

Een jeep in de woestijn. Onbeperkte hoeveelheid brandstof aan het begin van een reis van 3000 km. Maar een beperkte tankinhoud. Wie bedenkt de zuinigste manier om de afstand te overbruggen? Dat was in het kort de opdracht waar de deelnemers van de Wiskunde B-dag voor stonden. **Danny Dullens** geeft een reisverslag.

De Wiskunde B-dag 2001

Op 23 november 2001 jongstleden is de tweede landelijke Wiskunde B-dag gehouden. De Wiskunde B-dag is een landelijke wedstrijd voor leerlingen uit 5/6 vwo en 5 HAVO met Wiskunde B. Ze krijgen een open probleemstelling voorgelegd die ze in groepsverband moeten oplossen. Dit jaar hadden zich 96 scholen aangemeld.

Het onderwerp was: met een jeep met een beperkte tankinhoud en benzine alleen voorradig op de startplek door een grote woestijn rijden.

Dit jaar is er besloten om op de dag zelf een school te bezoeken en de leerlingen gedurende de dag te observeren. Op 23 november 2001, 9.00 uur, het College De Heemlanden te Houten, was het dan zover. Er deden zeven teams (21 leerlingen) mee. Dit was de hele 5 vwo wiskunde B-afdeling. Op deze school wordt de Wiskunde B-dag, zoals op veel scholen, gebruikt als praktische opdracht.



College De Heemlanden te Houten

De Opdracht

De opdracht van dit jaar bestond uit drie delen, waarbij de eerste twee delen een opbouw voor de kernvraag van het derde deel vormden. Als eindopdracht moest een zelfstandig leesbaar werkstuk geschreven worden. De kernvraag was het vinden van een strategie zodat een

jeep met een beperkte tankinhoud en een constant verbruik elke willekeurige afstand zo zuinig mogelijk overbrugt. De volledige opgave is te vinden op: www.fi.uu.nl/wisbdag

Deelopdracht A: Oriëntatie

Deel A bestaat uit twee kleinere, nauwkeurig geformuleerde problemen, A1 en A2. In het kader staat opgave A1.

A1

Er is een afstand van 1100 kilometer te overbruggen met een jeep die in totaal 100 liter kan meenemen. De wagen rijdt 1 op 10, dat wil zeggen dat hij 1 liter verbruikt voor elke 10 kilometer die hij aflegt. Je moet dus (minstens) één depot aanleggen. Ga er voor deze opgave van uit dat je één depot aanlegt. Doe dat zo, dat de totale hoeveelheid benodigde benzine om de 1100 kilometer te overbruggen zo klein mogelijk is. Illustreer je berekeningen en redeneringen met goede figuren.

Opgave A2 was ongeveer hetzelfde. De jeep moest alleen nu een afstand van 1600 km overbruggen. In A2 mochten de leerlingen zelf kiezen hoeveel depots ze plaatsten.

Opgave A1 was bedoeld als een echt opwarmertje. Opgave A2 omvatte al veel meer en was bedoeld als voorwerk



Een schema voor de depotplaatsing bij A2

van deel C. Deze opgave is nog redelijk gesloten en ‘makkelijk’ te berekenen. Bij 1600 km moest het mogelijk zijn voor leerlingen om verschillende methoden en aanpakken te testen.

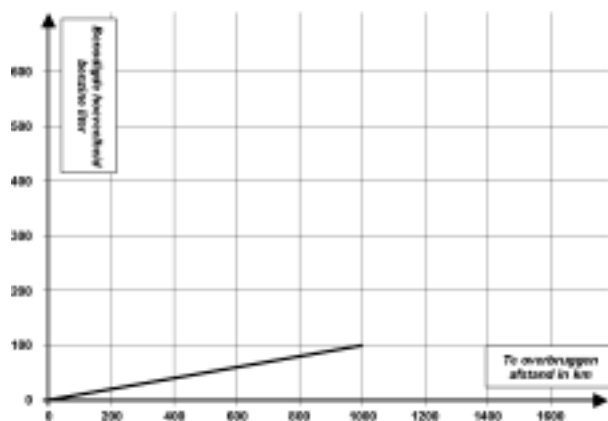
Een slim en ook cruciaal idee is dan ook om van achteren naar voren te rekenen. We hoopten dat veel teams dat door middel van opgave A2 zouden inzien. Een goed begrip van de kern van deze vraag kan dus leiden naar een goed plan van aanpak in C1.

In opgave A1 kwam iedereen wel op 130 liter uit, wat ook het absolute minimum is. Deze deelopdracht was bedoeld om de leerlingen een goed gevoel te geven. Bovendien stuiten ze hier al (onbewust) op een belangrijk punt. Het is voordelig het laatste depot op maximale afstand van het einde te plaatsen. Alle groepjes op College De Heemlanden hadden dit door en zagen in dat opgave A2 herschreven kon worden tot de volgende vraag: hoe krijg ik zo voordelig mogelijk 100 liter op 1000 km van het einde? Hierin onderscheidden de aanpakken. Het ene groepje gaat nadenken en de situatie analyseren, het andere hoopt op het lucky-shot.

Een opmerking die hierbij op zijn plaats is, is dat de laagst gevonden hoeveelheid helemaal niet de beste hoeft te zijn. Theoretisch kan het allemaal heel mooi kloppen, maar er kunnen grote praktische bezwaren aan kleven. Opmerkelijk was dat leerlingen zich op dit punt helemaal niet druk maakten of het praktisch allemaal haalbaar was.

Deelopdracht B: Hoever kun je komen?

In deel B stond een onderzoek naar de existentie van de oplossing centraal. Dit deel is ingevoegd, omdat vooraf niet zeker is dat je met een eindige tankinhoud overall kunt komen. In B1 werd gevraagd om in een grafiek de minimale hoeveelheid benodigde benzine uit te zetten tegen de afstand die moet worden overbrugd.



Bij deze opgave was het de bedoeling dat de leerlingen zouden inzien dat de grafiek erg snel stijgt. Misschien wel te snel ... We hoopten dat de leerlingen hierdoor in twijfel werden gebracht over de existentie van een oplossing bij elke willekeurige afstand. Dat deze oplossing wel altijd bestaat, moest bewezen worden in opgave B2.

B2

1. Laat zien dat het zonder tussendepot mogelijk is om elke willekeurige hoeveelheid benzine én de jeep op 100 km van het startpunt te krijgen.
2. Probeer met elkaar een sluitende redenering te vinden dat je elke willekeurige afstand (door het aanleggen van voldoende depots) kunt overbruggen.

Deelopdracht 1 was bedoeld om de leerlingen te laten inzien dat je het startpunt als het ware 100 km kan verschuiven. In deelopdracht 2 was het de bedoeling dat de leerlingen de redenering van deel 1 door zouden zetten. Dus het startpunt iedere keer twee keer zover verschuiven.

Bij de grafiek van B1 werden de waarden van A ingevuld en er werd gezocht naar een verband. Al snel was een aantal leerlingen met de grafische rekenmachine met verschillen van verschillen bezig. Dat was nog zo moeilijk dat de natuurkundeleraar werd ingeschakeld voor het gebruik van de rekenmachine.



Een grafiek tekenen met behulp van de GRM

De meeste leerlingen hadden in plaats van de (in veel gevallen) stuksgewijze lineaire grafiek, een mooie gladde kromme getekend. Bovendien moesten ze ook nog eens een sluitende redenering vinden voor het feit dat je altijd elke afstand kunt overbruggen. Dit was moeilijk voor de leerlingen. Iedereen vond het logisch dat het kon, maar hoe leg je dat nu uit?

Antwoorden als: ‘Je rijdt net zo lang heen en weer tot je de gewenste hoeveelheid hebt’ zijn dan ook veelvuldig terug te vinden in de gegeven antwoorden.

Deelopdracht C: Plan van aanpak

Ook deel C was verdeeld in twee opdrachten. In opdracht C1 moesten de leerlingen een algemeen plan van aanpak maken om elke willekeurige afstand te overbruggen. Bij deze opdracht was het van belang de gemaakte aannamen



Het plan van aanpak uitschrijven

te rechtvaardigen en duidelijk uit te leggen waar men de depots plaatst afhankelijk van de afstand. Bovendien moest aangegeven worden hoeveel benzine in deze depots opgeslagen werd en wat dan de totale hoeveelheid benodigde benzine was.

Deel C1 was het belangrijkste onderdeel van deze opgave. Het was dan ook de bedoeling dat ze door hun bevindingen van deel A en het bewijs van deel B een goed model maakten met goede argumentaties voor de gemaakte keuzes.

Onderdeel C2 was een toets op onderdeel C1. Bij deze grote slotopgave waarbij een afstand van 3000 km met een jeep met een tankinhoud van 100 liter en een verbruik van 1 op 10 overbrugd moest worden, moest de werking van het plan van aanpak in onderdeel C1 geïllustreerd worden.

Op deze manier wilden we 'fouten' in het plan van aanpak voorkomen. Bovendien was het ook een makkelijke manier om de gemaakte modellen op één aspect, namelijk zuinigheid, te vergelijken.

Deel C bleek, zoals verwacht, een moeilijk deel te zijn. Sommige leerlingen kozen er zelfs voor om met een ander model te werken dan gebruikt was in deel A, omdat ze dat niet uit konden leggen. Het werken met parameters en variabelen is moeilijker dan met voorgeschreven waarden.

Er zijn natuurlijk verschillende soorten modellen gemaakt. Er zijn teams die de afstand in gelijke delen hebben verdeeld. Dit is makkelijk uit te leggen, en het blijkt dat als je dit doet je ook minder benzine nodig hebt naarmate je de afstand tussen de depots vermindert. Theoretisch gezien zou je met dit model de afstand naar nul moeten laten gaan. Praktisch gezien kleven hier nogal wat bezwaren aan. Op een gegeven moment moet je dus een minimale afstand kiezen.

Anderen teams hebben de afstand tussen de depots variabel gemaakt. Afhankelijk van hoe je de depots dan neer-

zet, kan dit voordeel opleveren ten opzichte van het gelijk verdelen van de onderlinge afstanden.

In opgave C2 moest het gemaakte model toegepast worden. Over het algemeen ging dat wel goed. Toch volgden er ook hier nog grote rekenpartijen.

Eindopdracht

Tot slot moest als eindopdracht een zelfstandig leesbaar werkstuk gemaakt worden. Dat werkstuk werd beoordeeld op wiskundige inhoud, presentatie en de gevonden hoeveelheid benzine in opgave C2. De rest van de beoordeling is overgelaten aan de docenten. Op deze manier konden ze nog eventuele eigen eisen inbouwen.

Een werkstuk schrijven levert altijd op het laatste moment stress op. Gelukkig waren er op College De Heemlanden voldoende computers aanwezig. Met z'n drieën of vieren achter de computer of allemaal apart. En dan moet de lay-out ook nog allemaal hetzelfde zijn. En dan mag de printer niet vastlopen. En dan moet daar nog een plaatje tussen. En... En...

Maar uiteindelijk is altijd om 15.59 de printer stil en zijn de leerlingen klaar!

Na een eerste blik te hebben geworpen op het ingeleverde werk, begint het gevoel van blijheid en tevredenheid te leven. De leerlingen zijn moe, maar toch voldaan. Allemaal zijn ze blij dat ze het overleefd hebben en de opdracht tot een goed einde hebben gebracht.

Reacties van docenten en leerlingen

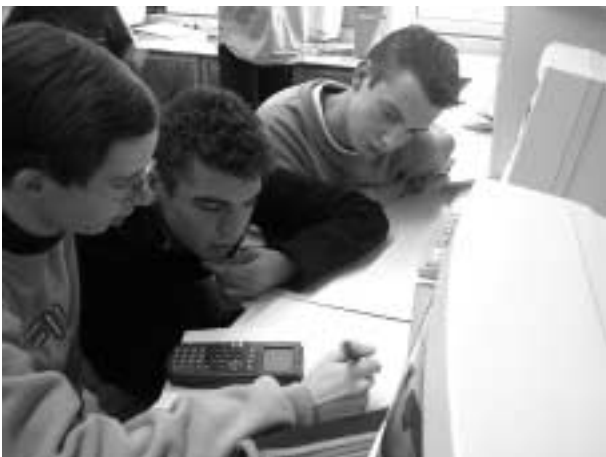
Dit jaar hebben er 96 scholen ingeschreven met ongeveer 564 teams. Dat betekent dat er ongeveer 1800 leerlingen met de opgave bezig zijn geweest.

De enquêtes die meegestuurd zijn met de opgave zijn verwerkt en hieronder volgen enkele resultaten.

Het eerste punt is dat zowel de leerlingen als de docenten het een uitdagende opgave vonden. Ook het onderwerp werd goed ontvangen en kreeg een hoge waardering. De enige bezwaren waren dat het niet realistisch genoeg was en dat het te veel van hetzelfde zou zijn.

Verder blijkt dat 80% van de scholen de Wiskunde B-dag ook als praktische opdracht gebruikt. Op het merendeel van deze scholen is het verplicht voor de leerlingen van voornamelijk 5 VWO met Wiskunde B om deel te nemen.

Een ander aspect is dat het 61% van de leerlingen niet uitmaakt dat de Wiskunde B-dag ook een wedstrijd is. Veel leerlingen zijn, begrijpelijk, veel meer bezig met hun eigen cijfer (voor hun praktische opdracht). Dat ze (soms) ook nog meedoen aan een landelijke wedstrijd schijnt meer de zorg van de docenten te zijn, namelijk bij de docenten maakte het maar 28% niet uit dat de Wiskunde B-dag een wedstrijd is. Uiteindelijk zijn er 50 scholen geweest die werkstukken hebben ingestuurd voor de wedstrijd. Dat is iets meer dan de helft.



Met zijn allen achter de computer

Eigen reflecties

Een leuke bijkomstigheid was dat tijdens de Wiskunde B-dag op College De Heemlanden docenten van verschillende vakken surveilleerden bij de leerlingen. Sommige waren vol verbazing dat ze geen les moesten geven, anderen konden de tijd goed aan andere werkzaamheden besteden. Maar over één ding waren ze het eens. De docenten vonden het stuk voor stuk prachtig wat er gedaan werd: een goede opsteker voor het wiskundeonderwijs! Ook was het leuk te merken dat een door de docent als minder wiskundig begaafde aangemerkte leerling als eerste met idee van achteren naar voren rekenen kwam! Dit benadrukt maar weer dat je met gezond verstand, wat ook aangemerkt kan worden als wiskundig inzicht, heel ver kunt komen. Een aantal leerlingen had dit laatste zelf totaal niet verwacht. Ze hadden gedacht dat je een wiskundige ster moest zijn om iets van de Wiskunde B-dag te kunnen maken. Een idee-fixe dat hopelijk bij een aantal leerlingen is afgezwakt.

Uit de enquêtes zien we dat de docenten een stuk positiever over de gehele opgave zijn dan de leerlingen. Dit zal niemand verbazen. Wat wel heel erg stimulerend kan zijn voor het wiskundeonderwijs is dat het merendeel van de leerlingen een positieve indruk van de Wiskunde B-dag had. De leerlingen hebben een hele dag aan wiskunde gewerkt en ze vonden het nog leuk ook!

Dankwoord

Vanaf deze plek wil ik de heer Robertson en mevrouw Cramer van College De Heemlanden te Houten bedanken voor de hartelijke ontvangst.

Danny Dullens, Freudenthal Instituut

Vrijdag 1 maart 2002 was de prijsuitreiking. De prijswinnaars zijn:

1. Gymnasium Juvenaat H. Hart, Bergen op Zoom
Willem Horst
Robert Langstraat
Ties Bunt
Remko Bakker
2. Lorentz Casimir Lyceum, Eindhoven
Suzanne Detiger
Willemijn Huijgen
Judith van Andel
Karlijn Lammers
2. RSG De Borgen, Leek
René Wardenaar
Martin Woudstra
Bram de Jonge

Het Lorentz Casimir Lyceum en de RSG De Borgen hadden een gedeelde tweede plaats.



Team Gymnasium Juvenaat H. Hart



Team Lorentz Casimir Lyceum