveer A3-formaat, en druk de vergrote figuur af op stevig papier of dun karton. Vouw de afdruk dubbel langs de as van symmetrie. Vouw het resultaat weer half open zo dat de beide helften, net als de zijwanden van de perspectiefkast, een hoek van 90° met elkaar maken. Houd het opengevouwen blad verticaal voor u en kijk met één oog op de hoogte van de getekende horizon, vanuit wat op dat moment het midden van het verbindingslijnstuk tussen de punten D_1 en D_2' is. Als u een bril draagt, moet u misschien van iets dichterbij of van iets verder weg kijken. Even proberen, totdat u echt een rechthoekig interieur met een vloer van diagonaal gelegde vierkante tegels ziet.

Een twintigste-eeuws perspectiefdoosje

Aan het eind van de zeventiende eeuw raakte het publiek uitgekeken op de perspectiefkastjes. Ze werden dan ook niet meer gemaakt. Rond 1980 trof Hans ter Heege (Stichting Leerplan Ontwikkeling, Enschede) een perspectiefdoosje als verpakking van twee slagroombollen die hij in een banketbakkerswinkel in Rossum had gekocht. Sommige lezers zullen het ‘bakkersdoosje’ misschien gezien hebben in een werkgroep. De precieze herkomst van het doosje is niet bekend, ondanks dat op de achterwand, ondersteboven, duidelijk ‘NIJMAN CI’ te lezen is.
Omdat dit artikel zonder een bespreking van deze moderne variant van het zeventiende-eeuwse perspectiefkastje onvolledig zou zijn, hebben we een ‘origineel’ van Hans ter Heege nog maar eens uitgevouwen en zonder medeweten van, maar met veel dank aan de tekenaar gekopieerd, zie de figuur op pagina 69. Als u deze figuur met een factor 1.6 vergroot, op stevig papier of dun karton afdrukt, netjes uitknipt of -snijdt (vergeet de sleufjes links en rechts en het kijkgat niet) en in elkaar vouwt, heeft u een kopie van het bakkersdoosje op ware grootte. Door het kijkgat bekeken zijn de benen van de bakker niet meer zo raar lang en blijkt het ladenkastje tegen de rechterzijwand gewoon rechthoekig te zijn.

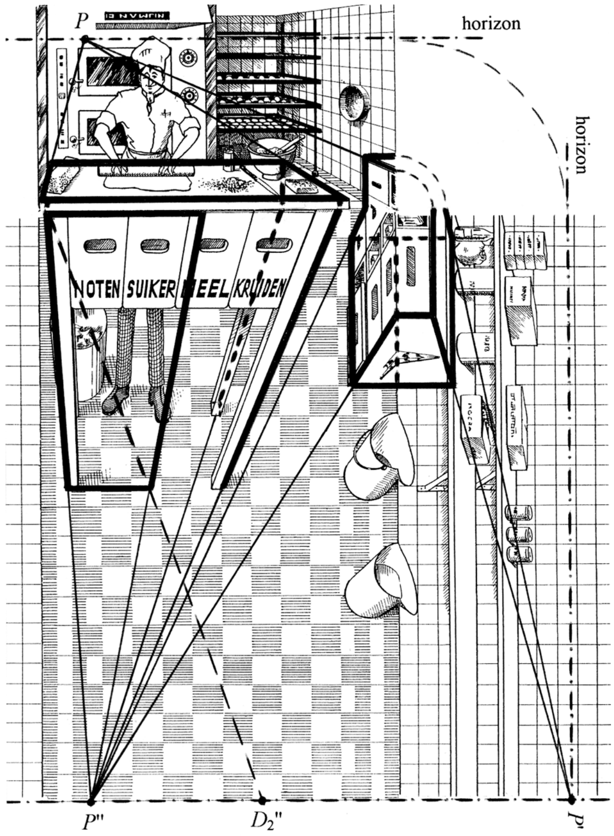


fig. 8 Een deel van de uitslag van het bakkersdoosje met vluchtpunten en hulplijnen

Om te begrijpen hoe de perspectief van het doosje is opgezet, stellen we ons weer voor dat hiervoor een glazen doosje van dezelfde vorm en grootte gebruikt is. Dit glazen doosje heeft dan, op pootjes, in een werkelijk bestaande, rechthoekige bakkerij gestaan zo dat de opstaande wanden en de bodem van het doosje evenwijdig waren met de wanden en de vloer van de bakkerij. Dit verklaart dat de op de bodem van het doosje afgebeelde vierkante vloertegels en de op de zijwanden en het linkerdeel van de achterwand van het doosje afgebeelde vierkante wandtegeltjes hun vorm behouden hebben. De tekening op de achterwand, waarop ook gedeelten van de rechterzijwand en de vloer van de bakkerij zijn afgebeeld, is in eenpunts perspectief gemaakt. Omdat de afbeelding van de vloer van de bakkerij niet doorloopt op de zijwanden van het doosje, terwijl omgekeerd de zijwanden van de bakkerij ook niet gedeeltelijk op de bodem van het doosje zijn afgebeeld, spelen andere oogpunten dan dat op de achterwand geen rol als vluchtpunt van kenmerkende lijnen van de bakkerij zelf. Wél fungeren de oogpunten op de rechterzijwand en de bodem van het doosje als vluchtpunt voor lijnstukken van in de bakkerij aanwezige objecten zoals de doosjes op de planken, het ladenkastje, de emmers en de tafel.
Figuur 8 toont een verkleinde uitslag van de achterwand, de rechterzijwand en de bodem van het bakkersdoosje met de oogpunten P, P' en P''. Deze punten zijn de loodrechte projecties van het middelpunt O van het kijkgat op die wanden als het doosje in elkaar gevouwen is. In de figuur hebben we door het accentueren en verlengen van een aantal lijnstukken laten zien dat de tekenaar op een goede manier met de perspectief is omgegaan. De lijnstukken die in werkelijkheid loodrecht op de achterwand, de rechterzijwand of de bodem van het glazen doosje stonden, zijn – voor zover zij op de betreffende wand afgebeeld zijn – zo getekend dat hun verlengden door P, P' of P'' gaan. En voor zover zij op een andere wand getekend zijn, hebben deze lijnstukken hun richting behouden. Dit verklaart bijvoorbeeld de knik in de rechterachterpoot van de tafel (zie stippellijn).

Verhoudingen in het bakkersdoosje

Misschien heeft de tekenaar bij deze constructie wel uitsluitend oogpunten – en geen distantiepunten – als vluchtpunten gebruikt. Uit figuur 8 blijkt dat voor de constructie van de perspectief van het ladenkastje tegen de rechterwand van de bakkerij geen andere vluchtpunten nodig zijn, ook niet om de afmetingen van het kastje in de juiste verhoudingen weer te geven. De tekenaar heeft namelijk eerst op het grondvlak van het doosje de bodem van het kastje ‘op ware grootte’ kunnen tekenen: vijf vloertegels breed en anderhalve tegel diep, en op het rechterzijvlak van het doosje het achtervlak van het kastje: vijf vloertegels, dat is vijf maal anderhalf wandtegeltje breed en drie wandtegeltjes hoog. Vervolgens hoefde hij alleen maar lijnstukken evenwijdig aan andere lijnstukken en lijnstukken met een verlengde door P, P' of P'' te tekenen en enkele afstanden van de rechterwand van het doosje naar de achterwand over te brengen.

Lastiger is het geweest om de los van de wanden staande tafel met de bakker erachter in de juiste verhoudingen in perspectief te tekenen. Jammer genoeg weten we niet hoe de tekenaar dit aangepakt heeft. Misschien heeft hij gedeeltelijk 'op het oog' gewerkt, kijkend door het kijkgat. Als dat zo is, heeft hij een goed gevoel voor verhoudingen gehad. We zullen dat illlustreren door uit figuur 8 het nodige af te leiden over de lengte van de afgebeelde bakker en de afmetingen van zijn werktafel.

In de figuur hebben we op de achterwand en de rechterzijwand van het doosje de horizon getekend, door het oogpunt P respectievelijk het oogpunt P'. We zien dat de horizon bijna negen wandtegeltjes hoog is en dat dit ook geldt voor de bovenkant van de muts van de bakker. Als we aannemen dat de wandtegeltjes 20 cm bij 20 cm zijn, dan heeft de tekenaar dus een bakker getekend die in werkelijkheid, inclusief muts, zo'n 175 cm lang is en die zonder muts dus nog geen 160 cm meet. De werktafel van de bakker is, gelet op onderkanten van de poten zoals die op de bodem van het doosje getekend zijn en het iets grotere bovenblad, ruim vijf vloertegels breed en iets meer dan drie vloertegels diep. Als de wandtegeltjes inderdaad 20 cm bij 20 cm zijn, zijn de vloertegels 30 cm bij 30 cm en dan heeft de werktafel dus een breedte van circa 160 cm en een diepte van circa 100 cm.

Om nu ook iets over de hoogte van de tafel te weten te komen, hebben we het punt D_2'' op de bodem van het doosje getekend. D_2'' is distantiepunt op dit horizontale tafereel, want de afstand van dit punt tot het oogpunt P'' is gelijk aan de afstand van O tot P'' en deze is, als het doosje in elkaar gevouwen is, juist de afstand – de *distantie* – van O tot de bodem van het doosje. Zie nu de dik getekende vierhoek tegen de voorkant van de tafel. Deze hebben we als volgt geconstrueerd. Eerst is de linkerzijde langs een tafelpoot, en even lang als die tafelpoot, getekend. Daarna is vanuit het bovenste punt van die zijde een hulplijn naar D_2'' getrokken. Vanuit het onderste punt van de linkerzijde is vervolgens een horizontaal lijnstuk getekend dat eindigt op de hulplijn. De vierhoek heeft ten slotte een horizontale bovenzijde gekregen en een rechterzijde waarvan een verlengde door P'' gaat. De vierhoek is dus het beeld van een verticale rechthoek waarvan de hoogte gelijk is aan de hoogte van de tafel tot aan het werkblad. Een diagonaal van deze rechthoek gaat in de tekening na verlenging door distantiepunt D_2''. Dit betekent dat die diagonaal D_2'' als vluchtpunt heeft en dus in de situatie met het glazen doosje in de bakkerij evenwijdig was met de kijklijn OD_2''. Die kijklijn maakte in die situatie – evenals nu, als het kartonnen doosje in elkaar gevouwen is – een hoek van 45° met de verticale kijklijn OP''. Dus de diagonaal van de rechthoek maakte in werkelijkheid een hoek van 45° met de verticale zijde van de rechthoek. Hieruit volgt dat de rechthoek een vierkant was. Door dit vierkant te tekenen, zijn we erin geslaagd de hoogte van de tafel tot aan het werkblad op de bodem van het doosje zichtbaar te maken. Daar zien we dat het vierkant zijden heeft die ongeveer twee plus viervijfde vloertegels lang zijn, wat bij vloertegels van 30 cm bij 30 cm neerkomt op zo'n 84 cm. We concluderen dat de werktafel van de bakker – gelet op de dikte van het werkblad – een hoogte heeft van circa 90 cm. Dit is een normale werkhoogte voor een bakker die bijna 160 cm lang is.

Probeer nu zelf te bedenken hoe de tekenaar te werk gegaan zou kunnen zijn om met behulp van de oogpunten én distantiepunt D_2'' de perspectieftekening van de bakker en zijn werktafel op te zetten.

Het perspectiefdoosje voor leerlingen

Het maken van een perspectiefdoosje kan een mooie, motiverende opdracht zijn voor leerlingen in het voortgezet onderwijs. Dat geldt in het bijzonder voor leerlingen die het Zebra-boekje *Perspectief, hoe moet je dat zien?*[10] ten minste tot en met diagonaal tweepunts perspectief (p. 27) hebben doorgewerkt. Ter voorbereiding zouden zij dan nog een of twee lessen over perspectiefkastjes moeten krijgen en/of dit artikel moeten lezen. De tijd die verder voor zo'n opdracht nodig is, hangt af van de vorm van het doosje, de complexiteit van de erin aangebrachte perspectieftekeningen en de eisen die aan de vorm en de inhoud van de presentatie gesteld worden.

Een kant-en-klare schoenendoos kan als basis dienen voor een product dat wat perspectief betreft vergelijkbaar is met het bakkersdoosje. Sommige schoenendozen zijn zelfs al voorzien van een gat en kunnen zonder problemen herhaaldelijk uit en in elkaar gevouwen worden. Dit laatste is heel handig bij het tekenen, controleren, gummen en weer overtekenen. Maar wie de uitdaging aandurft om een driehoekig doosje te maken met een rechte hoek, zoals de zeventiende-eeuwse perspectiefkast in Den Haag, kan zoiets natuurlijk gemakkelijk zelf uit karton snijden en vouwen.

Een groot voordeel van deze opdracht, zowel voor de leerling als voor de leraar, is dat altijd in één oogopslag duidelijk is of de hoofdzaken van de perspectief in het doosje kloppen.

Agnes Verweij, TU Delft

Dit artikel is een ingekorte versie van het gelijknamige artikel dat verscheen in de Nieuwe Wiskrant 21(2) van december 2001en dat is gebaseerd op de plenaire vrijdagmiddagvoordracht van de auteur tijdens de Nationale Wiskunde Dagen van februari 2001.

Noten

[1] Van de overige vijf bewaard gebleven perspectiefkastjes uit de zeventiende eeuw zijn er drie te zien in het Nationalmuseum in Kopenhagen, terwijl de National Gallery in London in het Institute of Arts in Detroit er elk één in hun bezit hebben. Voor meer informatie zie:
Blankert, Albert (1980). *Museum Bredius, Catalogus van de schilderijen en tekeningen, tweede, herziene en bijgewerkte druk*. Den Haag: Dienst voor Schone kunsten der Gemeente 's-Gravenhage, zie pp. 56-57.
Koslow, Susan (1967). 'De wonderlijke Perspectyfkas: An Aspect of Seventeenth Century Dutch Painting', *Oud Holland, 82*, 35-56.
Leeman, Fred (1975). *Anamorfosen, Een spel met waarneming, schijn en werkelijkheid*. Amsterdam: Andreas Landshoff Productions, 82-83 en 88-104.

[2] Vredeman de Vries, Hans (1979). *Perspective*, *deel I (1604) en deel II (1605)*, t*oegelicht door Peter Karstkarel*. Mijdrecht: Tableau BV. Uit de beschrijving die Vredeman de Vries van zijn perspectieftekeningen geeft, blijkt dat hij niet op de hoogte was van de achtergronden van de constructieregels die hij toepaste. Constructies waarbij alleen het oogpunt en enkele distantiepunten als vluchtpunt gebruikt hoefden te worden, voerde hij wel goed uit, maar in andere gevallen maakte hij nogal eens grove fouten.

[3] Zie www.kfki.hu/arthp/html/v/vermeer/index.html 'Paintings between 1661-1670' en 'Paintings after 1670'.

[4] Zie bijvoorbeeld
www.kfki.hu/arthp/html/s/saenreda/index.html

[5] Zie bijvoorbeeld
www.kfki.hu/arthp/html/h/houckgee/index.html en klik ook op 'i' onder 'Comment'.

[6] Zie voor de werken van Elinga in de collectie van Museum Bredius, waaronder de perspectiefkast:
www.museumbredius.nl/schilders/elinga.htm
Voor adres en openingstijden van het museum zie
www.museumbredius.nl/contacts.htm

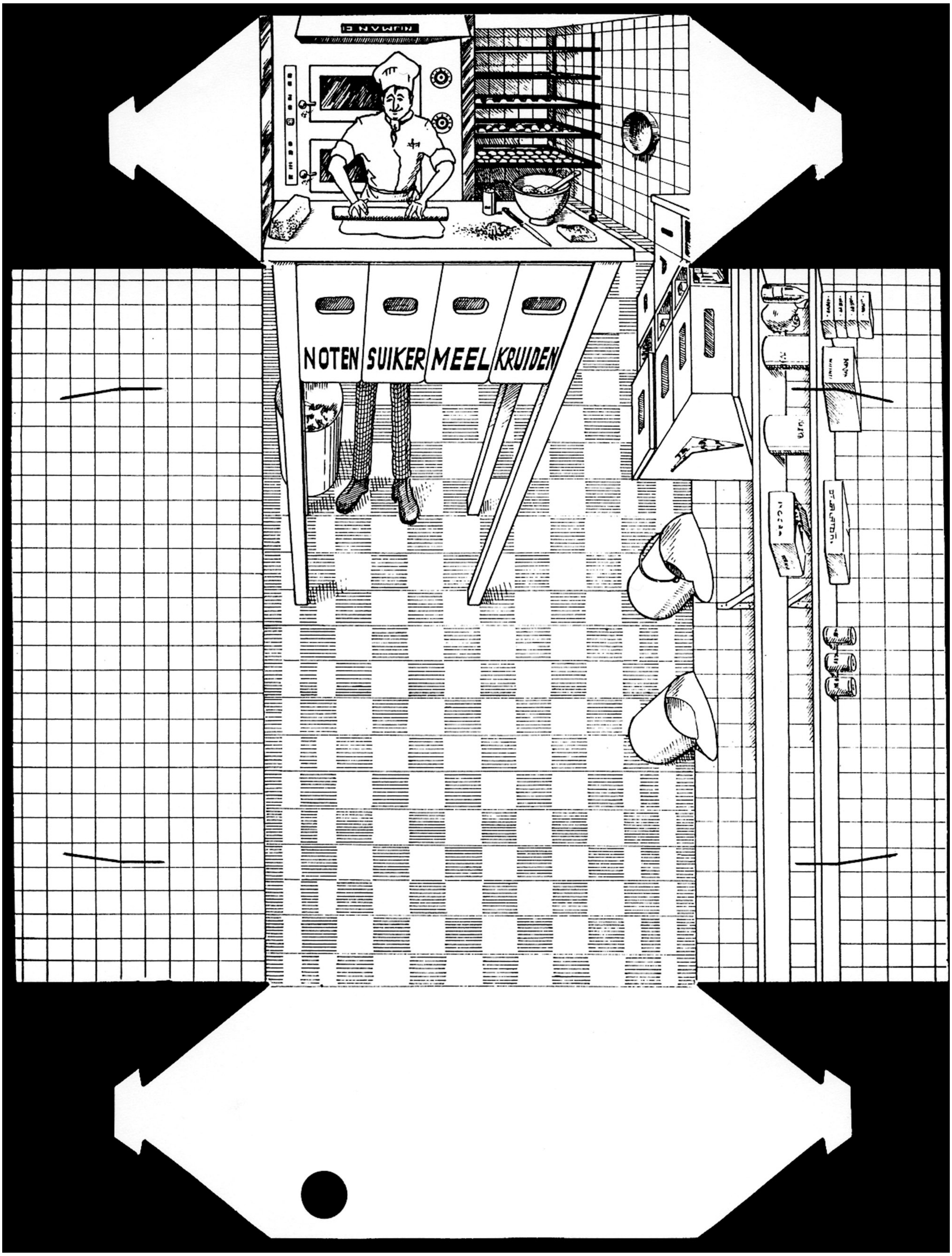
[7] In alle literatuur over deze kast, ook in de catalogus en op de website van Museum Bredius, zijn de gegevens over de hoogte en de breedte verwisseld.

[8] Twee andere werken van Elinga zijn te vinden via:
www.kfki.hu/arthp/html/e/elinga/index.html

[9] Figuur 7 en werkbladen zijn te downloaden van www.fi.uu.nl/wiskrant bij de nummers 21(2). Daar staan ook links van noot 2, 3 en 4.

[10] Verweij, Agnes en Martin Kindt (1999). *Perspectief, hoe moet je dat zien?* Zebra-reeks deel 2. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Werkblad: Perspectief in een kastje



Ooit moet het toch echt niet meer sneller kunnen, zou je zeggen. Door technische verbeteringen (overdekte banen, nieuwe schaatspakken, klapschaatsen, enzovoort) worden steeds snellere tijden gerealiseerd. Maar zelfs als deze invloeden eruit gefilterd worden is het eind nog niet in zicht. **Ruud Koning** laat de *extreme waarden theorie* los op schaatstijden en voorspelt nog veel scherpere wereldrecords. Dit artikel is geschreven naar aanleiding van een voordracht op de Nationale Wiskunde Dagen 2003.

Snel, sneller, snelst: statistiek en 1500 m schaatsen

Inleiding

Citius, *Altius*, *Fortius:* sneller, hoger, sterker. Iedereen kent dit motto van het Internationaal Olympisch Comité. Toch roept het meteen een vraag op: kunnen we eigenlijk wel sneller gaan dan vorig jaar? Hoe vaak zijn records nog te verbeteren? Per slot van rekening zijn er grenzen aan de atletische vermogens van mensen! Toch is het mogelijk gebleken om regelmatig wereldrecords te verbeteren. De belangrijkste reden hiervoor is de technologische vooruitgang: sportkleding is nu beter dan vroeger, schoeisel is verbeterd, de klapschaats is beter dan de ‘oude’ Noor, trainings- en voedingsmethoden zijn verbeterd en doping is verbeterd (deze laatste vorm van technische vooruitgang is overigens niet toegestaan).

Het blijkt dat de wiskunde iets heeft te vertellen over de frequentie van recordverbeteringen. Het verwachte aantal records neemt slechts langzaam toe met het aantal evenementen, dus als een sport enige tijd bestaat zijn er weinig recordverbeteringen meer te verwachten.
Verder blijkt dat in de statistiek ook iets bekend is over hoe extremen zich gedragen, dus we kunnen niet alleen uitspraken doen over het aantal records, maar ook over recordtijden. Deze analyses zijn echter alleen toepasbaar op een stationaire situatie, waarin dus niets verandert. Gelukkig is er sprake van vooruitgang, dus in de loop van de tijd is men sneller gaan lopen, schaatsen, enzovoort.

Dit is in elk geval duidelijk zichtbaar in het leidende voorbeeld van dit artikel: de toptijden van 1500 m schaatsevenementen (mannen). Bovendien maakt het nogal wat uit voor de tijd of er wordt geschaatst op hoogte in Salt Lake City, of op het schuurpapierijs van Albertville. Hiermee blijken we rekening te kunnen houden, en we kunnen de effecten van schaatsen op hoogte, technische vooruitgang en toernooi-effecten van elkaar scheiden. Zo is het mogelijk om toch iets te zeggen over de kans dat de 1.43:95 van Parra binnenkort weer uit de boeken verdwijnt als mondiale toptijd.

Hoeveel records zijn te verwachten?

Vaak worden sportprestaties gemodelleerd als toevalsvariabelen. Dat is ook wel redelijk, want niemand is in staat om op deterministische wijze aan te geven hoe hard de snelste loper tijdens een bepaald evenement zal lopen of hoe scherp de winnende tijd op de Olympische 1500 m zal zijn. Iedereen die wel eens aan sport doet weet dat het op de ene dag nu eenmaal beter gaat dan op de andere! Als we sportprestaties beschrijven met behulp van toevalsvariabelen, doen we dat soort deterministische uitspraken niet. Wel proberen we bijvoorbeeld de kansverdeling van winnende tijden te bepalen of de kans dat een bestaand record wordt verbeterd.

Hoeveel nieuwe records kunnen we eigenlijk verwachten als er meer evenementen (of metingen) plaatsvinden? Om de gedachten te bepalen kijken we naar de 1500 m schaatstijden, waarbij we voor het gemak net doen alsof elke schaatser alleen schaatst. Naarmate er meer schaatsers de afstand hebben afgelegd, zal de snelste tijd scherper komen te staan. De eerste schaatser heeft natuurlijk even de snelste tijd in handen. Het verwachte aantal records bij één meting is dus één. Voor de tweede schaatser zijn er twee mogelijkheden: hij is sneller dan de eerste schaatser of hij is dat niet. Als hij sneller is, is er sprake van een recordverbetering en is het aantal records twee. Als we nu aannemen dat de schaatstijden onderling onafhankelijke trekkingen zijn uit een identieke verdeling, dan blijkt dat het aantal records R_n in n metingen de volgende verwachting en variantie heeft:

$$\mathrm{E}\,R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{1}$$

$$\mathrm{var}\,R_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2}\right) \tag{2}$$

Deze verwachting en variantie zijn *onafhankelijk* van de verdeling van de schaatstijden zelf. Een iets preciezere formulering van dit resultaat en het bewijs staat in de Appendix. Veel informatie over de kansverdeling van het aantal recordverbeteringen staat in Glick (1978). Als het aantal metingen groot is, kunnen we die verwachting en variantie eenvoudig benaderen. Aangezien

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n = \gamma \approx 0.5772$$

(γ is de constante van Euler) en

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \to \frac{\pi^2}{6}$$

$$\mathrm{E}\, R_n \approx 0.5772 + \ln n \qquad (3)$$

$$\mathrm{var}\, R_n \approx 0.5772 + \ln n - \frac{\pi^2}{6} \qquad (4)$$

Dit is een sombere boodschap voor topsporters. Het aantal records groeit slechts logaritmisch met het aantal pogingen! Verdubbeling van het aantal schaatsevenementen zou, naar verwachting, slechts leiden tot 0.7 ($\approx \ln 2$) nieuwe records. Gelukkig zien we in de praktijk dat records regelmatig worden verbeterd. De aanname dat de tijden identieke kansverdelingen volgen is niet erg realistisch.

De kansverdeling van extremen

Het is niet alleen mogelijk om iets te zeggen over de frequentie van records, maar ook over de scherpte van die records! De statistische theorie die dit allemaal behandelt staat bekend onder de naam ‘extreme value theory’[1]. In zekere zin is deze theorie vergelijkbaar met de centrale limietstelling. Stelt u zich voor dat we van een aantal onderling onafhankelijke metingen uit een identieke verdeling het gemiddelde berekenen. In dat geval volgt dat gemiddelde een normale verdeling als het aantal waarnemingen maar groot genoeg is. Iets preciezer geformuleerd: als $T_1, \ldots, T_n$ onderling onafhankelijk verdeelde toevalsvariabelen zijn uit een verdeling met verwachting μ en variantie σ^2, dan geldt, als het aantal waarnemingen groot genoeg is:

$$\sqrt{n}\,(\overline{T} - \mu) \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

De afwijkingen van het steekproefgemiddelde rond het populatiegemiddelde volgt een normale verdeling, als die afwijking tenminste wordt geschaald met een factor $\sqrt{n}$. Bestaan er nu ook dergelijke limietstellingen voor het maximum van een reeks toevalsvariabelen, waarbij we het steekproefmaximum centreren en misschien schalen? Het antwoord op de vraag is, merkwaardig genoeg, bevestigend. Als we bijvoorbeeld eens aannemen dat de T’s een exponentiële verdeling volgen, met parameter 1 (dus $\Pr(T \le t) = 1 - \exp(-t)$). Het is niet erg interessant om naar de kansverdeling van $M_n = \max(T_1,\ldots,T_n)$ te kijken voor toenemende n: het maximum zal groter en groter worden. Is het dan wel mogelijk om iets te zeggen over de kansverdeling van het maximum als we van dat maximum iets aftrekken? Dat is inderdaad het geval, en hier is $\ln n$ een goede keuze:

$$\begin{aligned} &\Pr(M_n - \ln n \le x) = \Pr(M_n \le x + \ln n) \\ &= \Pr(T_1 \le x + \ln n, \ldots, T_n \le x + \ln n) \\ &= \Pr(T_1 \le x + \ln n)^n = (1 - \exp(-\ln n)\exp(-x))^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\exp(-x)\right)^n \to \exp(-\exp(-x)). \end{aligned}$$

Net zoals het geval is bij de centrale limietstelling heeft het maximum een welgedefinieerde kansverdeling, mits het maximum goed genormaliseerd is. De kansverdeling in dit geval is de Gumbel-verdeling.

Het bovenstaande voorbeeld is eenvoudig, omdat de kansverdeling van T eenvoudig is. Echter, er bestaat een algemener resultaat:

Stelling 1 *Als de verdeling van* $M_n = \max(T_1, \ldots, T_n)$ *bestaat, dan is die van de vorm*

$$\Pr\left(\frac{1}{c_n}(M_n - d_n) \le x\right) = \begin{cases} \exp\left(-\left[\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \xi \ne 0 \\ \exp(-\exp(-x)) & \xi = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Onafhankelijk van de kansverdeling van de toevalsvariabelen waaruit we trekken, heeft het genormaliseerde maximum een bekende kansverdeling! Deze kansverdeling heet de ‘gegeneraliseerde extreme waarde verdeling’, omdat hij een generalisatie is van de drie klassieke extreme waarde verdelingen: de Weibull-, Gumbel- en Fréchetverdelingen. De verdeling waaruit we trekken bepaalt natuurlijk wel wat we moeten gebruiken voor c_n en d_n. Als de T’s een exponentiële verdeling volgen, dan hebben we $c_n = 1$, $d_n = \ln n$, en $\xi = 0$. Trekken we uit een standaardnormale verdeling, dan hebben we

$$c_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\ln n}},\ d_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln\ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2\ln n}} \quad \text{en } \xi = 0$$

en komen de gegevens uit een uniforme (0,1)-verdeling en hebben we $c_n = \frac{1}{n}$, $d_n = 1$, en $\xi = -1$. In figuur 1 staan de kansdichtheden van M_n als we gegevens hebben die normaal verdeeld zijn. Duidelijk is dat de kansverdeling van het maximum verder naar rechts ligt als de steekproef groter is. Dat is niet zo verbazingwekkend. Verder is spreiding van de kansverdeling voor $n = 50$ groter dan die voor $n = 20$.

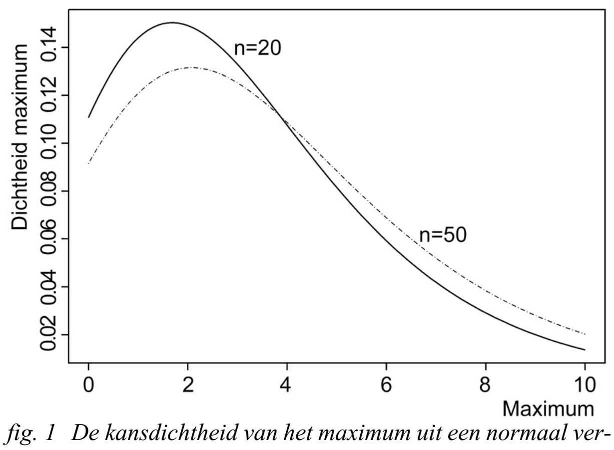


fig. 1 De kansdichtheid van het maximum uit een normaal verdeelde populatie

Deze stelling is buitengewoon belangrijk. De hoogte van de Delta-werken is erop gebaseerd (zie De Haan, 1990), banken bepalen zo hun reserves en de stelling vormt de basis voor het verzekeren van grote rampen, zoals een orkaan in het zuiden van de Verenigde Staten. Echter, ook de capaciteit van bijvoorbeeld het telefoonnetwerk wordt op basis van deze stelling bepaald: per slot van rekening wil je graag dat met grote kans aan de *maximale* belasting voldaan kan worden, en niet de *gemiddelde* belasting!

De theorie aan het werk

In deze paragraaf zullen we de theorie van extremen illustreren aan de hand van de ontwikkeling van toptijden op de 1500 m. De vooruitgang van het wereldrecord op deze afstand staat grafisch weergegeven in figuur 2. Het eerste officiële wereldrecord werd geschaatst op 11 januari 1893 door Jaap Eden op de natuurijsbaan in Groningen. Zijn tijd toen was 2.35, metingen van tienden of honderdsten van seconden waren nog niet mogelijk. Het huidige wereldrecord staat op 1.43:95 en is tijdens de Olympische Spelen van Salt Lake City geschaatst door Derek Parra. Uiteraard zijn de omstandigheden sinds 1893 veranderd: de schaatsen zijn verbeterd, de pakken zijn verbeterd, het ijs is beter, de trainingsmethoden zijn vooruitgegaan, en topprestaties kunnen tegenwoordig worden geleverd in indoorbanen op hoogte. Kortom, de kansverdeling van toptijden in 1893 is verschillend van die van toptijden anno 2002.

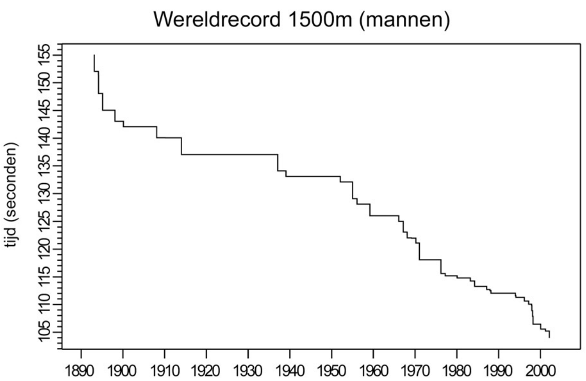


fig. 2 De ontwikkeling van het wereldrecord 1500 m

Teneinde het effect van al die factoren enigzins te kunnen kwantificeren, moeten we eerst meer in detail zien hoe de tijden zich hebben ontwikkeld. Voor dit onderzoek gebruiken we schaatstijden die zijn gerealiseerd na de invoering van de klapschaats.

De gegevensverzameling bestaat uit alle tijden gerealiseerd tijdens Olympische Spelen, wereldbekerwedstrijden en wereldkampioenschappen afstanden sinds het seizoen 1996/97[2]. In de figuren 3 en 4 zien we door middel van boxplots hoe de verdeling van de tijden zich heeft ontwikkeld. Bij de interpretatie van de figuren moet niet worden vergeten dat het seizoen 2002/2003 tijdens het schrijven van dit artikel nog bezig was.

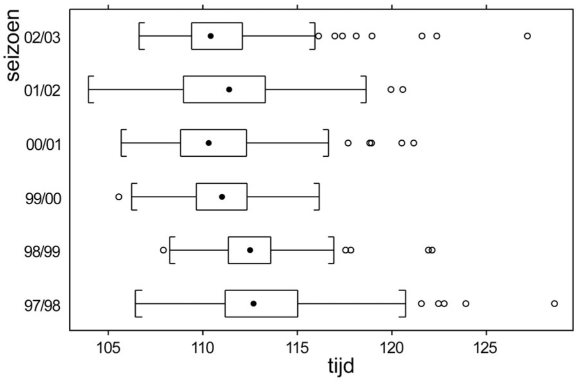


fig. 3 De verdeling van 1500 m tijden per seizoen

Allereerst zien we in figuur 3 dat de toptijden (de staafjes aan de linkerkant van de doos) een licht dalende trend volgen. Dat kan niet worden gezegd van de mediane tijd (de bolletjes in de doos): de gemiddelde schaatser is de afgelopen vijf seizoenen niet veel harder gaan schaatsen, terwijl het lijkt alsof de snelste schaatsers wel iets sneller zijn gaan schaatsen.

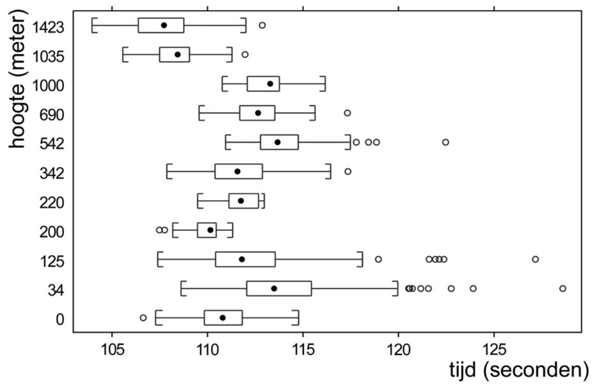


fig. 4 De verdeling van 1500 m schaatstijden per hoogte

Het effect van hoogte op schaatstijden zien we in figuur 4. Op de verticale as staat de hoogte van de baan, en voor elke baan is een boxplot gemaakt van alle tijden die op die baan zijn gerealiseerd. De banen op 1035 m en 1423 m springen er duidelijk uit: dat zijn Calgary en Salt Lake City. Er lijkt geen groot verschil te zijn tussen de tijden die geschaatst worden op de andere banen. Klaarblijkelijk weegt het hoogtevoordeel van de banen in Inzell (690 m) en Baselga di Pine (1000 m) niet op tegen het feit dat dit buitenbanen zijn.

Als we de parameters van de extreme waarde verdeling voor schaatstijden willen schatten, moeten we rekening houden met deze heterogeniteit: niet elke waarneming komt uit dezelfde kansverdeling. Bovendien kunnen we niet alle waarnemingen gebruiken, want de extreme waarden theorie gaat over extremen en niet over alle waarnemingen. Om die reden kijken we in het onderstaande alleen maar naar de vijf snelste tijden per evenement. Teneinde rekening te houden met de heterogeniteit, volgen we een aanpak die econometristen niet vreemd zal voorkomen. De figuren 3 en 4 suggereren dat de locatie van de verdeling van de toptijden varieert over tijd en hoogte. We nemen aan dat die variabiliteit constant is, en dat we de locatie kunnen modelleren.We nemen aan dat de gemeten toptijden de volgende kansverdeling volgen:

$$Pr\,(T \le t) = \begin{cases} \exp\left(-\left[\dfrac{t-\mu}{\sigma}\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \xi \ne 0 \\ \exp(-\exp(-t)) & \xi = 0 \end{cases}$$

$\mu = \mu_0 + \mu_1 H + \mu_2 D + \mu_3 O + \mu_4 S98/99 + \mu_5 S99/00 + \mu_6 S01/02 + \mu_7 S02/03$

De parameter μ van de extremen waarde verdeling hangt af van de omstandigheden waaronder de tijd werd gerealiseerd: het seizoen (S98/99 tot en met S02/03), de baanhoogte H en het toernooi (D en O). Zo is de μ voor een wedstrijd die op hoogte is geschaatst, geen Wereldkampioenschappen afstanden of Olympische Spelen, in het seizoen 2000/01, gelijk aan $\mu_0 + \mu_1 + \mu_6$. Dezelfde wedstrijd één seizoen later heeft een μ gelijk aan $\mu_0 + \mu_1 + \mu_7$. Op deze wijze laten we toe dat toptijden variëren per seizoen. De effecten staan vermeld in de tabel hieronder.

Schattingsresultaten

	schatting	stdfout
μ	110.13	0.15
hoogte	– 1.94	0.30
afstanden	– 0.76	0.25
olympisch	– 1.26	0.27
s98/99	– 1.85	0.19
s99/00	– 1.03	0.25
s00/01	– 2.74	0.22
s01/02	– 0.52	0.04
s02/03	– 0.58	0.10
σ	– 2.74	0.22
ξ	– 0.70	0.23

We zien in de tabel dat de waarde van μ voor een wereldbekerwedstrijd op een laaglandbaan 110.13 is. Tijdens speciale toernooien wordt harder geschaatst: deze parameter daalt met 0.76 als het een wereldkampioenschap afstanden betreft, en met 1.26 als het om de Olympische Spelen gaat. In de tabel zien we verder dat schaatsen op hoogte leidt tot duidelijk lagere tijden, en dat elk seizoen gemiddeld genomen sneller wordt geschaatst dan in het referentiepunt 1996/97. Grafisch worden de resultaten weergegeven in figuur 5. De meest rechter kansverdeling is die van de winnende tijd tijdens een wereldbekerwedstrijd in het seizoen 1997/98. De kansverdeling die daar links van ligt, is die van de winnende tijd tijdens eenzelfde wedstrijd op een hooglandbaan. De dun gestippelde lijn geeft de kansverdeling van een winnende tijd van een wereldbekerwedstrijd in het seizoen 2001/02, op een laaglandbaan. Deze verdeling ligt links van de verdeling uit 1997/98, en dat geeft de mate van technische vooruitgang weer. Dit verschil is de grafische weergave van de

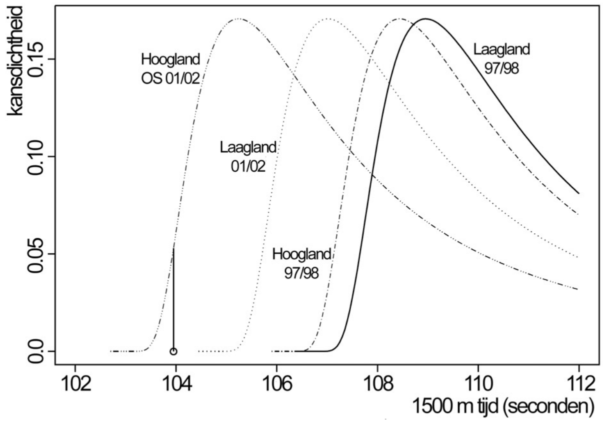


fig. 5 De extreme waarde verdeling van 1500 m schaatstijden

geschatte coëfficiënt -0.52 in tabel 1. De meest linker kansverdeling ten slotte is die van de winnende tijd tijdens een van de Olympische Spelen, als de wedstrijd op een hooglandbaan wordt geschaatst. Het huidige wereldrecord van Derek Parra staat aangegeven in de figuur, en duidelijk is te zien dat dit een topprestatie was: het is een tijd uit de linkerstaart van de kansverdeling van toptijden.

Hoe groot is nu de kans dat het wereldrecord wordt verbeterd? Laten we aannemen dat er W wedstrijden per jaar zijn die onder dezelfde optimale condities worden georganiseerd als de Olympische Spelen van 2002. Dit zijn bijvoorbeeld speciale recordwedstrijden, die tijdens slecht weer op hoogte worden gehouden. De kans dat de winnende tijd sneller is dan het huidige wereldrecord is 0.0106. Als we verder aannemen dat er K rijders zijn die mogelijk een nieuw wereldrecord zouden kunnen rijden is de kans dat het wereldrecord dan wordt gebroken $1 - (1 - 0.0106)^{W \cdot K}$. Redelijke waarden voor W en K zijn 2 en 4, en dan is de kans op een verbetering ongeveer 0.082. Uiteraard is deze kans groter als de kansverdeling van winnende tijden verder opschuift naar links, als gevolg van nóg betere pakken, schaatsen, enzovoort.

In elk geval geeft de statistische aanpak in deze paragraaf aan dat de grens van wereldrecords op de 1500 m nog niet is bereikt: de verdeling van winnende tijden is niet constant in de loop van de tijd, en de sombere conclusie dat het aantal records slechts logaritmisch met het aantal pogingen toeneemt, gaat niet op.

Conclusies

In dit artikel hebben we met behulp van statistiek beargumenteerd dat de grens van de mogelijkheden op de 1500 m schaatsen nog niet in zicht is. Van jaar tot jaar verbeteren de schaatsers zich, en onder een ideale constellatie van factoren is het zeker mogelijk om het huidige record scherper te stellen. De techniek die gebruikt is, is extreme waarde theorie. Dit is een van de moderne stukken wiskundig gereedschap dat wordt gebruikt bij met name de analyse van financiële gegevens. Modellen waar de variabiliteit van financiële gegevens wordt gemodelleerd, worden ook meer en meer gebruikt bij het management van banken, verzekeraars en pensioenfondsen.

Ruud Koning, Vakgroep Econometrie, Fac. der Econ. Wetenschappen, Postbus 800, 9700 AV Groningen. email: r.h.koning@eco.rug.nl; www.rhkoning.com

Ik bedank Eliena van der Velde voor commentaar en Jeroen Heijmans voor het beschikbaar stellen van de gegevens.

Literatuur

Coles, S. (2001). *An introduction to statistical modeling of extreme values*. Heidelberg: Springer.

Haan, L. de (1990). Fighting the arch-enemy with mathematics. *Statistica neerlandica 44*, 45-68.

Glick, N. (1978). Breaking records and breaking boards. *American mathematical monthly, 85*(1), 2-26.

Noten

[1] Een toegankelijke inleiding tot deze theorie is Coles, 2001.

[2] De gegevens zijn beschikbaar gesteld door Jeroen Heijmans, zie: http://weasel.student.utwente.nl/~speedskating/

Appendix

Stelling 2 *Laat $T_1, \ldots, T_n$ n onderling onafhankelijke toevalsvariabelen zijn, die allemaal dezelfde kansverdeling hebben. De verwachting en variantie van het aantal records R_n in deze reeks zijn:*

$$\mathrm{E}\, R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{6}$$

$$\mathrm{var}\, R_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2}\right) \tag{7}$$

Het bewijs van deze stelling is verrassend eenvoudig. Laat Y_i aangeven of de laatste waarneming de grootste is:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & als X_i = max(X_1, \ldots, X_i) \\ 0 & anders \end{cases}$$

Y_i geeft dus aan of de laatste waarneming een recordverbetering is. We weten natuurlijk niet welke van de i waarnemingen de grootste is, dus de kans dat de laatste dat is, is $1/i$. De verwachting van Y_i is dan:

$$\mathrm{E}\; Y_i = 1 \times \Pr(Y_i = 1) + 0 \times \Pr(Y_i = 0) = 1 \times \frac{1}{i} = \frac{1}{i}.$$

Het aantal records in een reeks van n waarnemingen is gelijk aan de som van het aantal recordverbeteringen:

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

en dus is het verwachte aantal recordverbeteringen in die reeks:

$$\mathrm{E}\, R_n = \sum_{i=1}^{n} EY_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Verder zijn Y_i en Y_j ongecorreleerd (neem $i < j$). Dat betekent dat $\mathrm{E}\,(Y_i\, Y_j) = \mathrm{E}(Y_i)\, \mathrm{E}(Y_j)$. Dit volgt uit:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(Y_i\, Y_j) = \Pr(Y_i = 1 \text{ en } Y_j = 1) \\
&= \Pr(X_i = \max(X_1, \ldots, X_i) \text{ en } X_j = \max(X_1, \ldots, X_j)) \\
&= \Pr(X_i = \max(X_1, \ldots, X_i) < \max(X_{i+1}, \ldots, X_j) = X_j) \\
&= \Pr(X_i = \max(X_1, \ldots, X_i)) \\
&\quad \times \Pr(\max(X_1, \ldots, X_i) < \max(X_{i+1}, \ldots, X_j)) \\
&\quad \times \Pr(X_j = \max(X_{i+1}, \ldots, X_j)) \\
&= \frac{1}{i} \times \frac{j-i}{j} \times \frac{1}{j-i} = \frac{1}{i} \times \frac{1}{j} \\
&= \Pr(Y_i = 1)\, \Pr(Y_j = 1) = \mathrm{E}(Y_i)\, \mathrm{E}(Y_j).
\end{aligned}$$

De variantie van Y_i is $\mathrm{var}Y_i = \mathrm{E}\; Y_i^2 - (\mathrm{E}\; Y_i)^2 = \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2}$.

Omdat Y_i en Y_j ongecorreleerd zijn, is de variantie van de som gelijk aan de som van de varianties, en is de variantie van R_n:

$$\mathrm{var}\, R_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\; Y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2}\right).$$

De kansverdeling van R_n is lastig te bepalen en hangt af van de kansverdeling van X. Uiteraard kunnen we aannemen dat R_n bij benadering een normale verdeling volgt met bovenstaande verwachting en variantie. Het is niet moeilijk om met een simulatiestudie na te gaan wat de kwaliteit van die benadering is.

Dirk De Bock, **Wim Van Dooren**, **Dirk Janssens** en **Lieven Verschaffel** hebben al eerder over de lineariteitsillusie bericht in *Nieuwe Wiskrant 21.3*. Inmiddels hebben zij een dieptestudie verricht naar de illusie van lineariteit in de meetkunde. Mede naar aanleiding van een optreden op de Nationale Wiskunde Dagen 2003 volgt hier een verslag.

Waarom lineariteit de leerlingen soms parten speelt

Een dieptestudie in het voortgezet onderwijs

Inleiding

Volgens Freudenthal (1983) is lineariteit (of recht evenredigheid) een zo voor de hand liggende eigenschap van relaties, dat iemand makkelijk in de verleiding komt om gelijk welke numerieke relatie tussen grootheden te gaan behandelen alsof het om een lineaire relatie ging. Vaak zijn leerlingen – maar ook volwassenen – dus geneigd om 'overal' lineaire relaties te zien en toe te passen, ook in situaties waarin dat niet geoorloofd is. In dat verband spreekt men soms van de *illusie van lineariteit*. De geschiedenis van de wiskunde telt talloze voorbeelden van dit fenomeen.

Een eenvoudig voorbeeld uit de geschiedenis van de kansrekening is de fout die de Italiaanse wiskundige Cardano (1501-1576) maakte. Cardano, die correct beredeneerde dat de kans op een dubbele zes in een worp met twee dobbelstenen gelijk is aan 1/36, redeneerde verder dat men de twee dobbelstenen achttien keer moet werpen om minstens vijftig procent kans te hebben op een dubbele zes. Cardano ging dus uit van een recht evenredig verband tussen het aantal worpen en de kans op een dubbele zes (zie ook Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2002).

De focus van deze bijdrage is de illusie van lineariteit binnen het vakgebied meetkunde. In dit domein is het bekendste voorbeeld wellicht dat van de verdubbeling van het vierkant in de dialoog Meno van Plato. Een slaaf, die als opdracht krijgt een vierkant te tekenen met de dubbele oppervlakte van een gegeven vierkant, stelt spontaan voor om de zijde van het gegeven vierkant te verdubbelen. De slaaf gaat dus impliciet uit van een recht evenredig verband tussen de zijde en de oppervlakte van een vierkant.

Ook vandaag nog zijn studenten zich vaak niet bewust van de verschillende groeifactoren voor lengtes, oppervlaktes en volumes bij het gelijkvormig vergroten en verkleinen van figuren, zelfs niet na uitgebreide ervaringen met vergroten en verkleinen in praktische situaties. Zo beschrijft Feys (1995, p. 123) de volgende ervaring met toekomstige onderwijzers:

> We vragen normaalschoolstudenten wat er zal gebeuren als ze twee A4 bladen naast elkaar leggen en met een fotokopie-machine verkleinen om ze samen op één A4 blad te krijgen. Steevast krijgen we als antwoord dat de tekst niet langer leesbaar zal zijn, de hoogte en breedte van de letters en van de tekeningen zouden worden gehalveerd.

En wanneer iemand begrepen heeft dat de oppervlaktes en volumes niet lineair gerelateerd zijn aan de lengtes, is die vaak nog steeds verbaasd dat een oppervlakte of volume *zoveel* toeneemt in geval van een vergroting en *zoveel* afneemt bij een verkleining. Dat laatste wordt geïllustreerd in het boek *Leven en Werken van de Kabouter* van Rien Poortvliet en Wil Huygen (1976) (zie ook Eggermont, 1994). In dit boek wordt op een zeer gedetailleerde, realistisch aandoende wijze een analyse gemaakt van alle aspecten van het leven van de kabouter. Een van de stellingen is dat een kabouter een zeer gelijkaardige lichaamsbouw heeft als de mens, en dat een mannelijke kabouter (zonder puntmuts) ongeveer 15 centimeter groot is en ongeveer 300 gram weegt (zie figuur 1). Hoewel dit op het eerste zicht aanvaardbaar kan lijken, is dit een zeer onrealistische schatting: wanneer we ervan uitgaan dat een kabouter van 300 gram gemiddeld 15 centimeter groot is, en een gemiddelde volwassen mens 180 centimeter, dan zou een mens (die 180/15 = 12 keer groter is) dus 12^3 of 1 728 keer zo veel moeten wegen, hetgeen zo'n 518 400 gram of 518 kilogram zou betekenen!
Het ongeoorloofd toepassen van een lineair model op lengtes, oppervlaktes en volumes is genoegzaam bekend in kringen van wiskundeleraren en -didactici. In de Amerikaanse *Standards* lezen we in dat verband (National Council of Teachers in Mathematics, 1989, p. 114-115):

> Most students in grades 5-8 incorrectly believe that if the sides of a figure are doubled to produce a similar figure, the area and volume will be doubled too.

Sinds enkele jaren wordt aan het Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie van de Katholieke Universiteit Leuven systematisch empirisch onderzoek verricht naar dit fenomeen. Via de afname van collectieve toetsen bij grote groepen twaalf- tot zestienjarige leerlin-

fig. 1 Hoeveel weegt de boskabouter?

gen werd onderzocht welke variabelen (bijvoorbeeld het geven of laten maken van een tekening) een invloed hebben op het ongeoorloofd gebruik van lineariteit. Voor een samenvattend overzicht zie bijvoorbeeld De Bock, Verschaffel & Janssens, 1999. Met deze collectieve toetsafnamen kregen we echter onvoldoende informatie over de eigenlijke oplossingsprocessen die achter de onterechte lineaire redeneringen van leerlingen schuilgingen. Zo konden we op die basis geen behoorlijk antwoord geven op de vraag hoe en waarom zoveel leerlingen in de 'lineaire valstrik' trappen, en waarom ze zo ongevoelig bleken voor diverse vormen van hulp die we in die studies aanreikten. Daarom werd besloten om een beperkte groep leerlingen individueel te interviewen, en hun denkprocessen bij het oplossen van een niet-lineair probleem te ontrafelen via het gericht doorvragen en het strategisch geven van enkele hints.

Verloop van de interviews

We namen individuele interviews af bij twintig twaalf- tot dertienjarige en twintig vijftien- tot zestienjarige leerlingen. In deze interviews lieten we de leerling eerst een niet-lineair probleem oplossen over de vergroting van een onregelmatige vlakke figuur. Het probleem was vergezeld van tekeningen, om te garanderen dat de leerlingen het probleem correct zouden interpreteren. Een voorbeeld wordt gegeven in figuur 2.

Bij het oplossen van dit probleem lieten we de leerling hardop denken en stelden ook enkele bijkomende vragen. Wij vroegen bijvoorbeeld systematisch waarom zij dachten dat hun oplossing correct was en hoe zeker zij daarvan waren. Wanneer een leerling het probleem lineair oploste gaven we gaandeweg aanvullende hints. Deze hints boden steeds meer steun aan de correcte (niet-lineaire) oplossingsmethode en lokten zo in toenemende mate een cognitief conflict uit bij de leerlingen. Na elke hint vroeg de interviewer of de leerling zijn antwoord wilde herzien.

Bart werkt voor een bedrijf dat reclametekeningen schildert op de etalageruiten van winkels. Tijdens de afgelopen kerstdagen moest hij vaak kerstbomen, kerstmannen, sterren en sneeuwmannen op de ramen schilderen.
Op een dag moest hij een tekening van een kerstman van 56 cm hoog op de glazen winkeldeur van bakkerij Vervoort schilderen. Hiervoor had hij 6 ml verf nodig. Daarna moest hij een veel grotere versie van diezelfde kerstman schilderen op de etalageruit van supermarkt Staes. Die kerstman moest 168 cm hoog zijn. Hoeveel ml verf had Bart hier ongeveer voor nodig?

Bakkerij Vervoort — Supermarkt Staes

fig. 2 Voorbeeld van een niet-lineair probleem (juist antwoord: 54 ml, foutief lineair antwoord: 18 ml)

Het interview werd beëindigd wanneer de leerling het niet-lineaire karakter van de opgave doorzag en het correcte antwoord gaf. Op die manier konden we nagaan hoe volhardend de leerling was in zijn keuze voor het lineair model. Deze hints waren dus niet bedoeld als leertraject, doch enkel om het denkproces van de leerling te achterhalen. In figuur 3 wordt schematisch weergegeven hoe het interview verliep.

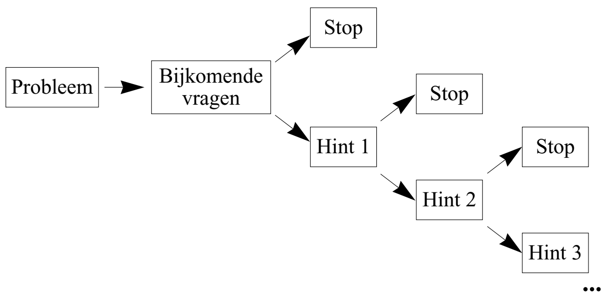


fig. 3 Schematisch verloop van het interview

In totaal werden vier hints voorzien. Een *eerste hint* bestond erin de leerling te confronteren met een door ons gemanipuleerde frequentietabel die aangaf dat (fictieve) medeleerlingen even vaak de niet-lineaire als de lineaire oplossing hadden gegeven (zie figuur 4). De idee was dat twee antwoorden die even vaak werden gekozen twijfel zouden zaaien. Bovendien zouden leerlingen die gewoon uit onoplettendheid lineair hadden geantwoord wellicht het correcte antwoord in de tabel herkennen.

Antwoord	Percentage leerlingen
18 ml	41%
54 mi	41%
Overige	18%

fig. 4 Frequentietabel aangeboden als eerste hint

Als *tweede hint* gaf de interviewer de argumentatie voor de niet-lineaire oplossing van een (wederom fictieve) medeleerling. In het voorbeeld luidde de hint als volgt: ‘Een leerling legde me uit dat als de tekening van de kerstman drie keer groter wordt, niet alleen de hoogte, maar ook de breedte met drie wordt vermenigvuldigd. Je hebt dus negen keer zoveel verf nodig en daarom antwoordde hij 54 ml.’

Als *derde hint* werd de oplossingsstrategie getoond van een fictieve medeleerling die de correcte (niet-lineaire) oplossing gaf. Die had rechthoeken rond de kleine en de grote kerstman getekend en zo gemerkt dat deze figuur niet alleen drie keer hoger, maar ook drie keer breder wordt, zodat je negen keer zoveel verf nodig hebt (zie figuur 5).

Bakkerij Vervoort   Supermarkt Staes

fig. 5 Rechthoeken aangeboden als derde hint

Ten slotte werd als *vierde hint* een expliciete link gelegd met het meten van oppervlakte. Daartoe werd aan de leerling gevraagd de oppervlakte van beide rechthoeken uit figuur 5 te berekenen en te vergelijken. Voor alle nog overblijvende leerlingen werd het interview na deze vierde hint beëindigd.

Overzicht van de resultaten

We formuleren eerst enkele algemene bevindingen over de reacties van de leerlingen tijdens de interviews. Daarna gaan we dieper in op de interviews van twee leerlingen. We selecteerden deze interviews omdat ze het meest representatief waren voor de reacties van de volledige groep leerlingen.

Wanneer we het niet-lineaire vraagstuk aanboden, gaven alle leerlingen (op twee uit de oudste groep na) het lineaire antwoord. Meestal vonden ze het lineaire antwoord door de verhouding van de hoogtes van de twee kerstmannen te berekenen en te redeneren dat die verhouding ook van toepassing is op de hoeveelheden verf die nodig zijn om deze figuren te schilderen (de hoogte wordt vermenigvuldigd met drie, dus ook de hoeveelheid verf wordt met drie vermenigvuldigd). De meeste leerlingen toonden zich tamelijk tot heel zeker dat hun oplossingswijze de juiste was, doch hadden grote moeite om die oplossing uit te leggen en te verantwoorden. Voor hen was die evident en was een ander antwoord niet denkbaar.

Na de confrontatie met de frequentietabel (figuur 4) ruilden slechts twee van de overgebleven 38 leerlingen hun lineaire antwoord in voor het niet-lineaire. De reacties van de meeste andere leerlingen op deze eerste hint kenmerkten zich door oppervlakkigheid (bijvoorbeeld tevergeefse pogingen om aan de alternatieve uitkomst te komen via het ‘at random’ uitvoeren van een aantal bewerkingen met de drie gegeven getallen). Heel wat leerlingen ontdekten zo dat de andere oplossing tot stand kwam door het vermenigvuldigen met negen (of tweemaal met drie), maar dat deed hen niet twijfelen over hun eigen oplossing.

Na het aanbieden van de tweede hint (de argumentatie voor de correcte oplossing), besloten nog veertien van de overgebleven 36 leerlingen om van antwoord te veranderen. Zij erkenden dat ze niet eerder hadden geprobeerd zich het probleem echt voor te stellen en dat ze de opgave op een ondoordachte, routinematige manier hadden opgelost. Maar zelfs nu bleven 22 leerlingen bij hun oorspronkelijke antwoord, hoewel ze dit niet (goed) konden rechtvaardigen. Vaak berustte de argumentatie op erg ‘schoolse’ overtuigingen over het oplossen van wiskundevraagstukken of bleek eruit dat leerlingen niet begrepen wat gelijkvormigheid precies betekent.

De aanbieding van de oplossingsstrategie met de rechthoeken (figuur 5) werkte voor negen van de 22 overblijvende leerlingen als een ware ‘Gestaltwechsel’ (Wertheimer, 1945). Zodra deze derde hint werd aangeboden, kozen zij onmiddellijk en overtuigd voor de niet-lineaire oplossing. De overblijvende dertien leerlingen hielden vast aan het lineaire antwoord en maakten eerder algemene beschouwingen over hoe vraagstukken volgens hen moeten worden opgelost en de rol die tekeningen daarbij in hun ogen kunnen spelen.

Na de laatste (vierde) hint ten slotte, wisselden nog vijf leerlingen hun oorspronkelijke lineaire antwoord in voor het niet-lineaire. Maar zelfs na vier (in sterkte toenemende) hints hielden dus nog steeds acht leerlingen vast aan hun oorspronkelijke lineaire redenering. Zij herhaalden vooral, en vaak met nog grotere nadruk, hun stereotype opvattingen over wiskunde in het algemeen en over het oplossen van vraagstukken in het bijzonder.

Het interview met Pieter (twaalf jaar)

De interviewer toonde Pieter een werkblad met het probleem van de kerstmannen (figuur 2). Het interview verliep als volgt:

Pieter: [leest het probleem hardop] Euh, wacht even, laat me naar de getallen kijken … Ik zie het, de hoogte verandert van 56 cm tot 168 cm. Dat is dus maal drie. Ik moet dus ook de hoeveelheid verf met drie vermenigvuldigen. [Pieter tekent het schema in figuur 6]
Het antwoord is 18 ml. Bart heeft 18 ml nodig voor de grote kerstman.

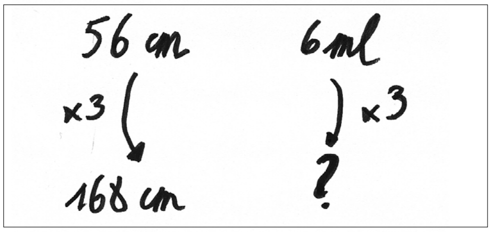


fig. 6 Het oplossingsschema van Pieter

Interviewer: Waarom denk je dat die oplossing juist is?
Pieter: [stilte] Wel, euh … Ik weet het niet … Ik heb het zo opgelost.
Interviewer: Waarom heb je dan met drie vermenigvuldigd?
Pieter: Dat is toch logisch. Het kan niet anders, toch? De kerstman is *hoger*, dus heb je *meer* verf nodig. En hij is *drie keer* hoger, dus … *drie keer* zoveel verf. Simpel!
Interviewer: Hoe zeker ben je van je antwoord?
Pieter: Heel zeker. Het is een gemakkelijk probleem! Ik heb gewoon de drie getallen en de formule gebruikt, dus moet het wel juist zijn.

De interviewer bood vervolgens de eerste hint aan.

Interviewer: Vorige week gaven we dit probleem aan leerlingen van een andere school. Hun antwoorden staan in deze tabel (vergelijk figuur 4). 41% van de leerlingen in die school gaf ook als antwoord 18 ml, maar er waren evenveel leerlingen die 54 ml antwoordden. Pieter, wat denk je van dat andere antwoord? En van jouw antwoord? Wil je veranderen?
Pieter: [onmiddellijk] Nee, dat is onmogelijk. Ik heb het berekend en het is 18 ml. Hoe komen ze trouwens aan die 54? Wacht, ik probeer. [trekt 54 af van 168, probeert enkele combinaties van 54, 168, 6 en + – × en:] Ah nee, ik zie het. Ze hebben *twee* keer met drie vermenigvuldigd. Zie je, ze hebben een fout gemaakt. Ik blijf bij mijn antwoord.

Aangezien Pieter vasthield aan de lineaire oplossing, bood de interviewer de tweede hint aan.

Interviewer: Een leerling van die andere school legde uit hoe hij het probleem oploste. Hij zei dat de kerstman niet alleen drie keer hoger wordt, maar ook drie keer breder. Dus heb je negen keer zoveel verf nodig.
Pieter: O, maar die leerling gebruikt de *tekening*. Ik heb niet naar de tekening gekeken. Alleen naar de tekst. In de tekst staat enkel *hoogte*.
Interviewer: En wat als je naar de tekening kijkt?
Pieter: 18 ml is toch beter. Die leerling maakt het te moeilijk. Mijn antwoord is nog altijd beter.

Daarop gaf de interviewer de derde hint. Hij toonde de tekeningen van figuur 5 en gaf er de volgende uitleg bij.

Interviewer: De leerling die met negen vermenigvuldigde, tekende eerst rechthoeken rond de kerstmannen. Toen zag hij dat de figuur *in beide richtingen* drie keer groter wordt: in de hoogte, maar ook in de breedte. Daarom heb je dus negen keer zoveel verf nodig. Wat denk je van deze oplossing? En van jouw oplossing? Welke oplossing verkies je nu?
Pieter: Dat kan wel een goede oplossing zijn, maar het probleem zegt helemaal niets over de breedte. Dat is in de tekening, maar niet in het vraagstuk. Het vraagstuk gaat over de hoogte.
Interviewer: En wat met de rechthoeken?
Pieter: Wat ze met de rechthoeken doen is correct: ze vergroten in twee richtingen.
Maar binnen de rechthoeken staat een *onregelmatige* figuur. En dat is anders. Kijk hier en hier! [Pieter wijst naar de 'lege' gedeelten in de rechthoeken]

Tot slot werd de vierde hint gegeven:

Interviewer: Kun je de oppervlakte van de twee rechthoeken berekenen en vergelijken?
Pieter: [rekent] Wel, deze is negen keer groter.
Interviewer: En wat als je de oppervlakte van die rechthoeken zou moeten schilderen?
Pieter: [onmiddellijk] Dit gaat alleen maar over verf, niet over oppervlakte. Je maakt het te moeilijk. Wiskunde is logisch, en met negen vermenigvuldigen is hier niet logisch. Hij is drie keer groter, dus heb je drie keer zoveel verf nodig!

Hier eindigde het interview met Pieter.

Het interview met Karen (vijftien jaar)

Karen kreeg hetzelfde kerstmannenprobleem aangeboden. Het interview verliep als volgt:

Karen: [leest het probleem] Ah, ik zie het. Je hebt 6 ml nodig voor 56 cm. Ik kan dus berekenen hoeveel je voor 1 cm nodig hebt. [deelt 6 door 56 met haar rekenmachine] Ik heb het. Je hebt 0.1071 ml per cm nodig. Dan vermenigvuldig ik dat met 168, want de grote kerstman is 168 cm. [rekent] Je hebt 18 ml nodig voor de grote kerstman.
Interviewer: Waarom denk je dat dat de juiste oplossing is?
Karen: Eh … Dat werkt, ik weet niet waarom.
Interviewer: Hoe werkt dat dan?
Karen: Het is makkelijk om te weten hoeveel je nodig hebt voor 1 cm. Dan moet je alleen nog vermenigvuldigen. Ze noemen dat de regel van drie. Ik kan daar eigenlijk niets meer over zeggen.
Interviewer: Hoe zeker ben je van je antwoord?
Karen: Ik ben niet helemaal zeker omdat ik het probleem niet zorgvuldig gelezen heb. Maar ik denk dat ik gedaan heb wat verwacht werd. Ik heb de drie getallen gebruikt en het werkte … Misschien heb ik een rekenfout gemaakt. Dat kan altijd gebeuren. Maar mij lijkt het correct.

Aangezien Karen een lineaire oplossing gaf, toonde de interviewer de fictieve frequentietabel en merkt op dat leerlingen van de andere school even vaak 54 ml als antwoord gaven. Karen reageerde als volgt:

Karen: 54??? Ik denk dat dat wat veel is. Ik zou denken dat mijn oplossing veel logischer is. Trouwens, je blijft best altijd bij je eerste gedachte!
Interviewer: Een leerling van de andere school zei me dat de kerstman niet alleen drie keer hoger, maar ook drie keer breder wordt, dus heb je negen keer zoveel verf nodig. Daarom antwoordde hij 54 ml …
Karen: Nee, dat denk ik niet. Het is juist dat hij drie keer hoger en drie keer breder wordt. Maar dat betekent gewoon dat *alles* drie keer meer is. Ook de hoeveelheid verf. Die wordt ook met drie vermenigvuldigd. 6 ml is voor de *hele* kerstman, niet alleen voor de hoogte. En 18 ml is voor de volledige grote kerstman. [wijst achtereenvolgens naar de kleine en de grote kerstman] Deze oppervlakte past drie keer in die oppervlakte, dus heb je drie keer meer verf nodig.

Karen bleef dus ook na de tweede hint de lineaire oplossing verkiezen en kreeg dus de derde hint aangeboden: de interviewer toonde en besprak de oplossingsstrategie met de omgeschreven rechthoeken. Bij het bekijken van deze figuur veranderde Karen onmiddellijk van antwoord.

Karen: Oh ja, nu zie ik het. Inderdaad, hij is negen keer groter, omdat de kleine rechthoek ook negen keer in de grote past. Met de rechthoeken begrijp ik het. Ik ben zeker nu. Het moet 54 ml zijn.
Interviewer: Kun je uitleggen waarom je in het begin 18 ml antwoordde?
Karen: Mijn antwoord leek zo logisch: drie keer groter, drie keer meer verf … Bovendien heb ik alleen naar de tekst gekeken en ben ik onmiddellijk begonnen te rekenen. Als ik eerst naar de tekeningen had gekeken, dan had ik het misschien gezien. Maar ik had me niets bij het probleem voorgesteld … alleen gerekend.

Daarmee eindigde het interview met Karen.

Enkele slotbeschouwingen

Deze interviewstudie bevestigt de hardnekkigheid van het onterecht lineair redeneren van twaalf- tot zestienjarigen bij het oplossen van problemen over lengte en oppervlakte van meetkundige figuren. Bijna alle leerlingen gingen onmiddellijk uit van een lineaire (in plaats van een kwadratische) relatie tussen de lengte en de oppervlakte. Zelfs na (sterke) hints bleven veel leerlingen kiezen voor het lineaire model of ondervonden zij grote moeilijkheden om het alternatieve model naar waarde te schatten.

We verkregen ook waardevolle informatie over de redeneerprocessen die aan de basis liggen van het onterecht lineair redeneren van de leerlingen. Globaal gesproken kunnen de elementen in deze redeneerprocessen in vier grote categorieën worden ingedeeld. De dominantie van elk element varieerde bij verschillende leerlingen, maar ook bij eenzelfde leerling varieerde dit in de verschillende fasen van het interview.

Een eerste categorie verwijst naar het intuïtieve karakter (in de betekenis die eraan gegeven werd door Fischbein, 1987) van het lineaire model: het heeft een zelf-evident karakter en wordt op een spontane, haast onbewuste wijze toegepast. Daardoor ervaren leerlingen geen behoefte om hun keuze voor dit model te rechtvaardigen. Intuïtieve modellen blijken ook in hoge mate resistent tegen formeel onderwijs waarin men tegenwicht probeert te bieden. Niet-lineaire modellen worden daarentegen door de leerlingen als tegenintuïtief of onlogisch ervaren.

Een tweede categorie vormt de bewuste en weloverwogen toepassing van het lineaire model. Sommige leerlingen zijn er echt van overtuigd dat elke 'toename' in feite een 'lineaire toename' is. Deze leerlingen beredeneren soms expliciet dat lengte en breedte allebei met factor drie toenemen, zodat ook de oppervlakte en de hoeveelheid verf met die factor toenemen. Voor deze specifieke overtuiging is de benaming 'illusie van lineariteit' zeker op haar plaats: deze leerlingen zijn er uitdrukkelijk van overtuigd dat het lineaire model de gepaste keuze is.

Ten derde brengt deze interviewstudie een aantal hiaten in de meetkundige kennis van de leerlingen aan het licht. Deze hiaten verhinderden dat leerlingen de fout in hun redenering en de correcte oplossing 'ontdekten'. In het bijzonder kwam naar voren dat heel wat twaalf- tot zestienjarige leerlingen worstelen met concepten zoals gelijkvormigheid of oppervlakte, in het bijzonder bij onregelmatige figuren.

Ten vierde blijken heel wat leerlingen behept met inadequate gewoonten en opvattingen over het oplossen van wiskundige problemen zoals: je kunt je beter baseren op formules dan op tekeningen, je blijft het beste altijd bij je eerste idee, je mag enkel de informatie gebruiken die expliciet in de opgave vermeld wordt, vraagstukken hebben niets met de realiteit te maken, bij het oplossen van een vraagstuk wordt enkel verwacht dat je een of enkele standaardbewerkingen uitvoert. Deze overtuigingen zijn wellicht een (neven)product van het wiskundeonderwijs dat de leerlingen kregen en de ervaringen die ze op school opdeden met wiskundig probleemoplossen.

De combinatie van deze vier elementen leidde bij de meeste leerlingen tot oppervlakkig en gebrekkig wiskundig modelleren.
In een volgende fase van ons onderzoek zal worden nagegaan hoe we leerlingen beter kunnen wapenen tegen de valstrik van de lineariteitsillusie. Daartoe worden thans experimentele lespakketten ontwikkeld en geëvalueerd. Naast de bevindingen van onze vroegere studies naar de lineariteitsillusie dienen de meer algemene principes van het realistisch wiskundeonderwijs (uitgaan van rijke contexten, verder bouwen op informele kennis en strategieën van leerlingen, …) hiervoor als richtsnoer.

Dirk De Bock, Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie (CIP&T), K.U. Leuven en EHSAL, Europese Hogeschool Brussel.
Wim Van Dooren, Aspirant van het Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek (FWO) Vlaanderen, Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie (CIP&T), K.U. Leuven.
Dirk Janssens, Academische Lerarenopleiding Wiskunde, K.U. Leuven.
Lieven Verschaffel, Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie (CIP&T), K.U. Leuven.

Deze publicatie is totstandgekomen in het kader van de Onderzoekstoelage OT-2000-10 van het Onderzoeksfonds van de Katholieke Universiteit Leuven en werd onder meer gepresenteerd op de Nationale Wiskundedagen 2003.

Literatuur

De Bock, D., L. Verschaffel & D. Janssens (1999). Some reflections on the illusion of linearity. In P. Radelet-De Grave (Ed.). *Proceedings of the Third European Summer University on History and Epistemology in Mathematical Education, Vol. 1*, pp. 153–167. Leuven/Louvain-la-Neuve, Belgium.

Eggermont, H. (1993). Gewichtige kabouters. *Uitwiskeling, 9*(3), 3–5.

Feys, R. (1995). Meten en metend rekenen. In L. Verschaffel & E. De Corte (eds.). *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie. Deel 3: Verder bouwen aan gecijferdheid,* pp. 99–135. Brussel/Leuven: Studiecentrum Open Hoger Onderwijs (StOHO)/Acco.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

National Council of Teachers of Mathematics (1990). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Poortvliet, R. & W. Huygen (1976). *Leven en werken van de kabouter*. Bussum: Van Holkema & Warendorf.

Van Dooren, W., D. De Bock & L. Verschaffel (2002). De lineariteitsillusie in kansrekening: een terreinverkenning. *Nieuwe Wiskrant, 21*(3), 46–52.

Wertheimer, M. (1945). *Productive thinking.* New York: Harper & Brothers.

Op de Nationale Wiskunde Dagen van 2003 gaf **Jan Aarts** een workshop over de snelheidsbepaling van een auto aan de hand van videobeelden. Met behulp van dit artikel en enige inventiviteit kunt u als docent een realistisch experiment opzetten met de leerlingen.

Hoe hard rijdt de auto op de video?

Inleiding

Kun je aan de hand van video-opnamen de snelheid van een auto bepalen?
Onder bepaalde voorwaarden kan dat. De eerste voorwaarde is dat de beweging van de betreffende auto in werkelijkheid rechtlijnig is. Verder zijn er ten minste drie punten, de ijkpunten, langs de bewegingslijn nodig waarvan de onderlinge afstanden bekend zijn. Om de snelheid van de auto te bepalen moeten we beschikken over een serie frames van de video, met bekende tussentijden bij de opeenvolgende frames. Er is verder geen informatie nodig; evenmin is het nodig dat de positie van de videocamera bekend is, of dat deze een vaste positie heeft.
Ik heb de hier beschreven methode samen met Robbert Fokkink ontwikkeld. We lichten de methode toe aan de hand van de opnamen die gemaakt zijn bij de reconstructie van een verkeersongeluk. Bij de reconstructie bewees deze methode zijn nut. Hoe zit het vervolg van dit artikel in elkaar? Nadat we een tamelijk gedetailleerde beschrijving van de reconstructie-opnamen hebben gegeven, vertellen we iets over de dubbelverhouding; die vervult een sleutelrol in de beschreven methode. Vervolgens laten we zien hoe de berekening van de snelheid kan worden uitgevoerd.
Het hoeft geen commentaar dat de hier beschreven methode heel goed bruikbaar is om samen met een groep leerlingen een realistisch experiment op te zetten, dat aanleiding kan zijn tot een aantal interessante en leerzame wiskundige beschouwingen.

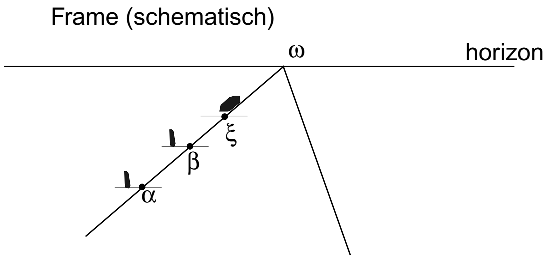
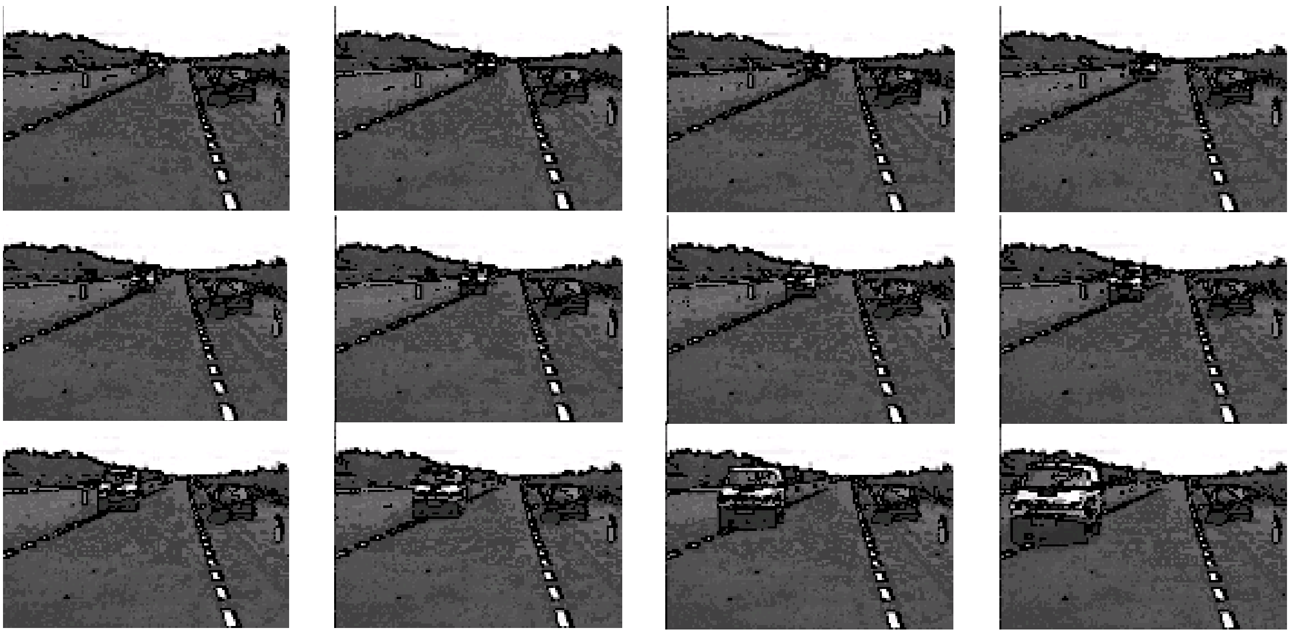


fig. 1 Een frame, schematisch weergegeven



Aanpak

Bij nauwkeurige beschouwing van een van de frames van de video zien we dat de auto op een rechte weg rijdt. Op de weg zien we twee nagenoeg parallelle (onderbroken) strepen. Verder zien we links van de weg (voor de bestuurder rechts) twee paaltjes, *A* en *B*. De afstand tussen de paaltjes is 42 meter; dit is gemeten bij de reconstructie. De auto rijdt boven de linker streep; we zullen die gebruiken voor onze metingen. Als eerste ijkpunt gebruiken we het snijpunt ω van de twee strepen; dat ligt op de horizon. Als we de lens van de videocamera opvatten als centrum van de centrale projectie van de buitenwereld op het frame, dan heet het beeld van dat snijpunt op de horizon het vluchtpunt van de beelden van de lijnen. Alle lijnen die in werkelijkheid onderling evenwijdig zijn, krijgen op het frame hetzelfde vluchtpunt.

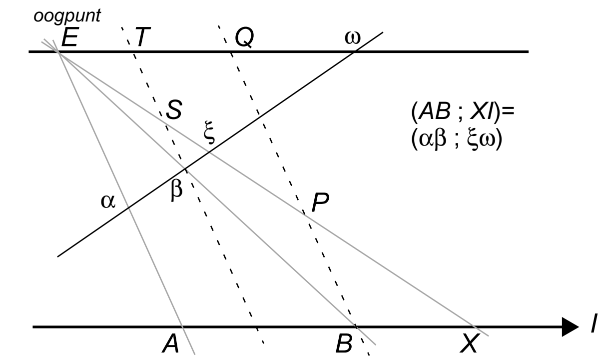


fig. 2 Dubbelverhouding invariant I

Zowel hier als verderop in dit verhaal gebruiken we enkele eigenschappen van de projectieve meetkunde en de beginselen van het perspectieftekenen. Dit wat betreft het eerste ijkpunt.

De twee andere ijkpunten zijn de punten op de linker streep die ter hoogte van de twee paaltjes *A* en *B* liggen. De juiste positie van de ijkpunten α en β die we, gemakshalve doch slordig, weer met α en β aanduiden, vinden we door lijnen evenwijdig aan de horizon (horizontaal dus), door de onderkant van de paaltjes *A* respectievelijk *B,* te tekenen en deze te snijden met de linker streep. De positie van de auto in het frame bepalen we als snijpunt van de verbindingslijn van de onderkant van de voorwielen en de linker streep; dit levert het punt ξ. We hebben zo op de linker streep de punten ω, α, β en ξ. Hieruit kunnen we de werkelijke afstand van de auto tot het punt op de weg bij paaltje *A* bepalen. Door dit voor ieder frame te doen, kunnen we een grafiek maken van het verband tussen de tijd en de afgelegde weg, en daaruit de snelheid bepalen, zie figuur 1.

Dubbelverhouding

Hoe vinden we nu uit de onderlinge positie van de punten ω, α, β en ξ de werkelijke afstand tussen paaltje *A* en auto *X*? Het sleutelwoord is hier ‘dubbelverhouding’. Zoals we allemaal weten is de gewone verhouding van lengten niet invariant onder centrale projectie: bij het perspectieftekenen wordt een bepaald voorwerp op de voorgrond groter getekend dan een even groot voorwerp op de achtergrond. De *dubbelverhouding* echter is wel invariant onder centrale projectie. We zullen dit iets nauwkeuriger bekijken. Als *P*, *Q*, *R* en *S* vier punten zijn op een rechte lijn *m*, dan is de dubbelverhouding (*PQ*; *RS*) het getal:

$$\frac{RP}{RQ} : \frac{SP}{SQ} = \frac{RP}{RQ} \times \frac{SQ}{SP}$$

In de formule is *RP* de afstand van *R* tot *P*, dat is de lengte van het segment *RP*, en analoog voor *RQ*, *SP* en *SQ*. Als nu *S* op de lijn naar buiten beweegt in de richting van ‘oneindig’, dan nadert het quotiënt *SP/SQ* naar 1. Als *S* het punt op oneindig *I* is van de lijn *m*, dan definiëren we derhalve (*PQ*; *RI*) = *RP/RQ*.

Heel vaak worden in de definitie van dubbelverhouding *gerichte* lijnstukken gebruikt en worden de afstanden ook van een teken voorzien. Wij zullen dat echter niet doen.
Dat de dubbelverhouding invariant is onder centrale projectie, kan op verschillende manieren worden bewezen. In *Lessen in projectieve Meetkunde* (Kindt, 1996) gebeurt dit via dubbelverhoudingen van sinussen.

We geven hier een bewijs via gelijkvormigheid. In de figuur wordt een lijn *l* met daarop de punten *A*, *B* en *X* vanuit het punt *E* geprojecteerd op de lijn π met daarop de punten α, β, ξ en ω. Zie figuur 2. Je kunt hierbij denken aan de paaltjes *A* en *B* op de weg (of beter, de daarmee corresponderende punten op de linker streep op de weg) en auto *X*. De punten *A*, *B* en *X* worden afgebeeld op de punten α, β respectievelijk ξ in het frame. Het punt ω is het verdwijnpunt en correspondeert met het punt op oneindig *I* van de lijn *l*; merk op dat *l* evenwijdig is met de lijn $E\omega$.

We zullen eerst bewijzen dat (*AB*; *XI*) = $(\alpha\beta;\xi\omega)$. Daartoe tekenen we twee hulplijnen, namelijk door β en *B*, elk evenwijdig aan de lijn door *E*, α en *A*. Nu is $\Delta XPB \sim \Delta XEA$ en dus *XA/XB* = *EA/PB*. Verder is *1* = *IA/IB* = *EA/QB*, want *EABQ* is een parallellogram.

Dus is:

$$(AB;\, XI) = \frac{XA}{XB} : \frac{IA}{IB} = \frac{EA}{PB} : \frac{EA}{QB} = \frac{QB}{PB}$$

Op analoge wijze vindt men:

$$(\alpha\beta;\, \xi\omega) = \frac{\xi\alpha}{\xi\beta} : \frac{\omega\alpha}{\omega\beta} = \frac{E\alpha}{S\beta} : \frac{E\alpha}{T\beta} = \frac{T\beta}{S\beta}$$

Maar met gelijkvormigheid vinden we $PB/S\beta = EP/ES = EQ/ET$ en $QB/T\beta = EQ/ET$. Dus $QB/PB = T\beta/S\beta$, waaruit de gelijkheid van de dubbelverhoudingen volgt.

Voor het algemene geval projecteren we de lijn π op

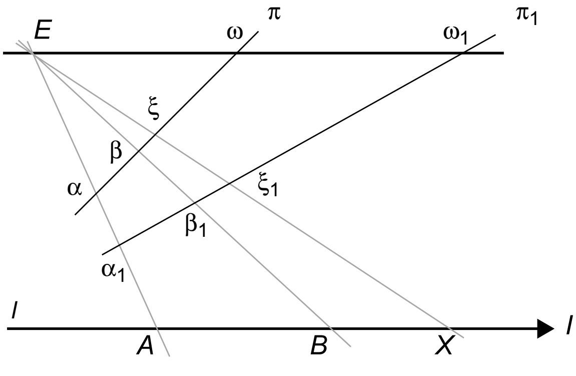


fig. 3 Dubbelverhouding invariant II

π_1 vanuit het punt E. Zie figuur 3. Om te bewijzen dat $(\alpha\beta;\,\xi\omega) = (\alpha_1\beta_1;\,\xi_1\omega_1)$ trekken we de lijn l evenwijdig aan $\omega\omega_1$. Met hetgeen zojuist is gevonden komt er:

$$(\alpha\beta;\,\xi\omega) = (AB;XI) = (\alpha_1\beta_1;\,\xi_1\omega_1)$$

Rekenwerk

Met behulp van de dubbelverhouding zullen we de afstanden tussen de punten in het frame koppelen aan de werkelijke afstanden. Omdat we met ongerichte lijnstukken werken, moeten we drie gevallen onderscheiden. Eerst bekijken we het geval dat X tussen I aan de ene kant en A en B aan de andere kant ligt; de auto komt van verre en is nog niet in B. Met behulp van de invariantie van de dubbelverhouding vinden we dan uit de figuur

$$d = \frac{XB}{XA} = (BA;XI) = (\beta\alpha;\xi\omega) = \frac{\xi\beta}{\xi\alpha}\frac{\omega\alpha}{\omega\beta}$$

Nu is $XB = XA - AB$ en dus $d = 1 - AB/XA$. Het resultaat is:

$$XA = \frac{1}{1+d}AB$$

Het tweede geval is dat de auto X tussen B en A is. Dan vinden we op bijna dezelfde wijze:

$$XA = \frac{1}{1+d}AB$$

Als ten slotte X ook A gepasseerd is, komt er:

$$XA = \frac{1}{1-d}AB:$$

In elk van de frames kunnen we d bepalen uit de (met een gewone liniaal) gemeten afstanden $\xi\beta$, $\xi\alpha$, $\omega\beta$ en $\omega\alpha$. Dit heeft tot resultaat een afstand-tijd-diagram, waaruit de snelheid kan worden afgelezen.

Tijdens de workshop werd in vijftien groepjes van drie door elk groepje de afstanden in één frame gemeten en XA berekend. Zo kwam de workshop tot een snelheid van de auto van 108 km/uur. Dit was, vergeleken met de snelheid van 112 km/uur zoals bij de reconstructie gevonden, geen slecht resultaat. De in de workshop gevonden standaarddeviatie was kleiner dan de geschatte fout bij de reconstructie.

Ook interessant: de berekende afstanden XA waarbij auto X nog ver weg en dus dichtbij de horizon is, vertonen de grootste onnauwkeurigheid. Dat viel (achteraf) te verwachten: een kleine meetfout in het frame bij de horizon correspondeert met een grote fout in werkelijkheid.

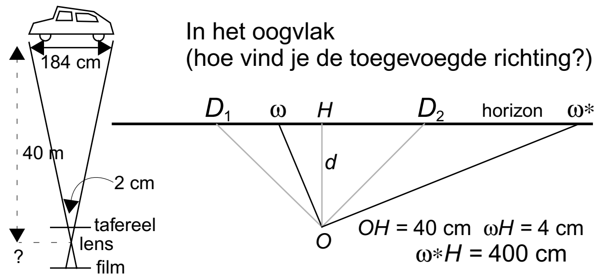


fig. 4 Het vinden van de toegevoegde richting

Rechtvaardiging

Er is een puntje dat we nog niet voldoende hebben toegelicht. In paragraaf 2 hebben we gezegd dat de ijkpunten α en β gevonden werden door vanuit de onderkant van de paaltjes A, respectievelijk B, horizontale lijnen te tekenen en deze te snijden met de linker lijn. Wat we natuurlijk willen bereiken is dat de lijnen vanuit A en B loodrecht staan op de linker lijn. Met andere woorden, we willen de lijnen tekenen in de richting die loodrecht staat op de richting van de weg. In boekjes over perspectieftekenen kun je vinden hoe dit moet. We illustreren dit met een voorbeeld. Zie figuur 4. We gebruiken het extra gegeven dat de afstand van de videocamera tot het eerste paaltje A ongeveer 40 meter is en de breedte van de auto ongeveer 2 meter. Als in de fotoafdruk van het frame waarin de auto bij het paaltje A is, de auto 2 cm breed is, dan is bij de fotoafdruk het oogpunt op 40 cm van de fotoafdruk; immers, dan hebben we zowel bij de afstand als bij de afmeting dezelfde schaal, namelijk 1:100. In de foto zien we dat ω ongeveer 4 cm uit het hoofdpunt ligt. (Zie figuur 4; de foto op ware grootte kunt u downloaden van de wiskrantsite). Merk op dat men vanuit het oogpunt O de hoeken ziet zoals ze in werkelijkheid zijn, dus ω loodrecht op ω^*.

Voor het verdwijnpunt ω^* van de lijnen loodrecht op de bundel door ω geldt $\omega\omega^* = 1600$, het kwadraat van de afstand. De afstand van ω^* tot het hoogtepunt is dus gelijk aan 400 cm. Deze berekening is niet erg nauwkeurig, maar laat wel zien dat de lijnen door ω^* bijna evenwijdig aan de horizon lopen.

J.M. Aarts, Technische Universiteit Delft

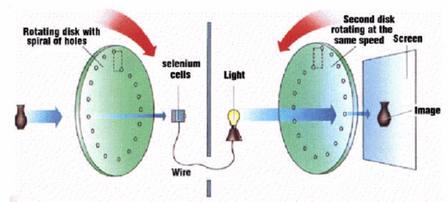
Op het eerste gezicht lijken computerrepresentaties van beelden die op pixels gebaseerd is de meest natuurlijke en eenvoudige. Toch kleven er veel nadelen aan pixels. **Kees van Overveld** bekijkt op welke andere betekenisniveaus beelden gerepresenteerd zouden kunnen worden. Hij presenteert op de Nationale Wiskunde Dagen 2004 een beschrijving van beelden met zogenaamde dynamische segmenten.

Ontsnappen aan de Nipkow-doctrine

Ooit is door mensenhand de allereerste afbeelding gemaakt. Dat was, met recht, een historisch moment. Het was het moment waarop de geschiedenis van de verbeelding een nieuwe wending nam. Vanaf dat ogenblik waren er niet alleen maar meer beken, bomen, bergen, buffels en Batavieren te zien, maar ook beelden! Uiteraard is de naam van die allereerste beeldende kunstenaar ons reeds lang ontgaan, en ook kunnen we nog slechts speculeren over de ontroering die die allereerste KUNSTmatige afbeelding teweeg moet hebben gebracht bij het allereerste kunstminnend publiek. Maar we hebben wel een redelijk idee wat die eerste afbeelding geweest zou kunnen zijn. Het was waarschijnlijk de afbeelding van een hand. Een modderige hand. Nauwkeuriger gezegd: de afbeelding bestond waarschijnlijk uit de modder op die hand, afgeveegd aan de binnenwand van een grot. Temidden van prehistorische grotschilderingen zijn dergelijke oeroude handafdrukken teruggevonden, en hun grote aantal is misschien een aanwijzing voor het enthousiasme waarmee deze revolutionaire afbeeldingstechniek ontvangen werd door de toenmalige beeldende kunstenaars.

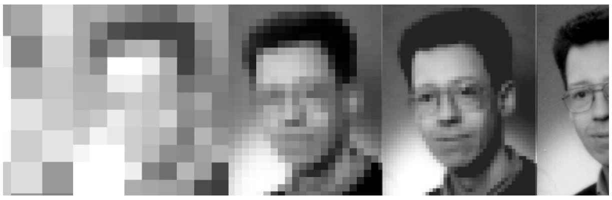
Veel technieken volgden. De handafdrukken werden afbeeldingen van bisons, oerossen en mammoeten, opgebouwd uit luttel strepen en vlekken van as, plantensap, of vochtige aarde. In duizenden jaren werden zowel de pigmenten meer geavanceerd, als ook de manieren om die pigmenten op een ondergrond aan te brengen. Met de vervolmaking van de olieverftechniek in de zeventiende eeuw van onze jaartelling werd een voorlopig hoogtepunt bereikt, maar kunstenaars zochten verder naar nieuwe soorten van beeldelementen. Het laat-negentiende-eeuwse pointillisme (letterlijk: ‘stippelkunst’), bijvoorbeeld, bracht een richting waarin voor het eerst met beeldelementen gewerkt werd die niet meer overeenkwamen met betekenisinhouden in het schilderij: de afgebeelde personen, voorwerpen of landschappen waren het resultaat van een optische zinsbegoocheling die patronen van gekleurde stippels ineen laat smelten tot betekenisvolle eenheden, waarbij het vrijwel onmogelijk wordt om de afzonderlijke stippels nog als zelfstandige, visuele entiteiten te zien.

Het is deze zelfde optische illusie die ten grondslag ligt aan het briljante idee van Paul Nipkow (22.08.1860 Lauenburg - 24.08.1940 Berlijn). Een ronddraaiende schijf met gaatjes, gerangschikt langs een spiraal, maakt het mogelijk om de tweedimensionale helderheidsverdeling in een beeld om te zetten in een eendimensionale tijdreeks van helderheidswaarden, die, bij benadering[1], dezelfde informatie bevat. Zo’n tijdsreeks kan vervolgens middels een seleniumcel omgezet worden in een reeks elektrische spanningen die door een draad of zelfs draadloos overgebracht kunnen worden. Met behulp van een tweede schijf met gaatjes, die aan de ontvangstkant synchroon met de eerste schijf ronddraait voor een lamp, kan het oorspronkelijke beeld min of meer weer tevoorschijn geroepen worden. Als de lamp namelijk feller en zwakker gaat branden in overeenstemming met de door de seleniumcel ontvangen lichtsterkte, laat de eerdergenoemde optische illusie de afzonderlijk waargenomen lichtflitsjes samensmelten tot een (wazige versie van het) beeld aan de zenderkant.



De uitvinding van deze zogenaamde Nipkowschijf was niet alleen de wegbereider van de televisie (een prestigieuze prijs voor televisieprogramma’s heet tot op vandaag nog steeds de ‘gouden Nipkowschijf’), zij was ook bepalend voor het denken over beeldrepresentaties in latere technologische contexten.

Toen, begin jaren zeventig van de vorige eeuw, computers voldoende krachtig begonnen te worden om met grote hoeveelheden gegevens te werken, was het dan ook niet onlogisch om een representatie van beelden voor te stellen waarin deze gerepresenteerd zouden worden als een reeks kleurwaarden of grijswaarden, waarbij elke waarde wordt toegewezen aan één van te voren bepaalde locatie in het beeld, analoog aan de tevoren gekozen plaatsen van de gaatjes in de Nipkow schijf. Waar zouden deze locaties beter gekozen kunnen worden dan gerangschikt op een rechthoekig, regelmatig rooster, en … ziedaar, de pixel was geboren. Natuurlijk lijkt een rechthoekige, discrete verdeling van grijswaarden in niets op een portret ...



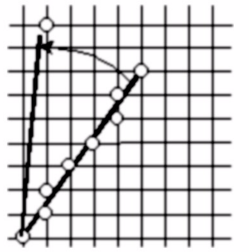
…. tenzij het aantal pixels voldoende groot is. Dan zorgt dezelfde optische illusie, die de vinding van Nipkow mogelijk maakte, ervoor dat we geen afzonderlijke pixels meer zien, en in de veronderstelling verkeren naar een ongeschonden beeld te kijken.

Voor veel generaties beeldtechnologen, computerdeskundigen en televisiemakers was hiermee, tenminste gedurende de jongste drie of vier decennia, de kous af. Dat wil zeggen: in industriële laboratoria en op universiteiten moest een grote hoeveelheid inspanning getroost worden om een aantal opmerkelijke onhebbelijkheden van deze aanpak te onderdrukken – we komen hier zo dadelijk nog op terug – maar al deze ingrepen werden opgevat als ‘noodzakelijk kwaad’, zoals een airbag nu eenmaal een noodzakelijk voorziening is als je met een auto hard wil kunnen rijden en toch de kans wil hebben om botsingen te overleven.

Maar voor wiskundigen bleef er toch iets knagen. Immers, er is een groot aantal betekenisvolle bewerkingen op beelden dat niet mogelijk is op een rooster van pixels. Transleren, anders dan over een geheel veelvoud van pixels, roteren over een andere hoek dan een veelvoud van 90 graden, en schalen met een niet-gehele schaalfactor hebben geen eenduidige betekenis. Toch zijn dergelijke bewerkingen aan de orde van de dag in talloze toepassingen van beeldbewerking.

Laten we als voorbeeld kijken naar het roteren van een lijnstuk, bijvoorbeeld tussen de punten (0,0) en (5,7), over een hoek van 30 graden rondom de oorsprong. Elementaire berekening laat zien dat het geroteerde lijnstuk loopt tussen (0,0) en (0.830127…., 8.562177….). Maar dat betekent dat dit eindpunt niet op een pixel ligt, en dat we moeten afronden naar (1,9). Het lijnstuk is daarmee maar liefst ruim 5% langer geworden – hetgeen een buitengewoon merkwaardig resultaat is voor een rotatie.

We kunnen hier moeiteloos talloze voorbeelden aan toe voegen van elementaire meetkundige doodzonden die veroorzaakt worden doordat we ons moeten beperken tot een rechthoekig rooster van pixels. Bijvoorbeeld: het middelpunt van een lijnstuk wordt bij rotatie niet afgebeeld op het geroteerde middelpunt, twee evenwijdige lijnstukken kunnen naar believen 0, 1 of willekeurig veel pixels gemeen hebben, en dit geldt ook voor twee snijdende lijnstukken, enzovoort. De gehele Euclidisch meetkunde, en daarmee de theoretische grondslag van ons begrip van beeldinhouden, houdt op betekenis te hebben op pixel roosters.



Beeldtechnologen en computerontwerpers, geconfronteerd met deze rariteiten, hadden twee keuzes. Men kon afzien van het idee beelden te representeren met pixels, of men kon proberen de schade te beperken. Misschien onder druk van de markt, en het niet onmiddellijk voorhanden zijn van een alternatief voor pixels koos men voor het laatste. Men ging *filteren*. Als volgt.

In de figuur op de volgende pagina kolom 1 is het zelfde lijnstuk te zien, van de oorsprong naar (5,7), ditmaal opgevat als een pixelplaatje waarbij elk pixel door een zwart of grijs vierkantje is weergegeven. Als eerste wordt het beeld een beetje gefilterd of uitgesmeerd. Wiskundig is zo’n filtering een *convolutie*: als $F(x,y)$ een functie is die aan een pixel (x,y) een grijswaarde toevoegt, is de convolutie $F_s\sim(x, y)$ van F met een gegeven uitsmeerfunctie G_s gegeven door

$$F_s\sim(x,y) = \sum_{x'=x-h\ldots x+h,\, y'=y-h\ldots y+h} F(x',y')\, G_s(|x'-x|,|y'-y|). \quad (1)$$

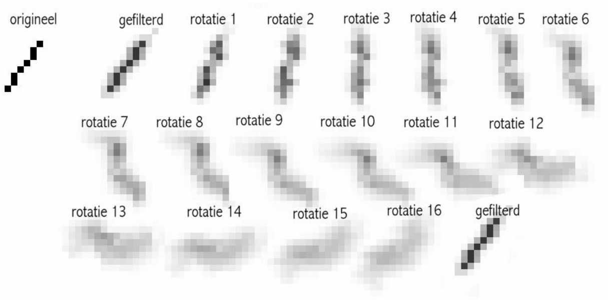
Hierin is $G_s(|x'-x|,|y'-y|)$ een functie die aangeeft hoe groot de invloed is van een pixel in het origineel op locatie (x',y') op het resulterende plaatje in locatie (x,y). Zo’n functie heet een *filterkern*. Die filterkern $G_s(\, , \,)$ bereikt zijn maximum in het punt (0,0) en loopt snel af voor toenemende $|x'-x|$ en $|y'-y|$. G_s kan voorgesteld worden als een soort symmetrische bult[2]. De index s duidt op de breedte van de bult Daarom zorgt G_s ervoor dat het signaal F uitgesmeerd wordt, en wel des te breder naarmate s groter is. Er gaat dan meer detail in F verloren. Er zijn allerlei vormen van filterkernen denkbaar die allerlei andere bewerkingen op F laten ontstaan; kenmerkend is echter dat in het algemeen meer detail in F verloren gaat naarmate de filterkern breder is. We zullen daar straks meer over horen.

Het effect van filteren door middel van zo’n overal positieve functie G is alsof het beeld wat vager gemaakt wordt, alsof we door onze ooghaartjes naar het beeld kijken.

In alle plaatjes hieronder, genaamd 'rotatie 1' … 'rotatie 16' is dit gefilterde beeld vervolgens steeds over (ongeveer) 22,5 graden gedraaid. Omdat het gedraaide beeld echter weer in pixels gerepresenteerd moest worden, moest er steeds een kunstgreep uitgehaald worden. Om namelijk te bepalen wat de nieuwe grijswaarde in een pixel, zeg op plaats (x,y), moet worden, nemen we een gemiddelde van alle pixels uit het oorspronkelijke beeld. Om dat gemiddelde te berekenen geven we de grijswaarde in enig pixel, zeg op (x',y'), een weegfactor waarbij we die weegfactor sterk laten afnemen met de afstand tussen $\boldsymbol{R}(x',y')$ en (x,y). Hierbij stelt $\boldsymbol{R}$ de rotatieafbeelding voor. Ook voor deze afname gebruiken we weer onze functie G_s. Dus een pixel (x',y') dat door $\boldsymbol{R}$ toevallig op of vlak bij (x,y) terecht komt krijgt een grote weegfactor, en telt dus belangrijk mee bij het bepalen van de grijswaarde in (x,y), terwijl een pixel in een andere locatie, zeg (x'',y''), die door $\boldsymbol{R}$ ver van (x,y) afgebeeld wordt niet of nauwelijks bijdraagt. Kort gezegd: ook hier passen we weer een convolutie toe, die sterk lijkt op (1):

$$F_s\sim(x,y) = \sum_{x'=x-h\ldots x+h,\, y'=y-h\ldots y+h} F(x',y')\, G_s(|\boldsymbol{R}_x(x',y') - x|, |\boldsymbol{R}_y(x',y') - y|) \qquad (2)$$

We schrijven hier $\boldsymbol{R}_x(p,q)$ voor de x-component van het over $\boldsymbol{R}$ geroteerde punt (p,q); idem voor $\boldsymbol{R}_y$. Ook hebben we dus weer een keuze moeten maken voor de breedte s van de bult G. Als we deze s te klein nemen ontstaat een erg rafelig beeld; we noemen dat aliasing;. Het welbekende Moiré-effect is een voorbeeld van aliasing. Als we s voldoende groot nemen opdat geen al te nadrukkelijke rafels ontstaan, wordt het beeld echter bij elke bewerking een stukje vager. We zien dat goed geïllustreerd als we 16 keer achter elkaar diezelfde rotatie uitvoeren. We weten uiteraard dat 16 rotaties achterelkaar over 22,5 graad de identieke afbeelding oplevert. Maar door het steeds weer opnieuw convolueren met (2) blijft er weinig over van het oorspronkelijke beeld (rechtsonder in onderstaande figuur zetten we voor de duidelijkheid het gefilterde lijnstuk in zijn oorspronkelijke oriëntatie nog eens naast rotatie 16).

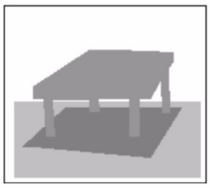


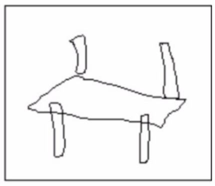
In de meeste toepassingen van beeldtechnologie is een reeks van zestien bewerkingen achter elkaar tamelijk veel. Bovendien is de resolutie van moderne beeldschermen zo hoog dat een klein beetje onscherpte niet altijd onmiddellijk opvalt.

Naarmate beelden meer en meer digitaal worden, en naarmate er meer soorten uiteenlopende beeldschermen zullen komen (uiteenlopend van enkele vierkante centimeters tot meerdere vierkante meters), met sterk uiteenlopende resoluties, kunnen we het dilemma tussen aliasing en onscherpte echter niet blijven ontlopen. En zoals we hierboven gezien hebben is het dilemma niet simpelweg het resultaat van onzorgvuldig geïmplementeerde beeldbewerkingsalgoritmen. In plaats daarvan is het een onvermijdelijk, rechtstreeks resultaat van het feit dat beelden worden gerepresenteerd als reeks (discrete) grijswaarden of kleurwaarden op een rooster dat a priori gekozen is, dat wil zeggen dat geen enkele rekening houdt met de inhoud van het beeld. We zullen dit probleem, dat ontstaan is met de uitvinding van de Nipkow schijf, aanduiden als de Nipkow doctrine.

De centrale vraag is uiteraard of aan de Nipkow doctrine te ontsnappen is. Met andere woorden: bestaat er een representatie van beelden die het toestaat om aan beelden te rekenen, om ze in computergeheugens op te slaan, en om er verstandige bewerkingen op te kunnen uitvoeren, zonder dat bij elke bewerking de kwaliteit slechter wordt, en zonder dat we last hebben van aliasing?

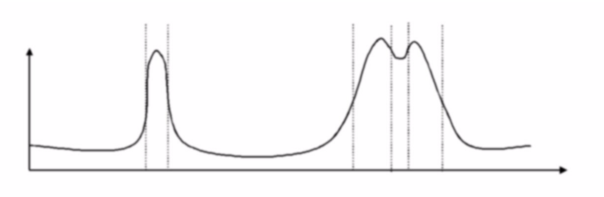
Hoe diepzinnig deze vraag ook schijnen moge, we kunnen inspiratie voor een mogelijk antwoord halen uit een kinderlijk eenvoudige hoek, namelijk uit een tekening. En meer in het bijzonder, een kindertekening.





Links zien we een grijswaarden afbeelding van een tafel, en rechts een kindertekening hiervan. Als we gemakshalve aannemen dat die tekening de meest essentiële elementen van het beeld representeert, zien we dat een heleboel detail verloren is gegaan (of lijnen recht zijn of krom is bijvoorbeeld niet belangrijk). De informatie die overgebleven is zijn de zogenaamde singulariteiten in het beeld. Met name randen en hoeken. Een singulariteit is, in de meest letterlijke zin, een bijzonder punt. Het is een punt waarvoor geldt dat in de omgeving ervan het beeld 'saai' is: alleen in de singulariteiten verandert iets wezenlijks. Kennelijk moeten we, als we de essentie van een beeldinhoud willen representeren, op zoek naar de punten waar iets drastisch verandert.

Wiskundig is dit te vertalen naar tekenwisselingen in afgeleiden, met name in tweede afgeleiden. Een tweede afgeleide kan positief zijn of negatief, en de omslag van teken zullen we aanduiden als singulariteit. Beschouw het onderstaande ééndimensionale signaal (de stippellijnen geven de locaties van tekenwisselingen van de tweede afgeleide aan):

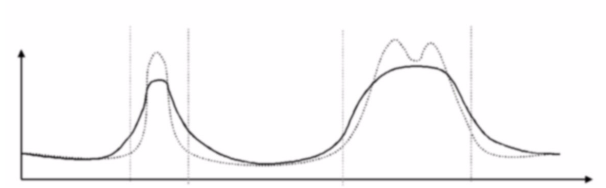


Kwalitatief zien we hier twee ‘objecten’, laten we zeggen, ‘bulten’, waarbij de breedste van de twee nog een klein ‘objectje’ omvat, namelijk een ‘kuiltje’. Deze niet-wiskundige noties kunnen we makkelijk formaliseren: *elk paar opvolgende tekenwisselingen van de tweede afgeleide begrenst een object*. Uiteraard hebben we nog wat meer informatie nodig dan alleen de plaats van de tekenwisselingen om de ‘hele’ inhoud van het beeld te beschrijven, maar het is belangrijk om op te merken dat we in ieder geval geen beeldelementen met a priori gegeven plaatsen (zoals pixels) hebben geïntroduceerd. Daardoor vermijden we het duivelse dilemma tussen aliasing en onscherpte. We kunnen nu bijvoorbeeld bewerkingen op het signaal uitvoeren door voor te schrijven op welke manier de singulariteiten bewerkt moeten worden (opgeschoven, of, in een tweedimensionaal signaal, geroteerd of nog anderszins getransformeerd).

We merken nog iets anders op. In het bovenstaande signaal is weinig discussie over de linker bult als zelfstandig object. Maar hoe zit het nu met de rechter bult? Is dat één brede bult, of zijn het twee smalle bulten op korte afstand, of is dat een bult met een kuiltje erin? Al deze interpretaties zijn verdedigbaar; ze veronderstellen alleen allemaal een verschillende schaal waarop we naar het signaal kijken. Het aardige is dat we ook deze interpretatiekwestie elegant in wiskundige termen kunnen uitdrukken. Daartoe moeten we eerst vertellen hoe die tweede afgeleide berekend kan worden. Zoals bekend is differentiëren niet numeriek stabiel (ruis op het signaal wordt versterkt). Maar we kunnen handig gebruik maken van een elementaire stelling uit de integraalrekening. Voor twee functies, $F(x)$ en $G_s(x)$, waarbij $G(x)$ voldoende snel naar 0 gaat als $|x|$ groot wordt, geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\frac{d}{dx}Gs(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} Gs(x)\frac{d}{dx}F(x)dx \qquad (3)$$

Analoge relaties gelden voor tweede afgeleiden. Als we weer voor G_s onze filterkern denken kunnen we (3) als volgt interpreteren: ‘als we een signaal F convolueren (filteren) met de afgeleide van een filterkern G_s is dat *precies hetzelfde* alsof we de afgeleide van het signaal convolueren met de oorspronkelijke filterkern G_s’. Niet alleen hebben we hier een stabiele manier gekregen om de tweede afgeleide van een signaal te berekenen, we zien ook dat het berekenen van een tweede afgeleide impliciet altijd vergt dat we een keuze moeten doen voor de waarde van s. Met andere woorden: we moeten zeggen in welke mate van details we geïnteresseerd zijn. Als we de bovenstaande figuur nog een keer tekenen, maar nu met een andere schaal, zien we duidelijk dat er automatisch een andere toekenning van objecten tevoorschijn komt. Met name zien we dat er op deze grotere schaal nog maar vier van de zes tekenwisselingen van de tweede afgeleide overblijven, hetgeen mooi overeenkomt met onze intuïtie dat er nog maar twee ‘objecten’ op deze schaal te onderscheiden zijn.



Wij zijn ons ervan bewust dat we veel (lastige en subtiele) details links hebben laten liggen. Het feit dat er in (3) integralen staan terwijl we eerder in (1) en (2) over sommen spraken is er daar slechts één van; de generalisatie van dit verhaal naar tweedimensionale signalen is een andere, technisch veel lastigere kwestie, die ons ver buiten de bedoeling van dit artikel zou voeren. Niettemin hopen we een paar wezenlijke aspecten van beeldrepresentatie aan de orde gesteld te hebben: het fundamentele dilemma tussen aliasing en onscherpte, veroorzaakt door het gebruik van pixels om beelden te representeren, kan alleen opgelost worden door een drastisch andere keuze van de representatiewijze. Discrete singulariteiten lijken recht te doen aan wat wij als mensen ervaren als ‘de essentie’ van een beeld, en om deze singulariteiten te kunnen vinden moeten we ons uitspreken over de schaal waarop we naar het beeld kijken. Ofschoon dit in het vakgebied van de beeldbewerking een nog verre van uitgemaakte zaak is, lijkt het erop alsof een nieuwe technologie, gebaseerd op zogenaamde *scale spaces* een interessante kanshebber is. We eindigen daarom ook met de geïnteresseerde lezer door te verwijzen naar het boek *Image Structure* van Luc Florack (Kluwer Academic Publishers, 1997).

Kees van Overveld, Technische Universiteit, Eindhoven

Noten

[1] Het is precies deze benadering die, bij nader in*zien*, aanleiding geeft tot de fundamentele problemen bij het reconstrueren van het beeld waar we ons in dit artikel druk over maken.

[2] Vaak kiezen we hier een Gaussiaan voor: $G_s(p,q)$ = C exp(-(p^2+q^2)/s2 waarbij C een goed gekozen normeringsfactor is om te zorgen dat de som van alle G_s waarden één oplevert.

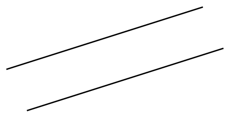
Elf parallellen met een nawoord

Een bloemlezing van gedichten waarin wordt gerefereerd aan Euclides’ parallellenaxioma. Zelfs de elliptische en hyperbolische meetkunde komen even voor. **Aad Goddijn** gaf op de Nationale Wiskunde Dagen 1995 een voordracht over wiskunde in de literatuur.

The definition of Love
As Lines do Loves *oblique* may well
Themselves in every Angle greet:
But ours so truly *Parallel*,
Though infinite can never meet.

Andrew Marvell 1621-1678
Fragment; 4 van 28 regels

Parallèles



On va, l’espace est grand,
On se côtoie,
On veut parler.

Mais ce qu’on se raconte
L’autre le sait déjà,

Car depuis l’origine
effacée, oubliée,
C’est la même aventure.

en rêve on se rencontre,
On s’aime, on se complète.

On ne va plus loin
Que dans l’autre et dans soi.

E. Guillevic, (1907-1997)
Uit: Euclidiennes, 1977

[Evenwijdige lijnen
Wij gaan, de ruimte is groot
we lopen zij aan zij,
we willen praten.

Maar wat de een vertelt,
weet de ander al.

want sinds de oorsprong,
uitgewist, vergeten,
bleef het verhaal gelijk.

In een droom elkaar ontmoeten,
liefde en vervulling vinden.

Niemand komt ooit verder
dan in de ander en zichzelf.

vertaling: Maurits Dienske]

Die zwei Parallelen
Es gingen zwei Parallelen
ins Endlose hinaus,
zwei kerzengerade Seelen
und aus solidem Haus.

Sie wollten sich nicht schneiden
bis an ihr seliges Grab:
Das war nun einmal der beiden
geheimer Stolz und Stab.

Doch als sie zehn Lichtjahre
gewandert neben sich hin,
da wards dem einsamen Paare
nicht irdisch mehr zu Sinn.

Warn sie noch Parallelen?
Sie wußtens selber nicht, -
sie flossen nur wie zwei Seelen
zusammen durch ewiges Licht.

Das ewige Licht durchdrang sie,
da wurden sie eins in ihm;
die Ewigkeit verschlang sie
als wie zwei Seraphim.

Christian Morgenstern (1871-1914)
Uit: Palma Kunkel, 1916

The Corporal who killed Archimedes
With one bold strike
he killed the circles, tangent
and point of intersection of parallels
in infinity.

On penalty
of quartering
he banned numbers
from three up.

Now in Syracuse
he heads a school of philosophers
for another thousand years
and writes

one two
one two
one two
one two

Miroslav Holub (1923-1998)
Uit: Before and After (1960)

Eerder verschenen in *Arthesis*, *15*(1) 2001

The parallel syndrom

Two parallels
always meet
when we draw them by our hand.

The question is only
whether in front of us
or behind us.

whether the train in the distance
is coming
or going.

Miroslav Holub (1923-1998)
Uit: Supposed to fly (1960)

Vergelijkingen

Die hoekigheid: daar blijft het echt
om draaien. Twee binnenhoeken die een rechte
heeft gemaakt, die door twee rechten ging.
Zijn ze te scherp, dan is er uitzicht.
Maar zijn ze recht rest slechts oneindigheid.

Ik hang aan recht en wijs de hoeken af
die ik niet samen strekken kan. Geknakt
lijkt mij een slecht begin. Men hoort
zijn eigen rug te rechten, zelf het woord
in daden om te zetten. Trek recht het koord

dat eeuwig evenwijdig loopt. Maar onrust
trekt al eeuwen door dat ferme punt.
Wat zeker scheen bleef onbewezen
en laat zich slechts met moeite lezen,
strandt op een tartend kromme kust.

Dat naast en parallel: geef het maar op.
Alleen een spiegel kan voorkomen dat je botst.

Michael Zeeman (1958-...)
Uit: Verhoudingen (1995)

Paradiso XVII

‘O cara pianta mia che sí t’insusi,
che, come veggion le terrene menti
non capére in triangol due ottusi,
cosí vedi le cose contigenti
anzi che sieno in sé, mirando il punto
a cui tutti li tempi son presenti;

Dante Alighieri (1265-1321)
Divina Commedia,
Paradiso XVII, 13-18

[O voorzaat die nabij de Schepper leeft,
Gij ziet, zo simpelweg als wij ontwaren
Dat geen driehoek twee stompe hoeken heeft,

Al wat geschieden zal in later jaren
Door in het hoge Punt te schouwen waar
Zich toekomst en verleden openbaren.

vertaling: Rob Brouwer]

Zwei Striche im Sand, gelesen mit dem Geist

DON RODERIGO Wohin?
DON JUAN Zur Geometrie.
DON RODERIGO Juan, das ist nicht dein Ernst.
DON JUAN Der einzige, der mich verblieben ist nach dieser Nacht. Bedaure mich nicht! Ich bin ein Mann geworden, das ist alles. Ich bin gesund, du siehst es, von Scheitel bis Sohle. Und nüchtern vor Glück, das es vorbei ist wie ein dumpfes Gewitter. Ich reite jetzt in den Morgen hinaus, die klare Luft wird mir schmecken. Was brauche ich sonst? Und wenn ich an einem rauschende Bach komme, werde ich baden, lachend vor Kälte, und meine Hochzeit ist erledigt. Ich fühle mich frei wie noch nie, Roderigo, leer und wach und voll Bedürfnis nach männlicher Geometrie.
DON RODERIGO Geometrie!
DON JUAN Hast du es nie erlebt, das nüchterne Staunen vor einem Wissen, das Stimmt? Zum Beispiel: was ein Kreis ist, das Lautere eines geometrischen Orts. Ich sehne mich nach dem Lauteren, Freund, nach dem genauen; mir graust vor dem Sumpf unserer Stimmungen. Vor einem Kreis oder einem Dreieck habe ich mich noch nie geschämt, nie geekelt. Weißt du, was ein Dreieck ist? Unentrinnbar wie ein Schicksal: es gibt nur eine einzige Figur aus den drei Teilen, die du hast, und die Hoffnung, das Scheinbare unabsehbarer Möglichkeiten, was unser Herz so oft verwirrt, zerfällt wie ein Wahn vor diesen drei Strichen. So und nicht anders! sagt die Geometrie. So und nicht irgendwie! Da hilft kein Schwindel und keine Stimmung, es gibt ein einzige Figur, die sich mit ihrem Namen deckt. Ist das nicht schön? Ich bekenne es, Roderigo, ich habe noch nichts Größeres erlebt als diese Spiel, dem Mond und Sonne gehorchen. Was ist feierlicher als zwei Striche im Sand, zwei Parallelen? Schau an den fernsten Horizont, und es ist nichts an Unendlichkeit; schau auf das weite Meer, es ist Weite, nun ja, und schau in die Milchstraße empor, es ist Raum, daß dir der Verstand verdampft, unausdenkbar, aber es ist nicht das Unendliche, das Sie allein dir zeigen: zwei Striche im Sand, gelesen mit dem Geist... Ach Roderigo, ich bin voll Liebe, voll Ehrfurcht, nur darum spotte ich. Jenseits des Weihrauchs, dort wo es klar wird und heiter und durchsichtig, beginnen die Offenbarungen; dort gibt es keine Launen, Roderigo, wie in den menschlichen Liebe; was heute gilt, das gilt auch morgen, und wenn ich nicht mehr atme, es gilt ohne mich, ohne euch. Nur die Nüchterne ahnt das Heilige, alles andere ist Geflunker, glaub mir, nicht wert, daß wir uns aufhalten darin.
Er reicht nochmals die Hand. Lebwohl!
DON RODERIGO Und das Mädchen am Teich?
DON JUAN Ein ander wird sie trösten.

‘Don Juan oder Die Liebe zur Geometrie’;
fragment uit de derde acte.
Max Frisch (1911-1991)

Euclides
Gij zijt aan het bestaande tegenstrijdig.
Buiging en ronding om u heen gelegd,
eenmaal uw beeld te buiten, trokken recht
en maakten u aan alles evenwijdig.

Tussen die lijnen werd de tijd ontijdig
en schoof de ruimte uit uw lichaam weg.
Ieder begrip dat nog iets van u zegt,
krijgt doel te veel en middelen te weinig.

Ik kan u niet met Euclides beschrijven,
want de figuur waarmee u congrueert
heeft punten nodig der oneindigheid.

Nochtans moet ge binnen de perken blijven
van het gedicht dat u verdisconteert
in al het wit dat ieder woord omsluit.

Gerrit Achterberg (1905-1962)
Uit: Sneeuwwitje, 1949.

Wiegelied van Cape Cod

(voor A.B.)

IV

De verandering van Imperium hangt samen met
klanken, taal, met speekselvorming bij ‘t spellen,
met de som van hoeken uit Lobatsjevski’s wet,
met de groeiende kans dat parallellen
elkaar raken (zoals lengtegraden bij
de noord- of zuidpool).

Joseph Brodsky 1940-1996
Uit: A Part of Speech??????
Fragment; 7 van 413 regels
vertaling: Peter Zeeman

After reading a Child’s Guide to Modern Physics
Our eyes prefer to suppose
That a habitable place
Has a geocentric view,
That architects enclose
A quiet Euclidean space:
Exploded myths–but who
Would feel at home astraddle
An ever expanding saddle?

W. H. Auden, (1907-1973)
Fragment, hele gedicht 48 regels

De berg tegenover het paleis
De berg tegenover het paleis van Minos is als een Grieks theater
een tragedie met de rug leunend op een stormachtige helling
in de rijen heel geurige struiken nieuwsgierige olijven klappen voor de ruïne
Tussen de natuur en het menselijk lot
bestaat geen wezenlijk verband
zeggen dat het gras spot met de catastrofe
is een bedenksel van ontroostbaren en weifelenden

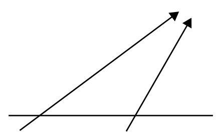
Een bijzonder geval: twee evenwijdige rechten
snijden elkaar zelfs in het oneindige niet

Meer kan men er in eerlijkheid niet van zeggen

Zbigniew Herbert (1924-1998)
Uit: Inscriptie (1969)
Vertaling: Gerard Rasch

Nawoord

Voor Andrew Marvell is het eenvoudig: schuine lijnen snijden elkaar en parallellen doen dat niet. Bijna letterlijk de definitie die we bij Euclides vinden: parallel zijn lijnen die, hoever ook voortgezet, geen snijpunt hebben. En daarom moet je in de liefde soms wachten op het oneindige.
De Bretonse dichter Eugene Guillevic schreef een serie korte gedichten die steeds beginnen met een eenvoudige meetkundige figuur. Ook bij hem staat evenwijdigheid voor eeuwig op dezelfde afstand blijven. Maar Christian Morgenstern maakt ons – als altijd – vrolijk en gelukkig: het eeuwige is na tien jaar al in zicht, en hoe.
De korporaal van Holub slaat met een klap het oneindige naar de verdoemenis, en via vier(endelen) en drie, daalt het gedicht af naar de bruutheid der laagste getallen: die van de militaire dictatuur. Het gedicht is uit 1960, dus nog onder het communistisch bewind in TsjechoSlowakije geschreven. Overigens had Archimedes niets op met snijpunten in het oneindige; dat is allemaal erg on-Grieks, maar het zij Holub vergeven.
Hoe zit het nu echt met die evenwijdigheid? Van Andrew Marvell hebben we de definitie van ‘evenwijdig’ geleerd, van Michael Zeeman krijgen we het vijfde postulaat van Euclides in het eerste couplet aangeboden. Niet helemaal letterlijk; bij Euclides snijden twee lijnen elkaar als de binnenhoeken aan een kant samen minder zijn dan de som van twee rechte hoeken. Eén van de hoeken kan dan wel stomp zijn.



Uit het vijfde postulaat kan afgeleid worden waar Dante in het gesprek in het Paradijs met zijn voorvader Cacciaguida zo zeker van is: dat een driehoek nooit twee stompe hoeken kan hebben. Zo lag dat in die dagen: de postulaten werden gezien als waarheden waar je niet omheen kon en waarvan je de gevolgen onvoorwaardelijk accepteerde.
Don Juan laat Anna achter bij de vijver, op de ochtend na de nacht. Hem is de oneindigheid van de evenwijdige lij-

nen liever, een oneindigheid die door de geest wordt opgeroepen bij de twee strepen in het zand. Dat gaat voorbij aan de ‘Sump unserer Stimmungen’, daar liggen de werkelijke Openbaringen en zelfs het Heilige.
Maar aan alle zekerheden valt te tornen, en dat doen wiskundigen uit modernere tijden graag. Ze schiepen zich nieuwe meetkunden, waarin postulaat vijf niet gold en het tegendraads-mysterieuze hiervan heeft heel wat dichters van de twintigste eeuw geinspireerd.
Mogen we bij de punten der oneindigheid van Gerrit Achterberg aan de verdwijnpunten van het perspectief denken, die alleen op tekening of schilderij bestaan of zullen we meteen voor de vlakke projectieve meetkunde kiezen waar elke lijn elke andere lijn snijdt?
Joseph Brodsky is bij uitzondering direct autobiografisch in ‘Wiegelied van Cape Cod’. Onder andere W.H. Auden zette zich met succes voor Brodsky in, zodat het werkkamp boven de Russische poolcirkel verruild kon worden voor een ander imperium, de Engelse taal en een nieuwe meetkunde. Al in het begin van het lange gedicht nam een de hoek omschietende auto wraak op Euclides. Bladzijden later wordt het beeld voortgezet, onvervalste niet-Euclidische meetkunde stapt de poezie in.
De (aard)bol wordt vaak gebruikt om begrijp te krijgen voor een meetkunde waarin alle lijnen (op de bol moeten waar daar de grootcirkels voor nemen) elkaar snijden en waar je driehoeken hebt met wel drie stompe hoeken. Lobatchevski is een van de ontdekkers van de niet-Euclidische meetkunde, maar overigens niet van de variant die bij de bol aansluit (dat is de elliptische meetkunde), maar van de wiskundig belangrijker hyperbolische meetkunde, waarin het juist heel vaak voorkomt dat lijnen elkaar niet ontmoeten. Auden, lezend in een natuurkundeboek voor kinderen, ontmoet ongewild die laatste meetkunde.
Bij de elliptische meetkunde is de in alle richtingen eendere kromming van een boloppervlak een mooi beeld, bij de hyperbolische meetkunde moet je denken aan heel andere kromming, meer aan een zadelpunt in de bergen, daar is in de voor-achter richting de kromming naar beneden gericht maar in de links-rechts richting naar omhoog.
Een uitdijende cirkel gedraagt zich daar vreemd: de omtrek groeit er meer dan evenredig met de straal, terwijl in de elliptische meetkunde de cirkelomtrek juist minder dan evenredig met de straal van de cirkel groeit. Maak eens met een touw een driehoek in zo’n zadel, neem als ‘rechte’ zijden de kortste verbindingen over het oppervlak tussen de hoekpunten. Ervaar Lobatchevski’s wet: de volle som der hoeken is kleiner dan 180 graden.
De veelvuldigheid van de niet snijdende parallellen is geïllustreerd door Escher. De witte curven van Cirkellimiet III zijn de rechten van het hyperbolische vlak. Neem er een in het oog, je vindt gemakkelijk punten in de figuur waar wel drie witte curven doorgaan, die de eerst gekozene niet snijden. Bedenk wel dat het maar een afbeelding is. In het echte hyperbolische vlak zouden al Eschers vissen even groot zijn en zou een vlakvulling getekend zijn, die in het gewone vlak niet mogelijk is.
Zbigniew Herbert brengt ons terug naar de evenwijdige lijnen die elkaar niet ontmoeten en toch een bijzonder geval zijn. Nu staan ze voor de natuur en het menselijk lot. Meer gaan we daar niet over zeggen!

Aad Goddijn, Freudenthal Instituut

Meer informatie over voordrachten van Aad Goddijn over wiskunde, poëzie en literatuur is te vinden via: www.fi.uu.nl/~aad

Deze tekst is eerder verschenen in het Arthesis, jaargang 15, nr. 1 (2001).
Arthesis is het tijdschrift van de stichting Ars et Mathesis. Zie www.arsetmathesis.nl

Voor LWOO-docenten, maar eigenlijk voor elke docent: opdrachtjes waarbij leerlingen even hun energie kwijt kunnen! **Ingrid Berwald** hield hierover een voordracht op de Nationale Wiskunde Dagen 2003.

Energizers

Wat zijn energizers?

Steeds meer scholen maken in de mentorlessen gebruik van energizers: korte opdrachtjes waarbij de leerlingen in beweging zijn. Op deze manier kunnen ze even wat energie kwijt, om vervolgens goed mee te kunnen doen in de les. Energizers hebben uiteraard ook een lesdoel. Tijdens mentorlessen is dat doel bijvoorbeeld kennismaken, groepjes vormen of leren samenwerken. Vaak is het advies om niet alleen in de mentorlessen maar ook tijdens andere lessen van energizers gebruik te maken.

Energizers en wiskunde

Ook wiskundelessen kunnen heel goed met een energizer beginnen. Het niveau van de leerling is daarbij niet van belang.
Er zijn verschillende soorten energizers in de wiskundelessen te gebruiken:

1. Groepjes vormen met een vervolgopdracht
2. Introductie van een nieuw onderwerp
3. Informatie geven zonder zelf veel te praten.

Groepjes vormen met een vervolgopdracht

Een heel makkelijke manier om heterogene groepjes te vormen is de energizer met de kaartjes.
Je maakt net zoveel kaartjes als er leerlingen in de klas zitten. Het aantal kaartjes dat bij elkaar hoort bepaalt de groepsgrootte. De kaartjes moeten te maken hebben met het onderwerp van de les. Dit soort energizers is snel en eenvoudig te bedenken. Een voorbeeld:
Bij het onderdeel statistiek gebruik ik het M&M-practicum nogal eens; zie werblad op pagina 94 e.v.. Bij dit practicum werken de leerlingen in groepjes van vier aan een opdracht met M&M's, een soort snoepjes. Voor 23 leerlingen heb je dus 5×4 en 1×3 kaartjes nodig. Je kunt dan kaartjes maken met daarop een plaatje van een M&M-snoepje in een bepaalde kleur (4× rood, 4× geel, enzovoorts; zie figuur 1). De leerlingen trekken aan het begin van de les een kaartje en vormen samen met de leerlingen met dezelfde kleur M&M een groepje.
De leerlingen lopen dus even door de klas, weten dat de les met M&M's en kleuren te maken heeft, en gaan vervolgens samenwerken in heterogene groepjes.

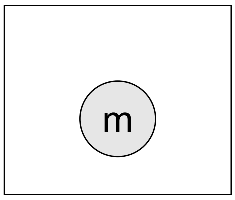


fig. 1 *Zo zou zo'n kaartje er uit kunnen zien*

Introductie van een nieuw onderwerp

Op een soortgelijke manier als hierboven kun je nu vrij eenvoudig een nieuw onderwerp introduceren.
Het hoofdstuk ruimtefiguren is aan de orde. Voordat er met het hoofdstuk begonnen wordt, is er een energizer om het onderwerp te laten leven. Bij zo'n hoofdstuk kun je denken aan kaartjes met allerlei ruimtefiguren erop. Leerlingen zoeken dezelfde figuren bij elkaar. Je hebt nu groepjes leerlingen en elk groepje vertegenwoordigt een andere ruimtelijke figuur. Laat de leerlingen opzoeken hoe de figuur heet die op het kaartje staat, welke vorm de zijvlakken hebben, enzovoorts. Het hangt natuurlijk af van het niveau van de leerlingen, wat je vooraf al kunt vragen. Het groepje houdt zich 5 minuten bezig met de eigen ruimtelijke figuur en de vragen. Daarna vraag je elke groep: 'Welke figuur heeft jullie bij elkaar gebracht en wat weet je er al van?' Waar zal het de komende lessen over gaan?

Informatie geven zonder zelf veel te praten

Je hebt van die lessen waarbij er nu eenmaal veel verteld moet worden. Een voorbeeld daarvan is het begin van het schooljaar. Bij elke les krijgen de brugklassers te horen wat het vak inhoudt, wat de speciale regels zijn en welke spullen er meegenomen moeten worden. Dit wordt ze wel eens teveel, maar de informatie moet toch gegeven wor-

Eerder verschenen in *Euclides*, *78*(5) 2003

den. Een energizer biedt ook hier uitkomst.
Je maakt grote kaarten en schrijft daarop wat de leerlingen moeten weten.
Zo schrijf je bijvoorbeeld op kaart 1: 'Spullen: geo, rekenmachine, gum, potlood,….'
Op kaart 2: 'Klassenregels: Je mag elkaar helpen, je krijgt elke les huiswerk.…'
Op kaart 3: 'Wiskunde is een mengelmoes van rekenen, tekenen, grafieken.…'
Eventueel schrijf je alle wiskundeonderdelen los op een kaart met een korte uitleg wat het inhoudt. ('Statistiek gaat over ...')
Zo krijg je een aantal kaarten. Die kaarten knip je in vier stukken zodat het een puzzel wordt. De leerlingen trekken een puzzelstuk, puzzelen een groepje bij elkaar en gaan bedenken hoe ze hun onderdeel kunnen presenteren (kort). De vraag is weer: 'Wat heeft jullie bij elkaar gebracht en wat kun je er al van vertellen?' Zelf kun je nog wat aanvullende informatie geven als dat nodig is.
In elk geval weet aan het eind van de les elke leerling wat wiskunde is, wat de regels zijn en welke spullen ze mee moeten nemen.
En dit alles zonder dat je zelf een tijd aan het praten bent geweest.

Zonder kaarten

Er zijn natuurlijk ook energizers te bedenken zonder dat er kaartjes gemaakt moeten worden. Bij statistiek is het een manier om informatie te verzamelen. Iedereen die in dezelfde maand geboren is gaat bij elkaar staan. (Welke maand heeft jullie bij elkaar gebracht?) Iedereen met hetzelfde aantal broers en zussen gaat bij elkaar staan. (Welk aantal is de modus?)

Tot slot

Met dit artikel hoop ik mensen aan het denken te hebben gezet over het gebruik van leerlingactiviteiten in de wiskundeles. Zelf geef ik les aan LWOO-kinderen, en voor deze groep is dit echt leuk om even te doen. Ik merk dat de onderwerpen gaan leven en wat langer blijven hangen. Vooral de leerlingen met concentratieproblemen kunnen energie kwijt zonder lastig gevonden te worden. Het druk zijn wordt omgezet in iets positiefs, en daar gaat het bij deze groep toch voornamelijk om.
Zelf ben ik blij dat ik energizers geprobeerd heb in de wiskundeles. Het voegt echt iets toe aan mijn lessen. Je bereikt er andere kinderen mee, zoals Valery, die wiskunde maar niets vindt. Met de energizers doet ze wel enthousiast mee, en ook de les die er op volgt doet ze enthousiast mee. Het samenwerken doet haar goed en ze krijgt steun van groepsgenoten. Of Glenn, mijn stuiterballetje: hij krijgt medicijnen waardoor hij als bijverschijnsel erg druk wordt. Die drukte weet hij gelukkig ook voor zijn werk te benutten, waardoor hij inmiddels drie hoofdstukken voorloopt, maar stilzitten kan hij niet echt. De energizers zorgen er bij hem voor dat hij zijn energie aan het begin van de les kwijt raakt en bovendien wordt de 'stilzit-tijd' die resteert natuurlijk ook korter. (Dit geldt ook voor kinderen met ADHD.) En Jeroen, het buitenbeentje van de groep, moet toch regelmatig samenwerken met klasgenoten en de klasgenoten met hem. Beide partijen leren hiervan. Per klas doe ik ongeveer eens in de zes weken een energizer, al slaan ze bij sommige klassen zo goed aan, dat ik er dan nog wel eens eentje tussendoor doe.
In het begin is het misschien even wennen dat de leerlingen lopen in de les, maar dat loopgedeelte duurt een paar minuten en is heel gericht. Bovendien heeft het lopen een functie en de opdracht die op de energizer volgt willen de leerlingen altijd afhebben, dus het kan erg motiverend werken.

Ingrid Berwald is wiskundedocent aan het IJsselcollege te Capelle aan den IJssel, daarnaast werkt ze een dag in de week voor het APS, waar zij zich inzet voor LWOO-leerlingen en werken met materialen in de wiskundeles.
E-mailadres: ingridberwald@planet.nl

Werkblad: M&M's

Prakticum

Naam: ______________________________________

cijfer

Maak het zakje M&M's nog **niet** open!!

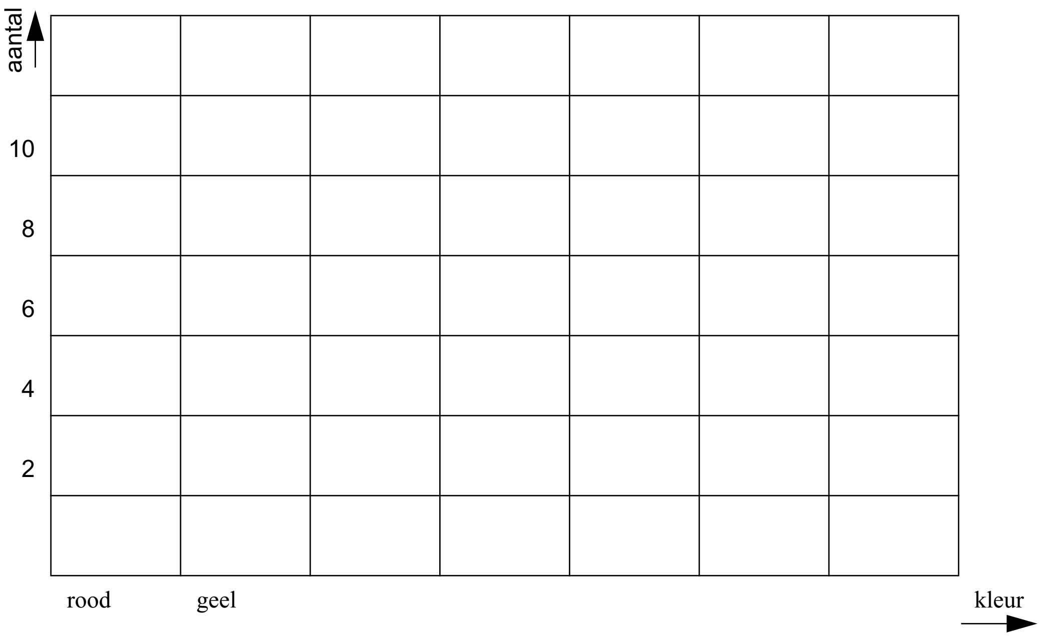
1. Schat hoeveel M&M's er in het zakje zitten. ________________________________

2. Maak een schatting van het aantal M&M's per kleur. Vul de tabel in.

kleur	aantal
rood	
geel	
totaal	

Klopt het totaal met je schatting?

Maak van deze gegevens een staafgrafiek. Kleur de staaf de juiste kleur!



Maak het zakje M&M's open, maar eet nog niets!

3. Tel het aantal M&M's. ____

4. Hoeveel M&M's had jij meer of minder(-) geschat? __________________________

5. Sorteer de M&M's op kleur.

6. Tel het aantal M&M's per kleur en vul de tabel in..

kleur	aantal
rood	
geel	
totaal	

Klopt het totaal?

7. Maak van deze gegevens een beeldgrafiek. Neem als eenheid ❍ **= 2**..

rood	
geel	

8. Bereken het gemiddelde aantal M&M's per kleur. ___________________________

____

Je mag de M&M’s nu opeten

9. Maak een overzicht van de hele klas door de tabel in te vullen

	groep 1	groep 2	groep 3	groep 4	groep 5	groep 6	totaal
rood							
geel							
totaal							

10. Welke kleur is de **modus**?____

____

11. Bereken het aantal M&M’s per kleur. ____________________________________

12. Welke kleur verschilt het meest met het gemiddelde?__________________________

13. Welke groep had de meest oneerlijke verdeling per kleur? ______________________

Leg uit waarom je dat denkt. ____

____

____

14. Is het totaal eerlijker verdeeld dan de losse groepjes? _________________________

15. Hoeveel zakjes moet je kopen als je ongeveer van alle kleuren evenveel M&M’s wilt hebben? ____

16. Bereken hoeveel 1 M&M weegt. ____

Werkblad: Lichamelijke wentelingen

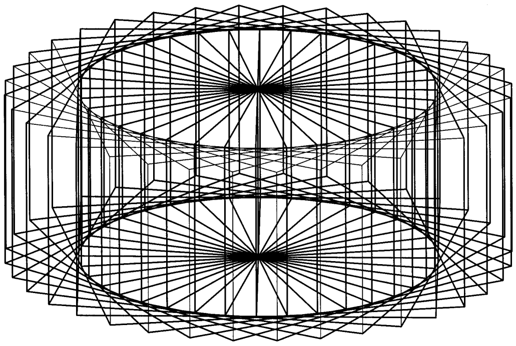
Practicum Michel Roelens NWD februari 2003

Wentelende lichamen

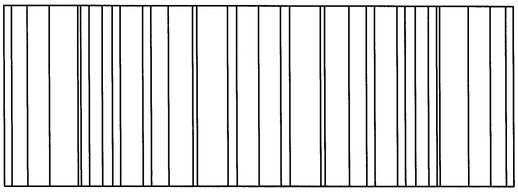
Een kubus

Een kubus wentelt en laat daarbij in de ruimte een 'spoor' achter. Hoe ziet zo'n spoor eruit? Door een blokje te tollen krijg je daar een idee van. Met het computerprogramma Doorzien kan het ook (eerst de optie [Rest verbergen] uit zetten).

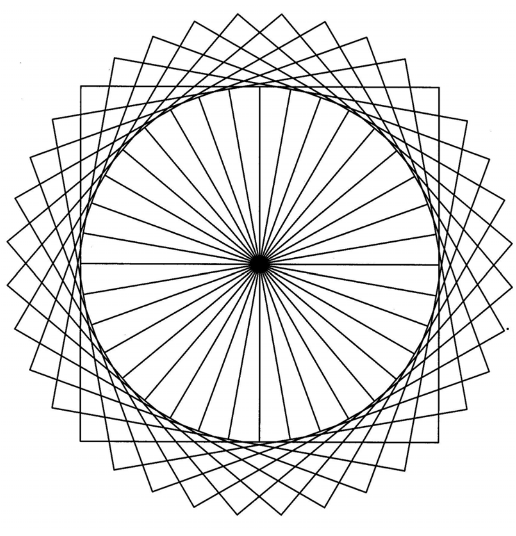
Draaien van een kubus rond één van de ribben geeft het volgende plaatje:



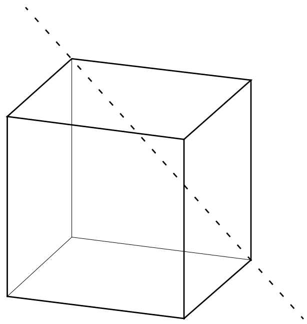
Het vooraanzicht is niet zo spectaculair:



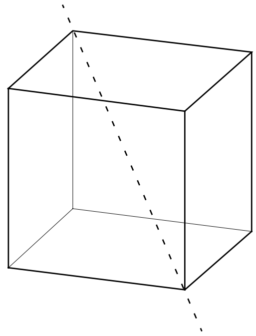
Het bovenaanzicht is al mooier, maar nog niet zo verrassend:



Wentelen rond één van zijn zijvlaksdiagonalen geeft een onverwachter beeld. Beschrijf zo nauwkeurig mogelijk het omwentelingslichaam dat op die manier onststaat.

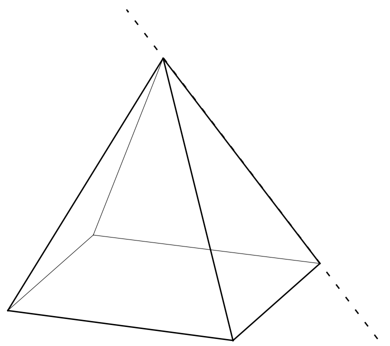


Een kubus wentelt rond één van zijn lichaamsdiagonalen en laat daarbij in de ruimte een 'spoor' achter. Beschrijf zo nauwkeurig mogelijk het omwentelingslichaam dat op die manier ontstaat.



Een piramide

Neem nu een piramide met een vierkant grondvlak en gelijkzijdige zijvlakken. Laat die piramide rond één van de opstaande ribben wentelen. Beschrijf het omwentelingslichaam dat je krijgt.



Zie ook het gelijknamige artikel van Michel Roelens in de Nieuwe Wiskrant, 23(2), 2003.

WERKDADIGE MEETKONST,

Tonende
Klaar en beknopt, hoe dat al 't gene een *Ingenieur* en *Landmeter* te meten voorvallen kan, wiskonſtig met en zonder Hoekmeting, door de minſte moeite gemeten word.

HIER BY IS GEVOEGT
Een Verhandeling van Roeden en Landmaten, in de voornaamſte Plaatzen van de Seven Vereenigde Provincien, en eenige andere daar omtrent leggende Plaatzen, gebruikelyk.

Voor dezen beſchreven door
JOHANNES MORGENSTER.

Nu deze tweede Druk, Overgezien, Vermeerdert en in Kopere Platen gebragt
DOOR
JOHANN HERMANN KNOOP,
Liefhebber der *Mathematiſche* Wetenſchappen.

Te LEEUWARDEN,
Gedrukt by ABRAHAM FERWERDA, 1744.

Te NOORDWIJKERHOUT,
Ter Hand geſtelt door JAN VAN MAANEN, 2004

Werkdadige Meetkonst met Neêrlands Werkdadige Doos

Jan van Maanen, Werkgroep op de Nationale Wiskunde Dagen 1996, 1997, 2004.

Voorwoord

Geometria of Meetkonst is een Konst die alles, bepaalt zynde, wel leert meten; en 't gene te meten staat is Grootheid, die doorgaans aan malkander vast en in zekere gestalte bepaalt, bevat word: ant gelyk 't onderwerp van de Rekenkonst getallen zyn, alzo is ook 't voorwerp van de Meetkonst hoegrootheden. Dieshalven word tot 't wel meten vereist de natuur en eigenschappen der hoegrootheden wel en regt te kennen; 't welk de Theory leert, en de Practyk van haar ontfangt: 't eerste is by den vermaarden Euclides weergalozalyk voor omtrent 2000 jaren al ten groten dele volbragt; ik zal 't overige vervullen, oor zo verre als 't tot ons oogwit nodig is, en op zyn gronden bouwen. Wyders zal ik de Practyk, dat is de Meetdadige uitwerking, verhandelen; en de dienstige regelen, die de Ingenieurs en Landmeters, om hun meetwerk te volvoeren, va noden hebben, hier vervolgelyk open leggen. Hieron moet de gene, dewelke een opregt bezitter van deze Konst tragt te wezen, Euclidis boeken, ten minsten de zes eerste, eerst leren; die verstaande, zal hy bekwaam zyn, niet alleen om deze myn Meetkonst te begrypen, maar daarenboven oook om d'Astronomia of Starrekunst, Navigatie of Stiermanskonst, Fortificatie of Vestinbouw, Algebra of Stelkonst en alle andere delen van de Wiskonst grondig te leren; want van deze Konsten zyn Euclidis boeken de oorsprong, grondslag en de beginzelen.Dog nademaal dat 'er menschen gevonden worden, die geen tyd en genegentheid hebben om d'eerste beginzelen en gronden te leren, en maar alleenlyk te vreden zyn met een enkele en blote uitwerkinge der dingen te weten, zo zal ik ook pogen deze te voldoen: egter alle zaken, daar in men de minste twyfeling kan verdigten, bewyzen; die zig daar mee niet wil bemoeyen, kanze, als hy 't voor goed keurt, overslaan; hy zal uit 't volgende eenvoudiglyk d'enkele manier van werken weer konnen verstaan, en alzo tot aan 't einde geraken; indien hy 'er maar te regt op gelieft te letten, en zyn denkbeelden op die tyd van andere bekommeringen te zuiveren. Ik zal evenwel niet volstrekt Euclidis leerwyze en zamenhang nagaan; ondat 't zeer walgelyk is heel klare zaken te bewyzen, en alles op een zelfde wyze te verhandelen: waarom dat ik dan zal klaar, kort en leerzamelyk leren, hoe 't geen een Ingenieur en Landmeter te meten voorvallen kan, makkelykst zonder en met Hoekmeting uitgevoerd word, en zo veel als eenigzints dit beding toelaat Euclidis onverbeterlyke order na volggen: ik zal niet agter houden van 't geen ter zake dient, ok onnodige dingen, die den Leerling ophouden, myden en verbannen: men ziet hier dan klarelyk dat we zullen pogen de Discipelen door de regte weg te leiden; waarom ik niet onnuttelyk zo veel dingen uit Euclidis copiere, gelyk een ander gedaan en geboekt heeft.Schoon 't Griekze woord Geometria, dat men gemenelyk Landmeterie vertaalt, en van de Egyptenaren herkomstig schynt, zig zo wyd niet uitstrekt, als de zaak die men daar door verstaat; nogtans word 't hedendaags, door gewoonte, hoewel de Neerlandze naam Meetkonst veel beter is, nog aan die Konst toegeeigent; want 't gene daardoor verstaaan word, is niet alleenlyk Landmeten, delen, distantie meten, Vestingen aftekenen, Kaartemaken, en wat 'er meer van dusdanige zaken, die wy zullen ontledigen, zyn; maar 't geeft de ware en wettige reglen daar na men in alle goede metingen werken moet: daarom zeer wel genaamt de Beginzelen der Wiskonst, waarop de gehele Mathesis steunt, deszelfs opper geheimen gebouwt staan en bestiert worden. Dog dit moet egter zo niet verstaan worden, dat d' Egyptenaren in 't begin deze Konst t' onregt met de naam Geometria gedoopt hebben; want toen die eerst by haar gevoden wierd; was haar doelwit (nadien dat door de jarelykze overvloeijing des Nyls, in 't midden van d' Oogstmaan, de landscheidingen verwoest wierden, en niemant zyn Akker kon kennen) om elk zyn Land aan te wyzen; en derhalven noemden zy die doenmaals met regt Geometria of Landmeterie, zonder te denken, dat men dezelve namaals, door neerstig oefenen,zoude opbeuren en verspreiden door de gehele Mathematica, gelyk men nu zit, want men kan tegenwoordig zonder eze aangegroeide Geometria te kennen weinig van de Wiskonst bevatten; invoegen dat zekerlyk de Weereld zo wel zonder Zon zou konnen bestaan, als de Mathesis zonder de Geometria of liever Meetkonst: ik zwyge nog dat zy ons nu de zuivere waarheid leert beminnen, en die van valsheid onderscheid, mitsgaders datze in ons beste deel, zynde ons verstand, geen bedrog of valsheid laat inkruipen, maar zelfs de waarheid tegen die ze benyden, te voorschyn brengt: zo datze nu verre boven alle andere Konsten uitmunt, en geagt mag worden.

Tot zover Morgenstern. Hieronder neemt Van Maanen het woord.

1 Doel

Deelnemers aan *Werkdadige Meetkonst* ontdekken, door een serie 'Werkstukken' uit het gelijknamige boek van Morgenster en Knoop op schaal uit te werken, hoe landmeters in de achttiende eeuw hun veldwerk leerden.
Op deze wijze ontwikkelen ze vaardigheden op het gebied van probleem-oplossen en teamwork, en kijken ze met andere ogen naar de meetkunde.

2 Niet (alleen) denken, maar (ook) doen

Bij *Werkdadige Meetkonst* is denken niet verboden, maar het dient te leiden tot het praktisch (=Werkdadig) uitvoeren van de Werkstukken. Wie daartoe niet bereid is zette het denkwerk liever in een andere ruimte voort.
Ofwel, met de woorden van Morgenster over de Werkstukken in het veld:

> men kan met regt niet zeggen, dat men die verstaat, zonder die ooit op 't Veld uitgewerkt te hebben; want tusschen 't ingebeelde begrip hoe een ding moet uitgevoerd worden, en de uitvoering zelfs is een zeer groot onderscheid. [p.146]

Na elk werkstuk wisselen de teamleden van rol (landmeter → rapporteur → dienaar → landmeter).

3 Het team

Werkdadige Meetkonst doe je in een team van drie personen: de landmeter, de dienaar en de rapporteur.

a. de landmeter
Hij/zij bepaalt hoe het werkstuk uitgevoerd wordt, meet hoeken en lengten, plaatst baken of geeft zijn/haar dienaar opdracht om zulks te doen.
Als na enige tijd blijkt dat de landmeter er zelf niet uitkomt, vraagt hij/zij de andere teamleden om advies.

b. de dienaar
Hij/zij transporteert het astrolabium, de keten, de roede en de baken, en voert opdrachten van de landmeter uit.

In het veld doet zich soms de situatie voor dat alleen de landmeter kan zien of de dienaar op de juiste plaats is of zich in de juiste richting begeeft. Komt zo'n situatie in het spel voor, dan voert de dienaar de aanwijzingen van de landmeter **met gesloten ogen** uit.

c. de rapporteur
Hij/zij beschrijft in het '*Memoriaal* of Geheugenis-boekje' de wijze waarop het Werkstuk uitgevoerd wordt.
Bij Morgenster maakt de landmeter zelf de aantekeningen. In het spel zijn de rollen van uitvoerder en verslaggever om een aantal redenen losgekoppeld.

4 De werkstukken

Elk van de werkbladen bevat een opdracht ('Werkstuk') uit de *Werkdadige Meetkonst*. Op instructie van de landmeter voeren landmeter en dienaar het Werkstuk uit, terwijl de rapporteur kort noteert hoe ze te werk gaan.
Zie **3a** voor het geval de landmeter er niet meteen uitkomt. Kom je er ook samen niet uit, lees dan Morgenster's uitwerking.

5 Deel je tijd in

Besteed gemiddeld zo'n vijf minuten aan een Werkstuk. De Werkstukken worden langzaam moeilijker, dus als je in het begin wat sneller kunt werken is dat gunstig.

6 Het materiaal

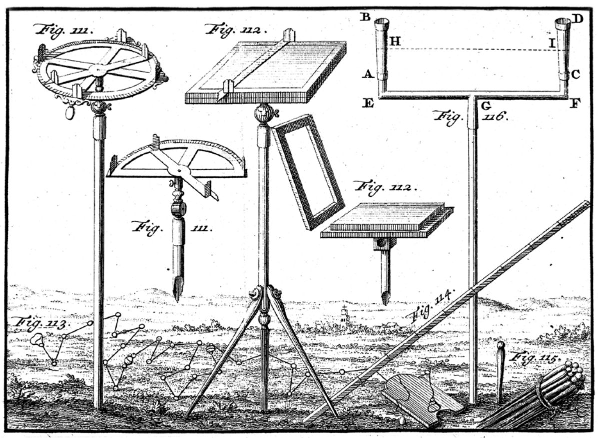
We onderscheiden twee soorten materiaal, namelijk die dingen die specifiek voor het spel zijn, en die dus niet bij Morgenster voorkomen, en het door Morgenster beschreven instrumentarium, dat hier in het klein nagebootst is.

6.1 Specifiek voor het spel

Eerst is er **het veld**: een stuk prikbord. Dan is er de landmeter: een rode prikker met een stuk geel draad aan de voet. De draad symboliseert de lijn waarlangs **de landmeter** kijkt. Op dezelfde wijze is **de dienaar** uitgevoerd: een groene prikker met een stuk geel draad aan de voet. Als een van de twee naar een bepaald object in het veld kijkt wordt dat dus in het spel weergegeven door de draad strak te trekken van de voet van de waarnemer naar het object. Je kunt de draad fixeren door hem onder de voet van het object vast te drukken. Om **objecten in het landschap** (torens en bomen) weer te geven gebruik je prikkers van andere kleuren.
Dan zijn er nog rivieren, hekken en andere grenzen die de landmeter en haar/zijn dienaar niet kan of mag passeren. In het spel geef je die weer met een strook satijnband, die je op het bord vastspeldt. Daar mogen dus wel gele draden overheen, maar geen rode of groene prikkers.

6.2 Morgenster's instrumentarium

Morgenster behandelt het veldwerk in het hoofdstuk 'VAN DE DADELYKE METING, EN INHOUD VINDING *der Landen, Moerassen, Wateren, Boskagien, en 't geen verder tot de* PLANIMETRIA *behoord*'. Maar, zegt hij,



dewyl men daar toe nodig heeft eenige *Instrumenten* en gereedschappen, die alvorens tot die einde toebereid zyn, en dewelke een Meeter altoos by de hand hebben moet; zo zal 't niet ondienstig wezen dat wy die vooraf in 't kort gaan beschryven. [p. 146]

We volgen dit voorbeeld hier, en nemen eerst het instrumentarium van Neêrlands Werkdadige Doos door, aan de hand van Morgenster's lijstje. Waarover dient de achttiende-eeuwse landmeter zoal te beschikken?

1. 't ASTROLABIUM of de Platkloot, die de *moderne Meters* om de hoekmeting te doen, meest gebruiken [p. 147]
   In het spel is dit een geodriehoek op een prikker geworden, met een gele draad aan de voet.
2. het zo genaamd *Geometrisch* Meet Tafeltje of Mensula [p. 148]
   Morgenster tekende daarop het landschap op schaal na. Daar doen we niet aan (in feite is NWD al een schaalafbeelding van de werkelijkheid).
3. *'t Winkelkruis*
   Dat is bij Morgenster een *astrolabium* met vier loodrecht op elkaar staande vaste vizieren. Hij gebruikte het alleen om rechte hoeken te meten of uit te zetten. Wij hebben het niet echt nodig, want met het *astrolabium* kun je hetzelfde gebruiken.
4. een Keten, die gemenelyk 5 Roeden lang is, en met schakels van een halve voet aan een geschakeld die doorgaans van styf yzerdraat gemaakt worden, en met kopere ringjes aan malkander gevoegd zyn; omdat koper en yzer zagt tegen elkander werkt. (...) zo dat'er 20 gelyke schakels op een Roede, 10 in de $\frac{1}{2}$ Roede, en 100 in de gehele Keten zyn; alzo is 10 Voet een Roede, en de Keten na de tiende Rekening gemaakt. [p. 150-1]
   NWD beschikt over een keten van 20 schakels, die een lengte van 10 meter voorstelt. Bij het meten kan de keten met een prikker vastgezet worden.
5. een houten Roede, zynde een stuk goed regt styf hout, dat in 10 evenlange delen gedeelt word, waarvan dan elk een Voet is, en zomtyds yder Voet weer in 2 gelyke, om halven Voeten te hebben; een Voet die aan 't einde staat word doorgaans in 10 gelyke deelen gedeelt, om Duimen te onderscheiden. (...) Dikwyls word deze Roede ook aan een zyde in 12 gelyke Voeten gedeeld, en een Voet aan 't eene eind in 12 gelyke Duimen; want men in de Graafwerken, als 't maken van *Fortressen*, Dyken enz. 12 Voeten voor een Roede, en 12 Duimen voor een Voet erkent. Waaarom ook de *Rynlandze Roede*, die men altyd in de Vestingbouw gebruikt, 12 Voeten, en een Voet 12 Duimen heeft. [p. 151-2]
   Voor de roede wordt hier ook de geo-driehoek gebruikt. De keten van 20 schakels is ongeveer 16 cm lang, en stelt 10 meter voor. 8 mm op de geodriehoek stelt dus 50 cm in werkelijkheid voor.
6. 10 steekpennen om de Keten mee vast te zetten [p. 152]
   Gebruik spelden of prikkers.
7. *Stokken* of *Bakens* [p. 152]
   Met twee van zulke stokken kan de landmeter een lijn op het veld uitzetten. Gebruik hiervoor de witte prikkers.
8. een *Memoriaal* of Geheugenis-boekje. (...) De opschryving of aantekening geschied gemeenlyk met *Potloot*. [p. 152-3]
   Het schriftje van de rapporteur. Potlood wordt niet bijgeleverd, want daar heeft elke wiskundige er natuurlijk een van bij zich.
9. Wyders moet de *Meter* een getrouwe *Dienaar* hebben, die de Keten voorttrekt den de penne t' elkens wel regt over einde in de aarde steekt. [p. 153]
   Is dat niet aardig? Bij Morgenster hoort de *Dienaar* dus tot het instrumentarium. Gebruik hiervoor uw buurman of -vrouw, met inachtneming van de spelregels.
10. een *accuraat* Waterpas. [p. 153]
    NWD houdt zich op de vlakte, en doet dus niet aan een waterpas.

7 Aan de slag

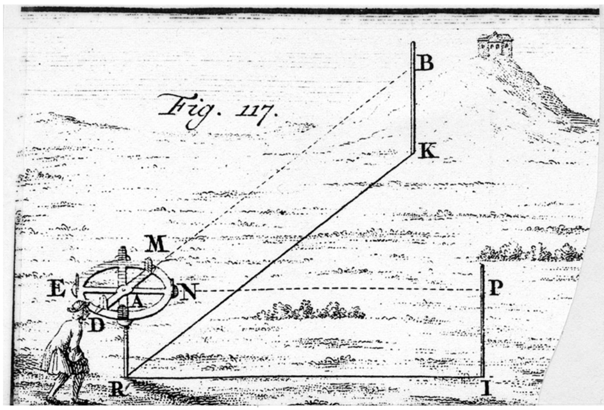
7.1 Werkstuk 1: een hoek meten en uitzetten

Hoe zal men op 't Veld een vlakke Hoek met 't Astrolabium meten?

Zet dus met drie prikkers een hoek uit op het bord, en meet die. Doe ook de Toegift:

Hier uit is ligtelyk te bevatten, hoe men een gegeven Hoek op't Veld afbakenen zal;

Bij alle werkstukken is het de bedoeling om eerst op het bord na te spelen hoe het team dit in het veld zou doen. Lees daarna eventueel de aanwijzingen van Morgenster.



158 Werkdadige Meetkonst. II. Boek.

EERSTE WERKSTUK.

Hoe zal men op 't Veld een vlakke Hoek met 't Astrolabium *meten?*

Uitvoering.

Indien men de platte Hoek KRI. meten moet, steekt men in de einden der linien die de Hoek maken, als KR. en RI. twee ftokken BK. en IP. regt over einde, en in de hoek R. fteekt men de ftok AR., met 't *Aftrolabium* daar opgefchroefd zynde, draait nu 't *Inftrument* zodanig, dat gy door de twee vafte viezieren E. en N., de ftok IP. zien kont; laat 't alzo onverrukt ftaan, en beweegt de wyzer DM. zo lang tot dat door zyn viezieren D en M. de ftok BK. ziet; dan tonen de *graden* MN. de grote van de hoek BAP. zynde de helling der gezigtftralen, of van de begeerde Hoek KRI.

Toegift.

Hier uit is ligtelyk te bevatten, hoe men een gegeven Hoek op 't Veld afbakene zal; men fteekt 't *Aftrolabium* ter plaatze daar de fcherpe Hoek komen zal, als in R. en draait 't zodanig dat men door de vafte viezieren E en N. de ftok I P. ziet, die in de Linie geftoken is, daar aan men de Hoek afbakene wil; beweegt dan de Wyzer van N na M. om zo veel *graden*, als de Hoek groot wezen zal, en laat in deszelfs gezigtftraal in B. een ftok K B. fteken, zo is de begeerde Hoek, op 't Veld afgebaakt.

7.2 Werkstuk 3: een lijn verlengen

Morgenster's Werkstuk 2, een verticale hoek meten, slaan we over, want alles is vandaag vlak.

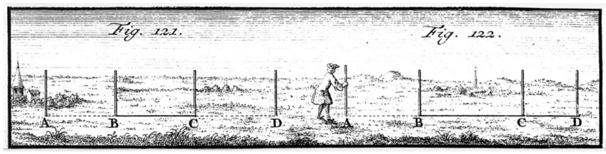
Hoe moet men een Linie op 't Veld verlengen?

DERDE WERKSTUK.

Hoe moet men een Linie op 't Veld verlengen?

Uitvoering.

Indien BC. een Linie is, die men aan d'een of d'ander zyde verlengen moet, ftelt dan in de einden B en C. elk regt over einde een Stok, ga voorts buiten de Linie BC., aan de zyde daarge die begeert verlengt te hebben, ik neem eerftelyk na D., in de zigtftraal der Stokken C en B., fteekt dan lootlinig een Stok in D., zodanig dat, wanneer men van D na C. ziet, de Stok C. regt voor de baken B. koomt; dan is B C. tot D. verlengt. Wanneer men in A. een Stok of Baken zodanig fteekt datze met de Stokken B en C. een eenige zigtftraal maakt, zo is de regte AB. 't verlengzel van de regte B C.



7.3 Werkstuk 4: een stok op een lijnstuk plaatsen

Hoe kan men te velde in een Linie stippen vinden? Dat is, op wat wyze worden op 't veld tusschen twee stokken andere in een regte Linie gestoken?

VIERDE WERKSTUK.

Hoe kan men te velde in een Linie ftippen vinden? dat is, op wat wyze worden op 't veld tuffchen twee ftokken andere in een regte Linie geftoken?

Uitvoering.

Om in de regte Linie BD. een baken te fteken, bepaalt ze eerft met 't fteken van een ftok in B. en een baken in D., dan *volgens 't voorgaande Werkftuk* gemaakt de verlengde A B; wyders de regte A B. verlengt tot C., zo zal 't punct C. in B D. zyn, waar in regt op een baken gefteld word.

Anders.

Door twee Perzonen word dit op deze wyze gedaan. In B en D. elk een baken geftoken zynde, moet by een dezer ftokken iemand blyven, en een in de regte B D. gaan met een ftok, ik neem dat by B. de *Meter* blyft ftaan, en zyn *Dienaar* in B D. gaat, dan moet de *Dienaar* de ftok regt over einde op de aarde houden, en, door tekens met de Hand of Hoed, de baken zo lang heen en weer ftellen, tot dat de *Meter* die regt voor D. ziet ftaan, dan doet hy een teken nederwaarts, daar op zyn *Dienaar* zyn baken op die plaats regt overeinde fteekt, 't welk ik neem in C. te wezen; dan moet de *Meter* nog eens by zyn ftok B. zien, of de bakens B. C. en D. in een zelfde zigtftraal zyn, dit zo vindende is 't werk volbragt.

Tweede Geval.

By aldien de einden der Linie, waar in een ftok zal geftoken worden, ontoegankelyk zyn, moet men deze weg inflaan.

De *Meter* beveelt zyn *Dienaar* één baken regt over einde te houden ter plaatze daar hy oordeelt dat 't begeerde punct omtrent vallen zal, en hy zelfs houd in de verlengde Linie, die tuffchen zyn *Dienaars* baken en een der ongenakelyke puncten is, een ftok, dan ziet zyn *Dienaar* of hy, zyn baken vaft ftekende, of deze twee ftokken met 't andere ongenakelyk punct een zigtftraal maken; dit zo vindende, ftaan beide bakens in de Linie dewelke van de twee ontoegankelyke puncten gemaakt word, en dan is 't begeerde uitgevoert. Maar 't zal heel zelden ten eerften zo gevallen; dieshalven moet men de beide ftokken zo lang herwaarts en derwaarts herftellen tot der tyd toe dat men 't eindelyk dusdanig bekomt, 't welk ligtelyker in de daad te bevatten is, als met veel woorden te befchryven: Want 't zeker is, dat, indien de gezigftraal, van de geftokene bakens, aan de linker zyde voor by 't ongenakelyk ftip loopt, de bakens meer na de regterhand moeten geftelt worden, dat is tegendelig der misloping van de gezigtftraal.

Toegift.

Hier uit is openbaar, hoe dat men tuffchen twee ontoegankelyke Torens of puncten, ontallyke bakens, alle in de zelfde regte zigtftraal des Torens, kan fteken.

Onderscheid hier:

a. de eindpunten van het lijnstuk zijn beide te bereiken
   1. landmeter en dienaar zijn samen
   2. de landmeter moet het dit keer alleen opknappen

b. er moeten twee stokken gestoken worden op een lijnstuk waarvan beide eindpunten (bijvoorbeeld twee torens) onbereikbaar zijn. Laat hier bijvoorbeeld de rivier stromen!

7.4 Werkstuk 5: het snijpunt van twee lijnen te bepalen, alshet niet tussen de bakens ligt

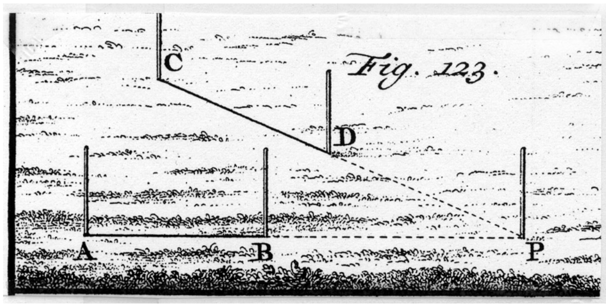
Het stip te vinden, daar twee onevenwydige regte linien zamen komen, dat is een baken te steken, ter plaatze daar twee regte onevenwydige veld linien een Hoek maken.

VYFDE WERKSTUK.

Het ſtip te vinden, daar twee onevenwydige regte linien zamen komen, dat is een baken te ſteken, ter plaatze daar twee regte onevenwydige veld linien een Hoek maken.

Uitvoering.

Indien in de 123. Afbeelding A B. en C D., de gegeven regte Linien zyn; dan ſteekt in C. D. A. en B. ſtokken regt overeinde; en ga *volgens 't derde werkſtuk* in de verlengde A B, zo lang tot dat gy de ſtok D. regt voor de baken C. ziet ſtaan, 't welk in P. gevalt, daar in ſteekt regt op een baken; Zie nog eens, of dan deze ſtok P. met de bakens B en A. een, en ook met de ſtokken D. en C., een regte gezigtſtraal maakt, dit zo wezende, is de baken in P. de eenige wel geſtokene ſtok, die begeert word.



7.5 Werkstuk 6: het snijpunt van twee zichtlijnen te bepalen, als dit punt tussen de bakens ligt

Hoe vind men 't stip, daar twee door malkander lopende verbeelde veldlinien, elkander doorsnyden?

SESDE WERKSTUK.

Hoe vind men 't ſtip, daar twee door malkander lopende verbeelde veldlinien, elkander doorſnyden?

164 Werkdadige Meetkonſt. II. Boek.

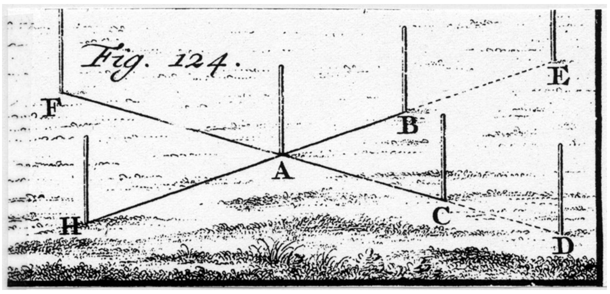
Ik zegge, *verbeelde veldlinien*, om dat 't in andere geen plaats heeft, waar by ik verſta zodanige veldſtrepen, die alleenlyk door twee ſtokken verdagt worden, en in der daad niet zyn, dat is linien die met 't wegnemen der bakens vergaan; zulke linien vereiſt dit werkſtuk, want in gekielſpitte of andere veldlinien, word dit ſtip van de linen zelfs aangewezen.

Uitvoering.

Als in de punčten H. B. C. en F. elk lootlinig bakens ſtaan, om dan een ſtok A zodanig te ſteken, datze met de bakens H. en B. een en ook met de ſtok C. en F. een gezigtſtraal maakt; ſteekt men *volgens 't derde Werkſtuk* de baken E. in de verlengde H B., en de ſtok D. in de verlengde F C., dan vind men *volgens 't voorgaande Werkſtuk* 't begeerde ſtip A., alwaar D C. en E B. zamen komen. Zodanig kan een Perzoon alleen 't begeerde ſtip met een baken beſteken; maar als men met zyn drien is, kan 't zonder verlenging gevonden worden, als volgt.

Anders.

By twee ſtokken, van elker Linie een, als in F. en H., moeten twee Perzonen ſtaan; de derde moet met een ſtok van H. of F., ik neem F., na C. gaan, zo lang dat hy meent omtrent ter begeerde plaatze te wezen, dan moet hy zyn baken eens regt over einde houden, en laten de andere, dewelke in H. en F. ſtaan, zien of hy in beide haar linien is, egter zodanig, dat hy eerſt na 't gebied van de eene in zyn Linie gaat, en dan de andere vraagt of 't nu ook in zyn roying is, en als dit zo bevonden word, dan is 't uitgevoert; maar anders moet men door tekens met de hand of hoed, die de gene, dewelke de Stok zal herſtellen, verſtaan moet, wyzen aan wat kant hy buiten de Linie is, waar uit hy dan afnemen kan of hy te verre is of nog verder gaan moet, en zo t' elkens weer aan, de Stok zo lang herwaarts en derwaarts herſtellende, tot 'er tyd toe datze beide zien, namelyk die in H. en F. ſtaan, dat hy in haar roeying is, 't welk hier in A. koomt, daar in hy zyn Stok lootlinig moet ſteken; zo zal 't begeerde uitgevoert wezen.



Onderscheid hier hoe het gaat

a. als de landmeter het alleen moet doen
b. als landmeter en dienaar nog een hulpje bij zich hebben.

7.6 Werkstuk 7: meet de lengte van een lijnstuk

Hoe word de lengte van een Veldlinie gemeten?

Morgenster besteedt pagina's [pp. 165-169] aan de uitwerking, want hij vindt dat bij nauwkeurige lengtemeting het werk van de landmeter pas goed begint. Want er is veel broddelwerk: sommige meters bukken meer dan nodig is omdat ze alles met de Roede willen meten, en als wél de Keten gebruiken wordt deze niet goed uitgerekt, of de Keten volgt geen rechte lijn, de Keten volgt de hoog- en laagten des velds en meer diergelyke gebreken.
Ga er zelf niet zo uitvoerig op in, maar experimenteer wel even met de Keten en de Roede.
Bij dit werkstuk laten we de uitwerking van Morgenster achterwege.

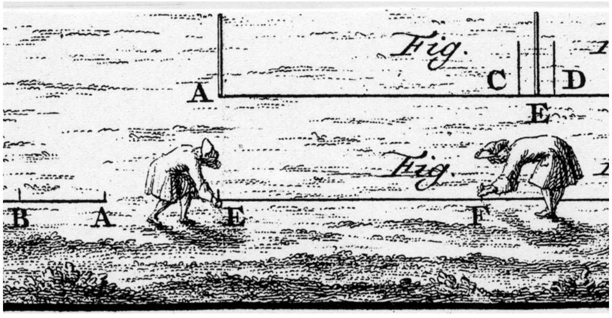
7.7 Toegift bij Werkstuk 7: bepaal het midden van een lijnstuk

... hoe dat men met behulp van een Keten of Roede een Linie in twee gelyke delen deelen kan;

Toegift.

Hier uit is blykbaarlyk te verſtaan, hoe dat men met behulp van een Keten of Roede een Linie in twee gelyke delen deelen kan; want voor eerſt word de hele ſtreep gemeten, en dan zyn gevondene lengte gehalveert, daar na die helft van 't eene einde der Linie gemeten in dezelve, eindelyk daar dit koomt een Stok geſtoken, daar door zal de veldlinie in twee even lange delen gedeelt zyn.

Dit kan ook met wat minder metens volbragt worden, aldus; men ſteekt in de gegeven Linie A B. daar men na 't Oog gift omtrent het midden te wezen, ik neem in C., een Stok, dan meet men van 't eene eind der Linie A., de lengte tot aan deze Stok, en zo lang men die vind, ik ſtel 10 *Roeden*; zo veel meet men dan ook van 't andere eind B. tegen 't midden, na de Stok C., byaldien nu deze lengte van 10 *Roeden* net by de Stok C. uit kwam, dan zoude daar 't *correcte* midden getroffen wezen; maar dewyl zulks zelden en byna nooit zo gebeurt, zo moet men dan meten hoe veel 'er nog tot aan de Stok C. te kort ſchiet, of indien de 2de meting voorby de Stok kwam, hoe veel die voorby ſchiet, en dan de helft daar van by de Stok voegen, of daar van te rug meten; ik neem dat van B. tegen C. 10: gemeten zynde, zulks kwam tot D., en dat 'er van D. tot aan de Stok C. 1: 4. te kort was, zo halveert dit komt 0: 7, deze 7 Voeten gemeten van C. tegen D., komt in E, daar dan het *correcte* midden zyn zal, alwaar men een Stok ſteekt, de Stok in C. wegnemende: Indien men de eerſte Stok in D. geſtoken hadde en A D. lang bevonden was 11: 4. dan zoude de tweede meting van B. voor by de Stok D. tot C. komen, derhalven C D. gemeten, is 1: 4, de helfte 0: 7, van C. of D. terug gemeten, komt in E. het midden, als voren.



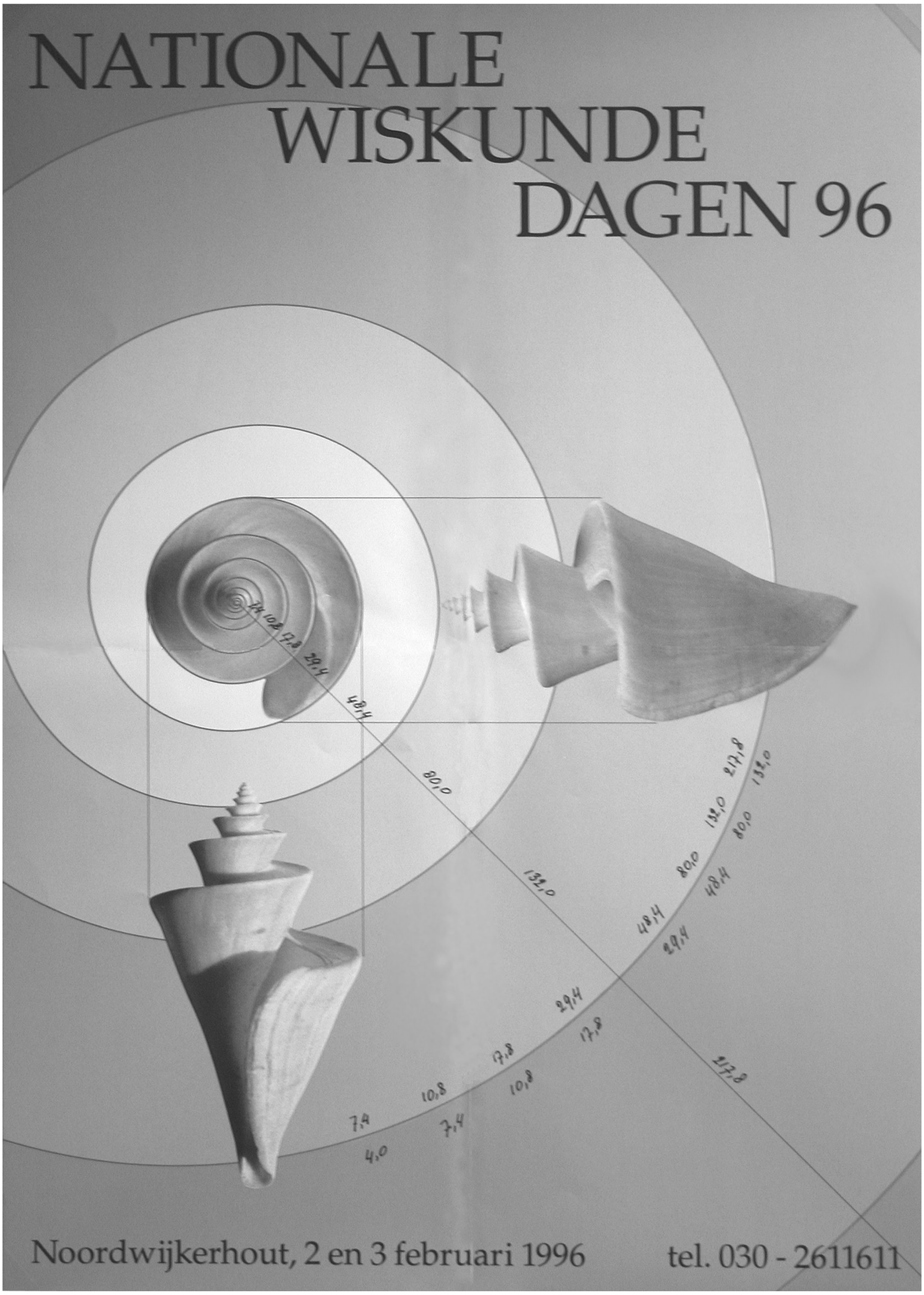
Probeer het, net als Morgenster, met zo weinig mogelijk meten te doen.

7.8 Werkstuk 8: door een gegeven punt een lijn te trekken, evenwijdig aan een gegeven lijn

Op wat wyze kan men met en zonder Hoekmeting een veldlinie door een gegeven stip, evenwydig aan een gegeven veldlinie trekken?

Onderscheid dus het werken met het Astrolabium en het werken met alleen lengte-meting. Morgenster neemt voor de gegeven veldlinie een sloot. 'Graaf' dus eerst een sloot.

Hier stoppen we met de uitwerkingen. De liefhebber zal zijn/haar weg naar Morgenster zo nodig wel vinden. Voor de uitwerking van Werkstuk 8, en voor nieuwe werkstukken (bissectrice, loodlijn) met de uitdagende constructievoorschriften, waarbij wel hoeken en lengten gemeten mogen worden, maar waarbij geen doorlopende cirkels getekend worden.


NATIONALE
WISKUNDE
DAGEN 96
Noordwijkerhout, 2 en 3 februari 1996
tel. 030 - 2611611