De SLO organiseerde onlangs een conferentie over hoogbegaafdheid en wiskunde-onderwijs. **Fred Goffree** was erbij en gaat bovendien in op het Bolleboos project voor het basisonderwijs.

De andere wereld van (hoog)begaafde rekenaars

Een probleem, vijftien experts en een conferentie

Op 30 september 1999 kwamen vijftien min en meer deskundigen op het gebied van hoogbegaafdheid en wiskundeonderwijs in Vierhouten bijeen. Dit gebeurde in het kader van een verkenning op de doorsnede van beide gebieden door de SLO. Deze studie wordt uitgevoerd op verzoek van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Aan het woord kwamen twee hoogbegaafde leerlingen van het Stedelijk Gymnasium in Nijmegen, een ouder van hoogbegaafde leerlingen, de rector van een school voor VO, een wiskundeleraar, een schoolbegeleider, enkele (leer)psychologen, vertegenwoordigers van de stichtingen Facta, Pharos en Perdix, een lerarenopleider, een onderzoeker en een ontwerper van wiskundeonderwijs. Sommigen konden meer dan één pet opzetten. In het verslag (SLO, 1999) kan men lezen vanuit welke invalshoeken welke expertise naar voren werd gebracht. De globale indruk die in Vierhouten werd gewekt, kan kort worden samengevat met de waarneming dat er weinig nieuwe ontwikkelingen op dit gebied aan de gang zijn. Er is weliswaar sinds enige tijd wat meer aandacht voor hoogbegaafden op school, er kan momenteel ook openlijk over die aandacht gesproken worden, maar zo te zien tracht men op de scholen de ontstane problemen louter organisatorisch en binnen de bestaande kaders van het vigerende onderwijs op te lossen. Het lijkt erop dat de belangrijkste vraag op school is hoe deze leerlingen goed bezig te houden. De Stichting Facta voegt daaraan toe wat er met die extra aandacht beoogd zou moeten worden: maak de leerlingen bewust van hun mogelijkheden en talenten, schep gelegenheden om die talenten in ontwikkeling te brengen en positief aan te wenden en geef ze het gevoel dat ze goed in het vel zitten. Maar Facta tracht die doelen te realiseren buiten de school, wellicht als aanvulling op wat de school tot nu toe niet had te bieden.

Er kwam ook een interessant, onverwacht en kritisch geluid uit de school: De moderne didactische inzichten staan de ontwikkeling van hoogbegaafde leerlingen in de weg. In het verslag wordt bij deze opmerking slechts verwezen naar 'werken in groepen', maar vermoedelijk gaat de strekking van de kritiek verder. Misschien wel zover dat een waarschuwing van Van Hiele uit 1954 (!) (*Euclides, jrg. 30*, blz. 251) opnieuw betekenis krijgt:

> '(…) Wanneer men met nieuw didactisch materiaal aankomt, dan wil men nogal eens de deugdelijkheid daarvan afmeten aan het gemak, waarmee de leerlingen daarmee zullen werken. Volgens deze maatstaf gemeten zal ons materiaal het er niet al te best afbrengen: het was niet onze bedoeling nog dommere kinderen langs een nog gemakkelijker weg naar en door het eindexamen te loodsen. Waar wij vooral op willen letten, is, dat de pientere kinderen niet te kort komen. Trouwens, men bewijst de zwakke leerlingen evenmin een dienst, als men hen didactisch voortdurend in de watten laat liggen.'

De SLO is een leerplanontwikkelingsbedrijf en men noemt zich sinds kort 'specialisten in leerprocessen'. De verkenning op het gebied van hoogbegaafde leerlingen in de wiskundeles moet dus tot doel gehad hebben aanwijzingen te vinden voor het maken van geschikt werkmateriaal voor die leerlingen, gebaseerd op kennis van hun leerprocessen. Het was Aad Goddijn die de aandacht van de aanwezigen daarop richtte met de vraag: Wat weten we van wiskundige hoogbegaafdheid? En vervolgens: We zouden naar de kenmerken daarvan moeten zoeken; er zijn aangrijpingspunten genoeg, begin maar met bijvoorbeeld Hadamard, Poincaré en Hardy.

Het Bolleboos 3 project

In het vervolg van dit artikel laten we verder die conferentie voor wat hij was. We verruilen ook het voortgezet onderwijs voor basisonderwijs en verkennen het denken van (hoog)begaafde leerlingen bij het oplossen van reken-wiskundige problemen. Dit gebeurt in de context van het Bolleboos 3 project, waarin momenteel gewerkt wordt aan een *Groot Problemenboek voor rekenen en wiskunde*, voorzien van zogenoemde 'reflectieve oplossingen'. De lezer zal begrijpen dat voor het maken van die reflectieve oplossingen (waarin niet alleen de oplossing, maar ook een of meer mogelijke oplossingswegen en het bijbehorende denkwerk worden beschreven), de door Aad gewenste kenmerken van wiskundige hoogbegaafdheid goed van pas zouden komen. In 'Bolleboos' heeft men zich beperkt tot observaties van het reken-wiskundewerk van begaafde rekenaars. We beginnen maar bij Derk uit groep 5.

Een waar verhaal uit groep 5

Derk zit vooraan in de klas bij meester Sytze. Het is een groep 5 en Derk voelt zich er best thuis. Sytze vindt hem een bolleboos en hij vindt hem ook wel eens een lastpost. Hij bemoeit zich namelijk overal mee en als Sytze eens een steekje laat vallen, is hij er als de kippen bij om hem op de vingers te tikken. Meestal heeft hij dan ook nog gelijk, vertelt Sytze in *Willem Bartjens*. Laatst had Derk een uitvinding gedaan bij rekenen. Het ging om de som 55 + 27 en de uitvinding was een heel bijzondere oplossing.
Derk: ‘55 is 5 keer 11; 27 is 3 keer 9; 5 + 3 = 8; 11 en 9 is 20; doe de nul weg en zet die 2 achter de 8: antwoord 82.’ Het antwoord klopt in elk geval, maar klopt de methode ook? Sytze is een liefhebber van rekenen en wiskunde, maar om die laatste vraag goed uit te zoeken, was niet eenvoudig.

Onverwachte denkbewegingen

Ziehier een verhaal uit de praktijk van de basisschool. Derk was creatief aan het rekenen gegaan en had een ontdekking gedaan die niet direct begrepen werd en daardoor niet naar waarde geschat kon worden. Knappe rekenaars kunnen, zo blijkt hier, onverwachte ‘denkbewegingen’ maken. Wie extra rekenmateriaal wil ontwerpen voor deze groep begaafde rekenaars, zou wat meer willen weten over die denkbewegingen. Want het te maken materiaal moet niet te dicht liggen bij hetgeen in het reguliere reken-wiskundeprogramma wordt aangeboden, al is dat pas voor een jaar later. Het moet wat ‘anders’ zijn, een beroep doen op ‘andere’ inzichten en/of vaardigheden, aansluiten op die ‘andere’ ontwikkeling; immers, de leraar van die volgende groep moet niet met het probleem geconfronteerd worden dat de knappe leerling ook nog eens alle leerstof al heeft gehad.
In het Bolleboosproject van de SLO, dat op aanvraag van de NVORWO tot stand is gekomen en met medewerking van het SAC in Utrecht in de praktijk werd en wordt onderzocht, zijn we op zoek gegaan naar dat ‘andere’ wereldje van begaafde rekenaars.

Kalender als bron van rijke problemen

Neem bijvoorbeeld de kalender, een rijke bron van getalsmatige regelmaat en achterliggende wetmatigheid. Die kalender past heel goed in dat ‘andere’ wereldje. Toni, een vijfjarige, is een echte kalenderfanaat. Hij had op een keer ontdekt dat, in zijn eigen woorden ‘september hetzelfde is als december’. Veel mensen in zijn omgeving begrepen dat niet, tot er een met Toni over de kalender in gesprek ging. Als 29 september op een woensdag valt (zoals in 1999), dan valt 29 december ook op een woensdag. Hij had blijkbaar een regelmaat ontdekt, maar de achterliggende wetmatigheid was voor hem nog niet toegankelijk.
Over welke wetmatigheid hebben we het eigenlijk? ‘September is hetzelfde als december’ zal wel dezelfde wortels hebben als de regel dat je verjaardag het volgend jaar een dag opschuift: $365 = 52 \times 7 + 1$. Je ziet in die formule ook meteen dat het bij een schrikkeljaar (366 dagen) twee dagen opschuift. Hoeveel verschillen september en december? Neem maar 1 september en ga naar 1 december: 30 + 31 + 30 dagen is 91 dagen. En 91 = 13 keer 7. Klaar! Bent u er zeker van? Ja hoor, want ‘91 = 13 keer 7’ laat zien dat er 13 volledige weken tussen zitten, er schuift dus geen dag op.
Zo valt er nog veel meer te ontdekken, bijvoorbeeld hoe je eenvoudig kunt uitrekenen op welke dag je geboren bent, als je weet op welke dag je dit jaar jarig bent en niet je geboortejaar vergeten bent. Prof. Van der Blij schreef daar een mooi verhaal over in *Willem Bartjens*. Het leuke van de kalender is ook nog dat je een heel andere kant kunt opgaan, bijvoorbeeld op zoek naar historische (Juliaanse en Gregoriaanse kalender), culturele (Joodse en Islamitische kalender) of sterrenkundige (zonnekalender en maankalender) achtergronden. Eigenlijk is het jammer dat dergelijke onderzoekjes over de grenzen van het schoolvak via internet ook al weer flink verkort worden (?!).

Krutetskii

We gaan even terug naar de andere wereld van de wiskunde. In de jaren ’70 deed een Sovjetrussische wetenschapper, V.A. Krutetskii, onderzoek naar de ‘psychologie van de wiskundige bekwaamheden van schoolkinderen’. Het interessante van zijn studie is dat hij diverse kinderen gedurende langere tijd volgde bij hun rekenwerk en daarbij ook andere zaken in beschouwing nam. En natuurlijk probeerde hij die bekwaamheden van begaafde rekenaars ook te karakteriseren.
Neem Sonia L. uit Moskou, geboren in 1950, klein van stuk, vanaf haar achtste jaar gevolgd, munt niet uit op school, is ook niet bijzonder gemotiveerd voor het schoolwerk, maar hielp al op vierjarige leeftijd haar oudere broertje met sommen als 27 – 14 (‘eerst 10 eraf, over 17, dan nog 4 eraf, 13’) en ontwikkelde toen ze 4,5 jaar was een eigen inzicht in eenvoudige breuken. Een jaar later vindt ze op eigen houtje de negatieve getallen uit (via een sommetje van haar broertje – trek 36 van 28 af – : ‘dat is dan 8 minder dan niets’). En zo gaat dat door, als ze in groep 4 zit, kan ze bij het oplossen van problemen wedijveren met leerlingen uit groep 8. Krutetskii wijst erop dat ze natuurlijk minder ‘weet’ (de leerstof), maar dat ze snel en efficiënt (recht op het doel af) redeneert, verbanden legt en zo oplossingen geeft.

Reken-wiskundeproblemen

De lezer zal zich afvragen over welke problemen dat dan wel ging. Kon Sonya dan zomaar het rekenonderwijs van de groepen 5 tot en met 8 overslaan? Of anders gezegd: moeten we bij het werken met (hoog)begaafde leerlingen in het reken-wiskundeonderwijs misschien wat minder in termen van de reguliere leerstof denken? Dat opent een aantrekkelijk perspectief voor materiaalontwerpers, want zij moeten proberen niet op onderdelen van het programma vooruit te lopen.

We nemen, ter illustratie van bovenstaande overwegingen, vier opgaven uit de verzameling van Krutetskii.

1. Er zijn kippen en konijnen. Tezamen hebben ze 35 koppen en 94 poten. Hoeveel kippen en konijnen zijn er?
2. Wat is de lengte en de snelheid van een trein die in $\frac{1}{4}$ minuut een seinpaal passeert en in $\frac{3}{4}$ minuut met dezelfde snelheid door een tunnel van 540 m raast?
3. De ene schaapherder zegt tegen de ander: ‘Als jij mij 8 schapen geeft, hebben we er evenveel.’ Het antwoord van de ander luidt: ‘Nee, als jij me er 8 geeft, heb ik tweemaal zoveel als jij.’
4. Je koopt enkele boeken voor een bepaald bedrag. Als je betaalt met biljetten van 3 roebel heb je 8 biljetten meer nodig dan in het geval van biljetten van 5 roebel. Hoeveel moet je betalen?

Problemen oplossen en oplossingen begrijpen

Voordat u verder leest, moet u eigenlijk zelf even deze opgaven maken. Want dan wordt het pas mogelijk de oplossingen van de knappe rekenaars naar waarde te schatten.
Sonya lost opgave 1 op: ‘Er zijn dus samen 35 kippen en konijnen. Als er alleen maar kippen waren, dan waren er 70 poten. Dit betekent dat we er 24 over hebben. Dat komt omdat er ook nog konijnen tussen lopen. Elk konijn heeft 2 poten meer dan een kip, dus moeten er (24 : 2) 12 konijnen bij zijn, en 23 kippen.’ Sonya gaat direct door met:
‘Het kan ook anders. Er zijn 94 poten; waren er alleen kippen, dan 47. Maar er zijn totaal maar 35 koppen, dat is 12 minder. Die 12 koppen hebben dus elk 4 poten, en niet 2. Er zijn 12 konijnen en 23 kippen.’
Krutetskii karakteriseert dit denkwerk met de termen: logisch denken tijdens een systematisch opgebouwde gedachtegang en flexibiliteit van denken.
Opgave 3 lost ze (8-9 jaar oud!) in 40 seconden op: ‘Als de eerste 8 schapen krijgt van de tweede herder, dan hebben ze evenveel. Dat betekent dat het verschil 16 schapen is. Als die tweede er 8 krijgt van de eerste, dan moet het verschil 32 zijn (de een krijgt 8 erbij, bij de ander gaan er 8 af). Als de tweede twee keer zoveel heeft, en ook 32 meer heeft, dan heeft hij 64 schapen, en de eerste 32. Voor het weggeven van de schapen waren het er dus 40 en 56.’

Volodya

Voor de oplossing van opgave 4 gaan we naar een andere (hoog)begaafde rekenaar, Volodya, die in verschillende opzichten van Sonya verschilt. Op die verschillen gaan we hier niet in, maar het is goed te weten dat ook hoogbegaafde leerlingen kunnen verschillen.
Volodya: ‘Het moet deelbaar door 15 zijn … Het verschil is 2. Deel 8 door 2 en vermenigvuldig met 15. Dan krijg je 60 roebels.’ Kunt u het nog volgen? Misschien helpt het als u met Krutetskii’s weet, dat Volodya, in tegenstelling tot Sonya, vaak en goed gebruik maakt van visuele voorstellingen.
Tot slot (de trein laten we maar even zitten) Volodya over de kippen: ‘Er zijn ongeveer 2 keer zoveel kippen als konijnen, want als er alleen kippen waren, dan hadden we 70 poten en alleen konijnen 140 poten. 94 is twee keer zo dichtbij 70 als bij 140. Ik probeer wat: 20 en 10; 21 en 11; 22 en 12; 23 en 12 … 23 kippen en 12 konijnen!’

Schept Bolleboos 3 een andere wereld?

Hoe kan de wiskunde iets bijdragen aan het ontwikkelen van wiskundige bekwaamheden? We zien even af van een discussie over het praktische nut van een dergelijke poging. We vinden het namelijk al heel nuttig om die leerlingen op school te blijven motiveren voor de wiskunde.
In het project Bolleboos 3 trachtten we die vraag te beantwoorden door het verzamelen en beschikbaar stellen van wiskundige opgaven (problemen) die in het algemeen niet in het basisschool-curriculum voorkomen.
We hebben ook met rekenliefhebbers/experts aan de mogelijke oplossingen gewerkt. Enerzijds om de opgaven vergezeld te doen gaan van ‘reflectieve’ oplossingen voor de leraar, en anderzijds om na te gaan welke wiskunde (wiskundige activiteiten en bekwaamheden) zouden kunnen worden aangesproken. Maar hier moeten we wel voorzichtig zijn met bepaalde conclusies. We hebben er in de eerste plaats geen idee van hoe onze bollebozen met deze problemen om zullen gaan en in de tweede plaats hebben we gemerkt dat we toch nog notoire leerplandenkers zijn, die ‘moeilijk’ te snel vereenzelvigen met ‘verderop in het programma’.
Lezers die het kip/konijn probleem hebben opgelost via ‘2 vergelijkingen met 2 onbekenden’, hebben een persoonlijke reden om daarover ook eens na te denken.

Een opgave

We besluiten deze bijdrage met de eerste opgave uit een experimentele versie van het *Groot Problemenboek rekenen en wiskunde*, het eerste vijftigtal, bedoeld voor leerlingen uit de groepen (6) 7 en 8. Hopelijk komt daarin iets tot uitdrukking van de andere wereld, hier geconcretiseerd in ‘andere leerstof’, ‘andere wiskundige activiteiten’ en ‘andersoortige argumenteringen’. De reflectieve oplossing is ook gegeven.

Even, oneven

Als je de rij natuurlijke getallen opschrijft, 1, 2, 3, 4, enzovoort, en je neemt daaruit zomaar twee opeenvolgende getallen en telt die op, dan is de uitkomst altijd oneven.

– Waar of niet? Hoe weet je dat zeker?

Drie opeenvolgende getallen

Neem zomaar 3 opeenvolgende getallen, bijvoorbeeld 13, 14 en 15. Als je die getallen in het voorbeeld optelt, krijg je 42. Dat getal 42 is deelbaar door 3.

Info: Deelbaar door 3 betekent dat 42 : 3 = 14, zonder rest.

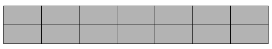
– Is dat bij elke drie opeenvolgende getallen zo? Hoe ben je zo zeker?
– Is ook het omgekeerde waar: Elk 3-voud kun je opsplitsen in drie opeenvolgende getallen? Zeker?

Info: Een 3-voud is een getal dat deelbaar is door 3.

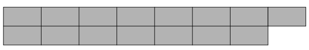
– Hoe zit dat met **5 opeenvolgende getallen**?

Oplossing

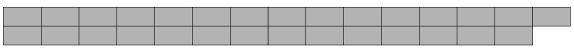
Van twee opeenvolgende getallen is altijd het tweede getal 1 meer dan het eerste. Als het eerste getal even is, dan is het tweede oneven. En andersom, als het eerste oneven is, is het tweede even. Die twee getallen kun je zo tekenen:



en



Als je ze optelt, ziet het er zo uit:



Oneven dus.

Het kan ook zonder plaatje. Je zegt dan: een even aantal kun je eerlijk met z'n tweeën verdelen, een oneven aantal niet. Daar houd je altijd 1 over. Neem nu maar die twee opeenvolgende getallen (als aantal gezien). Verdeel dat met z'n tweeën eerlijk. Als dat zou lukken, had je twee gelijke aantallen gehad, maar dat was niet het geval. Dus oneven.

Maar je kunt het ook zo zien. Neem twee opeenvolgende getallen, bijvoorbeeld 5 en 6. De som 5 + 6 = 5 + 5 + 1. Oneven dus. En zo kun je elk tweetal opeenvolgende getallen splitsen, altijd oneven dus.

Welke oplossing vind je het duidelijkste? Welke oplossing overtuigt je het meest?

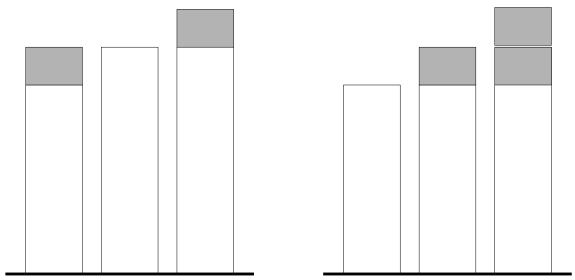
Nu **drie opeenvolgende getallen**. Ik schrijf er een paar op, netjes onder elkaar:

0 + 1 + 2 = 3
1 + 2 + 3 = 6
2 + 3 + 4 = 9

enzovoort.

Ik zie dat de antwoorden de tafel van 9 zijn. Dat is logisch, want je begint met 3 en dan komt er steeds 3 bij. Waarom? Omdat de drie getallen elk 1 groter worden. Klaar.

Je kunt het ook met een plaatje laten zien, je maakt drie gelijke stukken of 3 gelijke stukken en 3 erbij:



Of weer met getallen, bijvoorbeeld 7 + 8 + 9 = 8 + 8 + 8 of = 7 + 7 + 7 + 3

Met **5 opeenvolgende getallen** kun je hetzelfde doen. Je kunt zelf vast nog wel wat meer van dit soort problemen bedenken.

Fred Goffree, Bosch en Duin

Literatuur

Zwaart, P. van der & J. ter Pelle. *Hoogbegaafden in wiskundeonderwijs. Conferentieverslag*. SLO, november 1999. Op aanvraag kosteloos verkrijgbaar (tel. 053-4840358).

Blij, F. van der (1999). Op welke dag ben je geboren? *Willem Bartjens, 18*(4), 22-27.

Steinvoorte, S. (1999). Een bolleboos. *Willem Bartjens, 19*(2), 38-39.