Geschiedenis van de lege getallenlijn

J. Menne
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Tot 1950 ontbreekt in de Nederlandse leerboeken en handleidingen de getallenlijn bij het rekenen tot 100 volledig. In de periode tot 1970 is in de rekendidactieken weliswaar een toenemende belangstelling voor het didactische gebruik van de gevulde getallenlijn te signaleren, maar blijft de aandacht hiervoor in de meeste gangbare rekenmethoden uit. Onder invloed van het Wiskobasproject (1970-1980) gaan hokjes- en streepjesgetallenlijnen voor het eerst in de reken-wiskundemethoden een rol spelen bij het ordenen, positioneren en opereren met getallen. Voor het stimuleren van meer verkorte rekenstrategieën wordt echter zowel in het Wiskobasproject als in de leerboeken noodgedwongen uitgeweken naar andere modellen zoals het honderdveld en de abacus.
Via de ideeën van Weill (1978), Whitney (1988) en Treffers (1989) maakt de lege getallenlijn als didactisch model in de jaren negentig opgang in het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs. Weill laat zien hoe door het plaatsen van getallen onder en boven een lege getallenlijn verkort kan worden gerekend. Whitney voegt hieraan toe dat een streepje voor een getal op de lege getallenlijn de plaats van een tandenstoker op de kralenketting representeert. Treffers ziet door het eenduidig toekennen van de betekenis van dit streepje enerzijds en de sprongbenaderingswijze van Wiskobas anderzijds mogelijkheden voor het verkort en flexibel leren rekenen op dit model. Daarbij merkt hij echter op, dat voordat leerlingen op een lege getallenlijn kunnen opereren met getallen, aan de volgende voorwaarden moet zijn voldaan:
– *kunnen tellen met tienen en enen;*
– *getallen kunnen lokaliseren op een kralenketting en een lege getallenlijn;*
– *een sprong van tien kunnen nemen vanaf een willekeurig getal.*
Vervolgens blijkt uit onderzoeken van Veltman (1993) en Klein (1998) dat de lege getallenlijn een bruikbaar middel is voor optellen en aftrekken tot 100. Eveneens worden aanwijzingen gevonden dat voor zwakke rekenaars activiteiten in de voorwaardelijke sfeer, zoals Treffers die reeds heeft aangeduid, vooraf zouden moeten gaan aan het oplossen van opgaven op een lege getallenlijn. De verantwoording van de genoemde voorwaarden als fundament voor het rekenen tot 100 en verder, is nader uitgewerkt in het dissertatieonderzoek van Menne (2001).

1 Inleiding

De functie van lege getallenlijnen bij het leren rekenen tot 100 is voor menigeen wellicht niet meer weg te denken. Toch heeft het tot de jaren negentig geduurd voordat naar dit model onderzoek werd verricht en het vervolgens in de Nederlandse leerboeken verscheen.
Om zicht te krijgen op de ontstaansgeschiedenis van dit jonge didactische model en de vlucht die het sinds een aantal jaren neemt in binnen- en buitenland, wordt in dit artikel de nog niet eerder beschreven geschiedenis van de lege getallenlijn geschetst.[1] Voor de goede orde wordt echter begonnen met de *gevulde* getallenlijn, die een wat langere voorgeschiedenis kent. Maar toch ook niet zoveel langer, omdat er in de periode 1875-1950 in het rekenonderwijs nauwelijks aandacht voor getallenlijnen was.
In het Wiskobasproject, vanaf omstreeks 1970, kreeg de (gevulde) getallenlijn, in feite voor het eerst in het Nederlandse rekenonderwijs, een prominente plaats bij het rekenen tot 100. Maar die toewijzing bleek van korte duur, want al in de jaren tachtig taande de invloed ervan, terwijl tegelijkertijd de betekenis van het honderdveld, als verknipte getallenlijn, sterk toenam.
Aan het eind van de jaren tachtig werd in Nederland de lege getallenlijn geïntroduceerd. De ontstaansgeschiedenis daarvan wordt hier opgetekend door achtereenvolgens de ideeën van Weill, Whitney en Treffers te schetsen. Hoe en in hoeverre de lege getallenlijn vervolgens in de jaren negentig werd opgenomen in de nieuwe reken-wiskundemethoden, komt in de laatste paragraaf aan de orde.

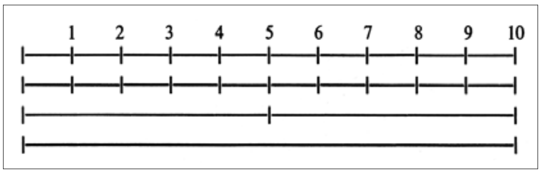
2 Gevulde getallenlijn

Periode 1950-1970

Tot 1950 ontbreekt in de Nederlandse leerboeken en bijbehorende handleidingen de getallenlijn vrijwel volledig.[2] Voor het tellen en structureren van getallen tot 100 en het opereren ermee, gebruikte men voornamelijk het telraam en niet de kralenketting of de getallenlijn. Pas in de jaren vijftig wordt de aandacht op dit didactische model gevestigd. Als eerste gebeurt dat in de ‘Rekendidactiek’ van Turkstra en Timmer (1953). Zij wijzen op het fundamentele belang van het kunnen plaatsen van getallen op een lat, zoals zij de getallenlijn aanduiden:

> ‘Wij menen, dat een der allervoornaamste oorzaken van de klacht: “Die kinderen kunnen niet rekenen” te zoeken is in het gebrekkig aanwezig zijn, of zelfs ontbreken van het allereerste fundament, de plaatsing.’ (pag.189)

Op een lat van willekeurige lengte staan de getallen 1 tot en met 10 (fig.1). Zowel de eerste lijn als de eerste twee lijnen moeten bedekt kunnen worden. In het eindstadium verdwijnen de bovenste drie lijnen uit het zicht.



figuur 1: positioneeroefening[3]

De volgende spelletjes worden gespeeld:
– De leraar noemt een getal. Het kind geeft met een aanwijsstok de plaats aan. Meteen wordt gecontroleerd of de juiste plaats is aangegeven. Meer dan een halve afstand is fout.
– De leraar wijst de plaats van een getal zo scherp mogelijk aan. Het kind noemt het getal.
– Omgekeerd wijst het kind een getal aan en zegt de leraar het getal.
– De leraar wijst een willekeurige plaats aan. Het kind zegt het dichtstbijzijnde getal. Toegestaan is bijvoorbeeld om te zeggen: ‘ruim 4’, of ‘bijna 8’, of ‘midden tussen 5 en 6’.

Voorbeelden van opgaven	**Als antwoord op te schrijven**
Plaats 63 tussen tientallen	60< 63 < 70
Rond 63 af op tientallen	≈
Rond 78 af op tientallen	78 80
Plaats 235 eerst tussen tientallen en dan tussen honderdtallen	230 < 235 < 240 200 < 235 < 300 ≈ ≈
Rond 235 eerst af op tientallen, daarna op honderdtallen	235 240 200
Rangschik 27, 63, 45 en 15	15 < 27 < 45 < 63
Wat kun je invullen in 6 < .. < 10	7, 8 of 9.
Het teken < en het teken ≈ (is ongeveer gelijk aan) zijn daarbij onmisbaar.	
Het teken > hebben we nooit nodig.[4]	

figuur 2

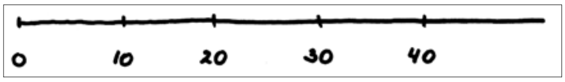
Vervolgens wordt het groter-dan-teken (>) geïntroduceerd. Daarna wordt mondeling geoefend met een opdracht als het noemen van alle getallen op de lat die groter zijn dan 4. In het volgende leerjaar (groep 4) dient een in honderd delen verdeelde lat de getalplaatsing van 1 tot 100 aan te geven (fig.2).

Turkstra en Timmer gebruiken de getallenlijn echter uitsluitend voor het lokaliseren en ordenen van getallen en dus niet voor het opereren ermee. Dat laatste gebeurt wel in Van Gelders ‘Grondslagen van de rekendidactiek’ (1959) bij het maken van sprongen als voorbereiding op het leren van de tafels van vermenigvuldiging, maar vooral ook bij het opereren met breuken, kommagetallen en procenten, dat hier buiten beschouwing blijft. Wat betreft het optellen en aftrekken tot 100 krijgt de getallenlijn ook bij Van Gelder geen didactische functie toebedeeld.

Goffree, Hiddink en Dijkshoorn sommen in hun ‘Rekenen en Didactiek’ (1966) de verschillende functies op die de getallenlijn kan vervullen: bij het tellen van eenheden, tientallen en eenvoudige veelvouden; het aanwijzen van getallen c.q. hoeveelheden; het ordenen van getallen; het bepalen van verschillen tussen getallen; en het tellend uitrekenen van optellingen en aftrekkingen. Zij wijzen echter ook op het gevaar van het blijven werken op telniveau via de aanschouwelijke voorstelling van de geordende getallen, terwijl de kinderen juist structurerend moeten leren rekenen in het getallengebied tot 100. Over het structureren merken ze op:

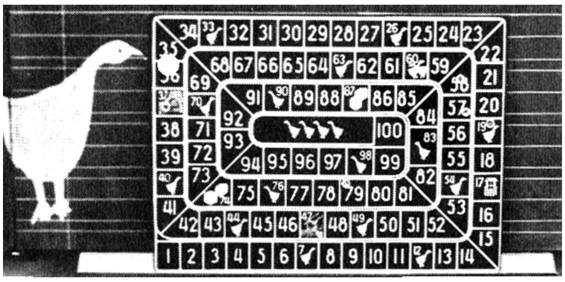
> ‘Dit komt niet vanzelf tot stand. Er is veel gericht oefenen voor nodig. Dit niveau kan alleen bereikt worden wanneer hiermee rekening is gehouden bij het automatiseren van de getallenrelaties tot 20. Bij de mondelinge bespreking moet men steeds vragen: “Wie heeft het nog anders gedaan?” Bij de antwoorden kan steeds het hoger liggende niveau als streefniveau worden beklemtoond. “Jan heeft het zo gedaan, Piet zo; jullie hebben gezien, dat dit vlugger gaat. Probeer nu dit sommetje eens te maken op de manier van Piet.” Zo brengt men de kinderen dus bewust op een hoger niveau.’ (pag.48)

Alle genoemde auteurs hanteren een zogenoemde streepjesgetallenlijn.



figuur 3: voorbeeld van een veel voorkomende streepjesgetallenlijn

Boomsma daarentegen geeft in haar ‘Rekenen’ (1969) de voorkeur aan een hokjesgetallenlijn, zoals die bijvoorbeeld op een ganzenbord verschijnt. Ze doet de aanbeveling om in groep 4 één keer per week gedurende twintig minuten op de volgende wijze met ganzenbord te laten spelen.



figuur 4: ganzenbord als voorbeeld van een hokjesgetallenlijn

‘Het spel wordt eerst met één dobbelsteen, later met twee dobbelstenen gespeeld.
De klas wordt in drie à vier partijen verdeeld. Iedere partij heeft een gans. Komt een partij op een getekende gans van het spel dan mag hij óf zoveel hokjes verder als hij gegooid heeft, óf hij moet terug, al naar gelang de stand van de gans. Aan de hand van voorbeelden uit de praktijk moge duidelijk worden welke mogelijkheden dit spel biedt tot het leren kennen van de getallenrij en getallenrelaties en tot het veel, ongezocht, herhalen.’

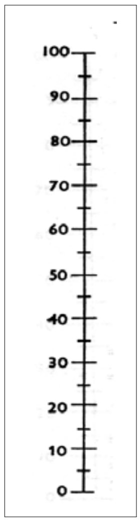
Voorbeeld
Partij I staat op 9.
Partij II staat op 1.
No. 19 is een gans.
Partij I merkt op: ‘Als ik 10 gooi, kom ik op de gans van vak 19. Dan mag ik door naar 29.’ Partij II reageert hierop: ‘Maar als wij 9 gooien, komen wij ook op 19 en dan op ... 28. Hé, hoe kan dat .... 28 in plaats van 29?’

Dergelijke spontane opmerkingen worden gecontroleerd. Hebben de partijen gelijk? Hoe weet partij II zo ineens dat hij maar 9 moet gooien? Hoe komt het dat partij II niet zover komt als partij I? Deze opmerkingen zijn zeer belangrijk! Hier dient aandacht aan besteed te worden.

Nog een voorbeeld
Een leerling staat op 6. Als hij 6 gooit, komt hij op 12 (gans) en mag dan nog 6 verder.
Hij gooit echter 7 en zegt spontaan: ‘Mis, ik kom op 13 (zonder tellen).’
O.: ‘Hoe weet je dat zo ineens?’
Koen: ‘6 + 6 = 12. 7 is één meer dan 6, dus kom ik één verder, dat is op 13.’
O. gaat hier verder op in: ‘En als ik 7 + 7 heb?’
Koen: ‘Dat is 14.’
O.: ‘En nu 7 + 8?’
Koen: ‘Dat is 15.’
O.: ‘Klopt dat? Kunnen jullie nog meer van die sommen bedenken?’ (pag.29)

Boomsma gebruikt de hokjesgetallenlijn zowel bij het ordenen als het opereren met getallen tot 100.

In de rekendidactiekboeken valt in de periode 1950-1970 dus een toenemende aandacht voor het didactische gebruik van een getallenlijn waar te nemen.[5] De vraag is nu hoe het met de belangstelling daarvoor in de meest gangbare rekenmethoden uit deze tijd staat. Het antwoord daarop kan kort zijn: ook in dit tijdvak schittert de getallenlijn voornamelijk door afwezigheid. Alleen in ‘Naar aanleg en tempo’ wordt een met tientallen gevulde streepjesgetallenlijn - die verticaal in de kantlijn staat - systematisch als visueel model benut bij het ordenen en opereren in het getallengebied tot 100 (fig.5).[6]



figuur 5: verticale streepjesgetallenlijn als visueel model bij het ordenen en opereren

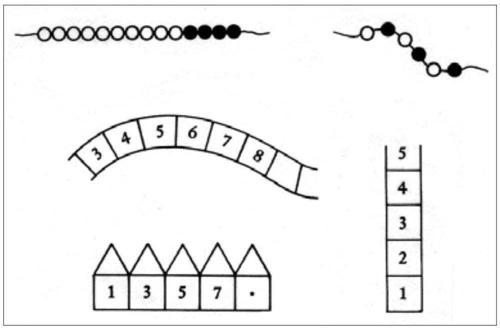
In bekende methoden als ‘Uitkomst’, ‘Functioneel Rekenen’, ‘De Grondslag’ en ‘Naar Zelfstandig Rekenen’ komt de getallenlijn of niet voor of slechts om ontbrekende getallen in de telrij aan te vullen.[7] Maar van een doelgericht modelgebruik bij het lokaliseren en opereren in het getallengebied tot 100 is bij deze methoden geen sprake.

Al met al kan worden vastgesteld dat in het rekenonderwijs tot 1970 bij het rekenen tot 100 weinig of geen gebruik is gemaakt van de getallenlijn, maar dat in enkele didactiekboeken de opmaat is gegeven tot een didactische analyse van dit model. Met name de denkbeelden van Goffree c.s. en Boomsma zijn in dit verband interessant en krijgen na 1970 enige invloed op het rekenonderwijs.

Wiskobasperiode 1970-1980

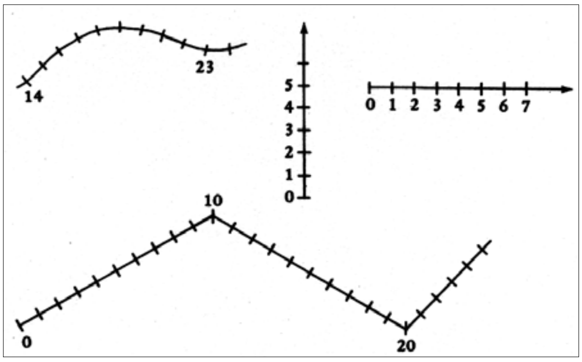
Van den Brink, de hoofdontwerper van Wiskobas voor de onderbouw van de basisschool, was afkomstig uit het rekenproject van Boomsma.[8] Daarmee lag het in de rede dat de getallenlijn ook in het Wiskobasprogramma een plaats zou krijgen. Dit te meer daar Goffree, een van de initiators van het Wiskobasproject, en ook Freudenthal voorstanders van het gebruik van de getallenlijn waren.[9] De vraag was alleen hoe dit lijnmodel didactisch zou worden ingepast, als streepjes- of als hokjesgetallenlijn, en hoe daarin de verbinding met respectievelijk tellen, meten en rekenen zou worden gelegd.

Wiskobas bleek voor een veelsporige benadering te kiezen, waarin beide soorten getallenlijnen en alle relaties werden benut, met aanvankelijk vooral nadruk op de hokjesgetallenlijn en het tellen, en later meer accent op het meten en rekenen op de streepjesgetallenlijn.



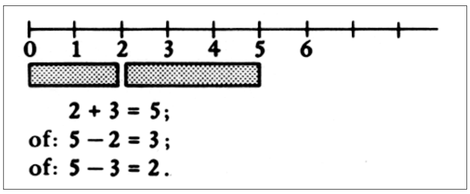
figuur 6: verschillende soorten hokjesgetallenlijnen[10]

De hokjesgetallenlijn manifesteert zich bij Wiskobas in vele gedaanten, namelijk als klassikale getallenwaslijnen, kralensnoeren, gezelschapsspelen zoals ganzenbord, rijen huisnummers in de straat, paginanummers in een boek en hokjesladders (fig.6). De streepjesgetallenlijn komt ook in verschillende vormen voor: rechtlijnig, rechtlijnig gebroken, kromlijnig en verticaal (fig.7).[11]



figuur 7: verschillende soorten streepjesgetallenlijnen[12]

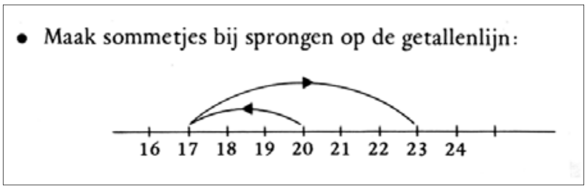
Een streepjesgetallenlijn kan de basis vormen voor tellen, meten en rekenen (fig.8).



figuur 8: het tel, meet- en rekenaspect op een streepjesgetallenlijn[13]

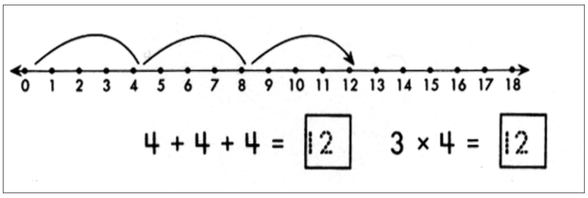
Sommen kunnen op dergelijke getallenlijnen worden gevisualiseerd door middel van sprongen en uit sprongen worden afgeleid (fig.9).

Optellen wordt zo verbonden met een sprong naar rechts en aftrekken met een beweging naar links.



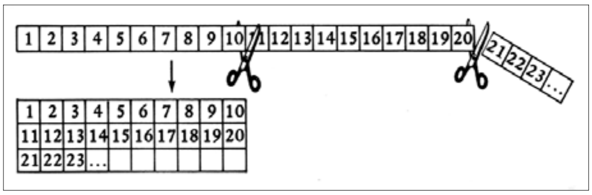
figuur 9: vanuit streepjes op de getallenlijn kunnen sommetjes bij sprongen op de getallenlijn worden gemaakt[14]

Verder ligt de toepassing van de getallenlijn vooral bij vermenigvuldigen als herhaald optellen en delen als herhaald aftrekken (fig.10).



figuur 10: vermenigvuldigen als herhaald optellen gevisualiseerd op de getallenlijn via de ‘sprongmethode’[15]

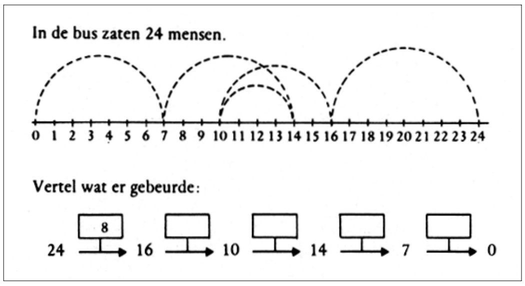
In de sprongmethode worden tellen, meten en rekenen op een natuurlijke wijze met elkaar verbonden. Tegenover dit didactische voordeel staat het nadeel dat het rekenen op de (gedeeltelijk) gevulde getallenlijn sterk aan het rigide tellen gekoppeld blijft.
Het is om deze reden dat Wiskobas de hokjesgetallenlijn al snel verknipt en transformeert in een (gedeeltelijk) gevuld honderdveld (fig.11).



figuur 11: het honderdveld als verknipte hokjesgetallenlijn[16]

Vanuit het werken met het honderdveld loopt een leerlijn die via wisselspelletjes en wisselmateriaal, bijvoorbeeld geld, naar de structuur van het tientallig positioneel systeem en het cijferen leidt.[17]

Samenvattend wordt de Wiskobasbenadering van de (gedeeltelijk) gevulde getallenlijn gekenmerkt door de sprongmethode en de daaraan gekoppelde notatiewijze van opgaven met behulp van pijlentaal (fig.12).
Naast de lijnaanpak is er bij Wiskobas ook veel aandacht voor het honderdveld en de decimale splitsmethode met behulp van geld en de abacus.



figuur 12 : sprongen op een getallenlijn gekoppeld aan de notatie in pijlentaal[18]

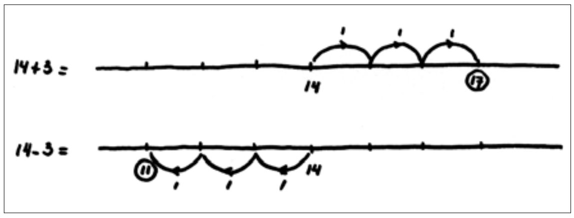
Periode 1980-1990

De methode 'Taltaal', die aan het eind van de jaren zeventig op de onderwijsmarkt verscheen, volgde Wiskobas' veelsporige benadering van de getallenlijn met betrekking tot het positioneren en opereren. In figuur 13 is een voorbeeld gegeven van het oplossen van 8 + 5 op twee verschillende manieren. De opdracht daarbij luidt: 'Schrijf op welke je het gemakkelijkst vindt'.

figuur 13: twee verschillende manieren om 8+5 op te lossen op de getallenstrook[19]

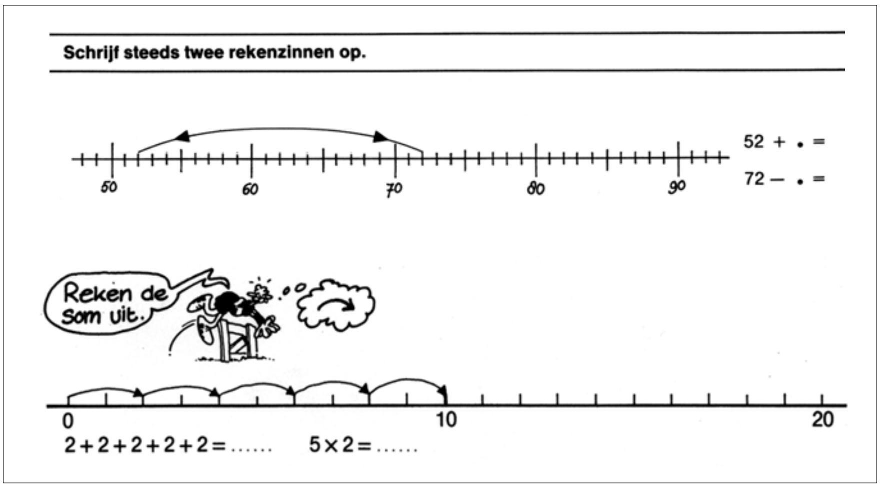
De methoden die kort daarna verschenen, 'Operatoir Rekenen' (1981), 'De wereld in getallen' (1983) en 'Rekenwerk' (1988) hanteerden uitsluitend de streepjesgetallenlijn bij het opereren.[20] Daarbij kiest men in navolging van Wiskobas voor de sprongmethode. De sprongen op een getallenlijn kunnen tevens worden gebruikt om de relatie met sommen te benadrukken (fig.14).

Maar ook in deze methoden wijkt men al snel uit naar het honderdveld en de abacus ten einde meer verkorte rekenstrategieën te introduceren.
In 'Rekenen en Wiskunde' (1983) krijgt de getallenlijn een uiterst bescheiden plaats toegewezen bij het rekenen tot 100, terwijl het honderdveld daarentegen een voorname functie verwerft.[22] Praktijkervaringen met dit laatste model riepen echter ook al snel de nodige didactische reserves op.[23]
Alles overziend, kan men niet anders concluderen dan dat de gevulde getallenlijn in de post-Wiskobasperiode een bescheiden rol blijft vervullen bij het ordenen, positioneren en opereren in het getallengebied tot honderd. Met name het zwaarwegende bezwaar van het tellende rekenen was daar debet aan. Maar ook het feit dat de verschillende soorten getallenlijnen verwarring zaaiden droeg daartoe bij: wat tel je eigenlijk, hokjes, sprongen, streepjes, en wat is dan het antwoord?
Wiskobas had op deze vragen wel een duidelijk en afdoend antwoord: je telt de sprongen voor- of achteruit vanaf een bepaald punt en wijst aan waar je dan belandt. Voor bijvoorbeeld '14 + 3' en '14 – 3' ziet dat er als volgt uit. De omcirkelde getallen geven het goede antwoord (fig.15).



figuur 15: sprongen op een getallenlijn leiden trefzeker naar het goede antwoord

Echter dit betekende nog niet dat dit antwoord in de praktijk van het onderwijs ook altijd overkwam.
Omstreeks 1990 werden dus bij zowel de (gedeeltelijk) gevulde getallenlijn als het honderdveld kritische kanttekeningen geplaatst ten aanzien van het gebruik ervan voor het rekenen tot 100. En juist toen diende zich een nieuwe didactische vormgeving van de getallenlijn aan.



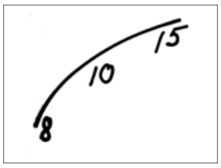
figuur 14: sprongen op een streepjeslijn en bijbehorende sommen[21]

3 Lege getallenlijn

In deze paragraaf worden achtereenvolgens ideeën van Weill, Whitney en Treffers toegelicht, die allen hebben bijgedragen aan de introductie van de lege getallenlijn in het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs. In Nederlandse rekendidactiekboeken, methoden en tijdschriften zijn tot 1990 geen andere aanwijzingen voor het rekenen op een lege getallenlijn gevonden dan in het volgende wordt vermeld. Dit geldt overigens ook voor buitenlandse publicaties.[24]

Weill

In 1978 schrijft Weill over de zogenaamde heuvelmethode als een manier om trefzeker een aftrekking te kunnen maken. De voorbeeldopgave die in het artikel volgens de nieuwe methode wordt opgelost, is ‘15 – 8’. Op het bord tekent zij een gebogen lijnstuk en vraagt de kinderen om de betreffende getallen op de ‘heuvel’ te plaatsen. Het laagste getal (8) moet aan de voet van de heuvel worden geschreven en het hoogste getal (15) bij de top. Het is regel om het getal 10 daar tussenin te plaatsen. Zoals in figuur 16 is te zien worden de genoemde getallen onder de lijn geschreven.

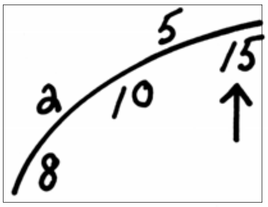


figuur 16: het plaatsen van de getallen 8, 15 en 10 onder de heuvellijn[25]

Nu is het allereerst zaak om uit te zoeken hoeveel stapjes het is van 8 naar 10. Het aantal wordt genoteerd boven de heuvellijn tussen ‘8’ en ‘10’. Vervolgens leren de leerlingen een eenvoudig kunstje om het aantal stapjes tussen 10 en 15 te bepalen:

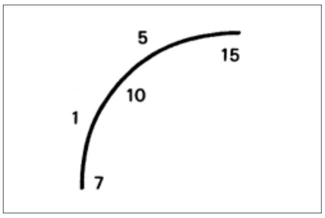
> ‘The difference between the 10 and the highest number is always the right-hand digit in the number at the top of the hill, or the number of ones in that number.’

Het plaatje wordt dan voltooid door het verschil van 5 boven de heuvellijn tussen 10 en 15 te schrijven. Ten slotte laat Weill de kinderen zien dat het verschil tussen de oorspronkelijke getallen de som is van de stap van 2 en de stap van 5: ‘2 steps and 5 steps makes 7 steps’ (fig.17).
Op den duur moeten ze de aanpak uit het hoofd kunnen uitvoeren, dus zonder tekening. Om dit te bereiken kunnen een aantal voorstellings- en verwoordingsoefeningen worden gedaan, die als tussenstadia van het volledig mentale berekenen fungeren. Het voordeel van de heuvelmethode ten opzichte van het rekenen op een gevulde getallenlijn is evident. De lege heuvellijn nodigt nu niet meer uit tot een voor een tellend te rekenen. Een nadeel van de aanpak van Weill is echter wel dat de geschetste oplossingsmethode nogal voorschrijvend is en alleen bruikbaar wordt geacht voor aftrekkingen, en dan ook nog beperkt tot het getallendomein tot 20.



figuur 17: completering van het plaatje bij de heuvelsom ‘15 – 8’[26]

Maar er zijn nog meer kritische kanttekeningen te plaatsen. Neem de opgave 16 – 2. Volgens de geschetste verschilaanpak wordt de uitkomst hiervan gevonden door eerst de afstand tussen 2 en 10 te overbruggen (8), dan die tussen 10 en 16 (6), en vervolgens de deeluitkomsten daarvan op te tellen (8 + 6 = ?), waarbij de 10 gepasseerd wordt - een wel erg omslachtige manier, vergeleken met ‘16 eraf 2’. Daar komt nog bij dat aftrekken, opgevat als ‘verschil’, niet de inverse is van optellen als ‘erbij’, zodat de relatie tussen optellen en aftrekken ondoorzichtig is, wat bij aftrekken als ‘eraf’ wel duidelijk wordt.
Zouden we de heuvelmethode in deze zin voor het aftrekken willen aanpassen, dan plaatsen we het aftrekgetal bovenaan de heuvellijn, waarna vandaar vervolgens een afstand van 8 naar beneden wordt afgepast, waarbij we het ankerpunt van 10 passeren en uiteindelijk bij 7 uitkomen. Omgekeerd kan nu de som 7 + 8 op een vergelijkbare manier heuvelopwaarts worden uitgerekend.[27]



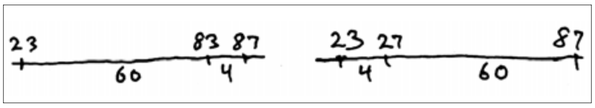
figuur 18: de heuvelsom ‘15 – 7’ opgelost in het achttallig stelsel[28]

Goffree demonstreert de geschetste heuvelmethode bij het rekenen in ‘Het land van Okt’. Hij laat daarbij zien hoe een opgave als ‘15 – 7’ eenvoudig in het achttallig stelsel kan worden uitgerekend (fig.18).
In tegenstelling tot Weill schrijft hij hierbij geen strakke rekenmethodiek voor. Het rekenen op lijn is geen doel op zich, maar louter bedoeld om steun te bieden bij het rekenen in een getallenstelsel waar de structuren in de telrij nog ondoorzichtig zijn.
De heuvelmethode krijgt bij Goffree overigens geen algemene didactische functie toebedeeld en fungeert

slechts als een eenmalige illustratie van een aardige didactische vondst om aankomende leraren te laten ervaren welke moeilijkheden zwakke rekenaars ondervinden bij het uitrekenen van elementaire aftrekkingen.[29]

Whitney

Ook Whitney (1988) laat mogelijkheden zien voor het rekenen op lege getallenlijnen. Hij beperkt zich echter niet tot het getallengebied tot 20 en richt zich net als Weill op aftrekkingen die worden opgelost door het verschil te overbruggen. Zo kan een eraf-som als 87 – 23 worden opgelost door van 23 via 83 naar 87 te gaan. Tevens geeft hij aan dat de omgekeerde weg ook kan worden bewandeld. Het ligt dan voor de hand de afstand van 87 naar 23 via 27 te overbruggen. In figuur 19 heeft hij op lege getallenlijnen de getallen en steungetallen met een streepje aangegeven.



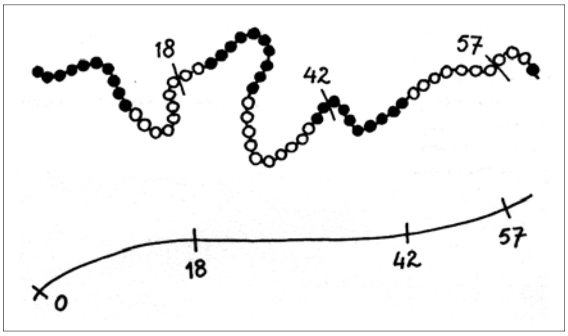
figuur 19: ‘87-23’ oplossen door het overbruggen van het verschil op twee verschillende manieren[30]

In tegenstelling echter tot Weill vindt hij dat dergelijk rekenen-op-lijn niet voorschrijvend mag worden onderwezen. Hij noemt het slechts een visualisering (‘Darstellung’) van wat kinderen zich mentaal voorstellen (‘Vorstellung’). Hij geeft daarbij aan dat oefeningen met een kralenketting vooraf dienen te gaan aan het werken op een getallenlijn. Door aantallen op kralenkettingen te construeren zouden kinderen relaties tussen getallen ontdekken. De kralen op de ketting dienen hiertoe in overeenstemming met ons decimale stelsel tientallig gestructureerd te zijn, bijvoorbeeld afwisselend rood en wit.

Bij het aangeven van aantallen op een kralenketting worden tandenstokers gehanteerd. Hij schrijft voor dat een aantal als acht kralen wordt aangegeven door een tandenstoker na de achtste kraal te plaatsen. In figuur 20 worden op die manier eerst 8 kralen getoond, dan 4 meer en ten slotte wordt bepaald hoeveel er nu zijn verkregen. Hij voegt hieraan toe dat dit plaatje natuurlijk ook het resultaat kan zijn van het opzetten van 12 kralen en dan 4 minder. Ook dan luidt de vraag te bepalen hoeveel kralen er nog over zijn. (Merk op dat Whitney hier wel met ‘minder’ en ‘eraf’ werkt!)
Whitney introduceert dus het idee om met een tandenstoker een aantal kralen aan te geven. Als vervolg daarop zullen kinderen het streepje voor bijvoorbeeld 87 op een lege getallenlijn beschouwen als ‘er zitten 87 kralen voor en het streepje bij 0 als er 0 kralen voor zitten’. Het voordeel van een dergelijke voorstelling is dat nu eenduidigheid bestaat vanaf welk getal heen- of teruggegaan dient te worden. Bij Weill kon dat nog verwarring opleveren: betekent 8 onder de heuvel dat dit getal zelf niet meedoet of is het juist het eerste getal dat geteld moet worden? Bij Whitney bestaat hierover geen misverstand: je start vanaf 8, en die 8 doet zelf niet mee bij het verder tellen of terugtellen. Ook geeft Whitney, zoals gezegd, de kinderen veel meer ruimte om hun eigen overbruggingsstrategieën bij het verschil bepalen te construeren.

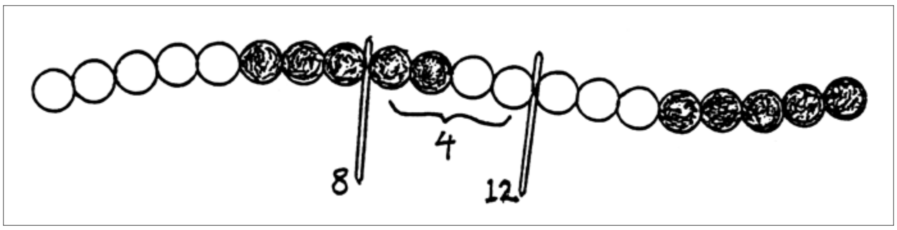
Treffers

Treffers (1989) neemt de concrete onderbouwing van de streepjesgetallen in de vorm van een kralenketting met 10-structuur van Whitney over, waarbij het klemmetje het streepje representeert.[32] Het getal bij het streepje geeft zodoende het aantal kralen weer dat voor het klemmetje zit.



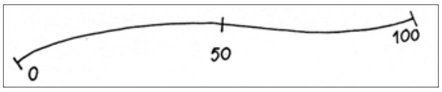
figuur 21: relatie tussen klemmetjes op een kralenketting en streepjes op een getallenlijn[33]

Bij Wiskobas was de streepjesgetallenlijn uitsluitend verbonden met meten, via het tellen van sprongen dan wel het opmeten van lengten met een meetlat of met stroken. Door de uitbreiding die Whitney aan de betekenis van de streepjes geeft, wordt nu de getallenlijn veelzijdig verankerd in zowel het tellen, het bepalen van



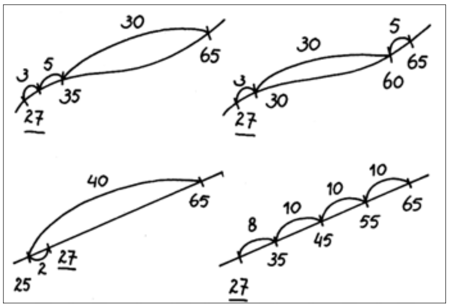
figuur 20: met behulp van tandenstokers hoeveelheden op een kralenketting aangeven[31]

aantallen als het meten van sprongen en lengtematen (fig.21). Alvorens nu op een *lege* getallenlijn te kunnen rekenen, dienen volgens Treffers aan enkele hoofdvoorwaarden te worden voldaan. Allereerst moeten kinderen uiteraard kunnen tellen, met enen en tienen. Voorts moeten ze getallen zowel op een kralenketting als op een getallenlijn kunnen lokaliseren. Kinderen doen dit op een lege getallenlijn, waarop vooraf al enige referentiepunten zijn aangegeven (fig.22).



figuur 22: lokaliseren van getallen: waar liggen ongeveer 47, 98, 5, 25 en 75?[34]

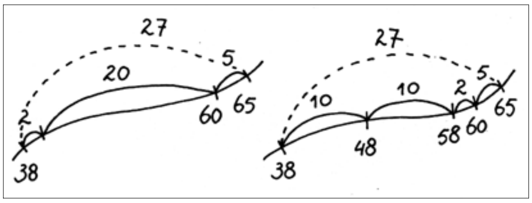
Tevens is essentieel dat ze een sprong van 10 vooruit en ook achteruit vanaf een willekeurig getal kunnen nemen.
Hoe kan het rekenen op een lege getallenlijn er vervolgens uitzien? De werkwijze die volgens Treffers het meest voor de hand ligt, is de sprongmethode die Wiskobas reeds op de (gedeeltelijk) gevulde getallenlijn toepaste.[35] Voor optellen en aftrekken worden daarbij overeenkomstige werkwijzen gevolgd. Optellen wordt opgevat als ‘erbij’ en aftrekken als ‘eraf’. Begonnen wordt met het startgetal en afhankelijk van de gekozen oplossingswijze wordt heen- of teruggesprongen op de lege getallenlijn. Voor de som ‘65 – 38’ wordt eerst 65 op de lege getallenlijn aangestreept vanaf dat punt wordt vervolgens 38 (verkort) met sprongen teruggeteld. Dit terugspringen kan op verschillende manieren (fig.23).



figuur 23: verschillende oplossingsmanieren bij de rijgmethode[36]

Als steunpunten kunnen daarbij 60, 55, 45, 35 en 25 fungeren. Wanneer gekozen wordt voor een sprong van 40 in één keer, wordt iets te ver gesprongen en moet men vervolgens een klein sprongetje in teruggaande richting maken. Treffers wijst erop dat de drie sprongen van 10 vanaf 65 of 60 aanvankelijk op de vingers kunnen worden bijgehouden onder het uitspreken van ‘vijfenvijftig’ (één vinger), ‘vijfenveertig’ (twee vingers), ‘vijfendertig’ (drie vingers). Hierbij kan gesteund worden op de klanksystematiek van het akoestisch tellen. Een sprong van 30 vanaf een willekeurig getal kan op een gegeven moment in één keer worden gemaakt.

Hij stelt dat de aftrekking 65 – 38 natuurlijk ook kan worden opgevat als het verschil tussen 65 en 38. Afhankelijk van de toepassingssituaties zullen kinderen soms op het idee komen het vraagstuk op te lossen via aanvullend optellen. Een vraag die hiertoe aanleiding kan geven, luidt bijvoorbeeld: ‘Ik heb 38 km afgelegd. De totale afstand bedraagt 65 km. Hoeveel moet ik nog rijden?’ Ook hier zijn op een lege getallenlijn weer verschillende wijzen van oplossen te onderscheiden (zie fig.24).
Treffers voegt dus aan het werken op een lege getallenlijn de sprongbenaderingswijze van Wiskobas toe. Je kunt zodoende gemakkelijk tussentijds bijhouden hoeveel je al hebt gesprongen en hoeveel je nog moet. Daarbij komt dat de uitkomst niet, net als bij Whitney, volgens een vaste procedure hoeft te worden achterhaald. De wijze van oplossen kun je hierdoor laten afhangen van de vraagstelling (zoals bij ‘65 – 38’) en de mate waarin je meer of minder verkorte sprongen kunt of durft te nemen. De vrijheid in keuze van de grootte van sprongen sluit aan bij individuele rekenstrategieën en geeft ruimte voor differentiatie. De interpretatie van aftrekken als ‘eraf’ (de inverse van ‘erbij’) onderscheidt zich van de verschilopvatting van Whitney en Weill. Ten slotte wordt bij Treffers de dynamische sprongmethode op aftrekken én optellen toegepast, en mede gerelateerd aan de dynamische notatiewijze van de pijlentaal - ook dit ligt in de lijn van de Wiskobasopvatting van Van den Brink c.s. (fig.24).[37]



figuur 24: verschillende oplossingsmanieren bij de rijgmethode indien ‘68 – 35’ is opgevat als het overbruggen van de afstand tussen 38 en 65[38]

Periode 1990-2000

De geschetste opvattingen over het opereren op de lege getallenlijn zijn van invloed geweest op de leerboeken die in de jaren negentig zijn herzien of ontwikkeld. Dit is allereerst het geval bij ‘De wereld in getallen’ (tweede versie), ‘Pluspunt’ (eerste versie) en ‘Operatoir Rekenen’ (derde versie). In de loop van de jaren negentig volgen ‘Wis en Reken’, ‘Talrijk’ en ‘Rekenrijk’.[39]
In al deze methoden krijgt de lege getallenlijn een functie bij het rekenen tot 100. Meestal wordt ze voorafgegaan door een gevulde getallenlijn in het eerste deel van groep 4, die op haar beurt een visualisering is van de telrij, kralenketting of meetlijn. Alle genoemde leerboeken volgen bij het optellen en aftrekken de (discutabele) methodische regel van de toenemende complicering: het eerste halfjaar worden in groep 4 opgaven aangeboden

waarbij de op te tellen of af te trekken eenheden binnen een tiental blijven (35 + 24 = ..; 59 – 35 = ..) en pas tegen het eind van groep 4 komen de complexere opgaven met tientaloverschrijding aan bod. Men start dus met relatief eenvoudige opgaven. Maar daaraan voorafgaand wordt de telrij uitgebreid verkend via (soms) een gedeeltelijk gevulde en in te vullen hokjesgetallenlijn of (meestal) een streepjesgetallenlijn, die aanvankelijk ook bij het opereren dienst doet. Met name geldt dit laatste voor het leren van de tafels, uitgebeeld via herhaald springen op de gevulde getallenlijn en later op de lege getallenlijn.
Met uitzondering van 'Operatoir Rekenen' en 'Rekenrijk' gebruiken alle methoden voornamelijk de conventionele '=-taal' om de opgaven te noteren en dus niet de dynamische pijlentaal die aansluit op de sprongbenadering van het opereren op de (lege) getallenlijn.
'Rekenrijk' is de enige methode waarin de rijgmethode vooropstaat. De andere methoden stellen of de decimale splitsmethode voorop, zoals 'Pluspunt' (eerste versie), ofwel introduceren de rijg- en splitsmethode vrijwel tegelijkertijd, zoals 'De wereld in getallen', 'Wis en Reken', en 'Talrijk' doen.[40] Het decimale structuurmateriaal dat daarbij als model fungeert, varieert per methode en tussen methoden: tienstaven en lossen, tiendozen en lossen, geld, zegelvellen, goudborden en gebundelde objecten - dit alles verschijnt in de tweede generatie reken-wiskundemethoden van de jaren negentig. Ook het rijgmateriaal dat als grondslag voor de (gevulde en lege) getallenlijn dient, varieert per methode en tussen methoden: ganzenborden, kralenkettingen, stroken en afgepaste afstanden, of visualiseringen van de telrij, doen als zodanig dienst. Dit alles heeft mede tot gevolg dat de rekenlijn in enkele van de genoemde methoden niet altijd duidelijk zichtbaar is en daarmee ook niet de didactische functie die de lege getallenlijn vervult bij het ordenen, lokaliseren en opereren in het getallengebied tot 100.
De invloed van het onderzoek met betrekking tot de getallenlijn is in de jaren negentig overigens niet tot Nederland beperkt gebleven; in Duitsland is via publicaties van Wittmann, Müller en Selter, en in Engeland van Beishuizen, Atkinson, Ebbutt en Askew de didactische schijnwerper op de lege getallenlijn gericht.[41]

4 Slot

Waarom heeft de lege getallenlijn zo snel zo'n hoge vlucht genomen?
Kort gezegd komt het erop neer dat de rijgmethode weliswaar aansluit op het elementaire tellen, maar door deze methode geleidelijk te koppelen aan de lege getallenlijn kan ze worden losgemaakt van het rigide tellen; de leerlingen wordt gelegenheid geboden om het rekenen-op-lijn productief te structureren naar de mate waarin ze de basale vaardigheden van het rekenen tot 10 (20) gaan beheersen en de basale inzichten in de structuur van de telrij (10-sprong) verwerven. Tevens wordt via het gevorderde rijgen de weg naar de decimale splitsmethode en het gevarieerde hoofdrekenen geplaveid. Met name onderzoek van Veltman, Beishuizen, Klein en Treffers duidt erop dat de rijgmethode gekoppeld aan de lege getallenlijn veelbelovende resultaten kan opleveren. Maar over hoe precies de optimale afstemming tussen rijgen, splitsen en variarekenen zou moeten zijn, geven de genoemde onderzoeken geen uitsluitsel. De leerboeken weerspiegelen deze onzekerheid, zoals we eerder zagen.
In het didactische ontwikkelingsonderzoek 'Met Sprongen Vooruit' (Menne, 2001) wordt in dit opzicht wellicht wat meer houvast gegeven. Hierin wordt verantwoord dat tellen, lokaliseren en opereren-op-lijn de vruchtbare grond voor het rekenen tot 100 vormen, waarop het meer geavanceerde splitsende en gevarieerde rekenen kunnen opbloeien.

Noten

1 Dit artikel is een bewerking van appendix A van de dissertatie van Menne. Het proefschrift 'Met Sprongen Vooruit' is na 22 oktober 2001 verkrijgbaar.
2 In 1882 verscheen de eerste volledige rekenmethode voor de lagere school in Nederland. Deze methode is geschreven door Versluys en bestond uit een hele reeks handleidingen voor de leraar en rekenboekjes voor de leerlingen. Hierna volgden vele nieuwe leergangen. De meest bekende zijn de handleidingen en methoden van Zernike (1915), Bok & Lem (1910), Van Pelt (1912), Bouman & Van Zelm (1924), Grazer (1933), Diels & Nauta (1939) en Kellinga (zj.). In geen enkele van deze methoden is de getallenlijn voor het rekenen tot 100 gevonden.
3 Uit: Turkstra & Timmer (1953, pag.185).
4 Turkstra & Timmer (1953, pag.186).
5 Met uitzondering van de 'Rekendidaktiek' van Woestenenk (1965). Hij werkt zeer veel met de getalbeelden van Karaschewski.
6 Uit: 'Naar Aanleg en Tempo', rekenen 3, pag.28. (Lugtmeijer & Boers (1950-1960)). De afgebeelde getallenlijn staat in dit leerboekje bij een op de vier taken vermeld, steeds in de kantlijn.
7 Bij deze methoden horen respectievelijk de volgende auteurs:
'Uitkomst' (1967): Evers.
'Functioneel Rekenen' (1958): Reijnders &Snijders.
'De Grondslag' (1955): Haack & Liefering.
'Naar Zelfstandig Rekenen' (1955): Zandvoort, Venekamp & Kuipers.
8 Wiskobas staat voor *Wisk*unde *o*p de *Bas*isschool en maakte deel uit van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO). Wiskobas was een onderzoeksproject ten behoeve van de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. De reeks verschenen Wiskobas-bulletins is hiervan het resultaat. Deze bulletins zijn bepalend geweest voor het reken-wiskundeonderwijs in Nederland voor de jaren zeventig en daarna.
Het rekenproject van Boomsma heeft betrekking op de werkzaamheden onder leiding van Boomsma aan het Nutsseminarium voor Pedagogiek te Amsterdam.
9 Freudenthal zegt in 'Mathematics as an Educational Task': 'The number sequence is the foundation-stone of

mathematics, historically, genetically, and systematically. Without the number sequence there is no mathematics. If some modern mathematical texts suggest another view, the reason is that their authors misinterpreted mathematics' (1973, pag.171).

10 Uit: De Moor (1980, pag.90).

11 Een verticale getallenlijn kan didactisch uitkomst bieden om de relatie tussen 'omhoog gaan', 'groter worden' en 'optellen' te verduidelijken. Ditzelfde geldt voor het verduidelijken van het verband tussen 'omlaag gaan', 'kleiner worden', 'aftrekken'.

12 Uit: De Moor (1980, pag.91).

13 Uit: De Moor (1980, pag.97).

14 Uit: De Moor (1980, pag.96).

15 Uit: 'Wiskobas Bulletin' (Van den Brink & Streefland, 1973, pag.675).

16 Uit: De Moor (1980, pag.90).

17 Zie ook Gilissen & Klep (1980).

18 Uit: Wiskobas Bulletin Leerplanpublikate 2 (De Jong e.a., 1975, p.73).

19 Uit: 'Taltaal', werkboekje 4 (voor groep 4) (Postema, Kuipers & Haverkort, 1978, pag.26).

20 In de betreffende methoden staat geen jaartal van gereedkomen. De leerboeken van 'Operatoir Rekenen' (tweede versie) (Buys, Teunissen & Van Bergen) waren in 1981 voor groep 3 en 4 gereed . De leerboeken voor groep 3 en 4 van 'De wereld in getallen' (eerste versie) (Huitema, Van der Klis, Van de Molengraaf & Timmermans) verschenen in 1983. 'Rekenwerk' (Nelissen e.a.) voor groep 3 en 4 verscheen in 1988.

21 De bovenste getallenlijn komt uit 'De wereld in getallen', rekenboek 2a, pag.119. De onderste getallenlijn is afkomstig uit 'Operatoir Rekenen', leerjaar 2, werkboekje 1, reeks 1-les 15.

22 In 'Rekenen & Wiskunde' (Gravemeijer e.a.) komen sprongen op de getallenlijn niet voor. 'Rekenen & Wiskunde' voor groep 3 en 4 verscheen in 1983 op de onderwijsmarkt.

23 Buys (1988) wijst in zijn artikel 'Schaduwzijden van het honderdveld' op de nadelen van het gebruik van het honderdveld. Hij geeft hierin aan dat de plaats van de getallen in een honderdveld weinig zegt over de onderlinge verhoudingen en de opbouw van getallen. Zo ligt 26 dichterbij 36 dan bij 29. Ook vertegenwoordigen sprongen van gelijke lengte een andere grootte in getal. Spring je een hokje naar links of rechts dan vermeerder of verminder je met 1, maar verschuif je een hokje naar boven of naar beneden, dan telt je sprong voor 10.

24 De volgende tijdschriften zijn hierover geraadpleegd (van 1970 tot 1990): 'Arithmetic Teacher', 'Educational Studies in Mathematics', 'Journal for Research in Mathematics Education', 'Mathematics Teaching' en 'Mathematics in School'.
In de eerste twee genoemde tijdschriften is een tweetal artikelen gevonden met betrekking tot het lokaliseren op een lege getallenlijn. In 'Educational Studies in Mathematics' gebruikt Hadar een gedeeltelijk gestructureerde getallenlijn om overzichtsproblemen bij het raden van een getal te visualiseren. Het betreft een getallenlijn met de getallen 0 - 20 - 40 - 60 - 80 - ... erop (1977). In 'the Arithmetic Teacher' suggereert Shaw (1984) getallen op volgorde te hangen aan een waslijn.
Ook staat in 'The Arithmetic Teacher' een artikel van Weill (1978) over rekenen op een zogenaamde heuvellijn. Hierop wordt uitgebreid ingegaan in paragraaf 3.
In 'Mathematics Teaching' is een aanwijzing gevonden dat rekenen op lijn hoogstwaarschijnlijk aansluit bij hoe kinderen (delen van) de telrij zien (Carter, 1983).
In 'Journal for Research in Mathematics Education' en 'Mathematics in School' is over het rekenen op een lege getallenlijn in deze periode niets gevonden.

25 Uit: Weill (1978, pag.34-35).

26 Uit: Weill (1978, pag.34-35).

27 Goffree (1982) duidt in 'Wiskunde & didaktiek' het achttallig stelsel aan als 'Het Land van Okt'. Geschreven ziet deze telrij er als volgt uit: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, enzovoort. Maar ook in uitspraak verschilt het met wat men gewend is. Zo heet '15' okvijf en '25' tweetokvijf. Het wordt echter pas echt ingewikkeld met het verrichten van bewerkingen.

28 Uit: Goffree (1982, pag.82).

29 Uit observaties blijkt dat studenten die moeten opereren in dit onbekende getallenstelsel de voorkeur geven aan een lijnmodel (mededeling van Treffers, 1999). Hierin kan een aanwijzing worden gevonden dat dit model ook voor kinderen het meest voor de hand ligt.

30 Uit: Whitney (1988, pag.8).

31 Uit: Whitney (1988, pag.4).

32 Treffers (1989, pag.15).

33 Uit: Treffers & de Moor (1990, pag.51 en 52).

34 Uit: Treffers & De Moor (1990, pag.52).

35 Treffers (1990) geeft er de voorkeur aan om met de rijgmethode te beginnen. Deze is eenvoudig te begrijpen en sluit aan bij het primitieve voor- en achteruit tellen. Het kolomsgewijze rekenen moet daarentegen worden uitgesteld en dit geldt in nog grotere mate voor het cijferen. De kolommethode is abstracter dan de rijgmethode, maar concreter dan het cijfermatige rekenen. Voor het cijferen geldt dat het aanvankelijk bij het rekenen tot 100 nog niet aan de orde dient te komen. Het werkt getalgoochelarij in de hand, zodat het begripsmatige rekenen tot 100 aanvankelijk in het honderd wordt gestuurd. Ter illustratie geeft hij aan welke mogelijke cijfermatige oplossingen een vroegtijdig aanbieden van cijferen tot gevolg kan hebben voor de opgave '65 – 38' (pag.55):
65 – 38 = ..; 6 – 3 = 3; 8 – 5 = 3; 3 – 3 = 0
65 – 38 = ..; 5 – 3 = 2; 8 – 6 = 2; 22
65 – 38 = ..; 6 – 3 = 3; 8 – 5 = 3; 33
65 – 38 = ..; 15 – 8 = 7; 6 – 3 = 3; 37

36 Uit: Treffers & De Moor (1990, pag.54).

37 Van den Brink (1974) introduceerde in de Wiskobasperiode de pijlentaal om het in- en uitstappen tijdens gespeelde busritten te visualiseren. De pijlen geven aan hoeveel mensen er zijn in- of uitgestapt (1975, pag.85).

$$5 \xrightarrow{\boxed{-2}} 3 \xrightarrow{\boxed{-3}} 0$$

38 Uit: Treffers & De Moor (1990, pag.55).

39 Bij deze methoden horen respectievelijk de volgende auteurs:
'De wereld in getallen' (tweede versie) (1990): Huitema, Van der Klis & Timmermans.
'Pluspunt' (eerste versie) (1989): Claessens, Gilissen & Noteboom.
'Operatoir Rekenen' (1991) (derde versie): Sweers, Van den Bremen, Van Heesch & Lanen.
'Wis en Reken' (1997): Buys (ed.).
'Talrijk' (1997): Compagnie-Rietberg, Koudenberg & Winnubst.
'Rekenrijk' (1998): Bokhove, Kuipers & Postema (eds.).

40 In 2000 komt de tweede versie van 'Rekenrijk' (Bokhove, Kuipers & Postema (eds.) uit. In 2001 worden de tweede versie van 'Pluspunt' (Munsterman & de Weerd-Fourdraine), de derde versie van 'De wereld in getallen' (Huitema, Van der Klis & Timmersmans) en 'Alles telt' (Boerema, Sweers & Krol) op de onderwijsmarkt gebracht. Met name in 'Pluspunt' is de didactische positie van de lege getallenlijn ten opzichte van de eerste versie danig versterkt. Het

honderdveld is bij deze methode uit het zicht verdwenen.

41 In Duitsland publiceren Wittmann, Müller & Selter bijvoorbeeld meerdere malen over 'Halbschriftliches Rechnen auf eigenen Wegen' (Müller en Wittmann (1995), Selter (1994 en 1998)). In België schrijft Feys (1995) over rijgend en splitsend rekenen.

In internationale tijdschriften schrijven Atkinson, Ebbutt & Askew over rekenen op een lege getallenlijn. Atkinson doet dit in 'Primary Maths + Science' in 1998, 1999 en 2000, Ebbutt en Askew in Junior Education in respectievelijk 1998 en 1999. Ook is over dit onderwerp een artikel gevonden van Kamii, Pritchett en Nelson in 'The Arithmetic Teacher' in 1996.

Volledigheidshalve dient hierbij te worden opgemerkt dat Treffers, Beishuizen en Klein hier al eerder internationaal over publiceerden. Treffers in 'Educational Studies in Mathematics' in 1991; Beishuizen in 'Journal for Research in Mathematics Education' in 1993 en tevens in 'Mathematics Teaching' in 1997, en Klein, Beishuizen en Treffers in 'Journal for Research in Mathematics Education' in 1998. In 'Mathematics in School' zijn overigens geen artikelen over dit onderwerp aangetroffen.

De lege getallenlijn duikt eind jaren negentig ook op in buitenlandse methoden. Omstreeks 2000 zijn bijvoorbeeld 'Das Zahlenbuch' (tweede versie) (Wittmann & Müller) en 'Mathematikus' (Lorenz, Eichler & Jansen) in Duitsland op de markt gebracht. Een ander voorbeeld betreft het Numeracy Project dat in het schooljaar 1999-2000 in Engeland van start ging.

Atkinson en Beishuizen hebben in Engeland vroegtijdig aanzetten gegeven voor het rekenen op lege getallenlijnen. Als gevolg daarvan is in een van de discussiepapers op weg naar het Numeracy Project de volgende passage te vinden: 'The use of an "empty numberline" model as having potential both in helping pupils to understand whole number place value and in developing mental strategies' (SCAA, 1997, pag.9).

Literatuur

Askew, M. (1999). Teaching issue. *Junior Education*, April, 36-37.

Atkinson, S. (1998). The National Numeracy Project: Interactive whole class teaching. *Primary Math + School, 7*, 6-11.

Atkinson, S. (1999a). The National Numeracy Project – 8: Working with early years children. *Primary Math + Science*, *13*, 6-9.

Atkinson, S. (1999b). The National Numeracy Project: A lesson plan for Y1 and Y2 children. *Primary Math + Science, 14*, 6-12.

Beishuizen, M. (1993). Mental Strategies and Materials or Models for Addition and Substraction up to 100 in Dutch Second Grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*, 294-323.

Beishuizen, M. (1997). Mental Arithmetic: Mental Recall or Mental Strategies? *Mathematics Teaching, 160*, 16-19.

Boerema, J., W. Sweers & B. Krol (2001). *Alles telt* (groep 3). Utrecht: Thieme-Meulenhoff.

Bok, J. & M.H. Lem (1910). *Door Tellen tot Rekenen*. Handleiding bij de rekencursus voor de lagere school.

Bokhove, J., K. Kuipers & J. Postema (red.) e.a. (1998 en 2000). *Rekenrijk* (eerste en tweede versie, groep 4). Groningen: Wolters-Noordhoff.

Boomsma, G. (1969). *Proeve van een leerplan voor het basisonderwijs B Rekenen.* Groningen: Wolters.

Boonstra, J. & L. Meijer (zj). *Reken Maar*. Amsterdam: Duwaer & Zonen.

Boswinkel, J.W. & J. Wedzinga (1955). *Rekenmethode voor de lagere school*. Groningen: Wolters.

Bouman, P.J. & J.C. van Zelm (1924). *De rekenkundige denkbaarheden in logischen samenhang, met als proeve van toegepaste logica: Een rekenmethode voor de lagere school*. Amsterdam: Versluys.

Brink, F.J. van den (1974). Autobusproblemen voor klas 1. *Wiskobas Bulletin, 3*, 250-260.

Brink, F.J. van den (1975). *Het grote 1+ boek*. Utrecht: IOWO.

Brink, F.J. van den & L. Streefland (1973). Oriëntatietocht in buitenlandse methoden. *Wiskobas Bulletin, 2*, 672-679.

Buys, N., F. Teunissen & T. van Bergen (1981). *Operatoir Rekenen* (tweede versie, groep 4). Tilburg: Zwijsen.

Buys, K. (1988). Schaduwzijden van het honderdveld: een reactie op de Proeve (2). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 6*(4)*, 3-10.

Buys, K. (red.) e.a. (1997). *Wis en Reken* (groep 4). Baarn: Bekadidact.

Claessens, B., L. Gilissen & A. Noteboom (1989). *Pluspunt* (eerste versie, groep 4). Den Bosch: Malmberg.

Compagnie-Rietberg, C., J. Koudenberg & J. Winnubst (1997). *Talrijk* (groep 4). Tilburg: Zwijsen.

Carter, B. (1983). Number lines. *Mathematics Teaching, 103*, 2-6.

Diels, P.A. & J. Nauta (1939). *Richtlijnen voor het Rekenonderwijs op de lagere school*. Groningen: Wolters.

Ebbutt, S. (1988). Teaching issue. *Junior Education*, October, 44-45.

Evers, J. (1967) *Uitkomst*. Tilburg: Zwijsen.

Feys, R. (1995). Getallenkennis, optellen en aftrekken in het getallengebied 20-100. In: L. Verschaffel & E. de Corte (eds.), *Naar een nieuwe reken-wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie. Deel 2: Het fundament van gecijferdheid gelegd.* Leuven: Acco, 97-130.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Kluwer.

Gelder, L. van (1959). *Grondslagen van de rekendidaktiek*. Groningen: Wolters.

Gerven, J.C. van (zj). *Rekenen voor de basisschool*. 's-Hertogenbosch: Malmberg.

Gilissen, L. & J. Klep (1980). *De getallenlijn: tellen, meten, rekenen en denken*. Tilburg: Zwijsen.

Goffree, F. (1982). *Wiskunde & didaktiek voor aanstaande leraren basisonderwijs (eerste deel)*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Goffree, F., A.A. Hiddink & J.M. Dijkshoorn (1970). *Rekenen en didaktiek*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Gravemeijer, K. (ed.) e.a. (1983). *Rekenen & wiskunde* (groep 4). Baarn: Bekadidact.

Grazer, G. (1933). *Rekenmethodiek en moderne psychologie*. Tilburg: R.K. Jongensweeshuis.

Haack, J. & L. Liefering (1955). *De Grondslag: leergang voor het rekenen op de basisschool*. Zeist: Dijkstra.

Hadar, N. (1977). Children's Conditional Reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 8*, 413-438.

Huitema, S., A. van der Klis, F. van de Molengraaf & M. Timmermans (1983). *De wereld in getallen* (eerste versie, groep 4). 's-Hertogenbosch: Malmberg.

Huitema, S., A. van der Klis, F. van de Molengraaf & M. Timmermans (1990). *De wereld in getallen* (tweede versie, groep 4). 's-Hertogenbosch: Malmberg.

Huitema, S., A. van der Klis, F. van de Molengraaf & M. Timmermans (2001). *De Wereld in Getallen* (derde versie, groep 4). 's-Hertogenbosch: Malmberg.

Jong, R. de, A. Treffers & E. Wijdeveld (eds.) (1975). Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool. *Wiskobas Bulletin, leerplanpublikatie 2*. Utrecht: IOWO.

Kamii, C., M. Pritchett & K. Nelson (1996). Fourth graders invent ways of computing averages. *Arithmetic Teacher*,

3(*2)*, 78-82.
Kellinga, C. (zj). *Kort overzicht van de methode: ‘Noodig rekenen op de lagere school’*. Tilburg: R.K. Jongensweeshuis.
Klein, A.S. (1998). *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base: The Empty Number Line in a Realistic versus Gradual Program Design*. Utrecht: CD-β Press / Freudenthal Instituut (proefschrift).
Klein, A.S., M. Beishuizen & A. Treffers (1998). Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 443-464.
Lorenz, J.H., K-P. Eichler, H. Jansen, e.a. (1999). *Mathematikus*. Braunschweig: Westermann.
Lugtmeijer, H.J, & J. Boers (1950-1960). *Naar Aanleg en Tempo*. Zutphen: Thieme & Cie.
Menne, J. (2001). Met Sprongen Vooruit: Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100 - een onderwijsexperiment. Utrecht: CD-β Press (proefschrift).
Moor, E. de (1980). Gevarieerd rekenen. *Wiskobas Bulletin, leerplandeel 11* (1/2/3). Utrecht: IOWO.
Munsterman, B. & A. de Weerd-Fourdraine (2001). *Pluspunt* (tweede versie, groep 4). Den Bosch: Malmberg.
Müller, G.N. & E.Ch. Wittmann (1995). *Mit Kindern Rechnen*. Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule.
Nelissen, J. (red.), e.a. (1985). *Rekenwerk* (groep 4). Gorinchem: De Ruiter.
Pelt, D. van (1912). *Overzicht der methode*. Tiel: Mijs.
Postema, J., K. Kuipers & J.J. Haverkort (1978). *Taltaal*. Zeist: Dijkstra.
Reijnders, J. M. & J. Snijders (1958). *Functioneel Rekenen: Handleiding*. Amsterdam: Versluys.
Rombouts, Fr. S. (zj). *Geef acht!: Nieuwe rekencursus voor de lagere school*. Tilburg: R.K. Jongensweeshuis.
SCAA (1997). *The teaching and Assessment of Number at Key Stages 1-3* (discussion paper no. 10). London: School Curriculum and Assessment Authority.
Selter, Ch. (1994). *Eigenproductionen im Arithmetikunterricht*. Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag (dissertation).
Selter, Ch. (1998). Building on Children’s Mathematics – A Teaching Experiment In Grade Three. *Educational Studies in Mathematics,* 36(*1*), 1-27.
Shaw, J.M. (1984). Let’s do it: Newspapers Add Spark to Mathematics Activities. *Arithmetic Teacher*, 31(*8*), 8-13.
Straker, A. (1999). The National Numeracy Project: 1996-1999. In: I. Thompson (ed.). *Issues in teaching numeracy in primary schools*. Buckingham: Open University Press, 39-48.
Sweers, W., P. van den Bremen, C. van Heesch & J. Lanen (1991). *Operatoir Rekenen* (derde versie, groep 4). Tilburg: Zwijsen.
Treffers, A. (1989). *Het voorkomen van ongecijferdheid op de basisschool*. Utrecht: OW & OC (oratie).
Treffers, A. (1991). Meeting innumeracy at primary school. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 333-352.
Treffers, A., E. de Moor & E. Feijs (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1: Overzicht einddoelen*. Tilburg: Zwijsen.
Treffers, A. & E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2: Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijsen.
Turkstra, H. & J.K. Timmer (1953). *Rekendidaktiek*. Groningen: Wolters.
Veltman, A. (1993). *Van het begin en van het eind: Ontwikkelingsonderzoek naar het rekenen tot 100 op de (lege) getallenlijn*. Utrecht: Faculteit Sociale Wetenschappen (doctoraalscriptie).
Versluys, J. (1882). *De methodiek van het rekenen*. Amsterdam: Versluys.
Vossen, H.M.M. (1970). *Niveaucursus Rekenen*. ’s-Hertogenbosch: Malmberg.
Weill, B.F. (1978). Mrs Weill’s Hill: A successful Substration Method for Use with the Learning-Disabled Child. *Arithmetic Teacher*, 26(*2*), 34-35.
Whitney, H. (1988). *Mathematical Reasoning, Early Grades: growth through involvement, curriculum outline*. Princeton: Institute for Advanced Study (omgepubliceerd manuscript).
Wittmann, E. Ch. & G.N. Müller (red.) (2000). *Das Zahlenbuch* (tweede versie). Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.
Woestenenk, P. (1965). *Rekendidaktiek*. Zwolle: Tjeenk Willink.
Zandvoort, R.H., H.M. Venekamp & N. Kuipers (1955). *Naar Zelfstandig Rekenen.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Zernike, C.F.A. (1915). *Ons Rekenonderwijs*. Bussum: Akkeringa.