Cirkel- en staafdiagrammen in een leergang procenten

F. van Galen
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Cirkeldiagrammen met de hand tekenen is lastig. Waarschijnlijk is dat een belangrijke reden waarom ze nauwelijks voorkomen in de bestaande procentenleergangen. De computer maakt het tekenwerk echter eenvoudig.
In dit artikel wordt betoogd dat cirkeldiagrammen een belangrijke plaats verdienen in een leergang, die gericht is op heruitvinding van het procentbegrip. Het testen van ontworpen onderwijsactiviteiten in een groep 7 leidde echter tot het inzicht dat een essentiële stap - hoe kun je groepen vergelijkbaar maken als ze niet even groot zijn? - via cirkeldiagrammen makkelijk overgeslagen wordt. De leergang is daarom uitgebreid met een aantal activiteiten rond staafdiagrammen.

1 Inleiding

Breuken en procenten maken het ons mogelijk om af te zien van absolute aantallen en te redeneren in termen van verhoudingen. Wanneer in een krantenartikel staat dat in de Verenigde Staten 65 procent van de mensen voor de doodstraf is, tegenover 42 procent in Nederland, dan doet het feit dat de Verenigde Staten veel meer inwoners heeft er op dat moment blijkbaar niet toe. Om op een dergelijke manier te kunnen redeneren is voor kinderen een fundamenteel inzicht nodig, namelijk onderscheid kunnen maken tussen een vergelijking in termen van absolute aantallen en een vergelijking in termen van verhoudingen.
Dit artikel beschrijft het begin van een lessenserie die bedoeld is om leerlingen het idee van procenten te laten ontwikkelen. Een belangrijke plek wordt daarin toegedacht aan het maken en analyseren van cirkeldiagrammen. Voor de lessenserie is een computerprogramma ontworpen waarmee leerlingen gegevens in een cirkeldiagram kunnen weergeven. Bij het ontwikkelen en uitproberen van de lessenserie kwamen we erachter dat ook opgaven rond staafdiagrammen nodig waren om een belangrijke vraag, namelijk hoe je groepen van verschillende grootte kunt vergelijken, tot onderwerp van discussie te maken.
Cirkel- en staafdiagram bieden verschillende manieren om verhoudingen te visualiseren. In dit artikel richt ik me op het didactisch gebruik van cirkel- en staafdiagrammen binnen een leergang procenten, waarbij ik met name in zal gaan op de verschillen tussen de modellen. In de volgende paragraaf wordt kort ingegaan op de problematiek van procenten. Daarna wordt een les rond cirkeldiagrammen besproken, vooral om het gebruik van het computerprogramma te illustreren. Vervolgens beschrijf ik een les rond staafdiagrammen, die laat zien hoe lastig het kan zijn voor kinderen om in termen van verhoudingen te redeneren. Ten slotte wordt aan de hand van een derde les beschreven hoe de kinderen uit de proefklas dit idee van verhoudingsgewijs redeneren lijken op te pakken.
De lessenserie is ontwikkeld en beproefd in groep 7 van een school in Utrecht.[1]

2 Didactisch gebruik van het cirkeldiagram

Het is gebruikelijk om breuken, procenten, verhoudingen en kommagetallen te beschrijven als vier afzonderlijke leerstofdomeinen, maar wel als leerstofdomeinen die op allerlei verschillende manieren met elkaar verbonden zijn. Streefland, De Moor en Treffers (1991, pag. 37) stellen dat het niet goed mogelijk is om te spreken van één ideale leergang voor procenten, want afhankelijk van de accenten die de methode kiest kan het startpunt of bij breuken, of bij verhoudingen worden gelegd. Parker en Leinhardt (1995) verklaren de problemen die leerlingen hebben met procenten voor een belangrijk deel uit het feit dat procenten zich ontwikkeld hebben van een simpele, praktische rekenregel voor belasting en rente tot een taal voor allerlei deel-geheel-relaties en verhoudingen. Het onderzoeken van de relaties tussen 'procent' en andere wiskundige begrippen hoort dus tot de kern van een leergang.
In onze lessen is ervoor gekozen om het startpunt te leggen in het onderzoeken van de relaties tussen breuken. Daarbij komen op een gegeven moment ook de beperkingen van breuken aan de orde, namelijk dat ze lastig met elkaar te vergelijken zijn en dat ze onhandig zijn bij optellen en aftrekken. We weten als volwassenen bijvoorbeeld wel dat $\frac{3}{4}$ meer is dan $\frac{2}{3}$, maar hoe zit het met

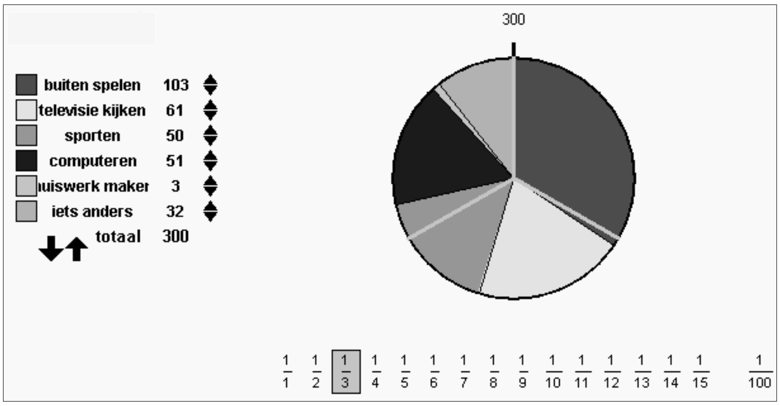
$\frac{2}{3}$ en $\frac{5}{7}$? En als $\frac{3}{4}$ van de ondervraagden voor alternatief *a* heeft gekozen en $\frac{1}{5}$ voor alternatief *b*, hoeveel blijft er dan over voor een derde alternatief? Deze problemen zijn vergelijkbaar met de problemen die een niet metriek maatsysteem opwerpt, bijvoorbeeld lengtemeting met 12 inches in een foot en 3 feet in een yard, of een geldsysteem met 20 shillingen in een pond, en een shilling op zijn beurt weer gelijk aan 12 pennies.

Het voordeel van procenten boven breuken is niet alleen dat procenten voor gestandaardiseerde verhoudingen zorgen, maar ze bieden ook een verfijning in honderdsten. Het is een verfijning die betekenisvol is - we zijn vertrouwd met de getallen tussen 0 en 100 - maar die tegelijk in veel situaties voldoende is. In het dagelijks leven wordt regelmatig overgestapt van breuken op procenten en van procenten op breuken, afhankelijk van de precisie die gewenst is. Krantenartikelen bieden daarvan veel voorbeelden. Als gerapporteerd moet worden over een opinie-onderzoek zijn de precieze gegevens voor de lezers niet interessant en dus wordt voor een groot deel volstaan met omschrijvingen als: 'bijna driekwart van de ondervraagden', en 'iets meer dan de helft'. Wanneer de journalist preciezer wil zijn of minder vertrouwde breuken zou moeten gebruiken, wordt er overgeschakeld naar procenten: '24 procent van de ondervraagden' of 'bijna 80 procent van de ondervraagden.'

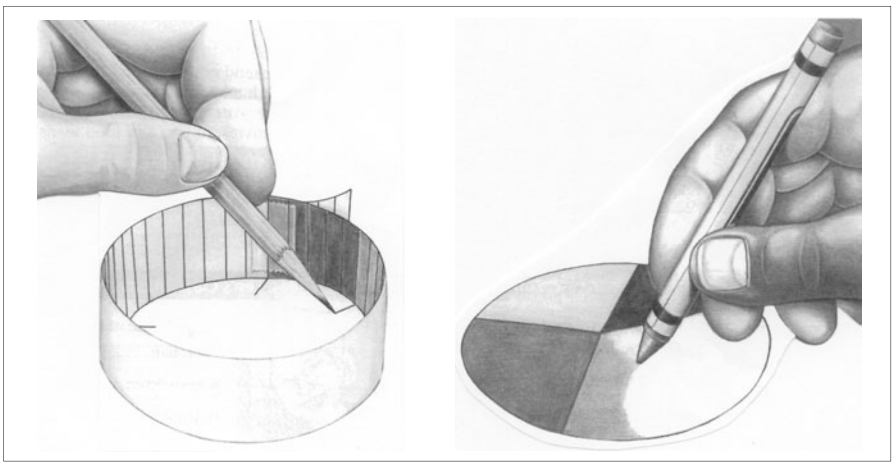
De stap van breuken naar procenten zal in dit artikel slechts zijdelings aan de orde komen omdat de nadruk ligt op de rol van cirkeldiagram en staafdiagram in een leergang. De lessen die worden besproken om die rol te illustreren komen uit het begin van de lessenserie.

Het begin van de lessenserie kan beschreven worden als een verkenning van de relatie tussen gewone breuken en honderdsten. Het cirkeldiagram stond daarbij centraal. Hierbij werd het computerprogramma gebruikt dat is afgebeeld in figuur 1. Op elke regel moet een getal plus omschrijving worden ingevuld. In het voorbeeld van figuur 1 gaat het om antwoorden van kinderen op de vraag wat ze het liefst na schooltijd doen. Het is mogelijk een regel in het lijstje links naar boven te verslepen en zo de volgorde in het lijstje te veranderen. De volgorde in het cirkeldiagram verandert dan mee.

Er bestaan verschillende computerprogramma's die cirkeldiagrammen kunnen tekenen. De belangrijkste reden om een eigen programma te maken was dat we leerlingen de mogelijkheid wilden geven om naar passende breuken te zoeken. Door te klikken op een van de breu-



figuur 1: het computerprogramma (java-applet) voor het maken van een cirkeldiagram



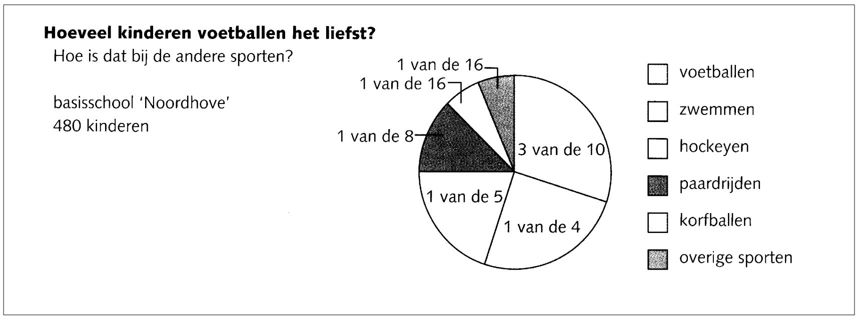
figuur 2: tekenen van cirkeldiagram door strook in te kleuren en dan begin en eind aan elkaar te plakken

kenknoppen wordt over het cirkeldiagram met grijze lijntjes een breukenverdeling getekend. Met deze knoppen kan een leerling uitzoeken wat de beste breuk is om een bepaald deel te karakteriseren. In figuur 1 is een verdeling in derden over het cirkeldiagram gelegd en te zien is dat het aantal kinderen dat het liefst buiten gaat spelen net iets meer is dan eenderde.

Het computerprogramma maakt het mogelijk om activiteiten rond cirkeldiagrammen in een leergang procenten op te nemen, iets wat in de huidige methoden nauwelijks gebeurt. Op de eerste plaats is het zelf tekenen van een cirkeldiagram erg lastig. In de Amerikaanse methode 'Mathematics in Context' komt een activiteit voor waarbij leerlingen stroken omzetten in een cirkeldiagram (fig.2)[2], maar deze activiteit is bedoeld voor de begripsvorming; de methode is te omslachtig voor praktisch gebruik. Verder is het een voordeel dat leerlingen met grote getallen kunnen werken, want de computer neemt het rekenwerk voor zijn rekening. Dit is belangrijk met het oog op de authenticiteit van opgaven, want juist grote getallen zijn in het dagelijks leven een aanleiding om terug te gaan naar een schaal van 0 tot 100. Omrekenen van verhoudingen met kleine getallen naar procenten is vaak nogal kunstmatig. Zo kun je de uitspraak '5 van de 28 kinderen in onze klas hebben een bril' weliswaar vertalen naar '18 procent van de kinderen draagt een bril', maar een dergelijke omzetting maakt de situatie niet beter voorstelbaar, terwijl dat wel het geval is als het zou gaan om '69 van de 382 kinderen op onze school.' Ten slotte maakt het computerprogramma het mogelijk om te werken met elke mogelijke dataset, omdat het rekenwerk aan de computer wordt overgelaten; dus bijvoorbeeld ook met gegevens die leerlingen zelf verzameld hebben.
In rekenboekopgaven rond cirkeldiagrammen worden de getallen altijd heel zorgvuldig gekozen. Een voorbeeld is de opgave van figuur 3 uit 'Rekenrijk'. Cirkeldiagrammen komen maar op beperkte schaal in de rekenmethoden voor. 'Rekenrijk' is een uitzondering, want daar worden cirkeldiagrammen systematisch gebruikt in een leerlijn verhoudingen.
Inpassen van het computerprogramma in een leergang procenten betekent dat andere contexten kunnen worden gekozen. In procenten-contexten gaat het nu doorgaans om dichotome variabelen, bijvoorbeeld om parkeerplaatsen die al dan niet bezet zijn en jam die voor een bepaald deel uit fruit bestaat (voorbeelden uit Van den Heuvel-Panhuizen & Streefland, 1993). In het dagelijks leven zijn dergelijke dichotomieën eerder uitzondering dan regel: hobby's, bevolkingssamenstelling, vakantiebestemming, kijkdichtheid van televisiezenders, bijna altijd zijn er meer dan twee alternatieven in het spel. Een computerprogramma dat cirkeldiagrammen tekent maakt het mogelijk om het procentbegrip te ontwikkelen vanuit rijkere contextsituaties.
In de volgende paragraaf schets ik het gebruik van het computerprogramma aan de hand van een voorbeeldactiviteit. Daarna zal worden ingegaan op didactische beperkingen van het cirkeldiagram.

3 Wat doe je het allerliefste na school?

De klas is gisteren dat de gemeente Utrecht een onderzoekje heeft gedaan onder kinderen, met als een van de vragen: 'Wat doe jij het allerliefste na school?' Gekozen kon worden uit: 'buiten spelen', 'televisie kijken', 'sporten', 'computeren', 'huiswerk maken', en 'andere hobby's'. Een paar leerlingen hebben inmiddels een lijstje gemaakt met de keuze van de kinderen uit de eigen klas.



figuur 3: cirkeldiagramopgave uit 'Rekenrijk', deel 7a, pag.79

	Utrecht	Klas
Buiten spelen	103	14
Televisie kijken	61	5
Sporten	50	1
Computeren	51	4
Huiswerk maken	3	1
Andere hobby's	32	3

figuur 4: antwoorden op de vraag 'Wat doe je het liefst na school?'

De leerkracht introduceert de computeropdracht door de cijfers van Utrecht en die van de eigen klas op het bord te zetten. In het onderzoek van de gemeente zijn 300 kinderen ondervraagd, in de klas zitten 28 kinderen (fig.4). Mary roept direct 'eenderde' over het buitenspelen van Utrecht. Televisie kijken is volgens haar $\frac{1}{5}$, want $5 \times 60 = 300$. Ook de andere cijfers van Utrecht worden vertaald naar breuken. De leerkracht vertelt dat het er bij de computertaak om gaat de cijfers van Utrecht en van de eigen klas te vergelijken.

De computeropdrachten maken de leerlingen in tweetallen. De opdracht is om een cirkeldiagram te maken van de antwoorden van de eigen klas en dat cirkeldiagram te vergelijken met zo'n zelfde diagram, gebaseerd op gegevens van een onderzoek onder 300 kinderen (fig.1).
De laatste opdracht van de computertaak luidt:

> 'Schrijf een stukje voor de schoolkrant over de antwoorden van jullie klas.
> Vertel wat de verschillen zijn met het onderzoek van Utrecht.'

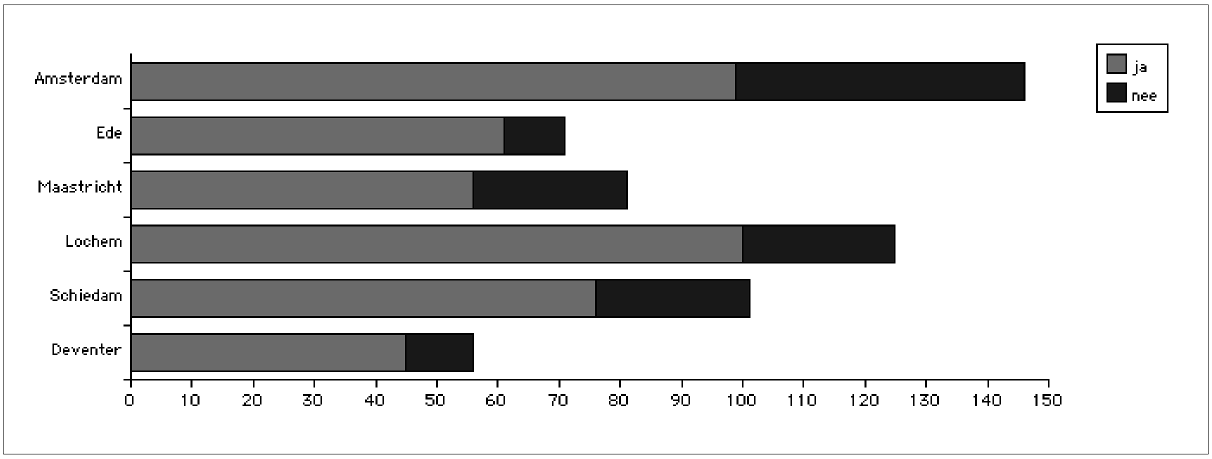
Een week later hebben alle tweetallen de computeropdrachten gedaan. Ze zijn er nog niet allemaal aan toe gekomen om hun tekst op een groot stuk papier over te nemen, zoals de leerkracht gevraagd had. De bedoeling daarvan is dat leerlingen hun tekst op het bord kunnen hangen om hem aan de rest van de klas te laten lezen.
Wesley en Steve lichten als eersten hun vel toe. Daarop staat:

> 'Vergelijking. Klas: 28 kinderen. Utrecht: 300 kinderen.
> In onze klas vond de helft buiten spelen het leukst. In heel Utrecht maar $\frac{1}{3}$.
> In onze klas vond $\pm\ \frac{1}{6}$ t.v. kijken het leukst.'

De rest lezen ze voor van hun klad: 'In heel Utrecht ook. Opvallend is ook dat in onze klas 1 van de 28 voor sport heeft gekozen. In heel Utrecht is dat $\frac{1}{6}$.' Er wordt kort over hun tekst gepraat. De leerkracht vraagt wat meer is, 1 van de 28 of $\frac{1}{6}$. Wesley: '$\frac{1}{6}$ is meer dan $\frac{1}{28}$'.
Hierna mogen andere kinderen hun tekst toelichten, waaronder Maja en Erik die een heel vel hebben volgeschreven. Elk gegeven is echter simpelweg omgezet in twee breuken, een voor de eigen klas en een voor Utrecht. Eigenlijk was dat niet de bedoeling, want het had een stukje voor de schoolkrant moeten worden, dus meer verhalend en met alleen de meest opvallende punten erin.

4 Vergelijken van groepen van verschillende grootte

Bij het uittesten van de lessen en computeropdrachten bleek dat de leerlingen van de proefklas een behoorlijk inzicht hadden in breuken. Omzetten van verhoudingen naar breuken, zoals in de beschreven les, was geen probleem, en het vergelijken van breuken naar grootte ook niet. De eerste lessen verliepen dan ook vrij soepel. Bij het ontwerpen van nieuwe activiteiten kwamen we echter gaandeweg tot het inzicht dat cirkeldiagrammen verhullend werken. Een cirkeldiagram kan immers even goed staan voor een groep van 300 als voor een groep van 28. Door leerlingen cirkeldiagrammen te laten tekenen verdwijnt een essentieel en lastig probleem onder tafel: hoe kun je groepen vergelijken die verschillend in grootte zijn? Het probleem wordt als het ware al voor de leerlingen opgelost voordat ze zelf beseffen dat er een probleem is.
In de proefklas stelden we het probleem van de verschillende grootte van groepen aan de orde door bij een opgave over fietsen de gegevens niet in een cirkeldiagram, maar in een staafdiagram te presenteren (fig.5). De opgave werd aangeboden op papier, zonder een computerprogramma. Het verhaal erbij was, dat een klas in Amsterdam wilde weten of veel kinderen van twaalf jaar een eigen fiets hadden. Via internet hadden ze dat op



figuur 5: eerste opgave rond staafgrafieken. De staven staan voor de antwoorden van kinderen op de vraag 'Heb jij een eigen fiets?'

scholen in andere steden uit laten zoeken. De vragen bij de grafieken waren: in welke stad hebben de meeste kinderen een eigen fiets? In welke stad hebben de minste kinderen een eigen fiets? Wat is volgens jullie de volgorde van meest naar minst?
Volgens bijna alle leerlingen - die in kleine groepjes aan het probleem werkten - was het antwoord duidelijk: in Lochem zijn de meeste kinderfietsen en in Deventer is het aantal het kleinst. De leerlingen keken, met andere woorden, uitsluitend naar de absolute aantallen ja-antwoorden. Pogingen om de leerlingen tijdens het overleggen in kleine groepjes aan het denken te zetten door op de nee-antwoorden te wijzen, of te zeggen dat er in Deventer vast wel meer dan 55 kinderen wonen, leverden niet begrijpende gezichten op en uiteindelijk reacties als: ‘ik snap er helemaal niks van.’ In de nabespreking bleek dat een paar kinderen naar de verhoudingen binnen de staven hadden gekeken, maar de meeste andere leerlingen leken hun verhaal niet te kunnen volgen.

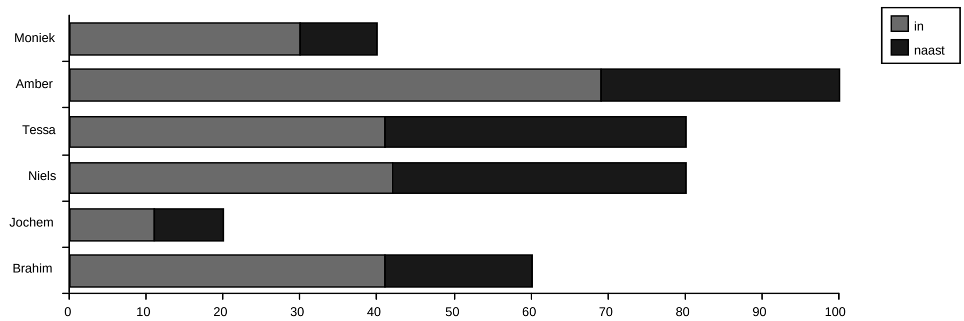
De reacties laten zien dat voor dergelijke contextopgaven een fundamenteel inzicht nodig is, namelijk verhoudingsgewijs kunnen redeneren als groepen niet even groot zijn. Staafdiagrammen zoals die van figuur 5 maken het verschil tussen redeneren met absolute aantallen of met verhoudingen expliciet, en gehoopt was dan ook dat de opgave leerlingen voor een conflict zouden zetten. Dat bleek echter niet het geval: de opgave werd simpelweg in termen van absolute aantallen geïnterpreteerd. Dit betekent niet dat de leerlingen niet in termen van verhoudingen kunnen redeneren - heel jonge kinderen kunnen dat al - maar blijkbaar is het redeneren in verhoudingen een inzicht dat als het ware op allerlei niveaus steeds opnieuw verworven moet worden. In dit geval was sprake van een context waarin de gegevens van de verschillende steden opgevat moesten worden als steekproeven, terwijl van de leerlingen gevraagd werd om te compenseren voor de grootte van de steekproef. Blijkbaar was dat voor deze leerlingen teveel gevraagd. Omdat de context ongetwijfeld een belangrijke factor is geweest, besloten we een tweede poging te wagen met een wat concreter probleem. Ook in dit nieuwe probleem is in feite sprake van steekproeven, maar nu op een manier die voor leerlingen beter voorstelbaar is. Ik ga vrij uitvoerig in op de oplossingen bij deze laatste opgave, omdat een aantal leerlingen daarbij al de volgende stap lijkt te maken, namelijk de stap naar het werken met gestandaardiseerde verhoudingen.

5 De basketballes

Het probleem van de les is afgebeeld in figuur 6. De vraag is welk kind kan het beste mikken met een basketbal. Deze vraag leek ons concreter dan die van de vorige les. We hadden - zij het met enige aarzeling - de getallen niet eenvoudiger gemaakt, want we besloten dat het er deze les vooral om zou gaan of leerlingen het idee van denken in verhoudingen zouden oppakken, en niet zozeer om de oplossingen van het probleem.
Direct aan het begin van de les is al duidelijk dat leerlingen de kern van de opgave vatten en dit keer in verhou-

Mikken

Wie kan de meeste doelpunten maken met een basketbal?
De kinderen die het het beste kunnen hebben vanmorgen geoefend.
Hieronder zie je hoe vaak ze raak gooiden.
Alleen, je kunt niet zo goed zien wie het het *allerbeste* kan, want de kinderen gooiden niet even vaak.



1. Volgende week wordt een wedstrijd gehouden. Iedereen mag 20 keer gooien.
   Wie denk je dat de wedstrijd gaat winnen?
2. Welk kind deed het vanmorgen het slechtst?
   Denk er eerst alleen over na. Overleg dan met de andere kinderen van je groepje en schrijf samen een antwoord op. Leg bij elke vraag ook uit *waarom.*

figuur 6: tweede opgave rond staafgrafieken, nu met als context het gooien van een basketbal in de basket.

dingen denken. Barrie leest de tekst van de opgave voor. De leerkracht: 'Er staat dat je niet zo goed kunt zien wie de allerbeste is, Yolande kun je dat zien, snap je waarom dat er staat?' Yolande, die op zich niet sterk is in rekenen zegt: 'Ja, want dan zijn die balkjes ook kleiner, en als ze nou even vaak gegooid hebben dan zouden ze wel even groot zijn. Alleen, dan zouden ze niet gelijk verdeeld zijn, maar dan zouden ze wel even grote balken zijn.' Even later merkt Tom nog op dat Niels uit de opgave iets beter is dan Tessa. 'Niels is iets meer in, en ze hebben allebei evenveel gegooid.' De leerkracht stelt voor dat de leerlingen zich in groepjes over de vragen zullen buigen, maar vraagt de kinderen eerst om drie minuten de tijd te nemen om zelf een antwoord te kiezen. Aan de meeste tafeltjes wordt echter al vrij gauw fluisterend overlegd. Als de leerlingen in groepjes mogen overleggen blijkt dat veel kinderen geneigd zijn om voor Amber te kiezen als de beste bij het gooien, zij heeft immers het grootste aantal keren raak gegooid. De leerkracht loopt rond en geeft geen commentaar op de oplossingen, maar benadrukt wel dat de leerlingen straks hun antwoord op de een of andere manier moeten kunnen 'bewijzen'. In alle groepjes wordt goed overlegd, behalve in het groepje van Kaylee en Steve. Steve heeft een andere oplossing dan Kaylee en probeert haar uit te leggen waarom haar oplossing niet goed is. Kaylee weigert echter te luisteren. 'Jij vindt het anders, nou ik vind dit', zegt ze. Iedereen heeft recht op een eigen mening, lijkt ze te bedoelen.

Na twaalf minuten volgt een klassikale bespreking. Auke komt als eerste voor het bord. Hij legt uit dat Amber 100 keer gegooid heeft, met 70 keer raak, dat is $\frac{7}{10}$. Jochem heeft 20 keer gegooid, met 10 keer raak, dat is $\frac{1}{2}$. Een schuilnaam voor $\frac{1}{2}$ is $\frac{5}{10}$, dus Amber is beter dan Jochem.
Lorenzo heeft Moniek en Amber vergeleken door Monieks score om te rekenen naar 100 keer gooien. 'Moniek heeft 40 keer gegooid, dat is $\frac{4}{4}$ eigenlijk en ze heeft $\frac{3}{4}$ geraakt, 30 keer. Dat kun je verdubbelen, dan is het $\frac{8}{8}$ en ze heeft $\frac{6}{8}$ geraakt. Dan heb je nog 20 over en als ze die ook weer zou raken zou ze misschien 15 keer raken en dan heeft ze 75 en dat is iets meer dan Amber.' De leerkracht vraagt of hij het ook op kan schrijven, maar dat wil hij niet, want dat vindt hij te moeilijk. Ook de andere leerlingen in zijn groepje willen het niet doen. De leerkracht stelt voor dat Lorenzo het nog een keer vertelt en dat zij zelf de oplossing op het bord schrijft.
Als de leerkracht daarna om reacties vraagt op de oplossing van het groepje van Lorenzo probeert Auke de $\frac{3}{4}$ van Moniek en de $\frac{7}{10}$ van Amber te vergelijken via alles omrekenen naar 21, want '3 en 7 zitten allebei in de tafel van 21'. De leerkracht wacht tot iemand er iets van zegt. Abdul reageert. Uiteindelijk worden de twee breuken omgerekend naar $\frac{30}{40}$ en $\frac{28}{40}$.
Wesley die als laatste mag vertellen wat zijn groepje gedaan heeft, zegt dat ze een heel lijstje hebben gemaakt: 'Moniek had $\frac{3}{4}$, Amber had $\frac{7}{10}$, en Tessa had $\frac{2}{4}$. Tessa had de helft, maar we hebben geprobeerd om het meeste in vierden te doen en dus zeiden we niet $\frac{1}{2}$, maar $\frac{2}{4}$. Niels had $\frac{2}{4}$, en Jochem ook $\frac{2}{4}$. Het was ongeveer, dus er waren heel veel $\frac{2}{4}$. Brahim had $\frac{3}{4}$.' Nadat de eerste en laatste plaats zijn gevonden aan de hand van Wesleys lijstje benadrukt de leerkracht dat je aan de hand van zo'n lijstje de volgorde van alle kinderen kunt uitzoeken.

De basketballes leek in alle opzichten een geslaagde les. De context zorgde ervoor dat de leerlingen naar de verhoudingen keken. Geen enkel groepje komt in de klassikale discussie nog met Amber als beste gooier. Ook in deze opgave staat elke staaf in feite voor een steekproef, maar dat idee is hier zo concreet dat de leerlingen ermee overweg kunnen.
Het is duidelijk dat de staafdiagrammen met hun verschillende lengtes de leerlingen voor een probleem zetten dat met cirkeldiagrammen onder tafel zou zijn gebleven. In hun pogingen om het probleem van de verschillende lengtes weg te werken, gebruiken de leerlingen zowel breuken als verhoudingen, en ook door elkaar. Lorenzo heeft een correcte manier bedacht om Moniek, net als Amber naar 100 keer gooien om te rekenen, maar vindt het lastig om zijn redenering onder woorden te brengen. Het is jammer dat de klas de verhoudingstabel niet kende, want met een verhoudingstabel zou het noteren van de aanpak van Lorenzo eenvoudig zijn geweest. Vergelijk de uitleg van Lorenzo met de verhoudingstabel hieronder (fig.7).

er in	30	60	15	75
gegooid	40	80	20	100

figuur 7

Lorenzo: 'Moniek heeft 40 keer gegooid, dat is $\frac{4}{4}$ eigenlijk en ze heeft $\frac{3}{4}$ geraakt, 30 keer. Dat kun je verdubbelen, en dan is het $\frac{8}{8}$ en ze heeft $\frac{6}{8}$ geraakt. Dan heb je nog 20 over en als ze die ook weer zou raken zou ze misschien 15 keer raken en dan heeft ze 75 en dat is iets meer dan Amber.' Waarschijnlijk heeft de klas door het wat moeizame verhaal de oplossing van Lorenzo niet echt op waarde kunnen schatten. Naar aanleiding van deze ervaring is overigens besloten een paar lessen aan de verhoudingstabel te besteden.
De groep van Wesley maakte een belangrijke stap in de richting van procenten. Zij hadden er in hun groepje namelijk voor gekozen om alles zoveel mogelijk in vierden uit te drukken, omdat de breuken dan makkelijker te vergelijken zijn. Van vierden als standaardbreuk naar honderdsten lijkt niet zo'n grote stap. Ook hier is het echter de vraag of de andere kinderen de opmerkingen van Wesley op waarde hebben geschat. Besloten werd om na deze les niet overhaast naar procenten toe te werken, maar eerst via soortgelijke opgaven te zorgen dat

alle kinderen zich realiseren hoe handig het werken met een standaardbreuk kan zijn.

6 Conclusies

De bedoeling van dit artikel was te laten zien dat leerlingen bij het ontwikkelen van inzicht in procenten een stap moeten maken waar waarschijnlijk meestal niet veel aandacht aan wordt besteed. Breuken en procenten zijn een middel om groepen te vergelijken die niet even groot hoeven te zijn, maar dit - voor het inzicht essentiële - punt wordt doorgaans niet geproblematiseerd. Leerlingen leren wel om breuken en procenten te berekenen over verschillende aantallen, maar ze worden niet in een situatie gebracht waarin ze kunnen ontdekken dat breuken en procenten een oplossing zijn voor het probleem van verschillende aantallen.
Door ons te concentreren op cirkeldiagrammen maakten we aanvankelijk dezelfde fout, omdat cirkeldiagrammen een groep van 28 kinderen en een groep van 300 kinderen moeiteloos vergelijkbaar maken. Toen we echter het probleem expliciet maakten door gegevens weer te geven in staven van verschillende grootte, bleek dat leerlingen in eerste instantie kozen voor een interpretatie in absolute aantallen, in plaats van voor een verhoudingsgewijze vergelijking. Pas in een latere les, met een andere context, lukte het wel en toen werd ook het conflict duidelijk tussen de twee verschillende interpretaties. Het feit dat de tweede opgave rond staafdiagrammen goed werd geïnterpreteerd betekent overigens niet dat de leerlingen nu verder in alle situaties waar dat nodig is verhoudingsgewijs zullen redeneren. Het lijkt verstandig om leerlingen nog een aantal soortgelijke problemen voor te zetten en er daarbij naar te streven dat de leerlingen het verschil tussen absoluut en verhoudingsgewijs redeneren onder woorden kunnen brengen.

In zekere zin gaat dit artikel meer over verhoudingen en breuken dan over procenten. De beschreven lessen zijn de eerste stappen die zouden moeten leiden tot het ‘heruitvinden’ van procenten. We hebben een aantal aspecten genoemd van het redeneren met procenten:

– procenten horen bij het redeneren in verhoudingen;
– procenten zijn een gestandaardiseerde manier om verhoudingen weer te geven. In plaats van te werken met verschillende breuken, wat lastig is bij vergelijken en rekenen, wordt alles uitgedrukt in dezelfde soort breuken;
– procenten bieden een verfijning ten opzichte van de meest vertrouwde gewone breuken, omdat ze een schaal bieden tussen 0 en 100.

De lessen laten zien dat er in de proefklas een goede voedingsbodem ligt voor een vervolg in de richting van procenten. In de laatst beschreven les is er één groepje leerlingen dat al formuleert waarom het handig is te werken met breuken van dezelfde soort. Vanuit dit inzicht naar de keuze om honderdsten te gebruiken als standaardbreuk lijkt een kleine stap. Die stap zouden de leerlingen echter zelf moeten maken. Ook voor een discussie over de zinvolheid van grove of verfijnde maten lijken in de proefklas de voorwaarden aanwezig, want de leerlingen blijken al op een schattende manier met breuken en verhoudingen te kunnen redeneren.

De in dit artikel beschreven ervaringen hebben ertoe geleid dat het oorspronkelijke computerprogramma is aangepast en dat het programma gegevens niet alleen in cirkeldiagrammen kan weergeven, maar ook in staafdiagrammen. De belangrijkste verdienste van het computerprogramma is dat het contextproblemen met grote getallen mogelijk maakt. Het rekenwerk dat grote getallen met zich meebrengen werkt doorgaans storend in activiteiten die bedoeld zijn voor begripsontwikkeling. De oplossing die vaak gekozen wordt is dat contextsituaties worden gezocht met kleine getallen of dat grotere getallen zo worden uitgezocht dat er makkelijk mee te rekenen valt. De sterke voorkeur voor kortingopgaven bij methodeschrijvers komt hier waarschijnlijk ook uit voort. Bij kortingen gaat het altijd om mooie percentages, zoals 10 procent, 20 procent, 25 procent, maar kortingopgaven zijn conceptueel lastig, want er moet niet alleen met procenten worden gerekend, maar er moeten ook nog bedragen van elkaar worden afgetrokken. De mooie percentages zijn echter een oneigenlijke ingang naar het procentbegrip, want als we alles af zouden kunnen met zulke ronde percentages zouden procenten nooit uitgevonden zijn.
Het computerprogramma maakt het mogelijk om leerlingen te laten redeneren in authentieke contextsituaties met grote getallen, zonder dat het rekenwerk het zicht wegneemt. Bovendien maakt het computerprogramma onderwijs mogelijk waarbij leerlingen min of meer zelfstandig op onderzoek kunnen gaan. Onderwijs bijvoorbeeld waarin leerlingen de vrijheid krijgen om zelf te bepalen hoe ze situaties in kaart willen brengen en misschien zelfs om te bepalen welke gegevens ze willen verzamelen. Op dit aspect van computergebruik hoop ik in een later artikel terug te komen.

Noten

1 De lessenserie is ontwikkeld in nauwe samenwerking tussen de onderzoeker - F. van Galen - en de leerkracht van de klas - L. Oosterwaal. E-mails - verslagen, reflectie, voorstellen voor nieuwe lessen - speelden hierin een belangrijke rol.

2 Figuur uit ‘Fractions Times’ van ‘Mathematics in Context’, Encylopadia Britannica Educational Corporation.

Literatuur

Heuvel-Panhuizen, M. van den & L. Streefland (1993). Per Sense; een onderwijsleerpakketje over procenten. In: M. Dolk & W. Uittenbogaard (red.). *Procenten, op de grens van basisschol en basisvorming.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Parker, M. & G. Leinhardt (1995). Percent: A Privileged Proportion. *Review of Educational Research,* 65(*4*), 421-481.

Streefland, L., E. de Moor & A. Treffers (1991). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (14). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 10(*1*), 29-38.