

Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (13)

- procenten, analyse van het gebied -

E. de Moor, L. Streefland, A. Treffers
Vakgroep OW & OC, RU Utrecht

1 Inleiding

Onderstaande tekst (fig.1) troffen wij aan in het weekblad 'Stad Sittard' (oktober 1989).¹ Met de auteur zouden we willen zeggen: 'Inderdaad, daar word je stil van.' Kennelijk kan de schrijver wel 25 procent van veertien miljoen uitrekenen. Maar de gevonden uitkomst van 3,5 miljoen levert hem kennelijk geen stof tot nadenken op. Moeten we constateren dat de schrijver wel kan rekenen met procenten, maar het begrip niet beheerst, of zou het gewoon een domme vergissing zijn?

Gisteren, maandag 9 oktober, werd in Avro's Servicesalon aandacht besteed aan het analfabetisme in Nederland. Uit de voor dat programma verzamelde gegevens is opnieuw gebleken dat maar liefst 1 van de 25 Nederlanders niet kan lezen of schrijven, dat die ene dus geen boodschappenbriefje kan schrijven of lezen, geen ondertitels op TV kan volgen, geen krant kan lezen, geen brief kan samenstellen. Stel je voor 1 op	25 Nederlanders, bewoners dus van een land dat mensen uitstuurt naar ontwikkelingslanden om daar de bevolking te leren lezen en schrijven. 1 van de 25 Nederlanders dat is 25%! En hoeveel inwoners heeft Nederland? Veertien miljoen? Dan wil dat wel zeggen dat in ons hoog-ontwikkelde land maar liefst drie-en-een-half-miljoen mensen niet kunnen lezen of schrijven. Daar word je even stil van!
--	--

figuur 1: 1 op 25 = 25 procent

Het begin van het boekje 'Wie kan nog rekenen?'² luidt als volgt:

'In november 1988 gingen mijn echtgenote en ik een middag 'de stad in'. Bij een drukkerij kocht zij 100 blanco visitekaartjes. Kosten inclusief BTW: f 15,-. Zij vroeg de winkeljuffrouw een kwitantie met BTW, die toen nog 20% was. 'Natuurlijk mevrouw. O jé! Waar is m'n zakrekenmachine? Nou ja, ik reken het zo wel even uit.' Zij krabbelde razendsnel de volgende cijfersom op een kladje:

$$\begin{array}{r} 0,15 \\ 20 \\ \hline 000 \\ 300 \\ \hline 3,00 \end{array}$$

En op de kwitantie noteerde zij: 'Vijftien gulden: f 12,-, BTW f 3,-.'

Ik kon me er niet buiten houden en vroeg haar: 'Doet u dat altijd zo?'

'Natuurlijk meneer.'

'Maar kijkt u eens. Als ik nu 20% van f 12,- neem, dan is dat f 2,40. Dus totaal f 14,40. En uw rekening is inclusief BTW f 15,-'

'Maar wat doe ik dan fout?'

Omdat de stemming goed was kon ik haar uitleggen dat 1/6 deel van 120% tot 20% voert. En dat het dus het handigste is om het totaalbedrag door zes te delen. In dit geval $15 : 6 = 2,50$.

'Verdraaid het klopt', en ze cijferde nog even vlug $20 \times 0,125$ onder elkaar.

'We moeten verder, schoolmeester,' sprak mijn vrouw ietwat geïrriteerd.'

Als bewijs van de echtheid van dit verhaal voegen wij de betreffende kwitantie erbij (fig.2).



figuur 2: Twintig procent BTW?

Men zou zich vrolijk kunnen maken over de hiervoor tentoon gespreide onkunde. Maar dat is niet de bedoeling van deze aflevering. Wat wij namelijk uit de aangehaalde voorbeelden zien, zeker in het tweede geval, is dat het procentbegrip en het rekenen met procenten niet zo simpel is. In de kranten kan men bijna dagelijks foutieve interpretaties en verkeerde berekeningen met procenten aantreffen.

Als bijdrage tot een analyse van deze moeilijke materie willen wij in het volgende iets van de achtergrond van procenten beschrijven. Het gaat daarbij om het reken- en wiskundig aspect, de mathematisch-didactische eigenaardigheden en de verschijningsvormen, zoveel mogelijk in samenhang met andere onderwerpen uit het rekenen en/of de wiskunde. Het doel van dit stuk is dus om eerst op eigen niveau een overzicht van het gebied te krijgen. De didactiek zal in een volgende aflevering aan de orde komen.

2 Procententaal

Naar aanleiding van het bericht over het percentage analfabeten in Nederland (fig.1) merkte Treffers in zijn inaugurele rede in februari 1990 op dat het nog maar een geluk was dat het niet om één op honderd Nederlanders ging.³

Zou de journalist uit Sittard misschien rijtjes gemaakt hebben in de stijl van:

$$\frac{1}{10} = 10 \% ; \frac{1}{25} = \dots ; \frac{1}{4} = \dots \text{ enzovoort?}$$

Misschien dat deze oefening het idee doet postvatten dat percentages getallen zijn. Rechts van het = -teken staat 10 procent en links de breuk $\frac{1}{10}$. De breuk $\frac{1}{10}$ is een getal, namelijk dat getal dat met tien vermenigvuldigd één oplevert. Maar rechts staat een percentage (10 procent). Iets dat volledig geschreven eigenlijk zou moeten zijn '10 procent van ...' of ' $\frac{10}{100}$ deel van ...'. Als we $\frac{1}{10}$ deel van een getal of grootheid nemen is dat hetzelfde als 10 procent van datzelfde getal of grootheid. De bedoelde rijtjes zouden dus wel correct zijn als we zouden noteren:

$$\frac{1}{10} \text{ deel van } A = 10 \% \text{ van } A \text{ of } \frac{1}{10} \times A = 10 \% \text{ van } A.$$

Overigens het kennen van percentages als fracties is uiterst praktisch (fig.3).

$$\frac{1}{100} \text{ deel van } A = 1 \% \text{ van } A$$

$$\frac{1}{50} \text{ deel van } A = 2 \% \text{ van } A$$

$$\frac{1}{25} \text{ van } A = 4 \% \text{ van } A$$

$$\frac{1}{20} A = 5 \% \text{ van } A$$

$$\frac{1}{10} A = 10 \% \dots (?)$$

$$\frac{1}{2} = 50 \% \quad (?)$$

figuur 3: Percentages zijn geen getallen

Een andere verwarrende incorrectheid komt ook uit sommige leerboekjes voort, als er sommetjes van de volgende soort geoefend worden:

$2\% = 8$ vul nu in: $3\% = \dots$ $50\% = \dots$

$\frac{1}{6}\% = 2$ vul nu in: $3\% = \dots$ $50\% = \dots$

Het misbruik van het $=$ -teken is hier veel ernstiger. Een grappenmaker zou hiermee zelfs aan kunnen tonen dat er geldt $12 = 36$. Voor de goede orde merken we nog even op dat het $=$ -teken alleen gebruikt mag worden als aan beide kanten van het $=$ -teken precies hetzelfde getal staat of uitgedrukt wordt ($10 = 10$; $10 = 8 + 2$; $10\% \text{ van } 30 = 3$).

Kortom, we zien dat reeds in het allereerste begin van het leerproces slordig met de taal van de procenten wordt omgegaan. Dit wil niet zeggen dat we puristen moeten worden. Men kan natuurlijk zeggen dat er in Nederland 4 procent analfabeten zijn, maar dat doen we dan alleen op een niveau dat je kunt begrijpen wat die 4 procent betekent. Het is namelijk gemakkelijker om '4 procent' te zeggen dan 'vier van elke honderd Nederlanders boven de twaalf jaar kan lezen noch schrijven'. Je zou dus kunnen zeggen dat 4 procent in dit geval als een zelfstandigheid wordt gebruikt, en wel voor het getal $0,04 \times 12 \text{ miljoen} \approx 500.000$, min of meer een vast getal. Anderzijds, als we het hebben over een loonsverhoging van 3 procent is het zinloos aan een vast getal te denken, omdat we immers zoveel verschillende salarissen verdienen. Iemand die $f2000,-$ verdient, zal voor elke $f100,-$ er drie gulden verkrijgen, dus $20 \times f3 = f60,-$. En degene die $f4000,-$ verdient krijgt dus het dubbele erbij. Maar beiden hebben een verhoging van 3 procent gekregen. Drinkers bedriegen zichzelf wel eens door van jenever (35 procent alcohol) over te gaan op bier (5 procent alcohol). Het gaat dus bij percentages nooit om absolute grootheden. Percentages zijn - we zeiden het al eerder - geen gewone getallen, maar ze geven een operatie aan die je op een getal moet toepassen om uiteindelijk tot een getal te komen.

Dit betekent ook dat je met percentages heel anders rekent dan met gewone getallen. In het algemeen kun je percentages niet optellen of aftrekken. Laten we het volgende probleem bekijken:

In café 'Wielersport' zitten 10 vrouwen en 30 mannen.

5 van de 10 vrouwen hebben een racefiets. Hoeveel procent?

21 van de 30 mannen hebben een racefiets. Hoeveel procent?

Hoeveel procent van de aanwezigen heeft een racefiets?

De antwoorden zijn respectievelijk 50 procent (één van de twee) voor de vrouwen en 70 procent (zeven van de tien) voor de mannen. Dat er niet opgeteld mag worden lijkt wel al direct duidelijk omdat we dan op een percentage van 120 zouden uitkomen. Misschien moeten we middelen: 60 procent. Maar ook dat is niet juist, want in totaal hebben 26 van de 40 aanwezigen (dat is 52 van de 80 of 65 van de 100), dus 65 procent van de aanwezigen een dergelijk vehikel.

Als man en vrouw een even groot salaris verdienen en beider salaris gaat 3 procent omhoog komt er niet 6 procent meer binnen, maar gewoon 3 procent.

Toch kan de rente van 1 procent per maand opgeteld worden tot 12 procent per jaar. Als we tenminste geen rente op rente berekenen.

Een ander lastig probleem treedt op als we met percentages van percentages gaan werken. Wat betekent het dat 50 procent van de 9,5 procent werklozen nooit meer werk zal vinden. In kranteberichten wordt vaak met dergelijke getalsinformatie gewerkt. Bijna altijd moet men terug naar de oorspronkelijke begrippen om de werkelijke situatie te kunnen begrijpen. Zie hiervoor het krantebericht dat afgebeeld is in figuur 4.

In de alledaagse taal worden 'deel van' (de helft, driekwart, ...), 'verhouding' (één op twee, drie van de vier, ...), 'breuk' ($\frac{1}{2} \times$, $\frac{3}{4} \times$...) en 'percentage' (50 procent, 75 procent ...) bijna willekeurig door elkaar en in allerlei combinaties gebruikt.

Dit nu vereist dat we in het onderwijs ook aan deze alledaagse procententaal aandacht besteden, als we tenminste de mogelijkheden willen openhouden om tot een beter begrip te komen.

Diensttijd

Van de Nederlandse bevolking vindt ruim driekwart dat de diensttijd voor dienstplichtigen omlaag kan. Het verkorten van de diensttijd geniet de voorkeur boven het oproepen van minder dienstplichtigen. Van de voorstanders van verkorting vindt 22 procent dat de dienstplicht geheel kan worden afgeschaft. Dit blijkt uit een enquête in opdracht van de Algemene Nederlandse Vereniging van Militairen.

figuur 4: 22 procent van driekwart

Een volgend specifiek taalprobleem met procenten vormen de kwesties van verhogingen, c.q. verlagingen. Heel gebruikelijk is het om stijgingen en dalingen met procenten aan te geven, doch soms kan dit tot merkwaaardige overdrijvingen leiden, zoals uit het krantebericht uit het Algemeen Dagblad van 4.5.1982 over het pontveer blijkt (fig.5).

Overvaren voor 'n stuiver: verhoging van 150 procent

Van een onzer verslaggevers

RIJSWIJK - door de afschaffing van de cent als betaalmiddel valt binnenkort een 'dikke' tariefsverhoging te verwachten voor het voetgangers- en fietsenpontje Keereweer over de Delftse Vliet in Rijswijk.

De 2 cent die veerman R. van den Bos (26) volgens de bestaande verordening al sinds jaar en dag vraagt, wordt vrijwel zeker een stuiver. En dat betekent een prijsstijging van 150 procent.

figuur 5: Van 2 cent naar 5 cent

Op de 2 cent is $(2 + 1)$ cent gekomen, hetgeen inderdaad een verhoging van 150 procent genoemd wordt. Toch zou het handzamer zijn als we in dit geval zouden zeggen dat de overstek met de pont $2\frac{1}{2}$ maal zo duur is geworden.

Verhogingen die niet boven de 100 procent uitgaan zijn met de procentenaanduiding wellicht makkelijker te begrijpen dan met de (breuk-) factoren. Immers als iets eerst f 100,- kost en daarna f 120,-, is 20 procent verhoging duidelijker dan te zeggen dat het 1,2 maal zo duur geworden is. Boven de 100 procent lijkt echter de factoraanpak te prefereren.

Men kan dus van een bedrag percentages die groter dan honderd zijn nemen. In het pontveersommetje geldt dat 150 procent van 2 cent = 3 cent.

Het taalgebruik om verhoging uit te drukken is heel divers, zoals we nog eens laten zien aan de verhoging van een artikel van f 1,- naar f 2,-:

Wat eerst $f1,-$ kostte, kost nu $f2,-$
 De prijs is verdubbeld.
 De prijs is 100 % duurder geworden.
 De prijs is 200 % van de oorspronkelijke prijs.

Zijn de stijgingen in procententaal al moeilijk te begrijpen, nog lastiger lijkt het met dalingen te zijn. In NRC-Handelsblad (1990) wordt beweerd dat een vermindering van 900 procent mogelijk is (fig.6).

'Vrede funest voor verkoop Tsjechische wapens'

Door onze redacteur
HUBERT SMEETS

De export naar het naburige Syrië was een jaar eerder al met negenhonderd procent verminderd. De uitvoer naar Damascus bedroeg in het record-jaar 1985 bijna 2,5 miljard kronen (een half miljard gulden). Nu heeft die export nog maar een omvang van vijftig miljoen gulden. De handel met Libië liep de afgelopen twee jaar eveneens gestaag terug. Zelfs Zuid-Jemen heeft tegenwoordig geen interesse meer in Tsjechoslowaakse wapens. Dat Noord-Korea, Nicaragua en Ethiopië nog wel wapens in Tsjechoslowakije bleven bestellen woog daar niet tegen op.

figuur 6: Vermindering van 900 procent!

Men zou toch zeggen dat een vermindering van 100 procent van een bedrag het maximum is dat je van iets af kunt trekken. Dan sta je immers op nul. Laten we de zaak eens omdraaien en naar de bijbehorende stijging kijken: van vijftig miljoen gulden naar een half miljard (is vijfhonderd miljoen) gulden. Dat is tien maal zoveel, dus een stijging van 900 procent. De fout ontstaat dus doordat gedacht wordt dat de omgekeerde handeling van 'erbij' -net zoals bij optellen en aftrekken - 'eraf' is. Maar voor procenten geldt dat niet. Weer zet de taal ons op het verkeerde been.

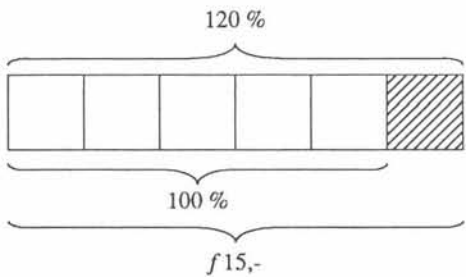
Ook nu zou het misschien beter zijn te zeggen dat de verkoop tien maal zo laag is uitgevallen. En wil men toch met percentages werken dan geldt: Van vijfhonderd miljoen naar vijftig miljoen betekent voor elke honderd (miljoen) naar elke tien miljoen oftewel een vermindering van negentig (miljoen) op elke honderd (miljoen), dus 90 procent vermindering.

Van dezelfde aard is het visitekaartjes-probleem (fig.2). Zij het dat het daar om het bepalen van een andere variabele gaat dan in het wapenverkoop-vraagstuk. We komen op deze kwestie nader terug, maar geven nu toch al vast een schematische toelichting op het daar genoemde algoritme van 'delen door zes' (fig.7). Een andere methode luidt:

'Alles' is 100 %.
 Nu is het 120 %.
 120 % komt overeen met $f15,-$.
 1 % komt dus overeen met $f1,-$: $f120 = f0,125$.
 100 % ('alles') is dus $100 \times f0,125 = f12,50$.

Afgezien van de omslachtige berekening wijzen we op het merkwaardige taalgebruik van de term 'alles'. Zou het niet veel meer voor de hand hebben gelegen om $f15,-$ 'alles' te noemen?

Kennelijk komt dit ‘alles’ voort uit de gedachte om het beginbedrag waaraan de veranderingen zich voltrekken op ‘honderd’ te stellen. En hiermee komen wij bij de oorsprong van het procentbegrip. Procent betekent niets anders dan ‘per honderd’. Procenten zijn ingevoerd om verhoudingen te standaardiseren om daardoor gemakkelijker te kunnen vergelijken.



figuur 7

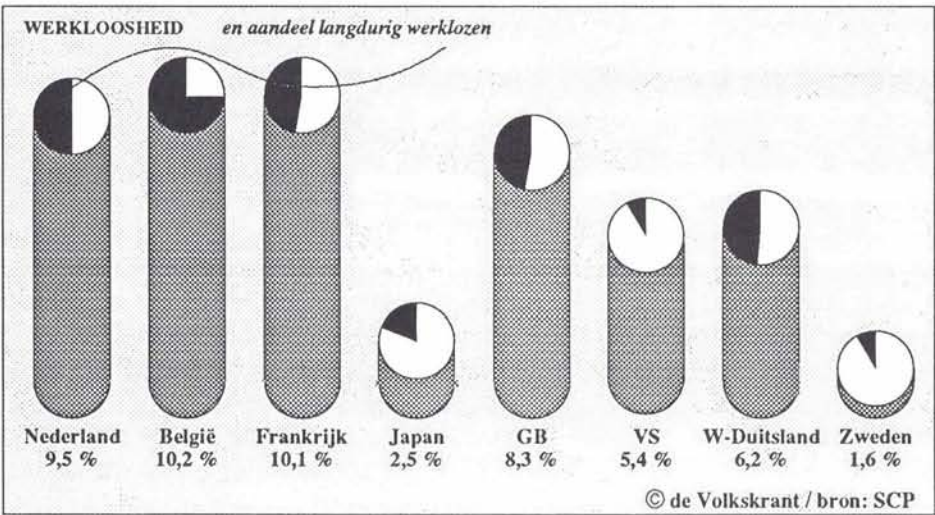
Van drie basketballers wordt het aantal schoten en hun successen geturfd. Het resultaat is het volgende:

Eric:40 schoten, 18 raak.
John:35 schoten, 16 raak.
Fred: 45 schoten, 19 raak.

Door nu voor ieder het aantal schoten op honderd te stellen krijgen we de gestandaardiseerde verhoudingen, de percentages dus. Het eenvoudigste gaat dat door de decimale getallen bij de breuken te bepalen:

$$\begin{aligned}\frac{18}{40} &= 0,45 && \rightarrow \frac{45}{100} \rightarrow 45\% \\ \frac{16}{35} &= 0,457 && \rightarrow \frac{46}{100} \rightarrow 46\% \\ \frac{19}{45} &= 0,422 && \rightarrow \frac{42}{100} \rightarrow 42\%\end{aligned}$$

Hiermee is niet de didactische lijn aanbevolen. Wel hebben we laten zien dat het standaardiseren van fracties die vergeleken moeten worden, heel simpel kan door het vergelijken per honderd.



figuur 8: Dubbele informatie

Percentage als fractie betekent dus niets anders dan het aantal per honderd. Zeggen we dat 45 procent van het energieverbruik in de wereld uit aardolie bestaat, dan bedoelen we dat van elke honderd eenheden energie die we gebruiken er 45 door aardolie worden geleverd en dus 55 door andere bronnen.

Deze fracties worden vaak gevisualiseerd weergegeven in zogenaamde sectordiagrammen. Een voorbeeld hiervan vinden we in figuur 8, waar grafisch dubbele informatie is weergegeven. Allereerst geven de lengtes van de staven een vergelijking van de werkloosheidspercentages in een aantal landen weer. Maar tevens zien we in de verschillende sectordiagrammen het aandeel van de langdurige werklozen. In België komt drievierde deel of 75 procent van het totale aantal werklozen nooit meer aan de slag.

Om nu de absolute aantallen te kunnen berekenen gebruiken we de percentages meer als een rekengetal (of operator) dan als een breukdeel (fractie).

Als er in Nederland vijf miljoen mensen aan het arbeidsproces deelnemen dan zijn er ongeveer 10 procent van vijf miljoen = vijfhonderdduizend werklozen.

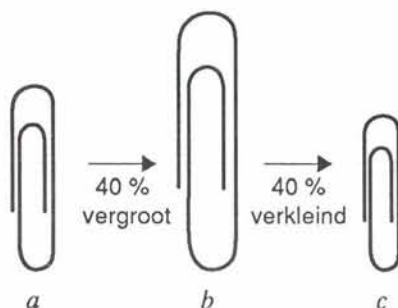
Bij het werken en rekenen met procenten zijn dus twee aspecten van groot belang:

- percentage als fractie;
- percentage als operator.

Van het operator-aspect zullen we, naar dadelijk zal blijken, weer twee uitwerkingen zien. Het berekenen van een percentagebedrag zonder meer (20 procent van f 400,-) of van een eindbedrag na een verhoging of verlaging (prijs inclusief BTW).

Wat de taal en het begrip van dergelijke vermeerderingen/verminderingen betreft wijzen we op nog een andere specifieke procentenkwestie. Bij vergroten en verkleinen van figuren (kopiëren, foto's, ...) wordt ook gewerkt met percentages.

In figuur 9 is een paperclip eerst met 40 procent vergroot, waarna deze afbeelding met 40 procent is verkleind. We zien al direct uit de figuur dat de eindtoestand (c) niet dezelfde grootte oplevert als de beginsituatie (a).



figuur 9: c is *niet* even groot als a

Het gaat in feite om hetzelfde probleem als bij de visitekaartjes. Maar in tegenstelling tot een prijsverhoging/verlaging wordt de toename niet op het grondbedrag gestapeld. De gehele figuur (in casu paperclip) wordt continu opgerekt/ingeduwd, waardoor je de 40 procent-toename niet als zelfstandigheid kunt herkennen.

Of anders gezegd: bij vergroten blijft het aantal eenheden in principe hetzelfde maar wordt de maateenheid vergroot, terwijl bij veel andere problemen het aantal eenheden verandert en de eenheid hetzelfde blijft. Subtiele verschillen, maar van belang om moeilijkheden te ondervangen.

Keren we nu terug naar onze inleiding, dan zien we dat de daar gebruikte voorbeelden in feite model staan voor het fractie- en het operator-aspect. Immers bij het analfabeten-vraagstuk ging het om een fractie en in het sommetje over de visitekaartjes moesten we met het percentage-getal als operator werken.

Deze twee typen opgaven geven aanleiding tot twee hoofdtypen vraagstukken, die we nu zullen bespreken.

3 Twee hoofdtypen

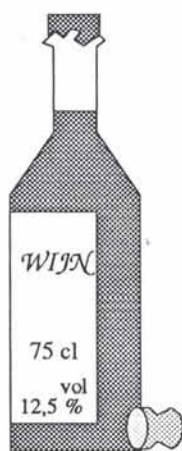
Bij procent-sommen gaat het in grote lijnen om twee *hoofdtypen*⁴:

a. deel ten opzichte van geheel

Een fles wijn heeft een inhoud van 75 cl.
Het alcohol percentage is 12,5 %.
Hoeveel cl alcohol bevat de fles?

b. geheel plus of min deel

100 visitekaartjes inclusief 20 % BTW kosten f 15,-.
Wat is de kale prijs?



deel/geheel



geheel plus deel

figuur 10

Voorbeelden van deel/geheel

- mengsels;
- verkiezingen/opiniepeilingen;
- goedscores bij toetsen;
- bevolkingssamenstelling;
- gezinsuitgaven;
- kansen.

Voorbeelden van geheel plus of min deel

- prijsverhoging;
- prijsverlaging;
- bevolkingsgroei;
- bevolkingsafname;
- rente.

De *deel/geheel*-problemen betreffen altijd percentages die kleiner dan honderd zijn. Ze 'beschrijven' de samenstelling van een geheel dat uit twee of meer delen bestaat. Bij het tweede hoofdtype zouden we eigenlijk *geheel plus deel* en *geheel min deel* moeten onderscheiden. Bij de plus-sommen kunnen percentages die groter dan honderd zijn optreden, terwijl dat bij de min-sommen beperkt blijft tot percentages onder de honderd.

Type a: deel ten opzichte van geheel

Soms wordt in de *deel/geheel*-vraagstukjes (a) alleen naar de verhoudingen van de samenstellende delen verwezen of dienen de fracties alleen om een indruk van de samenstelling te geven. Zoals bijvoorbeeld:

Deze sokken bestaan voor 4 % uit katoen en voor 60 % uit kunstvezel.

Maar ook kan gevraagd worden naar de absolute hoeveelheden of aantallen. In het voorbeeld van de wijn kan als volgt geredeneerd worden. $12\frac{1}{2}$ procent komt overeen met $\frac{1}{8}$ deel van het

geheel. (N.B.: 25 procent komt overeen met $\frac{1}{4}$ deel). We berekenen dus $\frac{1}{8} \times 75$, dat is ruim 9 cl alcohol.)

Bij percentageberekeningen komen in eerste instantie drie grootheden voor. We onderscheiden:

- G: het grondbedrag (geheel).
- p:het percentage (zoveelste deel van).
- P: het percentagebedrag (deel).

Als twee van deze drie grootheden gegeven zijn is de derde te berekenen. We vatten deze drie typen vraagstukken samen met enkele voorbeelden in de tabel van figuur 11.

Voorbeeld	G	p	P
a) Hoeveel is 4 % van f 200,-?	200	4	?
b) 75 eieren van 1500 zijn gebroken. Hoeveel procent?	1500	?	75
c) Iemand geeft 5 % van zijn loon uit aan clubs. Dat is f 80,-. Hoeveel verdient hij?	?	5	80

figuur 11: Drie typen van *deel/geheel*

De gevolgde methodieken zijn meestal de volgende:

- a. 1 % van f 200,- = f 2,- dus 4 % van f 200,- = 4 x f 2,- = f 8,-;
- b. 75 van de 1500 komt overeen met $\frac{75}{1500}$ deel = $\frac{1}{20}$ deel;
 $\frac{1}{20}$ deel komt overeen met 5 %.
- c. 5 % komt overeen met f 80,-;
1 % komt overeen met f 16,-;
100 % komt overeen met f 1600,-.

We doen hiermee echter nog geen uitspraak over een didactische voorkeur. Vaste procedures kunnen snel tot trucmatig werken leiden. Zo is het bijvoorbeeld niet altijd de handigste manier om naar 1 procent toe te werken. (Hoeveel is 50 procent van f 372,-?) Zoals gezegd komen we op de didactiek terug in de volgende aflevering.

In wiskundige termen⁵ beschreven kan de samenhang tussen G en P als volgt geformuleerd worden:

$$G \xrightarrow{\times \frac{p}{100}} P \quad \text{of} \quad P = \frac{p}{100} G$$

Type b: geheel plus of min deel

We komen nu tot de analyse en bespreking van het tweede hoofdtype. In feite gaat het hierbij om al die problemen waarbij van groei of afname (negatieve groei) sprake is. De meest bekende voorbeelden zijn het groeien van een populatie mensen of dieren, de groei van geld en prijsverhogingen.

Als voorbeeld bepalen we ons hier alleen tot de prijsstijgingen. Maar al hetgeen volgt geldt ook voor prijsdalingen.

- De prijs van het tijdschrift 'Rekenschap' is f 15,-.
- Deze prijs wordt met 10 % verhoogd.
- Wat is de nieuwe prijs?

De standaard aanpak voor dit soort sommen is als volgt:

Grondbedrag: G	Percentagebedrag: P	Eindbedrag: E
G	$P = \frac{p}{100} \times G$	$E = G + P$

Dit toegepast op het genoemde vraagstuk levert op:

G	P	E
15,-	$0,10 \times 15,- = 1,50$	$15,- + 1,50 = 16,50$

Formeel wordt de samenhang tussen grondbedrag G , percentage p en eindbedrag E als volgt vastgelegd:

$$E = G + \frac{p}{100} \times G$$

Dit type vraagstuk is ook weer onder te verdelen in drie soorten, al naar gelang het onbekend zijn van één van de drie variabelen (E , p of G). We zetten de drie soorten bij elkaar in figuur 12.

Voorbeeld	G	p	E
b) Een tijdschrift van f 15,- wordt in prijs verhoogd met 10 %.	f 15,-	10 %	?
b) Een strippenkaart van f 9,05 kost nu f 9,35.	f 9,05	?	f 9,35
c) Een pakje visitekaartjes kost f 15,- inclusief 20 % BTW.	?	20 %	f 15,-

figuur 12: Drie typen *geheel plus deel*

Een oplossingswijze voor (a) is hiervoor juist besproken. Het voorbeeld (c) is in de inleiding al aan de orde geweest. En het voorbeeld (b) zou als volgt opgelost kunnen worden: er vindt een verhoging van 30 cent op 905 cent plaats. Dit is $\frac{30}{905}$ deel of 0,032 deel of 3 procent.

Met de formule $E = G + (\frac{p}{100}) G$ zouden we de vraagstukjes ook algebraïsch kunnen oplossen.⁶

Maar dit kan snel leiden tot werktuiglijke oplossingsmanieren.

Toch geeft de formule ons de mogelijkheid om eens op een andere manier tegen de *deel* plus of min *geheel*-vraagstukken aan te kijken. We doen dat aan de hand van een aantal concrete verhogingen van 2 procent, 20 procent en 18,5 procent.

$$E = G + 0,02 G = 1,02 G$$

$$E = G + 0,2 G = 1,2 G$$

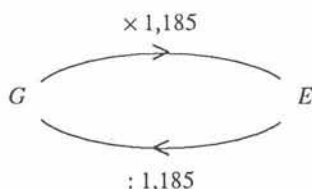
$$E = G + 0,185 G = 1,185 G$$

De regel biedt zich thans als vanzelf aan. Het eindbedrag bij een verhoging van 3 procent zal 1,03 maal zo groot zijn als het grondbedrag. En de beroemde BTW-berekening (18,5 procent) is dus heel eenvoudig met een zakrekenmachine uit te voeren:

$$E = 1,185 G$$

Schrijven we deze formule met de pijlentaal, dan biedt de omgekeerde pijl meteen het om-

keeralgoritme om uit het eindbedrag (bedrag plus BTW) het grondbedrag te berekenen. Een pak enveloppen van f 8,95 heeft dus een schone prijs van $f 8,95 : 1,185 = f 7,55$.



Voor kortingen of verlagingen geldt natuurlijk precies hetzelfde, maar dan met een negatief percentage. Voor de kortingen van 5, 10 en 70 procent geldt immers:

$$E = G - 0,05 G = 0,95 G$$

$$E = G - 0,10 G = 0,90 G$$

$$E = G - 0,70 G = 0,30 G$$

Om het uiteindelijke bedrag van een korting van 70 procent op een bedrag van f 250,- te berekenen hoef je dus niet eerst 70 procent van f 250,- te berekenen om dat daarna af te trekken van f 250,-, maar kun je wel zo eenvoudig $0,3 \times f 250,- = f 75,-$ bepalen. En met de pijlenberekeningswijze ontmaskeren we ook simpel het paperclipprobleem van figuur 9. Vergroten met 40 procent betekent 100 procent naar 140 procent opblazen, dus vermenigvuldigen met 1,4. Verkleinen met 40 procent betekent dan vermenigvuldigen met 0,6.

$$A \xrightarrow{\times 1,4} B = 1,4 A \xrightarrow{\times 0,6} C = 0,6 B = 0,84 A$$

Vandaar dat na twee keer kopiëren (eerst 40 procent vergroten, daarna 40 procent verkleinen) A uiteindelijk met 16% verkleind is. Ook laat de formule nog eens zien dat een verhoging van 100 procent inderdaad twee maal zoveel is.

$$E = G + \left(\frac{100}{100}\right) G = 2 G$$

En dus ook 200 procent meer drie maal zoveel betekent, enzovoort. Tevens zien we dat verlagingen met meer dan 100 procent niet kunnen, omdat we dan op negatieve grondbedragen zouden uitkomen.

$$E = G - \left(\frac{900}{100}\right) G = -8 G?$$

De typen zijn hiermee niet uitputtend behandeld. We hebben bijvoorbeeld geen aandacht besteed aan de kapitaal-rente-vraagstukken waarbij ook de tijd een rol speelt, zoals:

Een kapitaal van f 30.000,- heeft na acht maanden een rente van f 1200,- opgebracht.
Tegen welke jaarpercentage staat dit kapitaal uit?

Op de vraagstukken waarbij rente op rente gebruikt wordt komen we later nog terug. Tot slot blikken we weer terug op de inleiding om vast te stellen dat het analfabeten-probleem een *deel/geheel*-type is en het visitekaartjes-vraagstuk tot het type *geheel* plus of min *deel* behoort.

4 Verhoudingen, breuken en kommagetallen

Voor het rekenen met procenten maken we, zoals we hiervoor zagen, afwisselend gebruik van verhoudingen, breuken en kommagetallen. We zagen ook al dat *verhoudingen* veel gebruikt worden om een *fractie* te beschrijven, zoals in:

- Eric schoot bij basketbal 18 van de 40 schoten raak;
- 1 van de 3 Nederlanders wordt door een misdrijf getroffen;
- 4 van de 5 zitplaatsen in de trein worden voor niet-rokers gereserveerd;
- 1 van de 25 Nederlanders is functioneel analfabeet;
- 112 van de 150 Tweede-Kamerleden kozen voor een OV-kaart in plaats van autovergoeding;
- 20 van de 1000 loten leveren een prijs op.

Al deze voorbeelden geven uitstekende informatie over de ‘concentratie’ van een gedeelte met een bepaald kenmerk ten opzichte van het geheel. Het is niet nodig om deze verhoudingen tot ‘zoveel op de honderd’ te herleiden. Dat speelt pas een rol als meerdere verhoudingen met elkaar vergeleken moeten worden:

Loterij A : winnende loten 100 van de 800

Loterij B : winnende loten 150 van de 1000

Voor A geldt $12\frac{1}{2}$ van de 100 en voor B geldt 15 van de 100. En deze ‘gestandaardiseerde verhoudingen’ zijn de percentages, die het ordenen gemakkelijker maken. Om tot dit ‘stellen op honderd’ te komen, is de volgende denkstap essentieel: ‘Hoeveel Nederlanders worden het slachtoffer van een misdrijf als we er nu eens 100 nemen?’ Deze stap roept soms psychologische weerstanden op. Neem die basketballer (18 raak van de 40). Zonder op de context te letten zijn we rap op 45 van de 100. ‘Maar hij kan wel alles missen na die veertigste worp’ is een argument, waarmee men wil aangeven dat het zomaar vergroten niet gezien wordt in het kader van het vergelijken van de schotpercentages. De als-dan gedachte wordt te letterlijk genomen.

Een probleem apart is dan nog dat je voor dit herleiden op honderd ook nog een zekere rekenvaardigheid moet bezitten. Hoe reken je bijvoorbeeld in het Tweede-Kamersommetje (112 van de 150) vlot naar de honderd toe? En nog lastiger wordt in het volgend geval:

In 1956 reden 4739 schaatsers van de 6070 deelnemers aan de Elfstedentocht deze tocht uit. Welk percentage is dit?

Het meest inzichtelijke in dit geval is de volgende rekenstrategie:

$$\begin{array}{ccc} 4739 & \text{per} & 6070 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0,78 & \text{per} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 78 & \text{per} & 100 \end{array}$$

Soms is het ook handig om percentages om te zetten in een verhouding. We geven twee voorbeelden:

‘33 % van de wedstrijden is verloren’ kan vertaald worden naar de uitspraak dat gemiddeld ongeveer 1 op de 3 een fiasco was.

‘5 % van een zending glaswerk is breuk’ betekent dat gemiddeld 1 van de 20 glazen kapot is.

We vatten het voorgaande samen in het volgende schema:

verhouding		percentage
1 van de 5 2 van de 10 20 van de 100	→	20%

‘1 van de 3 Nederlanders wordt door een misdrijf getroffen’, kan ook met een *breuk*deel beschreven worden, namelijk als volgt:

éénderde deel van ...

$\frac{1}{3}$ deel van ...

$\frac{1}{3}$ van alle Nederlanders ...

Het woordje *van* duidt erop dat we de operatie vermenigvuldigen moeten toepassen. Er zijn 15 miljoen Nederlanders. En daarvan worden er $\frac{1}{3} \times 15$ miljoen = 5 miljoen door een misdrijf getroffen. Het *breuk*deel fungeert zoals we zeggen als een *operator* ($\times \frac{1}{3}$ of $\frac{1}{3} \times$) op het geheel.

Bij elke breuk hoort één kommagetal. Het aantal cijfers achter de komma is eindig of gaat repeteren. Omgekeerd hoort bij elk kommagetal ook precies één breuk.

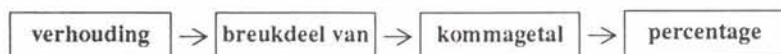
Als het aantal cijfers achter de komma eindig is, is die breuk makkelijk te vinden:

$$0,624 = \frac{624}{1000} = \frac{78}{125}$$

Ook voor een repeterende 'kommabreuk' is de gewone breuk altijd terug te vinden. Er geldt dus:

breuk		kommagetel
$\frac{2}{5}$	$\longleftrightarrow$	0,4
$\frac{2}{3}$	$\longleftrightarrow$	0,66666 ...

De samenhang tussen breuk en kommagetal biedt de eenvoudigste manier om van verhoudingen via breukdeel als kommagetal over te stappen op procenten:



$$1 \text{ van de } 8 \longrightarrow \frac{1}{8} \text{ deel van } \dots \longrightarrow 0,125 \text{ deel van } \dots \longrightarrow 12,5 \%$$

Voor het berekenen van een *percentagebedrag* is het hanteren van de breuk of kommagetal als operator de aangegeven weg. Het zal van de situatie afhangen wat de handigste manier is. '25 procent van het stadion met 60.000 plaatsen is bezet' gaat eenvoudiger via $\frac{1}{4} \times 60.000$ uit het hoofd dan via $0,25 \times 60.000$.

Maar bij 3,5 procent van f3671,- kiezen we liever voor $0,035 \times f3671,- = f128,49$ met behulp van een zakrekenmachine.

We vatten de laatste samenhangen nog eens samen in het volgende overzicht, waarbij N een getal, het geheel of een grootheid voorstelt waarvan het percentage wordt genomen.

(breuk)deel van N		breuk als kommagetal		percentage van N
$\frac{3}{4}$ van N	$\longleftrightarrow$	$0,75 \times N$	$\longleftrightarrow$	75 % van N
$\frac{1}{6}$ van N	$\longleftrightarrow$	$\approx 0,17 \times N$	$\longleftrightarrow$	$\approx 17 \%$ van N

We hebben dit alles besproken, uitgaande van onze reeds verworven kennis van verhoudingen, breuken en kommagetallen. Dan ziet de samenhang er simpel uit, maar als de kinderen op de basisschool hun eerste schreden doen in die verschillende gebieden, is het natuurlijk niet zo eenvoudig de omvattende structuur meteen te doorzien. Temeer daar de weg tot een mogelijk inzicht soms geblokkeerd wordt door gebrek aan rekenroutines.

5 Hoe ver komen ze op de basisschool?

We bespreken thans de PPON-gegevens voor de hoogste groep. Voor het procentrekenen waren drie schalen (onderdelen) geconstrueerd. Deze schalen betroffen basiskennis en begrip van procenten, handig procentrekenen en toepassingen.⁷

basiskennis en begrip van procenten

Volgens de Cito-onderzoekers gaat het hierbij 'om het begrijpen wat procenten zijn en een aantal begrippen die met procenten samenhangen'.

Bij dit onderzoek zijn de groepsleraren gevraagd de leerstof voor de gemiddelde leerling te typeren. Hierbij blijkt de meerderheid van de scholen te kiezen voor onderstaande opgave.

In dezelfde enquête over het gewenste niveau 'vinden de groepsleraren dat de gemiddelde leerling een dergelijke opgave over het algemeen zeker zou moeten kunnen maken'.

Uit het onderzoek blijkt echter dat slechts 45 procent van de leerlingen dit vraagstuk goed op-

lost. De CITO-onderzoekers melden dan ook dat het ‘gewenste niveau aanzienlijk hoger wordt gesteld dan het gerealiseerde’.

2 op de 5 kinderen hadden een onvoldoende voor het proefwerk.
Hoeveel procent is dat?

_____ %

Twee andere items uit deze schaal, met de respectievelijke goedscores, zijn de volgende:

Van welke strook is ongeveer 5 % gekleurd? (zet een rondje om de letter bij het goede antwoord)

A ☒ ☐

B ☒ ☐

C ☒ ☐

goedscore 67 %

16 % van f 42,- is ongeveer

$\frac{1}{2}$ deel van f 42,-

..

goedscore 23 %

Tenslotte blijkt een vraagstuk als ‘ $\frac{7}{10}$ deel van de gekeurde auto’s bleek in orde te zijn. Hoeveel procent is dat?’ door 71 procent goed gemaakt te worden.

Ruim 3 procent van de basisschoolleerlingen komt nooit aan dit onderdeel toe volgens het PPON-rapport.

handig procentrekenen

‘De schaal bevat opgaven waarin het gaat om uit het hoofd handig procentberekeningen uit te voeren op basis van inzicht in het procentbegrip en de getalstructuur van de opgave. Zonder meer de standaardprocedure toepassen (eerst 1 procent uitrekenen), is bij deze opgave ook niet efficiënt. Er komen opgaven voor, zowel sec als in context, waarbij meerdere oplossingsstrategieën voor de leerlijn open staan zoals:

- omzetten naar een breuk;
- gebruik maken van verhoudingen;
- in gedeelten uitrekenen (vooral bij gemengde getallen).’

De scholen zelf kiezen voor deze schaal het volgende vraagstuk als typerend voor het aanbod voor de gemiddelde leerling:

T-SHIRTS

Normaal f 16,-

Nu voor f 12,-

Met hoeveel procent is de prijs verlaagd?

De goedscore op het vraagstuk blijkt 45 procent te zijn.

Ook nu blijkt het gewenste en het feitelijk behaalde niveau nogal uit de pas te lopen. Zo vinden de groepsleraren bijvoorbeeld dat de volgende opgave door de gemiddelde leerling beheerst zou moeten worden:

KOPTELEFOONS van f 60,- nu met 30 % korting Hoeveel moet je nu voor een kop- telefoon betalen? f _____

Ruim éénderde deel van de leerlingen maakt dit vraagstuk zonder meer goed. Bij individuele afname blijkt dat ongeveer 44 procent het vraagstuk goed interpreteert. 15 procent van de leerlingen interpreteert het kortingspercentage verkeerd, respectievelijk als f 30,- korting en als $\frac{1}{3}$ deel(!).

Vier andere items uit deze schaal, met hun goedscores, zijn de volgende:

5 % van f 250,- = f _____	goedscore 64 %
---------------------------	----------------

Winkel 1 een radio van f 150,- met f 50,- korting Winkel 2 een radio van f 150,- met 50 % korting Welke winkel is voordeliger? Winkel _____	goedscore 83 %
---	----------------

In een stadion kunnen 12 000 mensen. Op een zaterdag zijn er bij een voetbalwedstrijd 3600 bezoekers. Voor hoeveel procent is het stadion bezet? _____ %	goedscore 24 %
--	----------------

Verse worst f 6,- per kilo 2e kilo voor de halve prijs Hoeveel procent goedkoper ben je uit per kilo als je twee kilo koopt? _____ %	goedscore 22 %
---	----------------

Ruim 5 procent van de leerlingen in jaargroep acht komt in het geheel niet toe aan dit onderdeel.

Verder lezen wij in het rapport dat 'bijna 17 procent van de scholen aangeeft dat de leerstof voor de gemiddelde leerling niet veel verder reikt dan de opgave: 12 procent van f 640,- = f ...'

toepassingen

'Bij de toepassingsopgaven in deze schaal worden percentages gebruikt in allerlei reële contexten. Niet alleen begrip van en vaardigheid in het rekenen met percentages staat centraal, maar ook kennis van begrippen, afspraken in bepaalde sectoren en het doorzien van de context is vereist. De volgende contextsituaties kunnen worden onderscheiden:

- opgaven waarin er iets bijkomt of afgaat zoals: BTW, korting, stijging, daling, toename, verlaging, etc;
- opgaven met renteberekeningen;
- handelsrekenen (inkoop, verlies, winst, verkoop).

In plaats van het niveau van de berekening kan ook gevraagd worden naar de berekeningswijze, bijvoorbeeld (bij grote getallen) welke berekening op de rekenmachine moet worden uitgevoerd.'

Een typering van deze schaal wordt gegeven door:

'De huurprijs van een kamer gaat 7 % omhoog.
Kas de Blauw betaalde per maand f 210,- aan kamerhuur.
Wat wordt het nieuwe maandbedrag?'

Nu volgen twee voorbeelden uit het PPON-rapport met de gemiddelde goedscores:

MICROSCOOP Normale prijs f 138,- Nu 25 % korting Hoeveel moet je nu voor die microscoop betalen? f _____

goedscore 35 %

Joop droomt dat hij zo veel geld op de bank heeft staan dat hij alleen van de rente kan leven. Hij zou dan f 3000,- per maand willen hebben. De bank geeft 6 % rente per jaar. Hoeveel geld zou hij dan op de bank moeten hebben? f _____

goedscore 10 %

Meer dan 8 procent in jaargroep acht komt niet aan de basisstof van deze schaal toe. Maar de basisschoolleraren vinden wel dat 90 procent van de leerlingen een opgave als:

Iemand koopt voor f 800,- aan spullen. Hij moet 30 % van dit bedrag meteen betalen. De rest mag hij in 10 gelijke delen betalen. Hoe groot zijn die delen? f _____
--

goed moet maken. En dat 'terwijl dit voor de gemiddelde leerling nog niet haalbaar blijkt te zijn', zoals in het rapport wordt opgemerkt.

Al met al kunnen we over deze opbrengsten niet al te juichend zijn. Maar hoe is dit mogelijk? Wel, in ieder geval kan dit niet toegeschreven worden aan het feit dat er aan dit onderwerp te

weinig tijd besteed werd. Want hetzelfde rapport meldt dat maar liefst meer dan 10 procent van de lestijd voor rekenen in jaargroep zeven en acht (klas vijf en zes) aan procentrekenen besteed wordt. Dit betekent zo'n veertig lessen van 45 minuten in de beide hoogste leerjaren van het basisonderwijs.

Is dit misschien nog te weinig? Of zal de didactiek aangepast moeten worden, zoals één van de commentatoren aan het eind van het rapport opmerkt. En kan de rekenmachine hierbij wellicht ook een helpende hand bieden?

Eén ding is zeker, het gros van de leerlingen beheerst aan het eind van de basisschool het procentrekenen absoluut niet.

6 Uitleiding en vervolg

In deze aflevering hebben wij een overzicht gegeven van de problematiek van het onderwerp procenten. We hebben daarbij geredeneerd vanuit een volwassen standpunt. Omdat we al wisten welke moeilijkheden zich voordoen, hebben we ze kunnen beschrijven en categoriseren. Omdat we de gegevens van het Cito hebben, konden we het peil van de leerlingen aanduiden. En omdat we dagelijks ook volwassenen, zelfs knappe koppen, met procenten de fout in zien gaan, hebben we gemeend dit onderwerp eerst eens op eigen niveau te moeten beschrijven.



WAAROM MEER BETALEN VOOR PRECIES DEZELFDE MERKARTIKELEN?

figuur 13

Net nu we dit opschrijven, verschijnt er een paginagrote advertentie in de Volkskrant (25.4.1991) waarin Dirk van den Brock een pakket merkartikelen vergelijkt met hetzelfde pakket bij Albert Heijn (fig.13).

Dirk van den Broek zegt dat het $f29,75$ (= 17 procent) scheelt en bedoelt kennelijk: bij Albert Heijn is het $29,75 : 186,02$ (≈ 17 procent) duurder. Albert Heijn zal hier niet zo blij mee zijn, maar zou AH denken dat Dirk van den Broek dus 17 procent goedkoper is? Dat denkt Maaïke Helder wel in haar column in de Volkskrant van de dag daarna. Zij gaat daar op humoristische wijze op deze advertentie in en schrijft dan aan het eind:

'Koken kost veel studie, maar ik weet het nu zeker: ik moet een rekenmachine hebben, het minimumloon kan 17 procent zakken.'

Dus Maaïke (alias Battus, alias Piet Grijs, alias Brandt Corstius) had ook het volgende kunnen denken: Als een pakket van Dirk van den Broek van $f100,-$ bij Albert Heijn $f200,-$ kost dan is dat 100 procent duurder, dus kan het minimumloon wel tot nul gereduceerd worden(!).⁸ Weer dezelfde valkuil: 17 procent ergens bij betekent niet 17 procent eraf om tot het oorspronkelijke bedrag te komen (weer het visitekaartjesprobleem!).

Niet alleen beheerst het gros van de basisschoolleerlingen het procentrekenen niet, het zou best eens kunnen zijn dat dit voor de hele Nederlandse bevolking geldt. Redenen te over om te trachten deze problematiek bij de basis aan te pakken.

Daarom zullen we in de volgende aflevering de (historische) ontwikkeling van de didactiek bespreken, voor- en nadelen van verschillende didactische modellen naast elkaar zetten en verschillende methodieken, inclusief de zakrekenmachine, met elkaar vergelijken.

Noten

1. Moor, E. de: *Wie kan nog rekenen?*, Tilburg 1989.
2. *ibid.*
3. Treffers, A.: *Het voorkomen van ongecijferdheid op de basisschool*, Utrecht 1989.
4. Ontleend aan: Moor, E. de: *Pluspunt Handboek*, 1983.
5. Dit zou voor de onder (a), (b) en (c) genoemde vraagstukjes tot de volgende algebraïsche oplossingswijzen kunnen leiden:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & P = (4 : 100) \times 200 \longrightarrow P = 8 \\ \text{b)} & 75 = (p : 100) \times 1500 \longrightarrow 75 = 15p \longrightarrow p = 5 \\ \text{c)} & 80 = (5 : 100) \times G \longrightarrow G = 1600 \end{array}$$

De algebraïsche aanpak is erg formeel en daarom niet aan te bevelen voor het alledaagse gebruik. Beter is het elke keer opnieuw terug te gaan naar wat precies bedoeld wordt. En op grond daarvan en de aard van de gegevens een strategie te kiezen.

6. Zouden we de formule $E = G + (\frac{p}{100}) G$ gebruiken dan luiden de algebraïsche oplossingen:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & E = 15 + (10 : 100) \times 15 = 16,50 \\ \text{b)} & 9,35 = 9,05 + (p : 100) \times 89,05 \longrightarrow 0,30 = (p : 100) \times 9,05 \longrightarrow p = 0,30 + 9,05 \approx 3\% \\ \text{c)} & 15 = G + (20 : 100) G \longrightarrow 15 = 1,2 G \longrightarrow G = 15 : 1,2 = 12,50 \end{array}$$

Weer zien we hoe werktuiglijk op deze manier de oplossingen zijn. Door het manipuleren met dergelijke formules is de kans groot dat je het zicht op de achterliggende betekenis verliest.

7. De eerste Periodieke Peiling van het Onderwijs Niveau (PPON) is in 1987 door het Cito uitgevoerd. Zie verder: Wijnstra, J.M. (red.): *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool*, Arnhem 1988.
8. Maaïke Helder: *Slakipyog*, Volkskrant 26 april 1991.