Didactisch gebruik van de lege getallenlijn
- een persoonlijk perspectief -

K.P.E. Gravemeijer
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

De bruikbaarheid van de lege getallenlijn als hulpmiddel voor flexibel leren optellen en aftrekken tot 100 is, denk ik, onomstreden. Zoals zoveel populaire ideeën kent het idee van een op de lege getallenlijn gebaseerde leergang tal van uitwerkingen. In deze bijdrage geef ik mijn persoonlijke visie op het gebruik van de lege getallenlijn, en laat ik zien hoe deze voortkomt uit eigen onderzoek en persoonlijke ervaringen. Ik doe een min of meer chronologisch verslag, dat start met ervaringen rond het ontwikkelen van 'Rekenen & Wiskunde' en eindigt met ontwikkelingsonderzoek dat met een team van de Vanderbilt University werd uitgevoerd in de Verenigde Staten.
Bij het ontwikkelen van 'Rekenen & Wiskunde' werden we ons bewust van het belang van de mentale handelingen van de leerling. Dit blijft een belangrijk thema in mijn betoog: wat betekenen de operaties op de lege getallenlijn voor de leerling en wat kan de leerling daarvan leren? In samenhang daarmee komt naar voren dat het belangrijk is dat het werken op de getallenlijn in eerste instantie het karakter heeft van het modelleren van situatie-specifieke informele oplossingsstrategieën. Een ander belangrijk punt is mijns inziens de gerichtheid op getalrelaties. Zo kan de betekenis die de getallen voor de leerlingen hebben in de loop van de leergang geleidelijk aan veranderen van getallen die gebonden zijn aan aanwijsbare eenheden, naar getallen als wiskundige objecten die hun betekenis ontlenen aan een netwerk van getalrelaties. Dat kan vervolgens weer de basis vormen voor flexibel optellen en aftrekken.

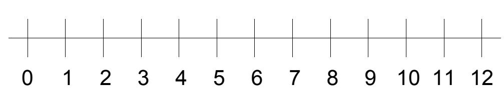
1 Inleiding

Sinds Treffers Whitney's (1985, 1988) idee voor het didactisch gebruik van de lege getallenlijn in Nederland introduceerde en verder uitwerkte heeft de lege getallenlijn een grote vlucht genomen. Zoals zo vaak gaat ook hier populariteit samen met een veelheid aan interpretaties en uitwerkingen. Het idee is in binnen- en buitenland opgepakt. Zelf heb ik samen met anderen verschillende onderzoeken uitgevoerd in de Verenigde Staten. Ik rapporteerde hier al eerder over in dit tijdschrift (Gravemeijer, 2000).
In deze bijdrage wil ik proberen een meer omvattende visie op het gebruik van de lege getallenlijn te geven. Het gaat daarbij om een *persoonlijke visie gegrondvest in eigen onderzoek en persoonlijke ervaringen*, waarvan ik in min of meer chronologische volgorde verslag zal doen. De lezer zal daarbij voor lief moeten nemen dat dit ertoe leidt dat de meeste literatuurverwijzingen verwijzingen naar mijn eigen publicaties betreffen.

De getallenlijn wordt ingezet voor het flexibel leren optellen en aftrekken onder de 100. Uiteindelijk gaat het daarbij wat mij betreft niet om het leren van efficiënte rekenprocedures, de leerlingen zouden mijns inziens een netwerk van getalrelaties moeten ontwikkelen dat ze flexibel kunnen inzetten. Niet dat dit mij van begin af aan helder voor ogen stond. Mijn persoonlijke ervaring met de getallenlijn heeft vooral het karakter van een zoekproces dat startte met enkele vruchteloze pogingen, zoals uit het volgende zal blijken.

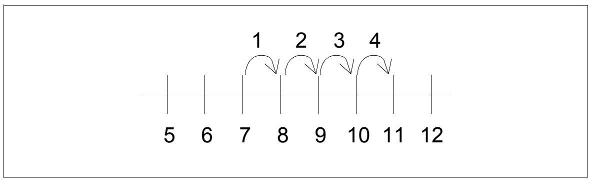
2 De gevulde getallenlijn

Ik begin in de jaren zeventig, door terug te gaan naar de tijd dat we[1] bij het project Onderwijs en Sociaal Milieu werkten aan de ontwikkeling van de methode 'Rekenen & Wiskunde'. We oriënteerden ons toen op het werk van Wiskobas. In het voorbeeldmateriaal van Wiskobas (De Jong, Treffers & Wijdeveld, 1975) werd toen gewerkt met wat nu een gevulde getallenlijn wordt genoemd (fig.1).



figuur 1: gevulde getallenlijn

Wij constateerden echter dat het werken met de gevulde getallenlijn niet tot de gewenste leerprocessen leidde. Op basis van een leerpsychologische analyse kwamen we tot de conclusie dat de oorzaak van het gebrek aan resultaat gezocht moet worden in een gebrek aan isomorfie tussen de mentale handeling die de leerlingen met de gevulde getallenlijn uitvoeren en de mentale handeling die ze moeten uitvoeren als ze zonder getallenlijn werken (Gravemeijer, 1989, 1991, 1994a). Wanneer de leerling 7 + 4 op de gevulde getallenlijn wil uitrekenen kan hij/zij het volgende doen: Zoek 7 op de getallenlijn, tel 4 plaatsen verder en lees het getal af (‘11’) (fig.2).



figuur 2: 7 + 4 op de gevulde getallijn

Wanneer de leerling dezelfde opgave zonder getallenlijn moet uitrekenen, moet de leerling op een of andere manier bijhouden hoeveel er al zijn bijgeteld. Dit kan bijvoorbeeld via dubbeltellen: ‘7, 1 erbij is 8, 2 erbij is 9, 3 erbij is 10, 4 erbij is 11’.

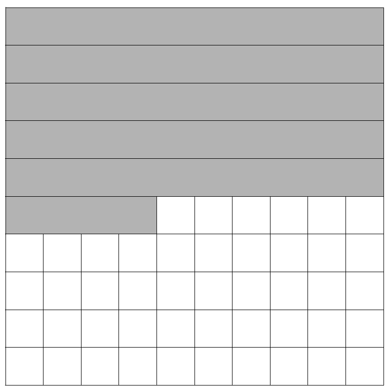
Zo bezien is het vanzelfsprekend dat het werken met de gevulde getallenlijn weinig bijdraagt aan het leren rekenen zonder de getallenlijn. De belangrijkste les die we hieruit trokken was dat je bij het gebruik van visuele of andere concrete hulpmiddelen altijd moet nagaan of de mentale handelingen die de leerlingen met het materiaal uitvoeren wel een bijdrage leveren aan de vorming van de mentale handelingen die de leerlingen zullen moeten uitvoeren wanneer ze zonder materiaal moeten werken.

3 De getallenlijn in een meetcontext

Tijdens het ontwikkelen van ‘Rekenen & Wiskunde’ werd ook met de lege getallenlijn geëxperimenteerd. We introduceerden de getallenlijn als hulpmiddel bij het handig rekenen. Als context gebruikten we een verhaal over afstanden, die kon je mooi op een lijn afbeelden. Ook hier ontmoetten we echter problemen (Gravemeijer, 1994a). Het afbeelden van een uit te voeren berekening op de lege getallenlijn conflicteerde met de meetcontext.
De leerlingen verbonden meten met precieze, *verhoudingsgetrouwe afbeeldingen*, terwijl het opzetten van een berekening op de lege getallenlijn vereiste dat je onbekende getallen op de getallenlijn plaatste. Voor de leerlingen was de lege getallenlijn een soort afbeelding op schaal, wat betekende dat bij elke positie een specifieke waarde hoorde. Je kon dus geen onbekend getal op de getallenlijn plaatsen. Deze ervaring maakte ons er weer eens van bewust, hoe belangrijk het is het perspectief van de leerling in de gaten te houden.

4 De G10-procedure

Deze ervaringen maakten ons huiverig voor het inzetten van de getallenlijn. Uiteindelijk kozen we bij ‘Rekenen & Wiskunde’ voor het honderdveld. We lieten ons daarbij met name inspireren door het onderzoek van Beishuizen (1983, 1985) dat het belang aantoonde van wat door hem de G10-methode werd genoemd. Uit dit onderzoek bleek dat leerlingen bij het rekenen onder de 100 grofweg twee strategieën volgden, de 10-10-methode en de G10-methode. Bij de zogeheten 10-10-methode splitsen de leerlingen de getallen eerst in tientallen en eenheden om die onafhankelijk van elkaar op te tellen en/of af te trekken en daarna de resultaten te combineren. De opgave 34 + 25 wordt dan opgelost via 30 + 20 = 50, 4 + 5 = 9 en 50 + 9 = 59. Bij de G10-methode laten de leerlingen het eerste getal heel om achtereenvolgens eerst het beoogde aantal tientallen en daarna het beoogde aantal eenheden bij te voegen en/of af te halen. De opgave 34 + 25 wordt dan opgelost via 34 + 20 = 54 en 54 + 5 = 59.
Het bleek dat de leerlingen die de G10-methode gebruikten veel succesvoller waren dan de leerlingen die de 10-10-methode gebruikten. De leerlingen die de 10-10-methode gebruikten maakten met name bij het aftrekken de klassieke cijferfouten. Deze fouten doen zich voor wanneer de leerling bij het oplossen van een opgave zou moeten ‘lenen’, maar in plaats daarvan het absolute verschil gebruikt. Bij een opgave als ‘25 – 8 = ..’ komt de leerling daardoor uit op 13 in plaats van 17. Om dit type fouten te vermijden kozen we voor een invulling van het honderdveld dat erop was gericht dat de leerlingen de G10-methode zouden gaan gebruiken. Bovendien richtten we de activiteiten zo in dat de getallen zowel een kardinale (hoeveelheidsgetal) als een ordinale betekenis (telgetal) zouden hebben (fig.3).



Toelichting: in de context van een verhaal over goudstaven die in een kist worden gepakt, wordt het honderdveld (de bodem van de kist) bedekt met Cuisenaire staafjes (de goudstaven) van tien en een. Zo kan aan de getallen op het honderdveld een kwantitatieve betekenis worden gegeven.

figuur 3: kardinale betekenis honderveld

Hiermee probeerden we een tegenstelling te overbruggen die ook later regelmatig aan de orde zou komen bij discussies over de lege getallenlijn. Hier doet zich namelijk de vraag voor, hoe om te gaan met de spanning tussen enerzijds strategieën die steunen op het *gebruik van de telrij* en anderzijds het *rekenen met hoeveelheidsgetallen*, dat eerder aanleiding geeft tot het gebruik van splitsstrategieën.

volgende contextopgave voorgelegd:

> Een boek heeft 64 bladzijden.
> Ik heb er al 37 gelezen.
> Hoeveel bladzijden moet ik nog lezen?

De meeste leerlingen maakten bij hun oplossing gebruik van sprongsgewijs doortellen en sprongsgewijs terugtellen (figuur 4), in feite varianten van de G10-methode

correct				
37 + 20,	57 + 7 = 64,		27 erbij	[8]
37 + 10 = 47,	47 + 10 = 57,	57 + 7 = 64,	27 erbij	[4]
37 + 3 = 40,	40 + 20 = 60,	60 + 4 = 64,	27 erbij	[4]
37 + 3 = 40,	40 + 4 = 44,	44 + 20 = 64,	27 erbij	[1]
37 + 3 = 40,	40 + 24 = 64,		27 erbij	[1]
7 + 7 = 14,	14 + 50 = 64, dus	37 + 7 + 20 = 64,	27 erbij	[1]
64 – 4 = 60,	60 – 20 = 40,	40 – 3 = 37	27 eraf	[2]
64 – 10 = 54,	54 – 10 = 44,	44 – 7 = 37,	27 eraf	[1]
60 – 30 = 30,	7 – 4 = 3,	30 – 3 = 27		[1]
37 – 30 = 67,	67 – 3 = 64,		27 samen	[2]
64 – 30 = 34,	34 – 10 = 24,	24 + 3 = 27		[1]
64 – 10 = 54,	54 + 3 = 57,	57 – 20 = 37,	27 eraf	[1]
60 – 30 = 30,	34 – 7 = 27,			[4]
7 + 7 = 14,	10 + 30 = 40, 40 + 20 = 60, 60 + 4 = 64			[1]
30 + 30 = 60,	7 + 7 = 14,			
		14 > 10, dus verander 30 in 20 -> 37 + 27 = 64		[1]
Eerst aanvullen tot 14, dan aanvullen tot 6(0), dat levert 27				
fout				
60 – 30 = 30,	4 – 7 = 0		antwoord: 33	[1]
60 – 30 = 30,	4 – 7 = 3		antwoord: 33	[1]
de helft van 60 is 30 en	4 + 3 = 7		antwoord: 33	[1]
de helft van 60 is 30,	7 – 4 = 3		antwoord: 33	[1]
cjiferalgoritme			antwoord: 22	[1]
30 + 20 = 50,	7 erbij, aanvullen tot 64		antwoord: 25	[1]
37 + 3 = 40,	om aan te vullen tot 10 heb je 3 nodig,		antwoord: 23	[1]
4, 5, 6 naar 60,	dan de 3 en de 1, want 64 en 37,			
	dat is gewoon 3 + 1 = 4,		antwoord: 34	[1]
turven			antwoord: 25	[1]

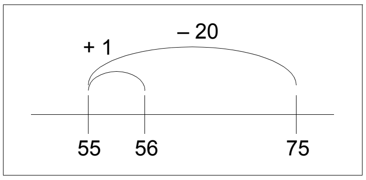
figuur 4: oplossingen van 'een boek heeft 64 bladzijden ...' (ontleend aan Vuurmans, 1991)

5 Argumenten voor de lege getallenlijn

In de jaren tachtig werd de lege getallenlijn door A. Treffers op de agenda gezet. In navolging van Whitney (1985, 1988) propageerde hij een gebruik van de lege getallenlijn dat vooraf werd gegaan door het rekenen op het kralensnoer (Treffers & De Moor, 1990; Treffers, 1991). Al snel werd er op verschillende plaatsen mee geëxperimenteerd, onder meer door de Ontwikkelgroep Speerpunt Rekenen (Vuurmans, 1991).
Binnen deze ontwikkelgroep werd een onderzoekje gedaan dat een krachtig argument leverde voor het gebruik van de lege getallenlijn. Leerlingen van groep 5 werd de die goed pasten bij het springen op de lege getallenlijn. Hier bleek hoezeer de lege getallenlijn zich leent voor het modelleren van informele oplossingsstrategieën. Daarmee onderscheidt het werken met de lege getallenlijn zich ook van het gangbare gebruik van tientallig gestructureerde MAB-blokken. De MAB-blokken worden in het algemeen ingezet om de standaardprocedure voor het cijferen voor te bereiden. Hierbij is het de bedoeling dat het werken met de blokken het denken van de leerling stuurt. Bij de getallenlijn is het precies andersom, daar is het de bedoeling dat het werken met de getallenlijn het denken van de leerlingen volgt (Gravemeijer, 1993a en b). De getallenlijn biedt de leerlingen de ruimte vrijwel alle informele methoden die we in figuur 4 zien te beschrijven.[2]

6 Model paradigma

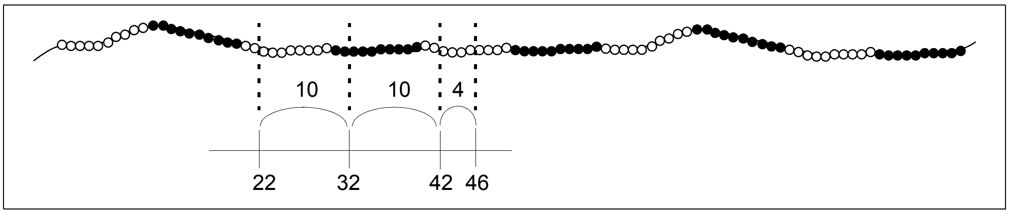
Dit ondersteunt de gedachte dat het mogelijk moet zijn de lege getallenlijn in een leergang naar voren te laten komen als een model van de eigen informele oplossingsmethoden van de leerlingen. De lege getallenlijn zou dan kunnen gaan functioneren als hulpmiddel voor het bijhouden van de uit te voeren deelhandelingen en de bijbehorende tussenresultaten. Hiermee zou de lege getallenlijn de leerlingen in staat stellen om te experimenteren met meer geavanceerde oplossingsstrategëeen. Uiteindelijk zou de lege getallenlijn kunnen gaan dienen als hulpmiddel voor het uitvoeren of uitleggen van strategieën als compenseren. De getallenlijn bleek goed te passen in het toenmalige denken over de rol van modellen (Streefland, 1985; Treffers, 1991). Binnen het realistische reken-wiskundeonderwijs zouden modellen zich moeten kunnen ontwikkelen van *model van* informele oplossingsmethoden naar *model voor* meer wiskundig redeneren (Gravemeijer, 1994a en b).
Eerst komt de getallenlijn naar voren als model van het manipuleren met het kralensnoer. Uiteindelijk wordt de getallenlijn een model voor meer wiskundig redeneren - bijvoorbeeld als hulpmiddel om toe te lichten dat je 75 – 19 kunt oplossen door middel van 75 – 20 + 1 (fig.5).



figuur 5: de lege getallenlijn als model voor wiskundig redeneren: 'één extra aftrekken kun je compenseren door er achteraf één bij op te tellen'

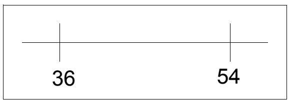
7 Wat modelleer je met de lege getallenlijn?

Tijdens mijn verblijf aan de Purdue University in 1991 voerde ik in West Lafayette een exploratief projectje uit met een door mij ontwikkelde leergang (Gravemeijer, 1992b). De lege getallenlijn werd daar met enthousiasme ontvangen. Een lerares maakte zelfs samen met haar echtgenoot een reuze kralensnoer van walnoten voor klassikaal gebruik. Dit walnotensnoer werd onder meer gebruikt om de lege getallenlijn te introduceren. Het walnotensnoer werd onderop het bord gelegd en de getallenlijn werd er met krijt boven getekend. De sprongen op de getallenlijn konden zo precies boven de corresponderende posities op het grote kralensnoer worden getekend (fig.6).



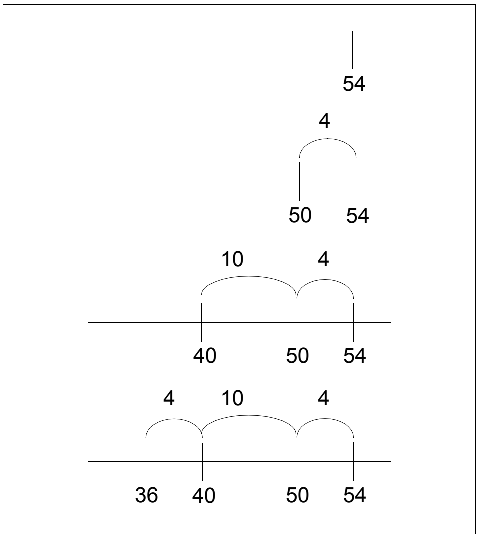
figuur 6: de getallenlijn als afbeelding van het kralensnoer

Bij nader inzien bleek deze werkwijze zijn bezwaren te hebben (zie Gravemeijer & Stephan, 2002).
Voor sommige leerlingen vormde de lege getallenlijn namelijk een *afbeelding van het kralensnoer* en niet een *afbeelding van het werken met het kralensnoer*.



figuur 7: een statische voorstelling van 54 – 36 op de lege getallenlijn

De consequenties daarvan werden zichtbaar bij twee leerlingen die probeerden om een kale opgave als 54 – 36 = met de getallenlijn uit te rekenen. Ze begonnen met 54 en 36 op de getallenlijn te zetten (fig.7), maar hoe nu verder? Ze kwamen er niet uit.

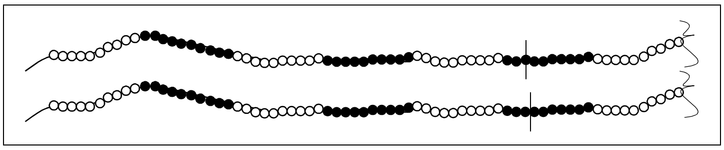


figuur 8: een dynamische voorstelling van 54 – 36 op de lege getallenlijn

Wanneer we niet het kralensnoer afbeelden, maar wel hoe we een bewerking op het kralensnoer zouden kunnen uitvoeren, ontstaat een ander beeld (fig. 8).
We kunnen dan beginnen met 54 op de getallenlijn te zetten. Vervolgens bedenken we wat een handige stap zou zijn bij het werken op het kralensnoer. De posities van de tientallen worden bij het kralensnoer gemarkeerd door een kleurwisseling. Vierenvijftig kun je dan snel vinden door 54 te vertalen in vijf tientallen en vier losse kralen. Wanneer je nu van 54 iets moet weghalen, ligt het voor de hand eerst vier losse weg te halen. Dat betekent dat we met een sprong van 4 naar de 50 gaan. Deze sprong kan met een boogje op de getallenlijn worden weergegeven. Een volgende makkelijke stap op het kralensnoer is dan om met een sprong van 10 van 50 naar 40 te springen. Ook dat wordt op de getallenlijn getekend. Daarna volgt de sprong van 40 naar 36. Pas als die sprong op de getallenlijn wordt getekend verschijnt het getal 36 op de lege getallenlijn. Ten slotte wordt het antwoord afgeleid uit het totaal van de sprongen (4 + 10 + 4 = 17).
In dit voorbeeld kunnen we zien hoe het werken op de lege getallenlijn wordt geleid door het *denken aan het werken met het kralensnoer*. Het werken met de lege getallenlijn heeft *betekenis* voor de leerling, omdat dit werken met de getallenlijn verwijst naar de concrete ervaring van het handelen met het kralensnoer (Gravemeijer, 1994a en b). Centraal staat daarin het gebruikmaken van handige kenmerken van het kralensnoer, zoals de kleurwisseling per tiental. Denkend aan het werken met het kralensnoer zal de leerling ook bij het rekenen op de getallenlijn kunnen gaan werken met tientallen als referentiepunten.

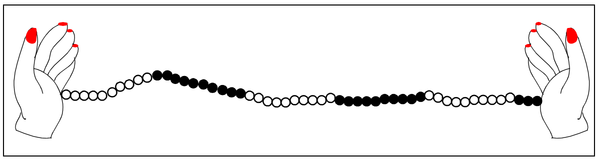
8 Telgetal en hoeveelheidsgetal

Tijdens het onderwijsexperiment in West Lafayette in 1991 deed zich een ander interessant incident voor toen de overgang werd gemaakt van het werken met echte kralensnoeren naar het werken met getekende kralensnoeren op werkbladen. Hier ontstond een discussie tussen leerlingen over hoe je een getal als 53 op dit getekende snoer moet markeren: Door een streep door de 53e kraal te zetten of door de 53e kraal te zetten (fig.9)? Dit probleem werd opgelost in een klassikale discussie. Het reuze kralensnoer werd erbij gehaald en besproken werd hoe je daar getallen markeerde en wat dat precies betekende. De leerlingen realiseerden zich dat het getal 53 verwees naar een hoeveelheid van 53 kralen, en wel de 53 kralen die zich bevinden tussen het begin van het kralensnoer en de wasknijper die dit aantal markeert (fig.10). Daarmee was ook duidelijk hoe getallen op het getekende kralensnoer moesten worden weergegeven en de verwarring tussen hoeveelheidsgetal en telgetal die even dreigde, werd door de leerlingen zelf opgelost door een beroep te doen op inzicht in de betekenis van de getallen (zie Gravemeijer, 2000).



figuur 9: hoe markeer je 53 op een getekend kralensnoer?

Kenmerkend voor het type onderwijs in dit Amerikaanse onderwijsexperiment was dat dit probleem niet werd opgelost door de leerlingen uit te leggen hoe ze aantallen op het getekende kralensnoer moesten noteren. In plaats daarvan werd de leerlingen gevraagd, zich te realiseren waar de markering op het kralensnoer voor stond.



figuur 10: de betekenis van een positie als een aanduiding van een hoeveelheid.

Ik zou daaraan willen toevoegen dat, wanneer het onderwijs van begin af aan op uitleggen had gesteund, dit probleem niet eens aan het licht was gekomen. Verder zou een dergelijk op uitleggen gebaseerd onderwijs het gevaar met zich meebrengen waar Yackel op wijst, namelijk dat we mechanistische regels en procedures vervangen door regels en procedures voor het gebruik van concrete materialen en visuele schema's.

> 'As tools, including materials, models, diagrams, notations, etc., become increasingly prominent in arithmetic instruction, it is imperative that we figure out what interpretations the students are making of these tools. Unless we do so, we are in danger of replacing verbal rules and procedures with rules and procedures for using tools.'
> (Yackel, 2000, p.29)

In verband hiermee zou ik willen opmerken dat ik de getallenlijn niet zie als gereedschap. Het werken met de getallenlijn is voor mij geen doel op zich. Ik vind het niet zo interessant of leerlingen die met de lege getallen-

lijn werken betere resultaten boeken dan leerlingen die het zonder een dergelijk hulpmiddel moeten stellen. Zoals het weinig zegt als leerlingen met concreet materiaal tot goede antwoorden komen.
In een lezing tijdens de Panama voorjaarsdag gebruikte ik hiervoor de metafoor 'prothese' of 'polsstok' (Gravemeijer, 1996; zie ook Gravemeijer, 1999a). Concrete modellen en visuele schema's kunnen (onbedoeld) als prothese gaan functioneren. Dat wil zeggen: het hulpmiddel stelt de leerlingen in staat om te doen wat ze anders niet zouden kunnen doen, maar dit helpt ze niet verder. Zonder het materiaal of het schema zijn ze weer even hulpeloos als daarvoor. Het rekenen met de gevulde getallenlijn dat ik aan het begin van dit artikel beschreef kan hier als voorbeeld dienen. De leerlingen komen met de gevulde getallenlijn wel tot de juiste antwoorden, maar het werken ermee bereidt niet voor op het werken zonder gevulde getallenlijn.
De aanduiding 'polsstok' verwijst naar een hulpmiddel dat de leerlingen verder helpt. Dat wil zeggen het werken met het bewuste concrete materiaal of visuele schema bevordert dat de leerlingen later zonder kunnen.

9 Verhoudingsgetrouw afbeelden op de getallenlijn

Bij het scriptieonderzoek van A. Veltman (1993a) dat door A. Treffers en mij werd begeleid, kwam de problematiek van het - al dan niet - verhoudingsgetrouw weergeven van getallen op de getallenlijn, waar we bij de ontwikkeling van 'Rekenen & Wiskunde' tegenaan liepen, op een andere manier naar voren. De leerlingen raakten in de problemen wanneer ze startten met een getallenlijn waarop zowel de 0 als de 100 was gemarkeerd. De afstand tussen 0 en 100 bepaalde in feite de schaal waarop sprongen van 10 en 1 moesten worden getekend, maar dat bleek voor de leerlingen niet goed uitvoerbaar. Bovendien was het niet functioneel (zie ook Veltman, 1993b).
Natuurlijk moeten sprongen van 10 wel te onderscheiden zijn van sprongen van 1, maar dat hoeft niet verhoudingsgetrouw te gebeuren.[3] Het gaat immers niet om het verhoudingsgetrouw positioneren van getallen, maar om het beschrijven van het gebruik van de relaties tussen tientallen en eenheden.
Zo kan 48 + 27 bijvoorbeeld worden uitgerekend door er achtereenvolgens 10, 10, 2 en 5 bij te tellen, waarbij gebruik wordt gemaakt van de wetenschap dat:
a 27 kan worden opgevat als 10 + 10 + 7,
b 48 + 10 = 58 en 58 + 10 = 68 en
c dat 68 + 2 = 70 én 70 + 5 = 75.

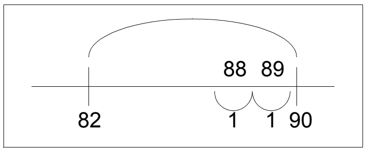
Modelleren impliceert reduceren, en de kernvraag is dan, wat je vindt dat weg kan en wat je wilt behouden (Gravemeijer & Stephan, 2002). In het geval van het modelleren van het rekenen op het kralensnoer met sprongen op de lege getallenlijn, zullen de individuele kralen niet zichtbaar te hoeven zijn in het gereduceerde schema. Zelfs het verschil in kleur hoeft niet te worden behouden. Wel zul je de tientallige structuur die steunpunten bij het redeneren biedt in het schema zichtbaar willen maken. De verhoudingsgetrouwe weergave van de grootte van de getallen kun je echter laten vallen.
Wat je wilt behouden heeft te maken met de beoogde mentale activiteit. Zoals ik al bij het voorbeeld van de gevulde getallenlijn betoogde, gaat het erom dat de mentale handelingen die de leerlingen met materiaal of schema's uitvoeren, voorbereiden op de mentale handeling die je uiteindelijk nastreeft. In die zin heeft wat je wilt behouden veel te maken met wat je uiteindelijk wilt bereiken. Omgekeerd geeft een analyse van wat je wilt bereiken aan wat in aanzet al aanwezig zal moeten zijn.

10 De betekenis van de getallenlijnnotatie

De ervaringen met de lege getallenlijn in West Lafayette vormden de aanleiding voor een subsidieverzoek bij de National Science Foundation, dat leidde tot onderzoek dat uiteindelijk werd uitgevoerd aan de Vanderbilt University in Nashville. Dit onderzoek werd uitgevoerd door P. Cobb, K. McClain en mijzelf. E. Yackel was ook bij het onderzoek betrokken en voerde parallel experimenten uit in Gary, een zwarte voorstad van Chicago. Het totale onderzoek, dat liep van1993 tot en met 1997, omvatte het rekenen onder de twintig (onder andere met het rekenrek), het rekenen onder de honderd en bewerkingsschema's voor optellen en aftrekken. Ik beperk me hier tot het rekenen onder de honderd.

Leerzaam in dit onderwijsexperiment was de verandering die de Amerikaanse collega's in de leergang aanbrachten. Met name Cobb vond het kralensnoer kunstmatig en weinig realistisch. Het rekenen op een kralensnoer is toch wel een uitgesproken schoolse activiteit die weinig van doen heeft met de werkelijkheid buiten de school. Waarom zou iemand op een kralensnoer gaan rekenen, anders dan omdat de meester of juf het vraagt? Deze aversie leidde ertoe dat tijdens het onderwijsexperiment - in mijn afwezigheid - door mijn collega's werd besloten de fase van het werken met het kralensnoer over te slaan. Daar leek ook alle aanleiding toe, daar de lerares de getallenlijn spontaan had geïntroduceerd en de leerlingen er moeiteloos mee om leken te gaan. Toen deed zich echter het probleem voor dat ik onlangs heb beschreven in dit tijdschrift (Gravemeijer, 2000, zie ook Cobb, Gravemeijer, Yackel, McClain & Whitenack, 1997).

Bij het bespreken van een opgave die neerkwam op: ‘Van een voorraad van 90 candies worden er 8 verkocht, hoeveel blijven er over?’, begon een leerling met het tekenen van zijn oplossing op de getallenlijn. Maar hij is nog maar nauwelijks begonnen als er al discussie ontstaat. Op het bord stond toen de getallenlijn zoals in figuur 11. Eén van de leerlingen betoogde dat de afbeelding toonde dat er drie candies waren weggehaald, 90, 89 en 88. Anderen verwezen naar de boogjes en concludeerden dat de getallenlijn 90 – 2 toonde.



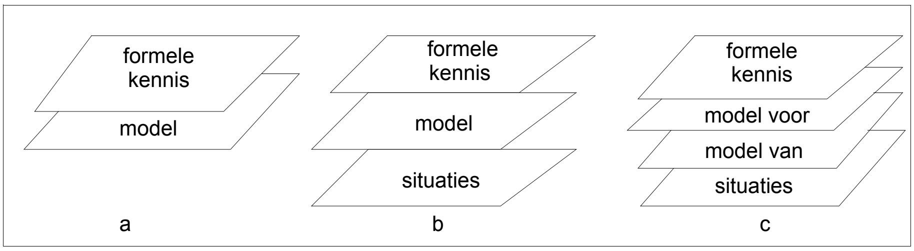
figuur 11: negentig min twee of drie op de getallenlijn

Omdat het gebruik van de getallenlijn in dit onderwijsexperiment niet steunde op eerdere ervaringen met het kralensnoer, konden de leerlingen het conflict ook niet oplossen door naar het kralensnoer terug te gaan. Wat, zoals we zagen in het experiment in West Lafayette, wel mogelijk was. Zo toonde dit onderwijsexperiment onbedoeld het belang van het werken met het kralensnoer als voorbereiding op een betekenisvol gebruik van de getallenlijn.

Je zou kunnen zeggen dat de lege getallenlijn voor deze leerlingen geen toegevoegde waarde had, boven bijvoorbeeld een kale-som-notatie. Dat brengt ons op de vraag, wat de meerwaarde van de lege getallenlijn precies is. Volgens mij zit die meerwaarde in de mogelijkheid van een integratie van tel- en hoeveelheidsgetal. Je kunt de getallenlijn zien als een gesublimeerde telrij die telstrategieën als doortellen en terugtellen ondersteunt, terwijl de afgebeelde getallen naar hoeveelheden (kunnen) verwijzen. Juist in het kralensnoer komen het hoeveelheidsaspect en het telaspect bij elkaar. De kralen zelf vormen een duidelijk aanwijsbare *hoeveelheid*, terwijl de knijper die deze hoeveelheid afgrenst tegelijkertijd een *positie* in de telrij markeert.[4]
De afwisseling van donkere en lichte kralen zorgt er bovendien voor dat de tientallen en eenheden zichtbaar worden als een *lineaire structurering* die niet uitlokt tot een splitsmethode, maar zich juist leent voor rijgmethoden. Immers, met deze structurering ligt het niet voor de hand om tientallen en eenheden uit elkaar te halen en los van elkaar te behandelen (10-10), maar leidt er eerder toe het eerste getal heel te laten, zodat de G10- of rijgaanpak ontstaat. Reflecteren op het werken met het kralensnoer bewerkstelligt dat de leerlingen de telrij tientallig gaan structureren en een netwerk van getalrelaties vormen met de tientallen als knooppunten. Een ontwikkeling die nog wordt versterkt door het werken met de lege getallenlijn, waarbij de leerlingen puur in getalrelaties moeten denken.

11 Structuralisme versus realisme

Hier blijkt ook het verschil tussen de realistische en de structuralistische benadering (Treffers, 1978). In de structuralistische benadering zou de invoering van de lege getallenlijn zonder kralensnoer-voorbereiding goed passen, daar gaat alle aandacht uit naar de relatie tussen (het werken met) het model en de abstracte wiskunde. In de realistische benadering krijgt de relatie tussen het model en de concrete werkelijkheid prioriteit. De structuralistische benadering begint als het ware met het ‘model voor’, waar het model in de realistische benadering eerst naar voren komt als een ‘model van’, dat aansluit bij een voor de leerling concrete werkelijkheid, en daarna pas uitgroeit tot een ‘model voor’.
Ik zal dit toelichten aan de hand van figuur 12 (Gravemeijer, 1994, 1997).



figuur 12: verschillende rollen van modellen

In de structuralistische benadering wordt de formele kennis van de expert als uitgangspunt genomen voor het ontwerpen van concrete modellen die formele kennis voor de leerlingen moeten ontsluiten (fig.12a). Men spreekt in dit verband wel van ‘embodiment’ - de formele kennis wordt door de modellen belichaamd. Er wordt van uitgegaan dat je de formele kennis in de modellen kunt zien. Het onderwijs zal er dan ook op gericht zijn ervoor te zorgen dat de leerlingen de beoogde wiskunde in de modellen gaan ‘zien’. Een probleem is echter het verschil in referentiekader tussen leraar en leerlingen (Cobb, Yackel & Wood, 1993; vgl. Van Hiele, 1973). Bij de bekende MAB blokken waarmee eenheden, tientallen, enzovoort, worden voorgesteld, doet zich de situatie voor dat tientallen, honderdtallen en dergelijke voor de leraar concrete objecten zijn, maar voor de leerling (nog) niet. Vanuit het referentiekader van de leraar is het vanzelfsprekend dat je tientallen in de tienstaafjes ziet, voor de leerling voor wie tien nog geen objectstatus heeft gekregen zijn het gewoon houten staafjes.[5] En het gevaar bestaat dat pogingen van de leraar om de leerlingen te vertellen wat ze geacht worden te zien en te doen leidt tot onbegrepen instrumenteel handelen.

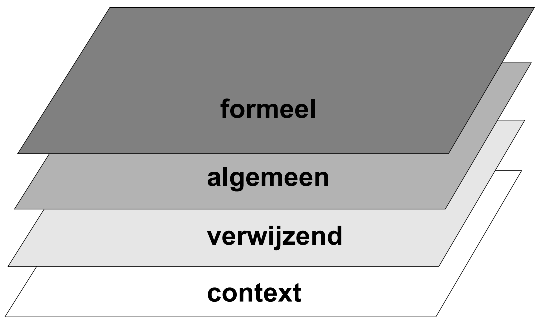
In de structuralistische benadering komen de modellen voor de leerlingen uit de lucht vallen, er wordt geen gebruik gemaakt van de informele kennis waar de leerlingen al over beschikken. Dit probleem kan worden ondervangen door te kiezen voor modellen die een *brug* kunnen vormen tussen de informele kennis van de leerlingen en de beoogde formele kennis (fig.12b). De modellen worden geïntroduceerd als hulpmiddel om voor de leerlingen herkenbare situaties te modelleren, en geleidelijk aan worden de modellen gebruikt om de brug naar de formele kennis te slaan. Een bezwaar van deze benadering blijft dat er toch een top-down karakter inzit. De formele kennis wordt beschouwd als een kant-en-klaar product en het model moet de verbinding leggen tussen de eigen kennis van de leerling en deze kant-en-klare kennis van de expert.

Wanneer het idee van het geleide heruitvinden wordt gevolgd, wordt gekozen voor een bottom-up benadering die steunt op de eigen bevindingen van de leerlingen. Hier wordt gestart met modellen waarmee de leerlingen hun eigen informele strategieën modelleren. Idealiter vinden de leerlingen deze modellen zelf uit, maar in de praktijk zal het in het algemeen nodig zijn deze aan te bieden. Maar dan wel modellen die ze op dat moment zelf hadden kunnen uitvinden en die ze ervaren als een natuurlijke manier van modelleren van hun eigen oplossingsmethoden. Met andere woorden, het model komt naar voren als een *model van* de eigen informele oplossingsmanieren. Het idee is dan dat er een proces van verticaal mathematiseren op gang komt, waarin de aandacht uitgaat naar de wiskundige relaties die in het geding zijn. Het model wordt dan meer en meer gebruikt voor het tot uitdrukking brengen van wiskundige relaties. En zo wordt het een *model voor* meer wiskundig redeneren. Na verloop van tijd zal de vertrouwdheid met deze wiskundige relaties zo groot zijn geworden dat de leerling het model niet meer nodig heeft voor dit wiskundig redeneren, waarmee het beoogde formele niveau is bereikt (fig.12c).
Kenmerkend in deze realistische benadering is dat het met name de eigen wiskundige activiteit van de leerling is waarmee dit niveau wordt bereikt. Kenmerkend is ook dat wordt getracht het model op een natuurlijke wijze te laten voortkomen uit informele, situatiegebonden oplossingen. Waar in de structuralistische benadering de relatie tussen het model en de formele wiskunde centraal staat, gaat het in de realistische benadering om de relatie tussen het model en de eigen informele kennis van de leerling en om de vraag of het model betekenisvol is voor de leerling.

12 Niveauverhoging

De bovenstaande typering van de 'model van' en/of 'model voor' overgang biedt de mogelijkheid deze te koppelen aan het doorlopen van vier niveaus van betekenisvol handelen (Gravemeijer, 1994a, Gravemeijer, Cobb, Bowers & Whitenack, 2000) (figuur 13):

1 Op het niveau van de context, waar domeinspecifieke kennis en aanpakken vanzelfsprekend zijn.
2 Op een verwijzend niveau, waar modellen en oplossingsmethoden verwijzen naar de situatie die in de contextopgave wordt geschetst.
3 Op een algemeen niveau, waar wiskundige aspecten van de oplossingsmethoden de plaats innemen van de betekenissen in termen van de context.
4 Op het niveau van de formele wiskunde.



figuur 13: niveaus

Het contextniveau betreft hier niet noodzakelijkerwijs buitenschoolse situaties, maar in algemene zin situaties die voor de leerlingen reëel genoeg zijn om te weten hoe je binnen die situatie zinvol kunt handelen. In het algemeen zal worden gezocht naar situaties waarbij die informele, situatiespecifieke oplossingsstrategieën passen die zich goed voor verdere mathematisering lenen. In het geval van de getallenlijn zal bijvoorbeeld worden gekozen voor situaties met een lineair karakter, waarbij strategieën als sprongsgewijs doortellen of terugtellen het meest voor de hand liggen.

13 Leren meten als voorbereiding op de lege getallenlijn

Het Amerikaanse onderwijsexperiment van 1996 in

Nashville waarin het werken met de lege getallenlijn werd weggelaten, maakte duidelijk dat je de fase van het werken met het kralensnoer niet ongestraft kunt overslaan. Daar de bezwaren tegen het artificiële karakter van het kralensnoer echter bleven, werd gezocht naar een alternatief. De problemen van de leerlingen vestigden de aandacht nog eens op de spanning tussen de kardinale en ordinale aspecten die in het geding zijn bij het rekenen met de lege getallenlijn. De analogie met een vergelijkbare spanning bij meten van lengte, bracht ons op het idee opnieuw naar het meten van lengte te kijken.
Bij het aflezen van een liniaal is het de bedoeling dat een positie op de liniaal wordt geïnterpreteerd als een lengte. De 53 op een rolmaat verwijst niet naar het 53ste stukje van een centimeter, maar naar de 53 centimeters die tussen het begin van de rolmaat en het getal 53 zitten. Deze laatste interpretatie hangt samen met wat in de literatuur *accumulation of distance* wordt genoemd (Thompson & Thompson, 1996). Leerlingen die leren meten, interpreteren afpassen in eerste instantie ordinaal. Bij het afpassen van voeten, bijvoorbeeld, verwijst het laatstgenoemde getal voor hen in eerste instantie naar de laatstgeplaatste voet en (nog) niet naar de afstand die al afpassend is overbrugd.
Het leren meten van lengte veronderstelt dat de leerlingen zich gaan realiseren dat een meetgetal verwijst naar de totale lengte die is afgepast. In die zin is er een duidelijke overeenkomst tussen het aflezen van een liniaal en het kardinaal interpreteren van een getal op de getallenlijn. Zo bezien kan het leren meten een fraai alternatief bieden voor het werken met het kralensnoer als voorbereiding op het rekenen op de getallenlijn.

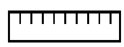
De door ons gekozen meetopzet doorloopt globaal de volgende stappen (Gravemeijer, 1999b; Gravemeijer, 2000):[6]

- meten door afpassen van een natuurlijke maat (bijvoorbeeld een voet, of een blokje);
- meten met de basismeeteenheid en een maat van tien basiseenheden (de leerlingen oefenen zo in het structureren van getallen in tientallen en eenheden);
- constructie van een meetstrip als model van afpassen van maten van tien en van één;
- oplossen van opgaven rond toevoegen, afhalen en vergelijken met behulp van de meetstrip (de meetstrip biedt de mogelijkheid meet- en telstrategieën te vervangen door rekenstrategieën; hier wordt gebruik gemaakt van de kennis opgedaan bij het structureren van getallen in tientallen en eenheden);
- symboliseren van oplossingsmethoden/rekenstrategieën met sprongen op de lege getallenlijn;
- gebruik van de lege getallenlijn als hulpmiddel en als communicatiemiddel;
- geleidelijk aan vervangen van de getallenlijnnotatie door somnotaties, al dan niet in pijlentaal.

Op het eerste gezicht lijkt het alsof met deze meetaanpak dezelfde problemen in huis worden gehaald die bij de ontwikkeling van 'Rekenen & Wiskunde' de aanleiding vormden om de getallenlijn niet te gebruiken. Bij een liniaal past immers het idee van een verhoudingsgetrouwe weergave dat we willen vermijden. In de nieuwe opzet wordt daar echter op een andere manier mee omgegaan, er wordt gestreefd naar een bewust onderscheid tussen de liniaal als meetinstrument en de lege getallenlijn als hulpmiddel om oplossingsmanieren mee te beschrijven. Het gaat weer om de vraag, wat je in het model wilt behouden en waar je vanaf ziet. Essentieel is wel dat ook de leerlingen zich ervan bewust zijn dat je met de sprongen op de getallenlijn beschrijft hoe je redeneert en laat zien welke steunpunten je op de meetlat gebruikt wanneer je lengten met elkaar vergelijkt, lengten bij elkaar neemt of de éne lengte bij de andere lengte in mindering brengt.
Een voordeel van deze aanpak is dat meetgetallen in deze opzet in eerste instantie als hoeveelheidsgetallen naar voren komen; je telt steeds het aantal eenheden dat op een bepaalde lengte past. Ook het structureren van getallen in tientallen en eenheden heeft in eerste instantie een kardinaal karakter, het gaat bij elk tiental om tien aanwijsbare eenheden. Pas als de aandacht verschuift van het meten als afpassen naar opgaven rond lengten die je van de meetstrip kunt aflezen, treedt het ordinale aspect meer op de voorgrond.

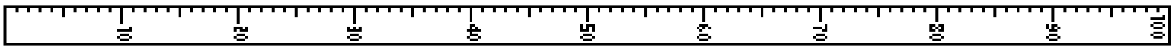
14 Geleid heruitvinden

Het probleem van kunstmatigheid dat aan het kralensnoer kleeft is met deze meetleergang duidelijk ondervangen. Meten is een natuurlijke activiteit en de instrumenten die achtereenvolgens aan bod komen passen goed in een reinvention proces (Gravemeijer, McClain, & Stephan,1998). Eerst wordt er gemeten met een natuurlijke maat, daarna wordt het meten efficiënter gemaakt door een grotere maat in te voeren, die overeenkomt met een veelvoud van de natuurlijke maat.
In de feitelijke leergang gebeurt dit twee keer, eerst wordt het afpassen van voeten verkort door het invoeren van een papieren 'voetstrip' van vijf voet, daarna wordt het afpassen van blokjes (zogeheten Unifix cubes) vervangen door het meten met tien aan elkaar geklemde blokjes. De gedachte hierachter is dat het meten met voeten de meest natuurlijke ingang is, terwijl het meten met blokjes de mogelijkheid biedt om tot een liniaal, annex meetstrip, van een hanteerbaar formaat te komen.
De volgende stap wordt gemaakt door de staaf van tien blokjes te vervangen door een gemakkelijker te vervoeren papieren strip waarop de individuele blokjes zijn gemarkeerd (fig.14).



figuur 14: 10-strip

Nog efficiënter wordt het wanneer je tien van zulke strips aan elkaar plakt tot een meetstrip (fig.15). Het afpassen kan nu worden vervangen door de meetstrook neer te leggen en de lengte af te lezen. Op deze manier wordt de liniaal/meetstrip begeleid heruitgevonden.



figuur 15: meetstrip

Uiteraard kan worden opgemerkt dat de leerlingen de opeenvolgende verbeteringen niet zelf uitvinden. Er kan mijns inziens echter wel recht worden gedaan aan de idee van heruitvinden door elke verbetering voor te laten komen uit een probleem (Gravemeijer, Bowers & Stephan, in press; Gravemeijer & Stephan, 2002). In het algemeen is dat een in een contextverhaal ingeklede vraag of het niet handiger kan. De leerlingen wordt eerst gevraagd om zelf met oplossingen te komen en om de gevonden oplossingen tegen elkaar af te wegen. Daarna wordt de leerlingen verteld welke oplossing de hoofdpersonen in het contextverhaal hebben gekozen. Dat hoeft niet per se een oplossing te zijn die door een van de leerlingen is genoemd, maar het moet wel een oplossing zijn waarvan de leerlingen inzien dat het een adequate oplossing is voor het gestelde probleem. Als aan deze voorwaarde wordt voldaan zijn ze mijns inziens ook werkelijk bij het heruitvinden betrokken.

Na de introductie van de meetstrip volgt de overgang naar het rekenen via het handig gebruikmaken van de structuur van de liniaal/meetstrip. Van belang is hier dat de posities op de meetstrip en de bijbehorende getallen voor de leerlingen betekenis hebben, dankzij de geschiedenis die aan deze activiteit is vooraf gegaan. De getallen verwijzen naar het herhaald afpassen van tienen en enen en staan daarom voor ‘zoveel’ tientallen en ‘zoveel’ eenheden.

De getallenlijn wordt vervolgens geïntroduceerd als middel om het handig rekenen met de meetstrip te beschrijven. Dit stelt de leerlingen in staat om vast te leggen hoe ze hebben gerekend, en het biedt een taal die het aan elkaar uitleggen van oplossingsstrategieën vergemakkelijkt. Het doel is uiteraard dat de leerlingen na verloop van tijd aan de getallenlijn voldoende hebben om tot een oplossing te komen. Dit veronderstelt echter wel een behoorlijke vertrouwdheid met de benodigde getalrelaties - welke de leerlingen onder meer via het meten met tienen en enen hebben kunnen ontwikkelen. Het belang van de getallenlijn is vooral het bieden van overzicht en houvast, door de ruimte die de getallenlijn biedt om deelberekeningen en tussenresultaten te noteren. Verder verwijst de getallenlijnnotatie voor de leerlingen naar het rekenen op de meetstrip en daarmee naar het handig gebruiken van de tientallige structuur van onze getallen. Zo kan de lege getallenlijn zich ontwikkelen tot een model voor meer rekenkundig redeneren. Dit laatste noemde ik ook wel ‘meer formeel wiskundig redeneren’, maar dat bleek een beladen term.

15 Nieuwe wiskundige werkelijkheid

Naar aanleiding van publicaties over de getallenlijn werd ik erop geattendeerd dat de aanduiding ‘formele wiskunde’ ongewenste associaties oproept. Enerzijds wordt het woord ‘formeel’ geassocieerd met kale sommen, anderzijds met traditioneel wiskundeonderwijs waarin de formele wiskunde als uitgangspunt wordt genomen voor het onderwijs. Formele wiskunde staat dan voor wiskunde als kant-en-klare wiskundige kennis die de leerling zich eigen zou moeten maken in plaats van wiskunde die de leerling zelf opbouwt. Ik had echter geen van beide op het oog. Wanneer ik over formele wiskunde spreek, bedoel ik geen op zichzelf staande abstracte kennis, maar doel ik - conform de realistische didactiek - op wiskunde die uit de activiteit van de leerling zelf voortkomt.

Binnen de realistische benadering worden de leerlingen geacht formele wiskunde te ontwikkelen door hun eigen informele wiskundige activiteiten te mathematiseren. Het uiteindelijke doel is dat formele wiskunde door de leerlingen niet anders wordt ervaren dan informele wiskunde. Freudenthal (1991, pag.18) brengt dit tot uitdrukking wanneer hij spreekt over ‘Mathematics starting at, and staying within reality’. Zijn uitgangspunt is dat wat als *common sense* wordt ervaren zich ontwikkelt. Hij wijst er in dit verband op dat datgene wat *common sense* is voor de wiskundige wat anders is dan wat voor de leek *common sense* is. Realistisch reken-wiskundeonderwijs zou ervoor moeten zorgen dat de wiskunde die de leerling ontwikkelt gezond-verstandwiskunde blijft. In die zin is er dus voor de leerling geen wezenlijk onderscheid tussen informele en formele wiskunde, waarom dan toch die termen gebruiken? Omdat het onderscheid wel bruikbaar is vanuit het perspectief van de onderwijsontwikkelaar. Formeel verwijst voor mij dan naar wiskunde waar de leerling bij de start van een leergang nog niet over beschikt (Gravemeijer, 1999). Laat ik dat nog wat verder uitwerken.

Freudenthal (1991) verbindt de notie *common sense* aan *reality*. Wat we precies onder werkelijkheid willen verstaan wordt problematisch wanneer we erkennen dat we geen directe toegang hebben tot de 'objectieve werkelijkheid' buiten onszelf. Freudenthal lost dit probleem op door te stellen, dat voor hem werkelijkheid datgene is wat het gezond verstand als werkelijkheid ervaart:

> 'I prefer to apply the term "reality" to that which at a certain stage common sense experiences as real.'
> (Freudenthal, 1991, pag.17)

Volgens die redenering groeit onze werkelijkheid als datgene wat we als *common sense* ervaren groeit, inclusief de wiskunde die we - als het goed is - ook als *common sense* ervaren. Het leren van wiskunde kan dan worden beschreven als het construeren van een nieuw stukje wiskundige werkelijkheid. Dit is volgens mij bijvoorbeeld het geval wanneer leerlingen getallen constitueren als knooppunten in een relatienet (Van Hiele, 1973). Ik zal dit kort toelichten.

Jonge kinderen kunnen in een bepaalde fase al wel met benoemde getallen redeneren, maar nog niet met onbenoemde getallen. Dat wil zeggen, ze begrijpen wel wat wordt bedoeld met de vraag: 'Hoeveel is vier koekjes en drie koekjes?', maar ze begrijpen niet wat wordt bedoeld met: 'Hoeveel is 4 + 3?' Deze leerlingen kennen getallen alleen nog als hoeveelheidsgetallen, die zijn gebonden aan aanwijsbare, aftelbare objecten, zoals bijvoorbeeld in 'vier knikkers', of 'vier ijsjes', enzovoort. Pas later ontwikkelen getallen zich voor hen tot getallen als knooppunten in een relatienet. Dan zijn de getallen wiskundige objecten geworden die hun betekenis ontlenen aan relaties met andere getallen, het getal '4' wordt dan bijvoorbeeld geassocieerd met $4 = 2 + 2$, $4 = 5 - 1$, $4 = 8 : 2$, enzovoort.
In die zin kunnen we stellen dat de leerlingen die beschikken over getallen als knooppunten in een relatienet, een nieuw stukje wiskundige werkelijkheid hebben gecreëerd, waarin vragen als: 'Hoeveel is 4 + 3', betekenis hebben.

In lijn met het voorgaande kunnen we het doel van de getallenlijn-leergang typeren als het creëren van een nieuw stukje wiskundige werkelijkheid waarbinnen getallen onder de 100 het karakter hebben van wiskundige objecten in een netwerk van getalrelaties. Binnen dit netwerk gaat het specifiek om de relaties die het optellen en aftrekken betreffen, met de tientallige structuur van onze getallen als referentiepunten.
Het is de bedoeling dat de betekenis die de getallen voor de leerlingen hebben, in de loop van de leergang verandert van verwijzingen naar lengten, naar getallen als wiskundige objecten. Dit betekent een verschuiving van getallen die gebonden zijn aan aanwijsbare eenheden (zoals in '37 voet(en)') naar getallen die op zichzelf staan (zoals '37').

Wanneer getallen voor de leerlingen wiskundige objecten zijn geworden, hebben ze nog steeds een kwantitatieve betekenis, maar deze betekenis is niet langer afhankelijk van een verbinding met aanwijsbare lengten of telbare eenheden. Daarvoor is de betekenis die ze ontlenen aan het netwerk van getalrelaties in de plaats gekomen. In dit geval betreft dat met name relaties als: $37 = 30 + 7$, $37 = 3 \times 10 + 7$, $37 = 20 + 17$, $37 = 40 - 3$. Daarbij is het essentieel dat de leerlingen deze relaties zien als specifieke contexten overstijgend. Dat wil zeggen dat de leerlingen deze relaties zien als geldend voor elke hoeveelheid van 37 objecten wat voor objecten dat dan ook zijn.[7] In dat geval kunnen we werkelijk spreken van een begrip van getallen als wiskundige objecten die hun betekenis ontlenen aan een netwerk van getalrelaties.

16 Besluit

Ik begon dit artikel met te wijzen op het belang van het denken in termen van mentale handelingen. Bij het ontwikkelen van de methode 'Rekenen & Wiskunde' leerden we dat we ons niet moeten laten leiden door uiterlijk waarneembaar gedrag. In plaats daarvan moeten we proberen ons een beeld te vormen van het denken van de leerlingen. Dit denken vormt immers de basis voor het leren en dit is voor mij nog steeds het centrale principe. Het gaat er niet om wat wij in de handelingen van de leerlingen zien, maar om wat deze handelingen voor de leerlingen zelf betekenen. In het geval van de getallenlijn is dan de vraag, wat de leerlingen denken als ze met de getallenlijn werken. Wat betekenen de notaties op de getallenlijn voor de leerlingen, waar verwijzen ze naar?
In een realistische benadering moet die betekenis gegrondvest zijn in eerdere ervaringen van de leerlingen. En dit zijn ervaringen met informele oplossingsstrategieën voor het oplossen van opgaven rond samenstellen, vergelijken, aanvullen of afhalen van hoeveelheden. Dergelijke informele strategieën betreffen het handig gebruikmaken van sprongsgewijs doortellen en terugtellen in situaties die zich daartoe lenen, dat wil zeggen in contextopgaven met een lineair karakter.
Op deze ervaringen kan worden aangesloten, als de getallenlijn voor de leerlingen naar voren komt als een manier om betekenisvolle, informele, situatiegebonden oplossingsstrategieën te modelleren. Anders gezegd, de leerling laat op de getallenlijn zien hoe hij of zij in de concrete situatie zou hebben kunnen handelen.
Uiteraard worden die concrete situaties zo gekozen, dat de daarbij passende informele strategieën een startpunt kunnen vormen voor het ontwikkelen van efficiënte, flexibele oplossingsstrategieën voor optellen en aftrekken tot 100. Ik beschreef in dit verband twee standaardsituaties, het oplossen van opgaven rond toevoe-

gen, afhalen en vergelijken van aantallen kralen met behulp van een tientallig gestructureerd kralensnoer en het oplossen van opgaven rond toevoegen, afhalen en vergelijken van lengten met behulp van een tientallig gestructureerde meetstrip. In beide gevallen wordt ervan uitgegaan dat de tientallige structuur aanleiding geeft tot het ontwikkelen van op die tientallige structuur gebaseerde oplossingsstrategieën. De zo ontwikkelde strategieën kunnen zich dan ontwikkelen tot flexibele oplossingsstrategieën voor het optellen en aftrekken tot 100, die handig gebruik maken van de tientallige structuur van ons talstelsel.

Het ontwikkelen van een relatienet met getallen als knooppunten in dat relatienet staat daarbij voor mij voorop. Het doel is voor mij niet de leerlingen een repertoire aan oplossingsstrategieën aan te leren. Ook hier geldt dat er een onderscheid moet worden gemaakt tussen wat wij als experts in de handeling van een leerling zien en wat die handeling voor de leerling zelf betekent. Er is verschil tussen een leerling die zich realiseert dat 68 slechts 2 van 70 afzit en dat 68 + 7 dus kan worden uitgerekend door eerst 2 bij de 68 te doen en daarna het restant toe te voegen, en de expert die hier het aanvullen tot het volgende tiental als strategie in ziet.
We moeten daarom voorzichtig zijn met het aanleren van strategieën. Het gevaar is levensgroot dat we daarmee te ver vooruitlopen op de ontwikkeling van de leerling, met als gevolg dat onze strategieën door de leerlingen worden opgevat als van buiten te leren regels. Daarbij betwijfel ik bovendien of er wel volwassenen (experts) zijn die dergelijke strategieën zélf bewust toepassen.
Strategieën staan bij mij dus niet voorop. Ik zie de getallenlijn als een didactisch hulpmiddel dat in dienst straat van niveauverhoging, een niveauverhoging die zich kenmerkt door de vorming van het hiervoor veelvuldig genoemde relatienet - een relatienet dat de leerlingen flexibel kunnen inzetten voor het rekenen onder de 100.

Noten

1 'We' verwijst hier naar het ontwikkelteam van 'Rekenen & Wiskunde', F. van Galen, J.-M. Kraemer, T. Meeuwisse en de auteur van dit artikel.
2 Al is het uiteraard zo dat de getallenlijn zich niet voor alle aanpakken leent, voor splitsmethoden is de getallenlijn niet geschikt. Dit kan worden ondervangen door in eerste instantie te werken met contextopgaven met een lineair karakter (opgaven rond tijd, meten e.d.) en contexten die verwijzen naar het groeperen van hoeveelheden pas later aan bod te laten komen.
3 J. Menne (2001) brengt dit fraai tot uitdrukking in de 'grote' en 'kleine huppen', waarmee ze de leerlingen letterlijk springend de sprongen op de getallenlijn laat uitbeelden. Daarbij wordt er niet naar gestreefd grote huppen te maken die tien keer zo groot zijn als de kleine huppen, maar gaat het om het symbolisch onderscheiden van sprongen van tien en één.
4 Hoewel de knijper feitelijk de positie *naast* de laatst getelde kraal markeert, terwijl een telgetal in het algemeen naar het laatst getelde object verwijst.
5 Cobb (Cobb, Yackel & Wood, 1993) verwijst naar onderzoek waaruit blijkt dat jonge leerlingen, 'tien' in eerste instantie niet tegelijkertijd kunnen zien als één tien én als tien eenheden. Kant-en-klare tienstaafjes zullen de leerlingen niet helpen deze conceptuele barrière te nemen, daar zijn activiteiten voor nodig die zich richten op het tellen en groeperen van eenheden.
6 Zie ook: Cobb, Stephan, McClain & Gravemeijer, 2001; Gravemeijer, McClain & Stephan, 1998; Gravemeijer & Stephan, 2002; McClain, Cobb, Gravemeijer & Estes, 1999; Stephan, 1998; Stephan, Cobb, Gravemeijer & Estes, 2001; Stephan, Bowers, Cobb & Gravemeijer, in press.
7 Dit betekent dat er naast de meet- of kralensnoercontext ook andere contexten aan de orde moeten komen.

Literatuur

Beishuizen, M. (1983). Invloeden van leermiddelen op de uitvoering van rekenhandelingen. In: G. de Zeeuw, W. Hofstee & J. Vastenbouw (red.). *Funderend onderzoek van het onderwijs en onderwijsleerprocessen - Bijdrage ORD 1983*. Lisse: Swets & Zeitlinger, 45-54.

Beishuizen, M. (1985). Vervolgonderzoek: Invloeden van leermiddelen op de uitvoering van rekenhandelingen. In: S. Dijkstra & P. Span (red.). *Leerprocessen en instructie. Bijdrage ORD 1985*, 131-144.

Cobb, P., E. Yackel & T. Wood (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1), 2-33.

Cobb, P., K. Gravemeijer, E. Yackel, K. McClain & J. Whitenack (1997). Mathematizing and Symbolizing: The Emergence of Chains of Signification in One First-Grade Classroom. In: D. Kirschner & J.A. Whitson (eds.). *Situated cognition theory: Social, semiotic, and neurological perspectives.* Hillsdale, NJ: Erlbaum, 151-233.

Cobb, P., M. Stephan, K. McClain & K.P.E. Gravemeijer (2001). Participating in Classroom Mathematical Practices. *Journal of the Learning Sciences, 10*(1/2), 113-163.

Gravemeijer, K. (1989). Het gebruik van concreet materiaal onderwijstheoretisch beschouwd. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *8*(1), 3-18.

Gravemeijer, K.P.E. (1991). An instruction-theoretical reflection on the use of manipulatives. In: L. Streefland (ed.). *Realistic Mathematics Education in Primary School.* Utrecht: Cdß-Press, 57-76.

Gravemeijer, K. (1992a). Onderwijsontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *10*(3), 3-13.

Gravemeijer, (1992b) *The Empty Number Line*. Utrecht: Freudenthal Instituut (interne publicatie).

Gravemeijer, K. (1993a). "The empty number line as an alternative means of representation for addition and subtraction." In: J. de Lange, Ch. Keitel, I. Huntley & M. Niss (eds.). *Innovation in mathematics education by modelling and applications*. London: Ellis Horwood, 141-159.

Gravemeijer, K. (1993b). Modelling two digit addition and subtraction problems with an empty number line. In: T. Breiteig, G. Kaiser-Messmer & I. Huntly (eds.). *Mathematics works - Mathematical Modelling in the classroom.* Ellis Horwood/Simon & Schuster, 51-61.

Gravemeijer, K.P.E. (1994a). *Developing Realistic Mathematics Education.* Utrecht: Cdß-Press.

Gravemeijer, K. (1994b). Educational Development and Developmental Research in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25(*5), 443-471.

Gravemeijer, K. (1996). *Polstok of prothese*. Paper gepresenteerd op de Panama voorjaarsdag 1996.

Gravemeijer, K. (1997). "Mediating between Concrete and Abstract." In: T. Nunes & P. Bryant (eds.). *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspectiv*e. Hove: Laurence Erlbaum Ass. Ltd., 315-345.

Gravemeijer, K. (1998a). Symboliseren en modelleren als wiskundige activiteit. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *16*(2/3), 11-18.

Gravemeijer, K. (1998b). Symboliseren en modelleren als wiskundige activiteit. In: N. Boswinkel & M. Dolk (red.). *Over rekenen gesproken – taal in/en rekenen.* Utrecht: Panama/Freudenthal Instituut, 35–51.

Gravemeijer, K. (1999a). Van concreet naar formeel. In: W. Faes & W. Oonk (red.). *Van Rekenenend Nederland voor Fred Goffree. 65/2 Onderwijsverhalen voor pabostudenten.* Groningen: Wolters Noordhof, 62-64.

Gravemeijer, K. (1999b). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155-177.

Gravemeijer, K.P.E. (2000). Meten als basis voor het rekenen met de lege getallenlijn. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 18*(3), 37-46.

Gravemeijer, K., P. Cobb, J. Bowers & J. Whitenack (2000). Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. In: P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (eds.). *Communicating and symbolizing in mathematics: Perspectives on discourse, tools, and instructional design.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 225 - 273.

Gravemeijer, K., J. Bowers & M. Stephan (in press). A hypothetical learning trajectory on measurement and flexible arithmetic. In: M. Stephan, J. Bowers, P. Cobb & K. Gravemeijer (eds.). *Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context. Journal for Research in Mathematics Education Monograph.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gravemeijer, K., K. McClain & M. Stephan (1998). Surporting students' construction of increasingly sophisticated ways of reasoning through problem solving. In: A. Olivier & K. Newstead (eds.). *Proceedings of the 22nd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *Volume 1*, 1-194; 1-209.

Gravemeijer, K. & M. Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. In: K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (eds.). *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en Inzicht.* Purmerend: Muusses.

Jong, R. de, A. Treffers & E. Wijdeveld (1975). *Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool, leerplanpublikatie 2. Bijlage bij Wiskobasbulletin 5*(2).

McClain, K., P. Cobb, K. Gravemeijer & B. Estes (1999). Developing mathematical reasoning within the context of measurement. In: L.V. Stiff & F.R. Curcio (eds.). *Developing Mathematical Reasoning*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 93-106.

Menne, J. (2001). *Met sprongen vooruit: Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100 - een onderwijsexperiment.* Utrecht: Cd-ß Press (dissertatie).

Stephan, M.L. (1998). Supporting the development of one first-grade classroom's conceptions of measurement: *Analyzing students' learning in social context.* Vanderbilt University (unpublished doctoral dissertation).

Stephan, M., P. Cobb, K. Gravemeijer & B. Estes (2001). The role of tools in supporting students' development of measuring conceptions. In: A. Cuoco (ed.). *The roles of representation in school mathematics.* Reston, VA: NCTM, 63-76.

Stephan, M., J. Bowers, P. Cobb & K. Gravemeijer (eds.) (in press). Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron. *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs (Nieuwe Wiskrant), 5*(1), 60-67.

Thompson, A. & P. Thompson (1996). Talking about rates conceptually, part II: Mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 2-24.

Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht*. Utrecht: IOWO (dissertatie).

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education. The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In: L. Streefland (ed.). *Realistic mathematics education in primary school*. Utrecht: Cd-β Press, 21-57.

Treffers, A. & E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijsen.

Veltman, A. (1993a). *Van het begin of van het eind*. Utrecht: Univeristeit Utrecht (doctoraalscriptie).

Veltman, A. (1993b). Van het 'begin' of van het 'eind', ontwikkelingsonderzoek naar het rekenen tot honderd op de (lege) getallenlijn. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *11*(4), 7-13.

Vuurmans, A.C. (red.) (1991). *Rekenen tot honderd*. 's-Hertogenbosch: KPC.

Whitney, H. (1985). Taking Responsability in School Mathematics Education. In: L. Streefland (ed.). *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2.* Utrecht: OW&OC.

Whitney, H. (1988). *Mathematical reasoning, early grades*. Princeton (Paper).

Yackel, E. (2001). Perspectives on arithmetic from classroom-based research in the United States of America. In: J. Anghileri (ed.). *Principles and practices in arithmetic teaching: innovative approaches for the primary classroom*. Buckingham: Open University Press, 15-31.