Meten als basis voor het rekenen met de lege getallenlijn

K.P.E. Gravemeijer
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht,
Vanderbilt University, Nashville, Verenigde Staten

1 Inleiding

De lege getallenlijn is zo langzamerhand gemeengoed geworden in het realistische reken-wiskundeonderwijs. In het algemeen wordt een kralensnoer van honderd kralen, die gekleurd zijn volgens een patroon tien licht, tien donker, gebruikt als basis voor het ontwikkelen van deze lege getallenlijn. In deze bijdrage wil ik verslag doen van een onderwijsexperiment waarin een alternatieve ingang werd gekozen: via het meten. Dit onderwijsexperiment werd uitgevoerd in een 'grade one'-klas (groep drie) in Nashville (Verenigde Staten) in het kader van een samenwerkingsproject tussen Vanderbilt University en het Freudenthal Instituut, op basis van een subsidie van de National Science Foundation.[1]
In de praktijk is er een dubbele leergang ontstaan, die zich zowel richt op het leren meten van lengte als op het leren rekenen onder de honderd. Ik zal dan ook over beide onderdelen verslag doen. Verder probeer ik dit concrete voorbeeld aan te grijpen om meer zicht te krijgen op de rol van modellen in het realistische reken-wiskundeonderwijs.

2 Modellen voor het rekenen onder de 100

In de Verenigde Staten was het - en is het in veel gevallen nog steeds - gebruikelijk om de cijferalgoritmen al vroeg in te voeren. Voor het optellen en aftrekken wordt van begin af aan de cijfernotatie gebruikt. Dit onder elkaar rekenen wordt in het algemeen gekoppeld aan het gebruik van concreet materiaal.
De gerichtheid op de cijferalgoritmen maakt echter dat de leerlingen handelingsvoorschriften moeten volgen die indruisen tegen een common-sense aanpak. Bij een opgave als 84 – 37 bijvoorbeeld, wordt van de leerlingen verwacht dat ze eerst acht staafjes van tien en vier losse blokjes van één neerleggen. Vervolgens dienen ze na te gaan of ze zeven losse kunnen weghalen. Kan dit niet, dan moet er een staafje van tien worden gewisseld. Dan zijn er veertien losse blokjes en wanneer de leerling er zeven weghaalt, dan blijven er zeven over. Dan komen de tien staafjes aan de beurt. Daar zijn er nog zeven van over, waarvan er drie moeten worden weggehaald. Daarna kan de leerling het antwoord aflezen: vier staafjes van tien en zeven losse blokjes: 47.
Met deze voorgeschreven procedure wordt de basis gelegd voor het 'lenen' binnen het gangbare cijferalgoritme. Wanneer je 84 – 37 met blokken oplost, is het echter helemaal niet vanzelfsprekend om met de losse blokjes te beginnen. Het ligt veel meer voor de hand om eerst drie tien-staafjes weg te halen. Wanneer er ten slotte nog zeven lossen moeten worden weggehaald, hoeft de leerling niet noodzakelijkerwijs in te wisselen. De leerling kan ook gebruik maken van zijn of haar rekenkennis. Gebruikmakend van de wetenschap dat 14 – 7 = 7 is, kan de leerling direct één staafje en vier lossen vervangen door zeven lossen. Waarmee je ook op 47 uitkomt.
Los van het feit dat de voorgeschreven procedure verhindert dat de leerling zijn of haar gezond verstand gebruikt, is het de vraag of deze werkwijze wel zo goed op het cijferalgoritme voorbereidt. Er is namelijk een belangrijk verschil. Om het cijferalgoritme goed te kunnen uitvoeren, moet de leerling weten dat 14 – 7 gelijk is aan 7. Werkend met de blokken heeft de leerling deze kennis helemaal niet nodig; je haalt gewoon zeven lossen weg en kijkt wat er overblijft.

Wanneer we dit gebruik van concreet materiaal in een breder perspectief plaatsen, dan kunnen we zeggen dat geprobeerd wordt het algoritmisch handelen met tientallen en eenheden, dat in wezen abstract is, concreet te maken. We kunnen in dit verband spreken van een topdown benadering. Uitgangspunt is de formele abstracte kennis en er wordt getracht deze kennis dichter bij - het niveau van - de leerling te brengen.
In realistisch reken-wiskundeonderwijs wordt geprobeerd de omgekeerde weg te bewandelen. In deze bottom-up benadering ligt het uitgangspunt niet in het formele systeem, maar in de eigen aanpakken van de leerlingen. Ook in deze benadering worden modellen gebruikt, maar hier gaat het om modellen die eerst naar voren komen als modellen *van* de eigen activiteit van de leerling en die zich later ontwikkelen tot modellen *voor* meer formeel wiskundig redeneren.[2]

Een bij het rekenen onder de honderd passend voorbeeld is dat van de lege getallenlijn. (Whitney, 1988;

Treffers, 1991). Een belangrijk argument voor het gebruik van de lege getallenlijn is immers dat de leerlingen spontaan oplossingsmethoden gebruiken, die op een natuurlijke manier kunnen worden gemoduleerd met sprongen op de getallenlijn.
In het bekende onderzoekje naar de opgave:

> ‘Een boek heeft 64 bladzijden. Je hebt er al 37 gelezen. Hoeveel moet je nog lezen?’,

bleek de overgrote meerderheid van de leerlingen een oplossingswijze te gebruiken, die we kunnen kenschetsen als sprongsgewijs bijtellen of terugtellen (Vuurmans, 1991) (fig.1).

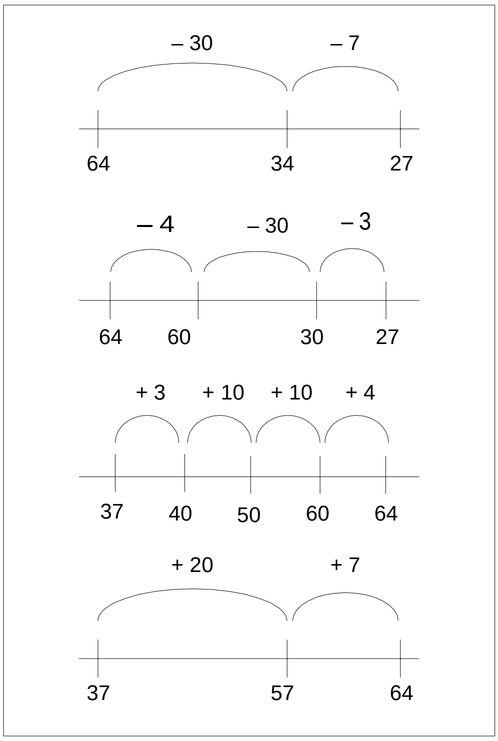
37 + 3 = 40, 40 + 10 = 50,
50 + 10 = 60, 60 + 4 = 64 → 27 bijgeteld.

37 + 20 = 57, 57 + 7 = 64 → 27 bijgeteld.

64 – 30 = 34, 34 – 7 = 27

26 – 4 = 60, 60 – 30 = 30, 30 – 3 = 27.

Op de getallenlijn:



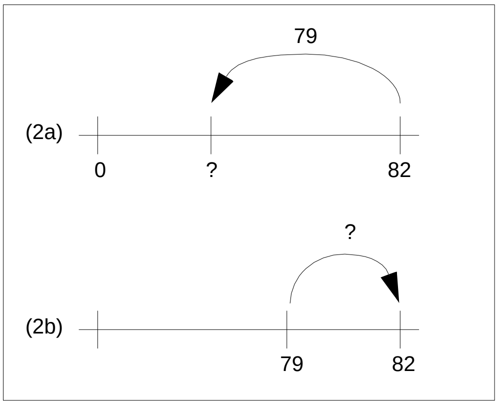
figuur 1

Door aan te sluiten op deze informele strategieën kan de getallenlijn worden geïntroduceerd als een model dat voortkomt uit de activiteit van de leerlingen. Een belangrijk verschil met de standaardprocedure van de blokjes en staafjes zit verder in de vrijheid die de getallenlijn biedt. Waar de blokkenprocedure voorschrijft hoe de leerling moet denken, past de getallenlijnnotatie zich aan bij het denken van de leerling.[3]

In eerste instantie biedt de getallenlijn de leerlingen steun bij strategieën die ze ook hadden kunnen bedenken zonder de getallenlijn. Het grote voordeel van de getallenlijn is echter dat de structuur van de berekening zichtbaar wordt en dat de tussenantwoorden worden vastgelegd. Daarmee ondersteunt de getallenlijn ook het zoeken naar handige oplossingen. Zoals bijvoorbeeld de compensatie-strategie voor het berekenen van ‘+19’ via ‘+20 – 1’.
De leerling kan de getallenlijn nu gebruiken om te laten zien dat ‘+20 – 1’ hetzelfde oplevert als ‘+19’. Wanneer de getallenlijn zo wordt gebruikt, heeft deze een heel andere functie gekregen. De getallenlijn wordt nu gebruikt als ondersteuning voor meer formeel redeneren. Er heeft dus een verschuiving plaatsgevonden van een ‘model-van’ naar een ‘model-voor’.
We kunnen deze ontwikkeling verduidelijken door te kijken naar de relatie tussen de context van de opgave en de op de getallenlijn uitgevoerde berekening. In eerste instantie ontleent het werken met de getallenlijn zijn betekenis aan de achterliggende context-situatie waar de getallenlijn-notatie een beschrijving van is. Dit suggereert dat de leerling zich bij het invullen van de getallenlijn laat leiden door zijn of haar interpretatie van het context-probleem. Neem een opgave als:

> ‘Henk rijdt eerst van Amersfoort naar Leiden. Dat is 82 km. Later rijdt hij terug, maar na 79 km is zijn benzine op. Hoe ver is hij nog van huis?’

Daarbij past een getallenlijn-representatie als die van figuur 2a. Wanneer de leerling zich echter laat leiden door de getallen, dan ligt figuur 2b meer voor de hand.

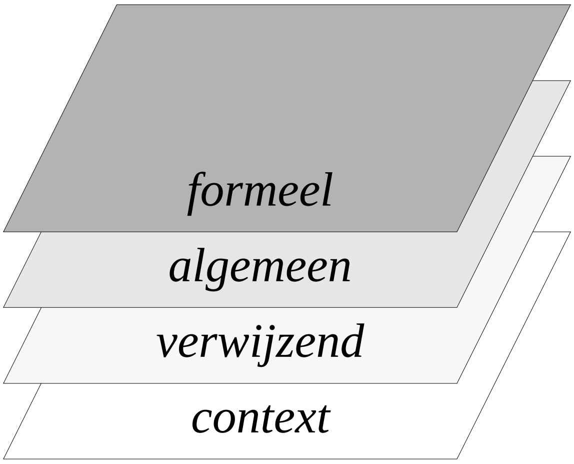


figuur 2a en 2b

Nu kunnen we ons een ontwikkeling voorstellen, waarbij eerst de verwijzing naar de context vooropstaat, en waarbij later de relatie tussen de getallen domineert. Het werken met de getallenlijn krijgt zo geleidelijk aan een zelfstandige betekenis die losstaat van context-opgaven.
In die zin kunnen we twee niveaus onderscheiden:
– een verwijzend niveau waar modellen en oplossingsmethoden hun betekenis ontlenen aan de concrete situatie waar het model naar verwijst;

– een algemeen niveau waar de wiskundige aspecten van de oplossingsmethoden de plaats innemen van de betekenissen in termen van de context.

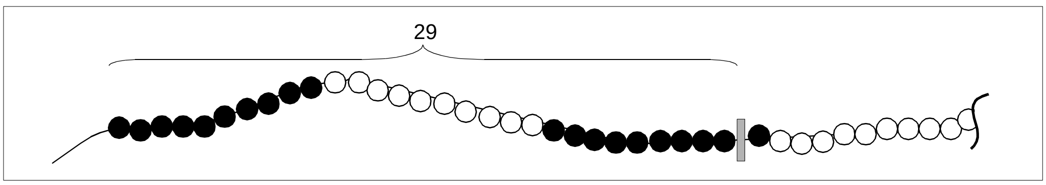
We kunnen deze niveaus zien als niveaus van activiteit die kunnen worden uitgebreid met het concrete niveau van de context waar situatie-specifieke kennis en aanpakken aan de ene kant vanzelfsprekend zijn, en het formele niveau waar de leerling geen model meer nodig heeft, aan de andere kant. Het leerproces kan dan op vier niveaus worden beschreven (fig.3).



figuur 3

In de huidige didactiek wordt de notatie op de lege getallenlijn voorafgegaan door het werken met een kralensnoer van honderd kralen geregen in een patroon van tien zwart, tien wit.

Op dit kralensnoer kunnen getallen worden gesymboliseerd door het overeenkomstige aantal kralen vanaf de linkerkant af te tellen en met een knijpertje of iets dergelijks te markeren (fig.4). De visuele structuur ondersteunt het opzetten en aflezen van getallen dankzij bij de overeenkomst met de tientallige structuur van de getallen. De bedoeling is nu dat de leerlingen kralensnoer-specifieke oplossingsstrategieën ontwikkelen wanneer zij opdrachten uitvoeren rond het erbij doen, eraf halen en vergelijken van aantallen kralen. Zo kan de leerling gebruik maken van de groepen van tien bij het maken van sprongen van tien en bij het rekenen via het tiental (fig.5). Overigens mogen we wel hopen dat de leerling hier meer doet dan een visueel patroon gebruiken; zoiets als ‘wanneer je tien verder springt, kom je op een vergelijkbare plek’. (In dit geval twee voor de volgende zwart/wit grens.) Je zou willen dat de leerling zich realiseert dat dit zo mooi uitkomt, omdat 48 gesplitst kan worden in $4 \times 10 + 8$ en 58 in $5 \times 10 + 8$.



figuur 4

Het bottom-up karakter van de aanpak komt naar voren in overgang van het kralensnoer naar de getallenlijn. Deze wordt geïntroduceerd als een hulpmiddel voor het beschrijven van informele kralensnoerstrategieën. De getallenlijn wordt dus door de leerlingen gebruikt om het eigen informele context-gebonden rekenen te modelleren.

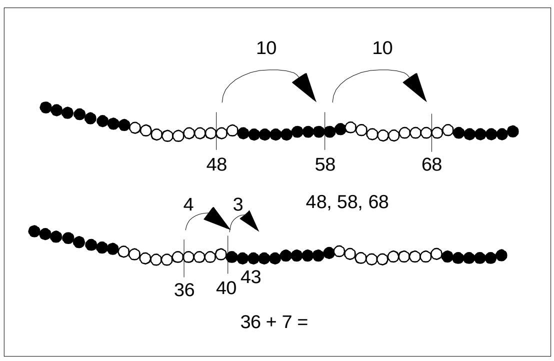
Alleen, wat is de context hier? Feitelijk is er geen andere context dan die van het tellen van kralen op het kralensnoer.

3 Het kralensnoer als basis

Toen we in de Verenigde Staten met de lege getallenlijn gingen experimenteren, maakten mijn Amerikaanse collega’s bezwaar tegen deze artificiële context. Wat moeten de leerlingen hiervan denken? Waar komt het kralensnoer vandaan en waarom zou je er sommetjes op gaan doen? Is dit wel realistisch?

Eigenlijk moest ik ze wel gelijk geven. Het kralensnoer vormt een op zichzelfstaand schools wereldje en er is voor de leerlingen geen enkele reden om erop te gaan rekenen, anders dan, ‘omdat de meester of juf dat vraagt’. Zoiets als het kralensnoer lijkt echter wel noodzakelijk als voorbereiding op de lege getallenlijn.

Dit laatste bleek ook wel toen mijn Amerikaanse collega’s besloten het werken met het kralensnoer over te slaan in een in Nashville uitgevoerd onderwijsexperiment (Cobb, Gravemeijer, Yackel, McClain & Whiten-

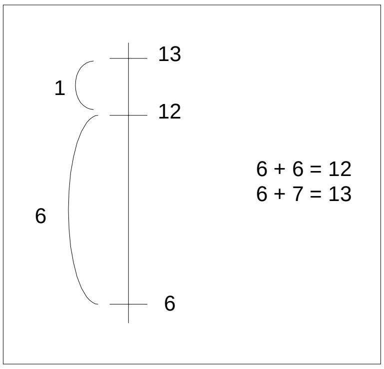


figuur 5

ack, 1997). In dit onderwijsexperiment werden de getallenlijn-activiteiten voorafgegaan door de zogeheten ‘Candy-Shop’. Het Candy-Shop verhaal richt zich op het groeperen in tientallen en eenheden in de context van een verhaal van Mrs. Wright die snoepjes maakt en verkoopt. Deze snoepjes worden door haar verpakt in rollen. Dit vormt de basis voor verhalen waar snoepjes worden in- en uitgepakt. De snoepjes worden voorgesteld door unifix cubes, dat zijn blokjes die aan elkaar kunnen worden geklikt tot staven. Zo kunnen er gemakkelijk staven van tien (een rol snoepjes) worden gemaakt.

Naast de Candy-Shop activiteiten werd het rekenen onder de twintig met de klas geoefend met het spel ‘Target’. De leerkracht noemt twee getallen. Eén ervan is het doelgetal, de ander vormt het startpunt en de vraag is hoe je van het startpunt bij het doelgetal komt.

Tijdens zo’n oefening introduceerde de leerkracht spontaan de lege getallenlijn. In de opgave was het target 13 en het startpunt 6. De oplossing van de leerling luidde: ‘6 + 6 = 12 en 12 + 1 = 13’. De leerkracht visualiseerde dit als sprongen op een verticale getallenlijn (fig.6).



figuur 6

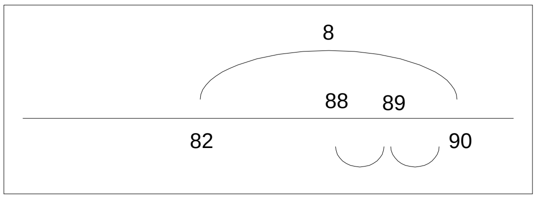
Naar het oordeel van de onderzoekers die op dat moment voor de uitvoering verantwoordelijk waren, was de getallenlijnrepresentatie zo helder voor de leerlingen, dat ze besloten het kralensnoer over te slaan. Oorspronkelijk waren er wel kralensnoeractiviteiten gepland, maar die werden vervangen door het met sprongen op de getallenlijn beschrijven van transacties in de Candy-Shop.

Deze aanpak leek succesvol totdat er zich een onthullende gebeurtenis voordeed. De klas besprak de vraag: ‘Hoeveel candies Mrs. Wright zou overhouden wanneer ze er acht van een voorraad van negentig verkoopt.’ Eerst leggen twee leerlingen uit hoe ze aan hun antwoord ‘82’ zijn gekomen. Vervolgens probeert Donald uit te leggen dat het 83 moet zijn. Nu blijkt dat Donald meent dat je drie candies hebt weggehaald als je van 90 naar 88 gaat.

Leerkracht: ‘Nou, wacht eens even. Je haalt weg, Donald, je zei dat je één snoepje weghaalde, en toen hield je er 89 over. Is dat wat je zei?’

Donald knikt.

Leerkracht: ‘En toen haalde je nog een snoepje weg, en toen had je 88. Klopt dat?’ (tekent) (fig.7).



figuur 7

Donald: ‘Klopt.’

Leerkracht: ‘Dus hoeveel snoepjes heb je tot nu toe weggehaald?’

Donald: ‘Drie.’

Leerkracht: ‘Oké, laat me eens zien waar die drie snoepjes zitten die jij hebt weggehaald.’

Donald: ‘De 90, 98. Ik bedoel de 90, de 89 en de 88 (wijst naar de tekening).’

Mark en Joseph proberen Donald ervan te overtuigen dat het 82 moet zijn. Een van hen steekt tien vingers op en laat zien dat je er twee overhoudt als je er acht weghaalt. Dit is voor Bob en Kendra aanleiding om te betogen dat het antwoord 81 moet zijn; de twee die je overhoudt zijn 80 en 81. Voor deze leerlingen bestaat het negende tiental waarschijnlijk uit 80 tot en met 89. Als je daar twee van afhaalt, houd je inderdaad 80 en 81 over. Kenmerkend aan deze discussie is dat de getallenlijn geen duidelijkheid biedt, maar eerder de verwarring vergroot. Blijkbaar interpreteren de leerlingen de getallenlijn-notatie niet hetzelfde. Achteraf kan worden beredeneerd dat dit komt omdat niet duidelijk is waar de getallenlijn voor staat. Bij de introductie via het kralensnoer verwijst de getallenlijnnotatie naar bijtellen en terugtellen op het kralensnoer; je kunt de beweging er nog achter zien. Bij de introductie in het Amerikaanse onderwijsexperiment ontbreekt deze achtergrond. De Candy-Shop context ontbeert een dergelijke lineaire dynamiek. De getallenlijnnotatie heeft daardoor het karakter gekregen van een formele notatie; de leerlingen hadden eigenlijk net zo goed kale sommen kunnen opschrijven. Een notatie die bovendien niet eenduidig is: Tel je de streepjes of tel je de sprongen.

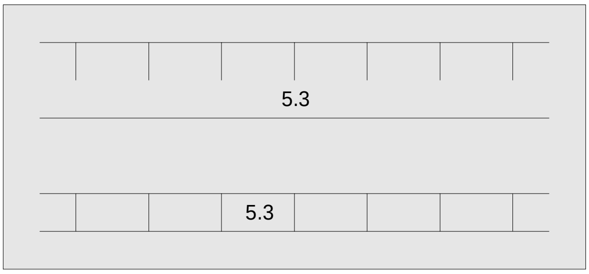
Nu is dit laatste niet uniek voor het hier beschreven onderwijsexperiment. Ook in de in West Lafayette (Verenigde Staten) uitgevoerde experimenten met het kralensnoer kwam dit probleem naar voren (Gravemeijer, 1994).

Toen de overstap werd gemaakt van een echt kralensnoer naar een getekend kralensnoer, kwam de vraag naar voren hoe je 53 moest markeren. Sommige leerlingen wilden een streepje zetten door de 53e kraal, anderen zetten het er rechts naast. Hier kon de verbinding met het concrete kralensnoer echter uitsluitsel brengen. Het ging immers om een totaal van 53 kralen. Die kralen kon je met je handen omvatten: één hand links van de eerste kraal en één hand rechts van de 53e kraal.

Daarmee was het pleit beslecht: de streep moest náást de 53e kraal.

4 De liniaal als model

Het probleem dat zich hier voordeed, is verwant aan dat wat zich voordoet bij het aflezen van een liniaal. Ook hier bestaat bij de leerlingen soms verwarring over de vraag of een getal verwijst naar een segment of naar een grens tussen twee segmenten (fig.8). De gelijkenis bracht ons op de vraag of we het meten niet als alternatieve voorbereiding op de getallenlijn zouden kunnen gebruiken.



figuur 8

Bij het ontwerpen van deze nieuwe leergang wilden we ons laten leiden door de ‘model-van’/‘model-voor’ heuristiek. Dit bracht ons tot de volgende vragen:
– wat is hier het model?
– welke activiteit wordt er gemodelleerd?
– waar is het model een model voor?
– wat houdt de ‘model-van’ / ‘model-voor’ overgang in?

We besloten het idee van een liniaal op te vatten als het overkoepelende model. Deze meetlat kan worden opgevat als een model van het afpassen van een bepaalde lengte-eenheid. Aan de andere kant kan de liniaal fungeren als een model voor het handig rekenen onder de honderd.
Om een dergelijke overgang mogelijk te maken, moet het werken met grootheden (benoemde meetgetallen) geleidelijk aan worden vervangen door het redeneren over hoeveelheden. Dit moet er vervolgens toe leiden dat er een netwerk van getalrelaties wordt gevormd dat flexibel rekenen mogelijk maakt.

De leerlijn kan er globaal als volgt uit zien:
1 meten door middel van het afpassen van een bepaalde lengtemaat;
2 introductie van een eenheid van tien lengtematen als nieuwe meeteenheid; meten met twee maten: ‘tienen’ en ‘enkelen’;
3 introductie van de meetstrip als een model van het herhaald afpassen van tienen en of enen (fig.9);
4 het redeneren over toevoegen, afhalen en vergelijken met behulp van de meetstrip;
5 het weergeven van oplossingsmethoden op een geschematiseerde meetstrip (lege getallenlijn);
6 gebruik van getallenlijnnotatie als kladblaadje en als communicatiemiddel voor oplossingsmethoden voor optellen en aftrekken.

Essentieel in deze opzet is de combinatie van de twee maateenheden, waarbij de een tienmaal de andere is. Hiermee wordt een structurering van de meetlat in tientallen en eenheden voorbereid.
Een belangrijke stap in de leergang betreft de overgang van meten naar redeneren. Daadwerkelijke meetopdrachten worden nu vervangen door opdrachten als:

> Een touw is 64 eenheden lang; hoe lang is een plank die 28 eenheden langer is?

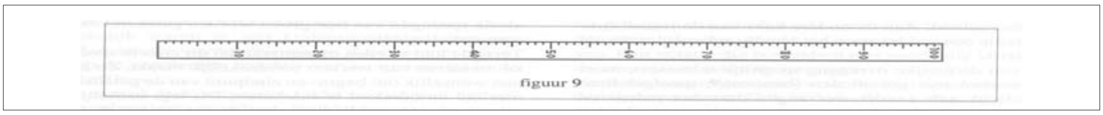
De leerlingen kunnen deze opgave oplossen door 64 op de meetstrip aan te wijzen en vervolgens 28 eenheden verder te tellen. De meetstripstructuur kan echter gebruikt worden om dit tellen rekenend te verkorten. Bijvoorbeeld 64 + 6 = 70; 70 + 20 = 90 en 90 + 2 = 92. Dit rekenen kan weer worden ondersteund door het aanwijzen van de toevoegingen op de meetstrip. Dit kan vervolgens schematisch worden beschreven met sprongen op een getallenlijn.

De overgang van de meetstrip naar de getallenlijn dient echter heel zorgvuldig te gebeuren. Een bezwaar van een meetlat als basis voor de lege getallenlijn is namelijk het rigide karakter van een meetlat of meetstrip. Kenmerkend voor de meetlat is dat alle posities precies vastliggen en dat de intervallen tussen de getallen proportioneel zijn. Dit maakt het welhaast onmogelijk om een onbekend getal aan te geven. De positie die je markeert, hoort namelijk bij een precies bekend getal. Flexibel gebruik van de getallenlijn vereist dat getalposities slechts globaal worden aangegeven. Uiteraard dient de volgorde te kloppen en verder is de notatie inzichtelijker als de sprongen van tien groter worden getekend dan de sprongen van één.
Terzijde kan worden opgemerkt dat dit enkele specifieke manieren van werken noodzakelijk maakt. Zo is het niet wenselijk om begin- en eindpunt van de getallenlijn met nul en honderd te markeren. Dit legt namelijk de schaal van de getallenlijn vast en dat wringt met een vrije spronggrootte.
Iets dergelijks geldt bij het vergelijken van twee getallen. De eerste impuls van de leerling zou kunnen zijn beide getallen op de lege getallenlijn in te tekenen. Maar dan wordt het erg lastig de nog onbekende sprongen tussen deze twee getallen te laten passen. Kern is echter dat de leerling niet de meetstrip zelf, maar het handelen ermee als uitgangspunt neemt. Dan is het vanzelfsprekend om eerst één getal neer te zetten en dan stapsgewijs aan te vullen of af te halen tot je bij het tweede getal bent.
In die zin kan ook het verschil tussen de rigiditeit van de

meetstrip en de flexibiliteit van de lege getallenlijn juist worden aangegrepen om duidelijk te maken dat het er niet om gaat om een afbeelding van de meetstrip te maken. Het is de bedoeling dat de leerling de handeling, annex redenering afbeeldt. Een dergelijke afbeelding hoeft niet precies te zijn.

De feitelijk in Nashville gehanteerde leergang zag er als volgt uit.
De eerste fase van de leergang bestond uit het meten van de lengten van objecten in de klas - zoals een kleed, een kast, en dergelijke - door de lengte met de voeten af te passen (‘hakken-tenen’). De volgende fase bestond uit het meten met een papieren ‘footstrip’ die bestond uit vijf getekende voeten.
Hierna werd overgeschakeld op het meten met blokjes, in casu de eerdergenoemde ‘unifix cubes’ die in vrijwel elke Amerikaanse schoolklas voorhanden zijn. De ‘cubes’ stelden voedselblikken voor die smurfen volgens een contextverhaal zouden gebruiken om van alles te meten.
Het meten met de losse blokjes c.q. voedselblikken werd vervolgens verkort door gebruik te gaan maken van een ‘smurf bar’ van tien blokjes. Deze smurf bar bestaat in eerste instantie uit tien aan elkaar geklikte unifix cubes, maar deze werd al gauw vervangen door een papieren smurf bar waar de individuele blokjes op staan afgetekend.
Dit meten met de papieren smurf bar kan zeer efficiënt gebeuren: eerst zoveel mogelijk tientallen afpassen met de smurf bar en dan de resterende eenheden meten met de markeringen op de smurf bar. De tientallige structuur van getallen krijgt daarmee een heel concrete vulling.
De volgende stap bestond uit het samenvoegen van tien papieren smurf bars tot een meetstrip van 100, gestructureerd in tientallen en eenheden (fig.9).
Nadat deze meetstrip enige tijd was gebruikt voor allerlei meetopdrachten volgde de omschakeling naar rekenvragen over meetresultaten (zoals die over de eerdergenoemde plank die 28 langer is dan een touw van 64). De nadruk kwam daarbij te liggen op de rekenredeneringen die het aftellen of afmeten konden vervangen. Deze oplossingsmethoden werden ten slotte beschreven met sprongen op een lege getallenlijn. Daarmee was ook de weg vrij voor het optellen en aftrekken in andere contexten dan een meetcontext.

Zo wordt het beoogde eindpunt van de getallenlijnleergang bereikt. Tegelijkertijd zal duidelijk zijn dat het meten binnen deze leergang een dusdanige betekenis heeft gekregen, dat we kunnen spreken van een dubbele doelstelling: enerzijds het leren meten van lengte en anderzijds het flexibel oplossen van optel- en aftrekopgaven onder de 100. Ik zal beide doelen een voor een bespreken, te beginnen met het optellen en aftrekken.


figuur 9

5 Het flexibel oplossen van optel- en aftrekopgaven onder de 100

Ik wil hier benadrukken dat het niet gaat om het aanleren van bepaalde handige rekenmaniertjes (zoals +19 = +20 – 1). Voorop staat het ontwikkelen van getalrelaties als:

38 = 30 + 8
38 = 40 – 2
38 = 20 + 18
38 + 10 = 48
enzovoort.

Deze getalrelaties zijn geworteld in het meten met tienen en enen wat de basis vormt voor de ontwikkeling van de meetstrook en de daarbij horende meetstrook-specifieke rekenmanieren (met tienvouden als referentiepunten). Het werken op de lege getallenlijn sluit daarop aan met het symboliseren van meetstrook-specifieke rekenmanieren. Uiteindelijk komt dit laatste in dienst te staan van het vinden en bespreken van oplossingsmethoden voor optellen en aftrekken onder de 100.
Nu moet bij dit alles worden opgemerkt dat het primaat van de getalrelaties niet direct zichtbaar hoeft te zijn in het handelen van de leerling. In dit verband dient een onderscheid te worden gemaakt tussen het actor-perspectief en het observator-perspectief. Wat wij als observerende deskundigen zien, hoeft niet hetzelfde te zijn als wat de leerling vanuit zijn of haar (actor’s) perspectief ziet.
Neem bijvoorbeeld een opgave als 45 – 6, die een leerling uitrekent via 45 – 5 = 40; 40 – 1 = 39. Vanuit een observator-perspectief zijn we algauw geneigd te denken dat de leerling een standaard oplossingsmethode voor het overbruggen van het tiental volgt: eerst afhalen tot het tiental, dan de rest eraf halen.
Voor de leerling kan er iets heel anders aan de hand zijn. Kijkend naar de getallen bedenkt de leerling bijvoorbeeld dat zes één meer is dan vijf. Tevens realiseert hij of zij zich dat vijfenveertig kan worden gesplitst in veertig en vijf. De oplossing van het afsplitsen van vijf ligt dan voor de hand. De leerling gebruikt hier dus niet een (aangeleerd) handig rekenmaniertje, maar maakt gebruik van de getalrelaties die hij of zij ‘ziet’. Natuurlijk kan de leerling na verloop van tijd patronen gaan

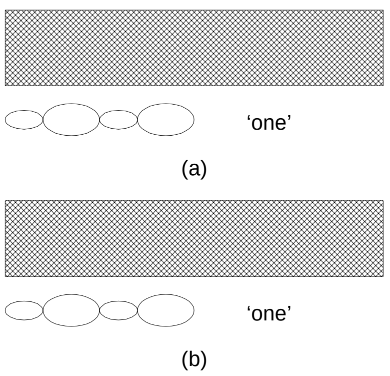
herkennen in oplossingsmethoden. Zo'n patroon kan dan op een gegeven moment een naam krijgen en bijvoorbeeld 'optellen en aftrekken via het tiental' gaan heten. En uiteindelijk kan deze kennis ook het oplossingsgedrag weer gaan beïnvloeden.

Maar aan de basis liggen dan wel de uitvindingen van de leerling zelf en niet handige rekenmaniertjes die een ander aanreikt. Natuurlijk kunnen de leerlingen zo'n maniertje als ze erop gewezen worden wel begrijpen, maar je weet nooit precies wàt ze dan begrijpen. Daarbij is met name cruciaal welke status de getalrelaties hebben. Wanneer deze niet de zojuist geschetste concreetheid hebben, bestaat het gevaar dat de leerlingen het splitsen van tientallen en eenheden puur uitvoeren als het manipuleren met cijfersymbolen. Dan is er alleen sprake van instrumenteel begrijpen (cf. Skemp, 1976) weten hoe je iets moet en niet van relationeel begrijpen, dat het waarom omvat).

In de hier beschreven leergang vormt de vorming van een netwerk van getalrelaties, waarbinnen getalrelaties een zodanige concreetheid krijgen, dat de leerlingen getalrelaties gaan zien en gebruiken, een voorwaarde voor het inzichtelijk gebruik van handige rekenstrategieën.

6 Het leren meten van lengte

Een van de kernbegrippen in de meetleerlijn is de notie van 'lengte als object' - een object dat je kunt structureren en waarmee je kunt manipuleren (Cobb, Stephan, McClain, Gravemeijer, in press). Wat hiermee wordt bedoeld, valt waarschijnlijk het beste duidelijk te maken door het leerproces te beschrijven dat zich voltrekt wanneer de leerling de leergang doorloopt.



figuur 10a en 10b

Voor sommige leerlingen bestaat het meten door voet-voor-voet af te passen primair uit het uitvoeren van een procedure. Meten is niet meer dan het opzeggen van de telrij, synchroon met het neerzetten van je voeten. Dit werd in het onderwijsexperiment zichbaar toen bleek dat de leerlingen op twee verschillende manieren telden en daar eigenlijk geen probleem in zagen. Angie begon met het opzeggen van de telrij bij het neerzetten van de eerste voet (zie fig.10a). Sandra begon pas te tellen bij het neerzetten van de tweede voet (fig.10b).

Dat dit tot een probleem leidde, , werd de leerlingen pas goed duidelijk toen de leerkracht het zetten van stappen markeerde met stukken plakband.

Toen het plaatsen van voeten op deze manier zichtbaar was gemaakt, begonnen er leerlingen te beargumenteren dat Sandra's manier tot een kleiner aantal zou leiden dan Angie's manier.

Melanie: Sandra telde deze niet (plaatst voet in de eerste met plakband gemarkeerde plek), zij zette deze gewoon neer en begon daarna pas te tellen, 1, 2. Maar deze heeft ze niet geteld (wijst op de plek tussen de eerste twee stukjes plakband).

Leerkracht: Dus zij zou 1, 2 tellen (terwijl ze naar de eerste drie voetstappen wijst). Hoe zou Angie deze geteld hebben?

Melanie: Angie telde ze als 1, 2, 3.

Leerkracht: Dus voor Angie is het 1, 2, 3 en voor Sandra is het 1, 2.

Melanie: Omdat Angie deze (wijst naar de eerste plek) telde en Sandra niet. Maar als Sandra deze wel had geteld, zou Angie drie hebben geteld en Sandra ook. Maar Sandra telde deze niet, dus heeft ze er één minder.

Leerkracht: Wat vinden jullie van deze verschillende manieren, Sandra, Angie, of iemand anders? Maakt het wat uit? Of kan het op beide manieren? Hilary?

Hilary: Je kunt het op de manier van Angie doen of op de manier van Sandra.

Leerkracht: En het zou geen verschil maken?

Hilary: Ja, ze zijn wel verschillend. Maar het maakt niet uit want ze meten wel, maar het is alleen een andere manier en ze gebruiken ook hun voeten. Sandra laat de eerste weg en begint met de tweede, maar Angie doet de tweede en Sandra noemt het alleen eerste.

Preston: Het zijn twee verschillende manieren. Ik dacht dat Sandra's manier hoger zou uitkomen dan Angie's. Omdat Angie bij één begon en drie kreeg, terwijl Sandra maar twee kreeg. Sandra zou hoger uitkomen omdat zij minder was dan Angie. Zij heeft vijftien (het totale aantal voeten waar Sandra eerder op uitkwam). Angie ging naar het eind van het kleed (bedoelt het begin van het kleed). Sandra startte na het kleed. Haar (antwoord) is minder omdat er minder kleed over is. Angie startte hier en dan is er meer kleed. Het is dezelfde manier, maar zij komt op een lager getal uit dan alle anderen.

Alex: Ze mist er hier eentje. Ze mist deze hier (wijst). Ze doet één, maar dit zou één moeten zijn, want je mist een voet dus wordt het korter.

Leerkracht: Dus hij vindt het heel belangrijk. Wat vinden de anderen daarvan?

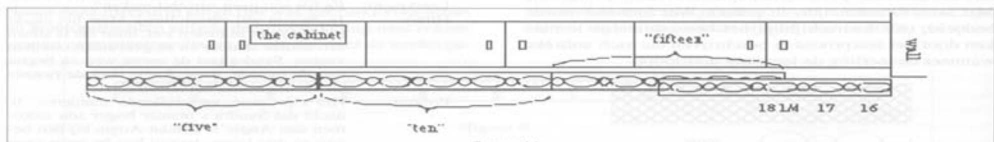
Alex: Omdat je een stukje overslaat, wordt het wat minder kleed.

In deze discussie wordt de aandacht van de leerlingen

gericht op het feit dat het bij het meten gaat om het uitvinden hoeveel voeten er op een lengte passen.
Voor veel leerlingen bleef er echter verwarring bestaan tussen het tellen van stappen en het meten van afstand. Voor hen verwees (bijvoorbeeld) ‘vijf’ naar de vijfde voet die werd neergezet, en niet naar de afstand van vijf voet die inmiddels was afgelegd.
Hierbij passende meetfouten betroffen bijvoorbeeld het ‘afronden’. Wanneer de leerlingen niet precies uitkwamen, zetten zij bijvoorbeeld hun voet dwars om deze vervolgens in zijn geheel mee te tellen. Of ze kwalificeerden $11\frac{1}{2}$ als $12\frac{1}{2}$. Naar ons idee betekent $12\frac{1}{2}$ hier voor de leerlingen ‘halverwege de 12’. We kunnen hier een vergelijking maken met ‘half 12’ als tijdstip, tegenover ‘$11\frac{1}{2}$ uur’ als tijdsduur.
In de volgende fase werd het meten met de eigen voet vervangen door het meten met een ‘footstrip’ van vijf standaard voeten lang. Als standaard fungeerde de voet van de koning die in de contextverhalen figureerde. Een belangrijke doorbraak vormde hier de volgende klassediscussie.

De leerlingen waren een dressoir met een footstrip aan het meten, maar liepen tegen het probleem aan dat het niet mooi uitkwam. Bovendien konden ze de footstrip niet voor een vierde keer neerleggen, omdat het dressoir tegen een muur eindigde. Ze legden de footstrip daarom met een kant tegen de muur en tellen terug tot waar ze met de derde iteratie gekomen waren (fig.11).

Verscheidene leerlingen gaven te kennen dat ze deze oplossing niet begrijpen en de aanwezige onderzoeker stelde daarom voor de footstrip op te schuiven en het uitstekende deel langs de muur omhoog te laten steken. Toen de leerlingen dat deden, maakte Lloyd bezwaar.



figuur 11

Lloyd: Eh. Zo meet het niet het hele dressoir. Dat lukt zo niet.
Onderzoeker: Wel, Lloyd zegt dat het zo niet lukt. Dat is interessant. Wat denken anderen daarvan?
Pat: Ik denk dat het, ik denk dat het net achttien is als je het dressoir meet.
Lloyd: Ik denk van niet. Je moet van hier (begin van het dressoir) tot hier (andere eind van het dressoir) meten. Ik bedoel tot de muur. Zo meet je tegen de muur omhoog. Het moet tot hier.
Pat: Maar het stopt toch bij het eind van het dressoir.

Lloyd herhaalde zijn argument en de onderzoeker constateerde dat er twee meningen waren. Daar reageerde Sandra op.

Sandra: Ik heb een vraag voor Pat, zij zei niet dat je helemaal tegen de muur omhoog moet gaan.
Pat: Ja, maar als je precies hier ophield (waar de footstrip tegen de muur omhoog gaat), dan zou je deze extra voeten hier niet hebben (wijst naar het deel van de footstrip dat rechtop staat).
Onderzoeker: Dus Pat. Zie jij in gedachten waar de muur, de muur ...
Lloyd: Ik zie iets (opgewonden). De halve en de twee voeten. 15, 16, 17 en een halve voet (wijst op de voeten in de footstrip op de grond). Daar gaat het om. Ik denk dat hij bedoelde net te doen alsof dat deel daar was afgeknipt (wijst naar het stuk tegen de muur).
Pat: Ja.
Onderzoeker: Je stelt je dat in gedachten voor, Lloyd? Helpt dat Edward?
Edward: Ik ben het ermee eens.
Max: Sommigen zouden kunnen denken dat hij tegen de muur op mat, zeg maar tot twintig.
Lloyd: Nee, dat is niet wat hij doet. Hij knipt het gewoon af. Ik denk dat we het probleem hebben opgelost.

Tot dit moment hadden de leerlingen de footstrip opgevat als een nieuwe maateenheid die voor hen blijkbaar ondeelbaar was. Nu realiseerden ze zich dat de footstrip mentaal kan worden gesplitst. In combinatie met het vertalen van meetresultaten in footstrips (bijvoorbeeld ‘3’) naar meetresultaten in voeten (‘15’) en omgekeerd ontstond zo het besef dat je lengte op verschillende manieren kunt structureren. Dit helpt weer om het concept lengte los te maken van de concrete activiteit van het afpassen.
In eerste instantie beantwoordden de leerlingen de vraag: Hoe vaak past de gekozen maat hierin? Nu anticipeerden ze op het resultaat van de meetactiviteit. De lengte van iets was zelf een object geworden; een grootheid. Een grootheid waarvan je de precieze waarde misschien nog niet kent, maar die je via meten kunt achterhalen. Dan wordt het ook vanzelfsprekend voor de leerlingen om de meetstrook te gaan gebruiken om degelijke waarden te achterhalen.
De meetstrook kan nu dienst gaan doen als hulpmiddel bij het redeneren over lengten. Een lengte van 64 unifix cubes kan via de meetstrook direct worden vergeleken met een lengte van 92 unifix cubes, zonder dat de beide lengten daadwerkelijk gemeten behoeven te worden. De

posities op de meetstrook staan nu voor de corresponderende lengtes. Daarmee wordt tevens een basis gelegd voor het kardinaal interpreteren van posities op de lege getallenlijn.

7 Besluit

De getallenlijn wordt gebruikt om de leerlingen te helpen de overgang naar het formele rekenen te maken. Het is de bedoeling dat het startpunt daarbij ligt in de informele kennis en strategieën van de leerlingen en het eindpunt in het flexibel zonder hulpmiddelen rekenen onder de honderd.
Hoewel er bezwaren zijn in te brengen tegen het artificiële karakter van het kralensnoer, is ook duidelijk geworden dat de getallenlijn niet zomaar kan worden ingevoerd. Voor een goede interpretatie van de getallenlijnnotatie is het noodzakelijk dat de leerlingen kunnen terugvallen op een onderliggende betekenis. In de beschreven leergang wordt die betekenis ontleend aan het meten van lengte. Een voordeel van deze opzet is dat het meten kardinale en ordinale aspecten integreert. Terwijl het meten met maten van tien en één stimuleert dat de leerlingen de getallen tot en met honderd gaan structureren met tienvouden als referentiepunten. Al metend en redenerend bouwen de leerlingen zo een netwerk van getalrelaties op, dat ze vervolgens kunnen benutten voor het flexibel rekenen onder de honderd.
In samenhang hiermee kan de overgang van het informele naar het formele rekenen worden beschreven als het creëren van een nieuw stukje wiskundige werkelijkheid. Deze nieuwe werkelijkheid bestaat in dit geval uit getallen onder de honderd die het karakter hebben gekregen van wiskundige objecten die hun betekenis ontlenen aan hun positie in een netwerk van getalrelaties. Bij de aanvang van de leergang zijn de getallen voor de leerlingen nog gebonden aan concrete meethandelingen. Geleidelijk aan krijgen ze het karakter van grootheden en vandaaruit ontwikkelen zich de getallen als objecten met een op zichzelfstaande betekeniswereld. Het onderscheid tussen informeel en formeel is daarmee tevens getypeerd als een relatief onderscheid. Het redeneren met getalrelaties is formeel vanuit het perspectief van de leerling die aan de leergang begint en voor wie op zichzelfstaande getallen nog abstract zijn. Na het doorlopen van de leergang zijn ze echter concrete objecten voor de leerlingen geworden. Kenmerkend voor dit onderwijsexperiment is de aandacht voor het denken van de leerling. Bij het analyseren van het leerlinggedrag staat niet het verbeteren van strategieën voorop. maar wordt de vraag gesteld welke conceptuele noties er in het geding zijn.
Zo wordt er bij het meten onderscheid gemaakt tussen leerlingen, die in het afpassen een toenemende lengte zien en anderen, die dit afpassen zien als het nummeren van individuele stappen. Bij het rekenen spelen zaken als de zojuist geschetste notie van getallen als wiskundige objecten en de vraag wat de sprongen op de getallenlijn voor de leerlingen symboliseren.
In het laatste geval maakte het nogal wat uit of de leerling een model maakt van de meetlat of het kralensnoer, of dat hij of zij een model maakt van de eigen oplossingsmethode.

Zo zagen we in het genoemde experiment in West Lafayette, dat leerlingen een opgave van het type: ‘Hoeveel is 63 meer dan 48’, probeerden op te lossen door eerst 48 en 63 op de getallenlijn te zetten, en toen niet wisten hoe ze verder moesten. Deze leerlingen beeldden dus de situatie af vóór ze naar de oplossing gingen zoeken. Leerlingen die redeneren vanuit de oplossingsmethode zullen bijvoorbeeld eerst 48 op de getallenlijn zetten, om vervolgens te beschrijven hoe je van 48 bij 63 komt. Met zoiets als: ‘48 + 2 = 50’ (boogje van twee tekenen, eindpunt markeren als met 50), dan ‘50 + 10 = 60’ (boogje van tien tekenen, 60 markeren op de getallenlijn), ‘en nog drie’ (boogje van drie tekenen, eindpunt markeren als 63). In dit geval komt 63 pas als laatste op de getallenlijn te staan.
Daarmee wordt nog eens duidelijk dat de kracht van de lege getallenlijn zit in het *weergeven van redeneringen* die gegrondvest zijn in het handelen in concrete situaties. Daarbij doet het er op zich weinig toe of die concrete situatie nu het sprongsgewijs tellen op een meetstrook of een kralensnoer betreft. Waar het om gaat, is dat het redeneren over dit type situaties de leerlingen helpt een relatienet op te bouwen dat door hen kan worden benut voor flexibel rekenen.

Het beschreven onderwijs experiment en de hier gerapporteerde analyse werden mede mogelijk gemaakt door subsidie van de Amerikaanse National Science Foundation (grant nr. RED-9353587) en het Amerikaanse Office of Educational Research and Improvement (grant nr. R305A60007).

Noten

1. Dit onderwijsexperiment wer uitgevoerd door P. Cobb, K. McClain, M. McGatha, B. Petty, M. Stephan, B. Estes en K. Gravemeijer.
2. Een nadere uitwerking van dit type gebruik van modellen is onder meer te vinden bij Gravemeijer (1999), Streefland (1985) en Treffers (1991).
3. Een minder voorschrijvende manier van het werken met staafjes van tien en losse blokjes kan leiden tot informele aanpakken die steunen op het splitsen van tientallen en eenheden. Beishuizen (1993) noemt dit de 10-10 procedure. Deze 10-10 procedure leidt in het algemeen veelal tot fouten bij het aftrekken. Dit in tegenstelling tot de G-10 procedure, waarbij het eerste getal heel wordt gelaten.

Literatuur

Beishuizen, M. (1993). Mental Strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education,* 24(*4*), 294-323.

Cobb, P., K. Gravemeijer, E. Yackel, K. McClain & J. Whitenack (1997). Mathematizing and Symbolizing: The Emergence of Chains of Signification in One First-Grade Classroom. In: D. Kirschner & J.A. Whitson (eds.). *Situated cognition theory: Social, semiotic, and neurological perspectives.* Hillsdale, NJ: Erlbaum. 151-233.

Cobb, P., M. Stephan, K. McClain & K. Gravemeijer (in press). Participating in Classroom Mathematical Practices. *Journal of the Learning Sciences*.

Gravemeijer, K. (1994). Modelling two digit addition and subtraction with an empty number line. In: T. Breiteig, G. Kaiser-Messmer & I. Huntley. *Mathematics works - Mathematical Modelling in the Classroom*. London: Ellis Horwood / Simon and Schuster, 51-61.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning.*1(*2*), 155-177.

Skemp, R.R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching,* 77, 20-26.

Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron. *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs (Nieuwe Wiskrant),* 5(*1*), 60-67.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education. The Wiskobas Project.* Dordrecht: Reidel.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In: L. Streefland (ed.). *Realistic mathematics education in primary school.* Utrecht: CDß press, 21-57.

Vuurmans, A.C. (1991). *Rekenen tot honderd* ‘s-Hertogenbosch: KPC.

Whitney, H. (1988). *Mathematical reasoning, early grades.* Princeton (Paper).