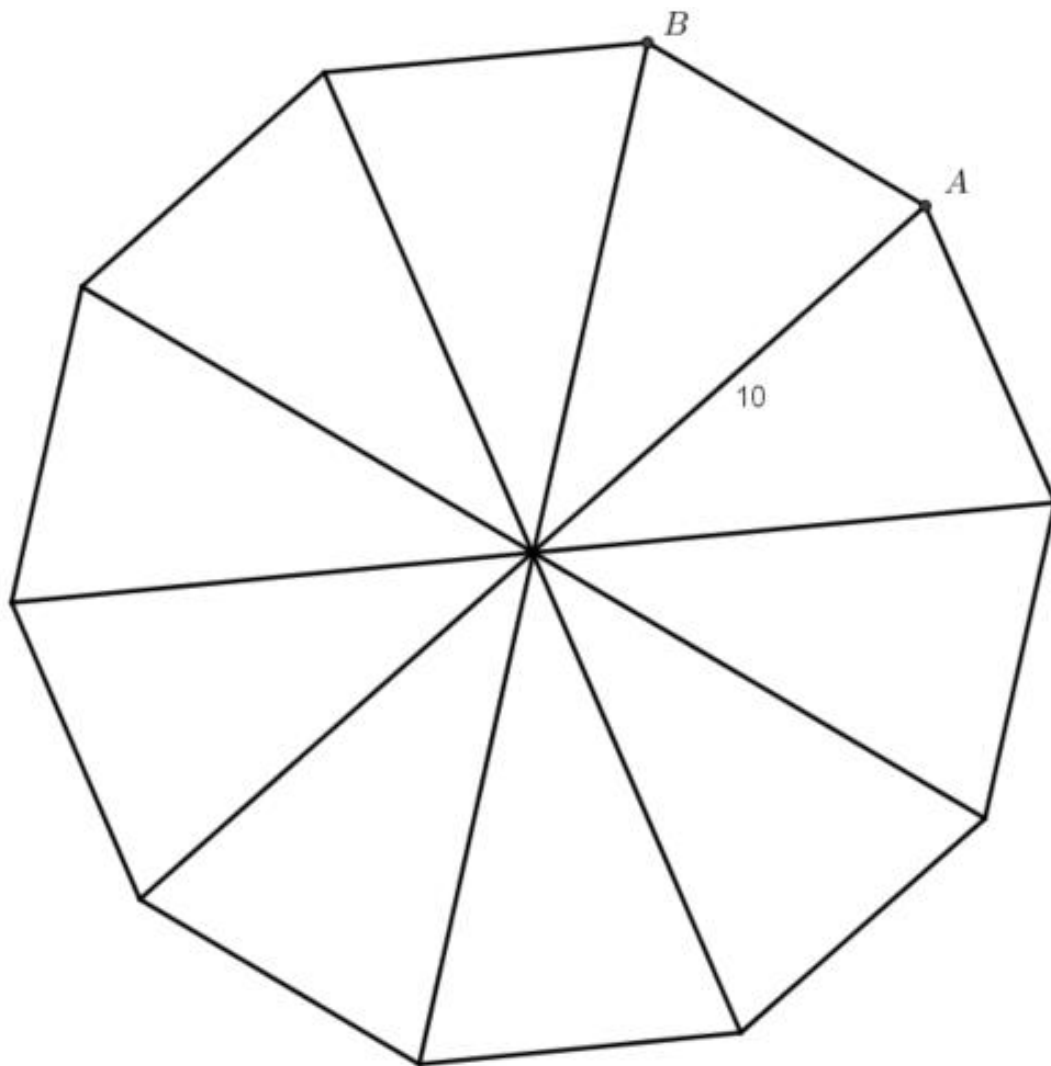


Handreiking

Denkactiverende wiskundelessen



Universiteit Utrecht

Colofon

Auteurs: Marieke Bor-de Vries en Paul Drijvers, met medewerking van Benno Boerboom, Chesten Breijer, Dirk Boleij, Mascha Klerx, Marian Kollenveld, Hendrik Straat, Anne van Streun, Irene Vis, Laurens Visscher, Annie Wevers.

Dit onderzoek is mogelijk gemaakt door de Programmaraad Praktijkgericht Onderzoek van het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek (NRO), projectnummer 405-14-502.

Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Oktober 2015

Voor een toelichting op de afbeelding op de vorige pagina zie

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLck2aTEC9yAlmuHGX6MfNESjOXAKKYOB>

Inhoud

Inleiding	5
Kenmerken van opgaven die aanzetten tot wiskundig denken	6
Handvatten voor (her)ontwerpen van opgaven	9
De rol van de docent bij denkactieve wiskundelessen	12
Sturing van het proces.....	14
Vragen stellen en hints geven	16
Een klassengesprek voeren	18
Groepswerk begeleiden	20
Tijd en timing.....	22
De wiskundesectie.....	25
Wiskundig denken toetsen.....	26
Wiskundige DenkActiviteiten: theoretische achtergronden.....	29

Inleiding

Dit is de Handreiking Denkactiverende Wiskundelessen. Het doel van dit document is om wiskundedocenten te inspireren en te helpen hun onderwijs zo in te richten dat hun leerlingen meer gaan nadenken in de wiskundeles. Dit maakt de les interessanter voor leerlingen en voor de docent.

Deze handreiking is tot stand gekomen binnen het praktijkgerichte onderzoek 'Wiskundige denkactiviteit in de praktijk'¹. Binnen dit project hebben docenten en onderzoekers samengewerkt om te onderzoeken wat de docent kan doen om leerlingen aan te zetten tot wiskundig denken. Hierbij heeft het team gebruik gemaakt van voorgaand onderzoek, maar ook van de eigen ervaringen in de klas. De docenten hebben een set met opgaven ontworpen en deze ook uitgeprobeerd om zo te ontdekken wat wel en niet werkt in de praktijk.

Waarom al die aandacht voor wiskundig denken? Eén van de aanleidingen om dit onderzoek te doen is de invoering van de nieuwe examenprogramma's wiskunde voor havo en vwo waar wiskundig denken onderdeel van uitmaakt. Voor elke docent een nieuwe uitdaging dus! Nu zal dit voor de meeste docenten geen straf zijn, want juist wiskundige denken is wat de wiskunde ook voor henzelf leuk en interessant maakt. Was dat niet een van de redenen waarom men indertijd zelf wiskunde is gaan studeren? Die fascinatie overbrengen op leerlingen, dat is een mooi doel van het wiskundeonderwijs.

De meeste docenten hebben wel een idee van wat 'wiskundig denken' inhoudt, maar een goed bruikbare definitie vinden is lastig. Wij hanteren de volgende omschrijving:

Wiskundig denken is bedenken hoe je wiskundig gereedschap kunt gebruiken om een probleem aan te pakken.

Een toelichting op deze definitie en meer informatie uit voorgaand onderzoek is te vinden in het stuk over [theoretische achtergronden](#).

Deze handreiking gaat in op verschillende aspecten van het geven van denkactieve lessen. Denk aan het vinden of maken van geschikte opgaven, aan het begeleiden van groepswork, aan het voeren van klassengesprekken, of aan het maken van proefwerken en andere toetsen. Elk van deze stukjes eindigt met een aantal concrete tips en suggesties naar artikelen of internetbronnen.

Naast deze handreiking is ook een aantal voorbeeldopgaven ontwikkeld die aanzetten tot wiskundig denken. Deze set is te vinden via <http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/wda>. Om een indruk te geven van de manier waarop je als docent met wiskundig denken aan de slag kunt gaan, kun je op <https://www.youtube.com/playlist?list=PLck2aTEC9yAlmuHGX6MfNESjOXAKKYOBI> een drietal video's vinden waarin docenten vertellen over hun zoektocht op dit terrein en deze toelichten met drie voorbeeldlessen.

¹ Dit onderzoek is mogelijk gemaakt door het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek (NRO), projectnummer 405-14-502.

Kenmerken van opgaven die aanzetten tot wiskundig denken

Welke kenmerken moet een opgave hebben om leerlingen aan het denken te zetten?

Eigenlijk elke opgave kan aanzetten tot denken, mits een docent hier goede vragen bij stelt. Toch zijn er wel opgaven die eerder aanzetten tot denken dan andere. Deze opgaven hebben vaak bepaalde kenmerken. Door alert te zijn op deze kenmerken is het makkelijker om opgaven te selecteren.

Bij het selecteren van opgaven is het goed om na te denken over **het doel** ervan. Een opgave die bedoeld is om een bepaalde procedure te oefenen zal niet snel aanzetten tot denken, tenzij er ook nog wat verrassingen om de hoek komen kijken en buiten de gebaande paden wordt getreden. Om die reden is het goed om opgaven te selecteren die een beroep doen op de verschillende aspecten van wiskundig denken. Dus dat de leerling ervan leert om problemen op te lossen, te modelleren of te abstraheren.

Binnen deze driedeling krijgt **probleemoplossen** in de literatuur, maar ook in de praktijk, de meeste aandacht. Onderstaande Wordle geeft een aantal mogelijke kenmerken van opgaven die uitnodigen tot probleemoplossen. Hierbij moet je je realiseren dat een probleem altijd relatief is. Wat voor de ene klas routine is, is voor een andere klas iets nieuws. Wat voor de ene leerling verrassend is, is voor de andere leerling al uitgekauwd. Het is dus erg belangrijk om aan te sluiten bij de voorkennis en ervaring van leerlingen en indien nodig hierin ook te differentiëren.



Een opgave, die ingezet wordt om **modelleren** te ontwikkelen, bevat een model of leidt tot een model. Andersom is het niet zo dat elke opgave, die een model bevat, ook vraagt om modelleren. Wanneer leerlingen een model moeten opstellen of aanpassen, kenmerken ervan moeten onderzoeken of verschillende modellen vergelijken zonder dat daarbij het denkwerk uit handen wordt genomen, is er sprake van modelleren. Vaak bevatten modelleeropgaven een context die naar wiskunde vertaald moet worden. Het is essentieel dat deze context echt of in elk geval geloofwaardig is. Lastig bij het maken van een model is om te besluiten welke informatie nuttig is en welke informatie wordt genegeerd of vereenvoudigd. Leerlingen kunnen dit al ervaren door hen in een opgave overtollige informatie aan te bieden. De keuze van het type model kun je ook aan de leerling overlaten; dit is een goede test om te zien of ze de theorie begrepen hebben. Denk bijvoorbeeld aan de keuze tussen een lineair, kwadratisch, exponentieel of goniometrisch model. Ook is het mogelijk om leerlingen een bestaand model aan te laten passen. Wanneer leerlingen aan de slag gaan met modelleren is het essentieel dat zij hun eigen werk controleren. Laat hen een aantal (uiterste)

waarden uitproberen om te zien of hun model het gevraagde gedrag vertoont en laat hen een gevonden antwoord terug vertalen naar de context om te kijken of het antwoord kan kloppen.

Al op de basisschool beginnen leerlingen met **abstraheren**, bijvoorbeeld bij het tellen, rekenen en het ontwikkelen van het getalbegrip.

- Twee vingers erbij twee vingers wordt de optelling $2 + 2$.
- $6 + 6 + 6$ wordt de vermenigvuldiging 3×6

In het voortgezet onderwijs worden hieraan machten, variabelen, formules, functies en nog veel meer abstracties toegevoegd. Bij abstraheren gaat het erom dat de leerling in concrete probleemsituaties overeenkomsten en verschillen opmerkt. Vervolgens leiden die gemeenschappelijke zaken tot de vorming van overkoepelende wiskundige objecten. Een lineaire functie is bijvoorbeeld voor de leerling in het begin vooral een procedure om een getal in te vullen en er een functiewaarde uit te krijgen. Door abstraheren wordt het een wiskundig object met bepaalde eigenschappen en voorstellingen. In opgaven, die hieraan aandacht besteden, verschuift de aandacht van specifieke gevallen naar het algemene; ze nodigen uit tot generaliseren. In de gebruikte methoden wordt vaak weinig aandacht aan abstraheren besteed, terwijl het juist zo centraal is binnen de wiskunde. Opgaven waarbij leerlingen zelf de theorie kunnen ontdekken, helpen bij het abstraheren. Zo kunnen leerlingen bijvoorbeeld een situatie verkennen met getallenvoorbeelden en hieruit een algemeen geldende conclusie afleiden. De docent kan leerlingen aan de hand van een aantal (non-)voorbeelden op zoek gaan naar een patroon of een algemene regel. Ook kun je verschillende situaties voorleggen en leerlingen een wiskundig concept of methode laten vormen. Deze processen zijn niet eenvoudig en niet elke leerling zal hier ook zelfstandig toe in staat zijn. Daarom is het belangrijk om hieraan regelmatig klassikaal aandacht te besteden.

De volgende lijst geeft een aantal kenmerken van denkactiverende opgaven. Vanzelfsprekend hoeft een opgave niet aan alle kenmerken te voldoen om toch uit te nodigen tot wiskundig denken. Verder hangt het denkactiverende vermogen van een opgave ook sterk af van de manier waarop die in de les aan de orde komt.

Kenmerken met betrekking tot probleemoplossen

- Is het een probleem, een niet-standaard opgave? Meer dan reproductie, meer dan een routineopgave?
- Heeft de opgave iets 'fris', zit er een verrassingselement in?
- Een plan van aanpak is onbekend, de opgave vraagt om een nieuwe, inventieve methode, doet beroep op creativiteit.
- De opgave is geeft ruimte, is niet te veel (voor)gestructureerd.
- Meerdere (denk)stappen zijn nodig om tot een oplossing te komen.
- Er zijn meerdere oplossingsstrategieën mogelijk.
- De probleemaanpak moet tijdens de uitvoering worden gemonitord en na afloop wordt teruggekeken op de aanpak.
- Leerlingen zijn in staat om een begin te maken, iets te proberen. De opgave is toegankelijk voor "iedereen".
- De leerling moet in de opgave zichzelf een (deel)probleem stellen.

Kenmerken met betrekking tot modelleren

- De opgave bevat een originele context of toepassing van een in principe bekende methode.
- De opgave zet leerlingen aan de kern uit gegevens te halen; de opgave kan dus ook overtollige informatie bevatten.
- In de opgave moeten leerlingen kwalitatief over een model nadenken, bijvoorbeeld het gedrag van het model analyseren, het vergelijken met een ander model, of eigenschappen van het type model onderzoeken.
- De leerling moet een bij de situatie passend type model kiezen (bijvoorbeeld een keuze maken uit lineaire, kwadratische, exponentiële of goniometrische modellen).
- In de opgave worden koppelingen gelegd tussen de werkelijke probleemsituatie en het wiskundige model.
- Een bestaand model moet worden aangepast aan een gewijzigde situatie.

Kenmerken met betrekking tot abstraheren

- In de opgave wordt op basis van een aantal voorbeelden een algemene regel of patroon gegeneraliseerd.
- Op basis van verschillende situaties wordt een wiskundig concept of methode gevormd.
- De opgave nodigt uit tot het indelen in categorieën.

Als je meer wilt lezen over kenmerken van denkactieve opgaven, dan zijn de volgende artikelen aanbevolen:

- Drijvers, P. (2015). Kernaspecten van wiskundig denken. *Euclides*, 90(5), 4-8.
- Van Streun, A. (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten*. Enschede: SLO. <http://www.slo.nl/organisatie/recentepublicaties/00140/>

Handvatten voor (her)ontwerpen van opgaven

Het wiskundeonderwijs kent veel didactische variabelen. Er zijn verschillende lesmethoden, verschillende schooltypes, verschillende stijlen van lesgeven en verschillende leerstijlen. Aangezien wiskundig denken relatief is – in de zin dat een opgave die van de ene leerling veel denkactiviteit vraagt voor de andere routine kan zijn – , roept een opgave niet zomaar voor elke leerling wiskundig denken op. Het is dus belangrijk dat jij, als docent, denkactiverende opgaven kunt ontwerpen en/of aanpassen die goed aansluiten bij jouw leerlingen en bij de fase van het leerproces.

Wanneer je op zoek bent naar een opgave die aanzet tot wiskundig denken, kan een korte **voorbereiding** je de goede richting op sturen. Bedenk waar de leerlingen op dit moment staan en wat het doel is dat je wilt bereiken. Onderzoek wat er lastig is aan wat je de leerlingen wilt leren, bijvoorbeeld door te kijken naar veel gemaakte fouten. Ook kun je nagaan of je al eens iets hebt gelezen of een geschikte opgave hebt gezien die aansluit bij wat je wilt onderwijzen. Waarom zou je opnieuw het wiel uit willen vinden?

Als je weet wat je wilt bereiken, kun je op zoek gaan naar een passende opgave. Er zijn verschillende **bronnen** die je hiervoor kunt raadplegen. Op het internet is van alles te vinden, zie de links aan het einde van dit stuk. De eerste link verwijst naar de opgaven die zijn voortgekomen uit dit project. Deze opgaven zijn ontwikkeld en getest door docenten om te gebruiken in de 3^e klas. Het Freudenthal Instituut heeft ook andere databases met opgaven die interessant zijn. Daarnaast zijn ook de opgaven over wiskundig denken uit de Leergang Wiskunde een goed startpunt. De wiskunde A-lympiade, wiskunde B-dag en de Onderbouw Wiskunde dag bieden inspiratie voor grotere opdrachten. Wil je liever een kleinere opdracht dan kun je inspiratie opdoen bij opgaven van de Kangoeroe wedstrijd. Blijf je graag dicht bij de methode, dan kun je het boek erbij pakken en daar zoeken naar een geschikte opgave of een opgave die eenvoudig aan te passen is.

Veel opgaven in het boek zijn zo voorgestructureerd, dat leerlingen deze zelfstandig kunnen oplossen. Wil je leerlingen zelf laten nadenken, dan moet je een dergelijke **opgave aanpassen**. Probeer bijvoorbeeld om de gesloten vraag te veranderen in een open probleem. Dit kan door bijvoorbeeld deelvragen weg te laten en alleen de hoofdvraag te stellen of door gegevens weg te laten of juist toe te voegen. Of zorg ervoor dat leerlingen een opgave op verschillende manieren kunnen aanpakken en daarbij zelfs misschien verschillende antwoorden krijgen. Geef daarbij ruimte voor vallen en opstaan. Het is niet altijd erg als leerlingen een verkeerde weg inslaan, gefrustreerd raken en tot de conclusie komen dat ze op een doodlopend spoor zitten. Niet opgeven en weer opnieuw beginnen is ook onderdeel van wiskundig denken en nuttig in het dagelijks leven.

Een strategie die eenvoudig toe te passen is, is om een **opgave naar voren** te schuiven. Kies een uitdagende opgave die alle theorie omvat die je aan wilt leren en begin daarmee. Laat leerlingen zelf puzzelen en uitproberen om zo (met elkaar) de theorie te ontdekken of zich minstens goed te realiseren welke kennis nog ontbreekt. Op deze manier ontdekken leerlingen waarom het nuttig is om de theorie te leren en zien ze ook beter de samenhang tussen de verschillende stukken stof. Een ander voordeel is dat je kunt ontdekken wat leerlingen moeilijk vinden en hier extra aandacht aan kunt besteden, terwijl je andere aspecten minder aandacht geeft. Misschien kun je wel delen overslaan uit het begin van het hoofdstuk!

Als je een opgave aanpast, dan is het goed om ook kritisch te kijken naar de **context**. Soms is deze interessant en roept hij automatisch vragen op die leerlingen wiskundig kunnen beantwoorden. Benut deze context dan en laat leerlingen deze vragen stellen en oplossen. Helaas is soms het tegenovergestelde het geval: een context die niet interessant is, geen vragen oproept of gewoon onzinnig is. Wijzig hem dan of laat hem helemaal weg. Bedenk dat wiskunde zelf een uitstekende context is, of duik in de geschiedenis van de wiskunde.

Niet elke leerling zal vol enthousiasme aan een probleem beginnen. Gelukkig zijn er kleine ingrepen mogelijk die de **motivatie** ten goede komen. Maak het zelf formuleren van de opgave tot onderdeel van het probleem. Dat werkt vaak motiverend. Dan Meyer geeft hier een aantal leuke voorbeelden van (zie link aan het einde van dit stuk). Ook is het mogelijk om leerlingen aan het begin van de opgave een voorspelling te laten doen of een schatting te vragen van de uitkomst van de opgave. Elke leerling wil natuurlijk weten of hij goed heeft gegokt. Een opgave waarbij sprake is van een cognitief conflict, bijvoorbeeld een paradox, werkt ook motiverend.

Veel opgaven lijken erg op elkaar. Probeer daarom eens wat **variatie** aan te brengen. Laat leerlingen iets in elkaar zetten, zoals een verslag of een presentatie. Je kunt ook een omkeervraag stellen: "Dit is het antwoord, wat was de vraag?" Varieer ook regelmatig in werkvorm. Laat leerlingen bijvoorbeeld kaartjes categoriseren, drogredeneringen ontkrachten of zelf een (toets)opgave bedenken. Bij de tips hieronder staan nog een aantal ideeën om variatie aan te brengen.

Tips:

- Bedenk opdrachten die samenwerking en communicatie stimuleren.
- Laat leerlingen zelf een definitie bedenken voor een wiskundig begrip. Als de definitie nog niet compleet is, geef dan een tegenvoorbeeld. Ga door tot er een goede definitie is gevormd.
- Bewijzen te moeilijk voor leerlingen? Niet als je een 'knipbewijs' maakt waarbij alle stappen op stroken staan en leerlingen deze in de goede volgorde moeten leggen. Zie <http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28375/>
- Structureer de opgave niet te veel voor. Geef leerlingen ruimte om te proberen en proefondervindelijk inzicht te ontwikkelen.
- Doe een beroep op de creativiteit van de leerling, laat hen iets creëren, iets produceren of maken.
- Laat leerlingen eerst een situatie verkennen met getallenvoorbeelden.
- Keuze werkt stimulerend. Geef bijvoorbeeld een opgave waarbij informatie ontbreekt en laat leerlingen kiezen welk gegeven zij zouden willen krijgen.
- Maak een opgave waarbij ook kennis uit voorgaande hoofdstukken nodig is.
- Laat leerlingen zelf opgaven voor het komende proefwerk maken en beloof dat je één ervan zult gebruiken.
- Laat leerlingen als een hoofdstuk (bijna) af is een mindmap maken van de inhoud ervan.
- Geef leerlingen een lijstje met de termen die zij geleerd hebben en laat hen met deze woorden een zin (of twee) vormen die laat zien hoe deze termen aan elkaar gerelateerd zijn. Leerlingen kunnen elkaar feedback geven.
- Als je een opgave hebt bedacht, leg deze dan voor aan een collega of andere proefpersoon.

- Probeer een opgave uit die een andere docent heeft bedacht en verbeterd. Maak vervolgens zelf weer een verbeterlag op basis van je ervaringen.

De volgende bronnen kunnen van pas komen bij het (her)ontwerpen van opgaven:

- WDA-project: <http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/wda/>
- Freudenthal Instituut: <http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/ctwo>
- Leergang wiskunde: <http://www.leergangwiskunde.nl/lesmateriaal.html>
- Wiskunde A-lympiade: <http://www.uu.nl/onderwijs/wiskunde-a-lympiade/opdrachten>
- Wiskunde B-dag: <http://www.uu.nl/onderwijs/wiskunde-b-dag/archief-opdrachten-wiskunde-b-dag>
- Onderbouw Wiskunde Dag: <http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/owd>
- Kangoeroewedstrijd: <http://www.w4kangoeroe.nl/kangoeroe/historie/wedstrijd-2011>

Wil je meer informatie over het (her)ontwerpen van opgaven, dan zijn de volgende bronnen interessant:

- Doorman, M., Fechner, S., Jonker, V., & Wijers, M. (2014). *Mascil. Richtlijnen voor het ontwikkelen van lesmateriaal voor onderzoekend leren in wiskunde en natuurwetenschappen met behulp van beroepscontexten*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/2014_mascil_richtlijnen_voor_ontwerp.pdf
- Meyer, D. (2010). *Math class needs a makeover*. [Videobestand].
<https://www.youtube.com/watch?v=NWUFjb8w9Ps>

De rol van de docent bij denkactieve wiskundelessen

Het geven van denkactieve wiskundelessen vraagt een daaraan aangepaste houding en rol van de docent. In andere paragrafen vind je informatie over specifieke aspecten daarvan. Nu vragen we ons af: welke opvattingen, houding en klimaat spelen op de achtergrond een voorwaardelijke rol voor het realiseren van denkactieve wiskundelessen?

Ten eerste is de **opvatting over wiskunde en wiskundeonderwijs** van belang. Als je zelf wiskunde ziet als een ontdekkingsreis, als een activiteit waarin door nadenken verbanden worden gelegd, patronen worden ontdekt en problemen worden opgelost, dan zal je dat ook al snel als doel van wiskundeonderwijs beschouwen en in je onderwijs graag aandacht besteden aan het wiskundige denken dat daarvoor nodig is. Straal in je lessen dan ook uit dat dit is waarom het gaat, waarom je wiskunde belangrijk vindt en waarom je er plezier in hebt!

In de praktijk vraagt dit om een proactieve houding, waarin je bewust probeert om de wiskundige aanknopingspunten in het werk van leerlingen te herkennen en te benutten, of zelfs uit te buiten. Zoals een docent het uitdrukte: **“een WDA-blik is een way of life”**, een tweede natuur om alert te zijn op mogelijkheden om leerlingen uit te dagen en aan te zetten tot doordenken, tot begrijpen wat ze aan het doen zijn. Dat vraagt niet om een revolutionaire aanpak van het onderwijs; kleine ingrepen in de dagelijkse lespraktijk en in de houding die je uitstraalt kunnen al een wereld van verschil maken.

Het ontwikkelen van **een repertoire van reacties** om leerlingen in een denkactieve stand te krijgen is een kwestie van uitproberen, van eraan wennen, van uit je vaste patronen komen, van vallen en van opstaan. Met dat repertoire moet je vervolgens kunnen variëren, kunnen improviseren, al naar gelang wie je voor je hebt in de klas en wat er gebeurt in de les. Niet eenvoudig, maar het kan wel opleveren dat leerlingen wiskunde meer gaan waarderen:

If students are both led though and invited to participate in typical mathematical activities, they are more likely to appreciate mathematics as a discipline rather than a torture. (Mason, 2000, p. 103)

Een voorwaarde hiervoor is dat in de klas **een veilig en stimulerend werkklimaat** ontstaat om wiskundig te durven denken. Creëer een sfeer in de les die uitnodigt tot nadenken, tot meedenken, zonder dat gelijk hebben het hoogste doel is. Wees voorzichtig met te snelle oordelen over reacties van leerlingen, geef hen het gevoel dat elke gedachte het waard is om naar te luisteren. Zorg er ook voor dat leerlingen zich vrij voelen om uit te spreken wat ze niet begrijpen. Straal ook vertrouwen uit in de capaciteiten van de leerlingen en stimuleer het zelfvertrouwen:

Alle leerlingen kunnen begrijpen wat ze aan het doen zijn in plaats van te proberen per type som trucs te onthouden. Dat zelfvertrouwen stimuleer je. (Van Streun, 2014, p. 50)

Tips:

- Maak duidelijk dat wiskunde geen kant-en-klare doos vol trucjes is, maar een vak waarin wordt nagedacht. De geschiedenis van de wiskunde illustreert dit op een mooie manier.
- Bedenk voor een les enkele mogelijke reacties op de inbreng van leerlingen die het denken activeren en probeer die uit zodra de kans zich daarvoor voordoet.
- Straal uit dat je zelf graag actief met wiskunde bezig bent, door bijvoorbeeld ook zelf hardop na te denken.

Wil je meer weten over de houding en rol van de docent, dan kun je hier verder lezen:

- Doorman, M., van der Kooij, H., & Mooldijk, A. (2012). Denkactiviteiten, onderzoekend leren en de rol van de docent. *Nieuwe Wiskrant*, 31, 9-12.
http://www.fisme.uu.nl/wiskrant/artikelen/314/314juni_doorman-vanderkooij-mooldijk.pdf
- Van Streun, A., & Kop, P. (2012). Wiskundige denkactiviteiten. In P. Drijvers, A. van Streun & B. Zwaneveld (Eds.), *Handboek wiskundededidactiek* (pp. 339-368). Amsterdam: Epsilon.

Sturing van het proces

Als je leerlingen wilt aanzetten tot wiskundig denken, moeten ze de gebaande paden vaak verlaten. Opgaven worden opener, vragen zijn minder gebruikelijk en werkvormen minder vertrouwd. Dat kan tot gevolg hebben dat leerlingen zich wat verloren voelen in het begin. Ze hebben behoefte aan structuur, aan houvast. De mate waarin dat nodig is, hangt af van de ervaring van de leerling en van de activiteit. Hoe opener en denkactiever de opgave, hoe meer sturing wellicht nodig is. Hoe kun je leerlingen voldoende structuur bieden, zonder dat hen de denkactiviteit uit handen wordt genomen?

Als leerlingen nog niet gewend zijn dat een beroep wordt gedaan op wiskundig denken, kan het verstandig zijn om wat **sturing in de opgave zelf** in te bouwen. Niet dat het dan meteen een opgave hoeft te worden met kleine stapjes van a tot en met f, maar het werk kan wel beginnen met een oriënterende vraag: vul een getal in, bekijk een specifiek en eenvoudig geval, ga na wat er gebeurt in een extreme situatie,

Aan een denkactieve opdracht kun je ook sturing geven door een geschikte **klassikale inleiding**, waarin een oriëntatie op de begrippen plaatsvindt, vereiste voorkennis wordt opgehaald, de vraag toegankelijk wordt gemaakt en misschien al een eenvoudig geval wordt bekeken. Het resultaat is dan dat elke leerling weet wat de bedoeling is en een begin kan maken. De manier waarop je als docent een opdracht in de les aanbiedt kan veel invloed hebben op het leereffect.

De sturing hoeft niet altijd inhoudelijk te zijn, maar kan ook goed gericht zijn op **het proces van het probleemoplossen** in het algemeen. De docent geeft dan geen inhoudelijke of technische hints of uitleg maar vraagt naar de aanpak, de strategie: “Wat wil je eigenlijk weten?”, “Heb je iets dergelijks al eens eerder gezien?”, “Zou je nog iets van de gegevens kunnen gebruiken?”, of “Waar wil je eigenlijk heen?”. Het gaat dus om coaching van het proces; zie ook het stuk over [vragen stellen](#).

Als je sterker wilt sturen, kun je ook een **fasering** of stappenplan aanbieden. Zo’n stappenplan kan heel specifiek zijn, maar het kan ook nuttig zijn om leerlingen een algemeen stappenplan aan te leren. Drie opties voor zo’n generiek plan van aanpak, waar nog meer over te lezen valt in de links onder dit stuk, zijn:

- Polyá: probleem begrijpen - een plan maken - het plan uitvoeren – terugblikken.
- Doorman: exploratie – probleemformulering - systematisch onderzoek – rapportage.
- Systematische probleemaanpak: voorbereiding – aanpak – antwoord – controle.

Stuur erop aan dat leerlingen **denkstappen en strategieën expliciet verwoorden**. Vraag naar het hoe en waarom in plaats van naar het wat. Waardeer vooral de methode en aanpak van leerlingen boven de uitkomst of het antwoord. Moedig hen aan om denkstappen te benoemen, om argumenten te geven, om de procedure uit te leggen en op te schrijven.

In samenhang met het vorige punt: moedig leerlingen aan om zelf greep te houden op het oplossingsproces, op de grote lijn, en om zelf de **voortgang te monitoren**. Dat kan bijvoorbeeld door vragen te stellen als “Waar ben je mee bezig?” en “Waar wil je ook al weer heen?” Bij dit monitoren van de voortgang hoort natuurlijk ook het terugkijken en controleren: “Klopt wat je nu gevonden hebt met de gegevens?” en “Waarom wil je dit nu ook al weer weten?”

Als leerlingen een tijd aan een probleem hebben gewerkt, is een **klassikale nabespreking** heel belangrijk voor het vastleggen van wat is geleerd en het reflecteren op de opgave. Besteed daarin vooral aandacht aan de verschillende strategieën die mogelijk zijn en aan de stappen in de probleemaanpak die cruciaal zijn bij het oplossen. Welke gedachten gaven de doorslag? Hoe had je daar op kunnen komen? Laat leerlingen met originele methoden aan het woord. Aandacht voor dergelijke punten kan ertoe leiden dat leerlingen een volgende keer beter zijn toegerust om zichzelf in een proces van wiskundig denken te storten. Zie ook het stuk over [een klassengesprek voeren](#).

Goed voorbeeld doet goed volgen. **Laat dus ook aan de leerlingen zien hoe je zelf over een probleem nadenkt** en daarmee aan de slag gaat. Wees niet bang om voor de klas hardop aan een probleem te werken. Dat kan een bekend probleem zijn, maar een onbekende situatie, een vraag die op dat moment ontstaat, of een alternatieve en onverwachte methode van een leerling kunnen spannender zijn. Benoem dan je stappen, associaties, vermoedens, pogingen, maak leerlingen deel van je eigen zoektocht. Wees niet bang om niet tot een oplossing te komen; dat maakt op leerlingen waarschijnlijk meer indruk dan alle opgaven die je vlot en foutloos voor de klas hebt opgelost!

Vergeet niet om in de loop van de tijd, als onderdeel van de leerlijn wiskundig denken, **het bieden van structuur ook af te bouwen**. Naarmate de leerlingen ervaring hebben met denkactief wiskundeonderwijs, zullen ze minder behoefte krijgen aan structuur en sturing van het proces. Dat dan toch blijven bieden kan afbreuk doen aan het denkactiverende karakter. Geef leerlingen geleidelijk aan meer verantwoordelijkheid voor het zelf structureren en sturen van het oplossingsproces. Afhankelijk van het niveau en de ervaring van de leerlingen kunnen de suggesties hierboven op een gegeven moment dus wellicht overbodig worden of slechts met mate worden toegepast!

Tips:

- Hoe opener de opdracht, hoe meer structuur in de aanpak nodig is.
- Meer aandacht voor proces, minder voor resultaat.
- Stimuleer leerlingen om na te gaan hoe het staat met de voortgang van het oplossingsproces.
- Reflecteer samen met leerlingen op centrale concepten, principes, methoden en probleemaanpak.

Wil je meer weten over de sturing van het proces, dan zijn de volgende materialen aanraders:

- Doorman, M., van der Kooij, H., & Mooldijk, A. (2012). Denkactiviteiten, onderzoekend leren en de rol van de docent. *Nieuwe Wiskrant*, 31, 9-12.
http://www.fisme.uu.nl/wiskrant/artikelen/314/314juni_doorman-vanderkooij-mooldijk.pdf
- Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press. https://notendur.hi.is/hei2/teaching/Polya_HowToSolveIt.pdf
- SPA Systematische probleemaanpak.
<http://www.slo.nl/voortgezet/tweedefase/publicaties/spa/>

Vragen stellen en hints geven

Een goede vraag, gesteld op het goede moment, zet een leerling aan het denken. Maar wat is nu een goede vraag en wanneer is het goede moment? Dit is een kwestie van aanvoelen en ervaring, maar de literatuur en ervaringen van het docententeam geven hiervoor goede suggesties.

Het stellen van een goede vraag gaat niet vanzelf, het vraagt oefening. Deze oefening begint al bij de **lesvoorbereiding**. Bedenk hoe je leerlingen aan het denken kunt zetten en verzin daarbij een aantal vragen die je kunt stellen. Probeer te bedenken wat de leerlingen lukt, waar ze vastlopen en hoe je ze verder kan helpen. Verzint hints en vragen waarmee leerlingen aan de slag kunnen zonder dat je hen het denkwerk uit handen neemt. Door hierover na te denken in de lesvoorbereiding zal het stellen van goede vragen tijdens de les steeds beter lukken en steeds meer een gewoonte worden.

Een goed moment om een vraag te stellen is wanneer de leerling jou een vraag stelt. Wanneer een leerling is vastgelopen bij het oplossen van een opgave, kun je hem weer op gang helpen door **een geschikte wedervraag** te stellen. Probeer je te verdiepen in de gedachtegang van de leerling en stel een vraag waar hij zelf ook op had kunnen komen, een die voor de hand ligt als je bent waar de leerling is. Daarvoor moet je zelf de mogelijke oplossingsroutes goed in je hoofd hebben, maar ook flexibel met de leerling mee kunnen denken. Daarnaast, en misschien als begin, kun je zo algemeen mogelijke vragen stellen, die op het proces betrekking hebben en ook op andere problemen losgelaten kunnen worden. Zie hiervoor ook [Sturing van het proces](#). Komt de leerling er dan nog niet uit, maak de vragen dan steeds specifieker.

Om leerlingen een probleemoplossende houding aan te leren, kun je hen stimuleren om **zichzelf vragen te stellen**. Je kunt bijvoorbeeld een aantal keren dezelfde vragen stellen. Als je dit enige tijd hebt gedaan, kan de volgende vraag zijn: “Welke vraag ga ik je nu stellen?” Een andere optie is om steeds meer vragen te vervangen door kleine hints en weer later ook deze hints te laten vervallen.

De manier van vragenstellen is erg belangrijk. In het onderwijs zijn leerlingen gewend dat de docent het antwoord al weet op de vraag en de leerling probeert om het antwoord te geven dat de docent in gedachten heeft. Binnen wiskundig denken is er juist ruimte voor **open vragen**, met meerdere mogelijke antwoorden. Ze creëren een sfeer van samen problemen oplossen. Toon ook oprecht interesse in het denkproces van de leerling. Vraag wat ze gedaan hebben, waar ze naartoe willen en hoe ze denken daar te komen. Welk wiskundig gereedschap willen ze gebruiken en waarom? Op deze manier maak je leerlingen bewust van het proces dat ze doorlopen.

Om leerlingen te helpen bij het begrijpen van wiskunde is **doorvragen** heel belangrijk. Eén vraag speelt hierbij een grote rol: “Waarom?” Deze vraag kun je altijd aan leerlingen stellen: als ze zelfstandig werken of in groepjes, in een klassengesprek of op de toets. Naast de waarom-vraag kun je leerlingen vragen naar randgevallen of uitzonderingen of juist laten bedenken welke algemeen geldende theorie of werkwijze uit deze opgave afgeleid kan worden. Ook is het goed om leerlingen na te laten denken over de gebruikte wiskundige gereedschappen. “Kun je deze altijd gebruiken of zijn er voorwaarden aan verbonden?”

Een valkuil bij het stellen van vragen is dat je leerlingen te weinig **denktijd** geeft. Laat een denkpauze vallen en wacht in een klassengesprek tot alle leerlingen iets bedacht hebben. Vraag dus ook niet altijd om vingers en ga niet te snel verder met een volgende vraag. Wel kun je de vraag nogmaals stellen in andere woorden. Komt er geen reactie van leerlingen dan is de verleiding groot om zelf maar het antwoord te geven of steeds eenvoudigere vragen te stellen. Hiermee neem je de leerlingen het denkwerk uit handen. In zo'n situatie kun je beter een van de volgende vragen stellen: "Waar zit voor jou/jullie het probleem?", "Wat moet je doen?" of "Hoe zou je kunnen beginnen?".

Tips:

- Stel vragen, heel veel vragen.
- Vraag door op reacties van leerlingen en laat hen ook op elkaar reageren.
- Om leerlingen voldoende denktijd te geven kun je de volgende werkvorm gebruiken: denken, delen, uitwisselen.
- Stel eens een omkeervraag: Geef het antwoord en vraag welke opgave hierbij zou kunnen horen.
- Leuke wedervraag: "Goede vraag! Wat dacht je zelf?"
- Stimuleer leerlingen om vragen te stellen.

Wil je meer weten over vragen stellen, dan is dit artikel een aanrader:

- Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 97-111.

Een klassengesprek voeren

Klassengesprekken zijn belangrijk om de kennis van de leerlingen bij elkaar te brengen en om er voor te zorgen dat “alle neuzen dezelfde kant op staan”. Als leerlingen vrijwel uitsluitend individueel of in groepjes werken, kunnen de opbrengsten daarvan ver uit elkaar gaan lopen. Hoe kun je er dan voor zorgen dat ook tijdens een klassengesprek wordt nagedacht en dat de leerlingen daarbij een denkactieve houding hebben?

Het is belangrijk dat de **leerlingen een stem hebben** in het klassengesprek. Dat kan op verschillende manieren. Laat leerlingen bijvoorbeeld hun mening geven door te stemmen, gewoon met vingers opsteken, of met behulp van daarvoor beschikbare apps op de smartphone die leiden tot een mooi overzicht op het digitale schoolbord. Ook kunnen leerlingen voorafgaand aan een klassengesprek hun oplossing op het bord zetten of hun methode presenteren. Tevens is het goed om hen uit te nodigen om op elkaar te reageren, om argumenten uit te wisselen. De docent is dan gespreksleider, die de antenne heeft uitstaan op wiskundig interessante bijdragen van leerlingen waarop de discussie verder kan ingaan.

Het werkt goed als er in het gesprek een zekere **spanning, verrassing, of controverse** zit. Verschillende strategieën of antwoorden van leerlingen kunnen worden vergeleken en tegen elkaar worden afgezet: “Is elk van de methoden goed?”, “Wat is wanneer de beste aanpak?” Of een klassengesprek rond een opgave die een verleidelijke fout bevat of waarin een ander antwoord ook goed te verdedigen is.

Het **bespreken van huiswerk** wordt nogal eens als saai ervaren. Ook daarin liggen echter kansen voor denkactiviteit: vraag door naar het waarom van een methode, of varieer de vraagstelling licht, waardoor een nieuwe situatie ontstaat: “Kunnen we nu zeker weten dat dit altijd werkt?” of “Blijft deze aanpak ook werken in het geval dat” of “Kun je een geval bedenken waarin deze vlieger niet meer opgaat?” Vanzelfsprekend moeten de leerlingen ook de tijd krijgen om over dergelijke vragen na te denken. Zie ook het stuk over [vragen stellen](#).

Het is goed om tijdens dergelijke klassengesprekken **voorzichtig te zijn met waardeoordelen**. Als het doel in de eerste plaats is om leerlingen wiskundig te laten denken, en pas in de tweede plaats om tot een correct antwoord te komen, dan kan het goed zijn om over het antwoord geen uitsluitend te geven, maar slechts in te gaan op de methode en de argumenten.

In een klassengesprek worden fouten gemaakt, zowel door leerlingen als door de docent zelf. Zie dat niet uitsluitend als ongewenst: **fouten zijn ook kansen**. In veel gevallen is het goed om een gemaakte fout niet te verdoezelen, maar die expliciet tot onderwerp van gesprek te maken: “waarom is dit niet correct?”, of “waarom is dit toch wel een begrijpelijke fout?” of “zijn er gevallen waarin je dit wel zo had kunnen zeggen of doen?”. Zo worden fouten aanleiding tot denkactiviteit en reflectie; een fout van de docent zelf kan leerlingen inzicht geven in het denkproces van de expert, en tevens duidelijk maken dat ook ervaren wiskundigen fouten kunnen maken.

Eindig een klassengesprek met een vorm van **reflectie**. Kijk met de leerlingen terug op wat er gedaan is, welk wiskundig gereedschap hierbij van pas komt, wat de uitkomst is, wat we er van leren en moeten onthouden, en welke inzichten en technieken de sleutel waren tot de oplossing.

Als leerlingen zelfstandig aan het werk zijn, is het verleidelijk om dat de hele les te laten doorlopen. Toch kan het goed zijn om dit te **onderbreken voor een korte klassikale terugkoppeling** om de verschillende wegen die leerlingen inslaan in kaart te brengen en hen wat meer dezelfde kant op te laten werken. Vragen die daarbij gesteld kunnen worden zijn “waar ben je mee bezig, hoe pak je het aan?” of “welke begrippen of methoden gebruik je en waarom zijn die van toepassing?”

Tips:

- Als leerlingen vijf minuten aan de slag zijn geweest, onderbreek dat dan even en inventariseer klassikaal welke begrippen en methoden de leerlingen kansrijk vinden bij het gegeven probleem.
- Vraag leerlingen in eerste instantie om niets uit te voeren, maar om alleen te bedenken op welke manier je het probleem gaat aanpakken.
- Speel tijdens een klassengesprek de rol van advocaat van de duivel, die de beweringen van leerlingen op de proef stelt met al dan niet terechte kanttekeningen.
- Laat leerlingen allemaal één begrip noemen dat nog niet is genoemd, zodat ook écht iedere leerling aan bod komt. Inventariseer dan welke begrippen overbodig of wellicht dubbelop waren. Zo breng je ook in beeld hoeveel begrippen nodig zijn bij het komen tot de oplossing; of dat er voor verschillende strategieën verschillende begrippen nodig zijn.

Wil je meer weten over het voeren van klassengesprekken, dan is het volgende artikel een aanrader:

- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
<http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/wda>

Groepswerk begeleiden

Bij klassikaal lesgeven is het moeilijk om alle leerlingen denkactief te houden. Misschien zijn leerlingen wel denkactiever als ze zelfstandig aan opgaven werken, individueel of in tweetallen of groepjes? Maar ook dat garandeert niet dat er werkelijk wordt nagedacht over wiskunde. Hoe kun je het zelfstandig werken, en het groepswerk in het bijzonder, begeleiden zodat je het wiskundig denken bevordert?

Bij het voorbereiden van opdrachten voor groepswerk kan het goed zijn om **verschillende versies of varianten** te maken, zodat niet elk groepje aan exact dezelfde opgave werkt. Laat elk groepje bijvoorbeeld een verschillende geval onderzoeken, of geef ze verschillende gegevens. Dit geeft een zekere spanning in de klas. De verschillende oplossingen of situaties kunnen later worden uitgewisseld tussen de groepjes, of onderwerp zijn van een klassengesprek waarin een totaalbeeld ontstaat waaraan elk groepje een bijdrage levert. Zie ook [Een klassengesprek voeren](#).

Bereid vooraf hints en vragen voor, waarmee je op vragen van leerlingen kunt reageren als ze te lang vastlopen of geen begin kunnen maken. Help hen met het herformuleren van het probleem of met het opsplitsen ervan in deelvragen. Zie ook [Vragen stellen](#).

Het kan ook denkactiverend werken om in de opgave of in de werkvorm een **spelelement** in te bouwen. Elk groepje mag bijvoorbeeld één extra gegeven of één hint vragen. Of vragen en hints kosten punten en snelle oplossingen of methoden in weinig stappen leveren extra punten op, net als meerdere echt verschillende oplossingen. Dit kan leerlingen motiveren en daarmee aanzetten tot wiskundig denken.

Bij het begeleiden van groepswerk kan het goed zijn om als docent **niet altijd meteen beschikbaar** te zijn. Geef groepjes leerlingen met name in de beginfase tijd om zich in het probleem in te leven en het te begrijpen. De verleiding om dan snel hulp te vragen kan worden afgeremd door als docent druk bezig te zijn met iets anders (klassenboek, agenda) en even niet te reageren op vragende blikken. Grijp niet te snel in in het groepswerk en geef de leerlingen ook de kans om fouten te maken en daarvan te leren. Geef hen de tijd om zelf iets te proberen en te ontdekken en om uit een impasse te komen. Zie ook [Tijd en timing](#).

Biedt voldoende structuur: zorg ervoor dat de opgave voldoende duidelijk is om een begin te kunnen maken, bijvoorbeeld door een korte klassikale inleiding. Je kunt leerlingen ook vragen om eerst in groepjes de opdracht te lezen en een aanpak te bedenken (maar die nog niet uit te voeren!) en vervolgens na korte tijd de verschillende ideeën even klassikaal te inventariseren. Zie ook [Sturing van het proces](#).

Het is van belang om bij de begeleiding **aandacht te hebben voor het oplossingsproces** en niet (alleen) voor antwoord of eindproduct. Vraag leerlingen om een toelichting op hun aanpak en uitkomst, om het benoemen of opschrijven van het waarom, van de achterliggende redenering. Ga ook gewoon bij een groepje staan luisteren en toon belangstelling voor hun aanpak en gedachten.

Het tempo en niveau van de verschillende groepjes zal variëren, zeker als de leerlingen ze zelf hebben samengesteld. Zorg dus voor manieren van **differentiatie** en eventueel extra werk voor

groepjes die snel klaar zijn. Bedenk bijvoorbeeld een logische vervolggave of extra uitdaging. Of vraag leerlingen die snel klaar zijn om hints voor anderen te bedenken. Leerlingen van een groepje dat klaar is kunnen zich ook verspreiden over andere groepjes om daar te helpen. Laat snelle groepjes elkaars werk uitwisselen, becommentariëren en eventueel beoordelen.

Groepswerk kan heel productief zijn, maar niet elke leerling voelt zich er prettig bij en de samenwerking binnen een groepje zal niet altijd goed verlopen. Besteed daaraan aandacht en zorg ook voor **variatie in werkvormen**, voor een balans tussen groepswerk en andere individuele of klassikale werkvormen.

Tips:

- Denk na over de samenstelling van groepjes. Drie leerlingen per groepjes blijkt in praktijk goed te werken (zie het aanbevolen artikel hieronder). Laat je leerlingen zelf kiezen of stel je ze zelf samen? In het laatste geval: zet je leerlingen van verschillende niveaus bij elkaar of maak je juist homogene groepjes met mogelijk verschillende opdrachten?
- Gebruik voor groepswerk opdrachten waarvan varianten te maken zijn en die uitnodigen tot verdiepende vervolgoopdrachten.
- Bespreek groepswerk altijd klassikaal na, waarbij de verschillende groepjes input leveren door hun aanpak en resultaat toe te lichten.

Wil je meer weten over het begeleiden van groepswerk, dan is het volgende artikel aan te raden:

- Dekker, R. (2015). Procehulp bij samenwerkend wiskunde leren. *Euclides*, 90(5), 18-21.

Tijd en timing

Een veel gehoorde klacht in het onderwijs is dat er eigenlijk te weinig tijd is voor het verwezenlijken van hogere onderwijsdoelen zoals wiskundig denken. Hoe vind je als docent met zulke volle examenprogramma's nog de tijd om aandacht te besteden aan wiskundig denken? Denken neemt nu eenmaal meer tijd in beslag dan reproduceren. Waar haal je de tijd vandaan en hoe ga je om met de beperkte tijd?

Dat wiskundig denken tijd kost is geen reden om er geen aandacht aan te besteden. Als leerlingen leren denken en de achtergronden begrijpen van de procedures die ze toepassen, dan winnen ze daarmee weer tijd wanneer de probleemsituatie iets verandert en de oplossingsstrategie moet worden aangepast of is vergeten. Het zou jammer zijn om aan het onderliggende denken geen aandacht te besteden. De investering in ***tijd voor wiskundig denken betaalt zich later terug***.

Overigens hoeft aandacht voor wiskundig denken niet altijd veel tijd te vragen. Wanneer je bijvoorbeeld ***een opgave naar voren schuift*** uit het einde van het hoofdstuk of de paragraaf, kun je leerlingen uitdagen om zelf de theorie te ontdekken. Lukt dit de leerlingen, mogelijk met wat extra hulp, dan begrijpen ze de theorie beter. Hierna zullen ze met nog een beetje oefening de stof onder de knie krijgen, maar is het niet meer nodig om alle opgaven te maken. Dat kan weer tijdbesparend zijn.

Een belangrijke factor hierbij is de ***timing***: wanneer kun je een opgave het beste voorleggen aan leerlingen? Op welk moment hebben leerlingen wel genoeg voorkennis, maar nog niet de routine die de vraag reproductief maakt? Timing is ook belangrijk bij het [stellen van vragen](#). Een goede vraag gesteld op het goede moment zet aan tot wiskundig denken. Om dit ook daadwerkelijk te kunnen doen is het belangrijk om je leerlingen goed te kennen.

Als je leerlingen wilt laten denken, moet je hen daar ruim de tijd voor geven. Geef hen ***denktijd*** wanneer je hen een opdracht geeft of een vraag stelt. Wanneer je een grotere opgave geeft, plan dan tijd in zodat leerlingen de opgave kunnen begrijpen en stel vragen als "Wat weten we?" of "Wat wil je gaan doen?" en benadruk in het begin dat leerlingen niet direct moeten gaan rekenen, maar eerst een plan van aanpak moeten bedenken. Daag hen ook uit om niet te snel op te geven, maar echt in het groepje op zoek gaan naar een oplossing. Onderschat niet hoeveel tijd het kost om leerlingen aan het denken te zetten. Een opdracht met weinig sturing vraagt meer initiatief van leerling en kost over het algemeen meer tijd.

Tips:

- Een opgave moet aansluiten bij de voorkennis, maar mag ook uitdagend en nieuw zijn.
- Durf te vertragen door een grotere opdracht te doen, met een grote te verwachten leeropbrengst.
- Geef je een leerling ook de tijd om even achterover te leunen en te genieten van zijn succes na het oplossen van een moeilijke opgave?

Ideeën om het wiskundig denken van leerlingen te activeren

Er zijn veel verschillende manieren om leerlingen in de wiskundeles aan het denken te zetten. Hieronder staat een aantal ideeën in de vorm van *one-liners* toegelicht. De vetgedrukte woorden zijn ook te vinden in de woordzoeker hieronder. Heb je alle woorden gevonden, dan vormen de overgebleven letters een aanmoediging.

N	E	L	E	D	D	I	M	P	L	U	H	Z
E	S	E	M	R	O	V	K	R	E	W	P	E
P	T	T	X	E	T	N	O	C	D	E	R	V
L	S	R	E	T	S	O	P	K	L	A	E	E
E	S	A	U	M	G	E	L	T	I	U	S	I
H	A	O	N	H	M	E	T	D	E	N	E	T
A	F	W	I	S	S	E	L	I	N	G	N	A
V	O	O	R	K	E	N	N	I	S	K	T	N
D	I	F	F	E	R	E	N	T	I	E	E	R
E	J	D	A	A	L	B	D	A	L	K	R	E
N	E	D	R	O	O	W	T	N	A	E	E	T
N	V	O	O	R	W	A	A	R	D	E	N	L
S	I	N	E	D	E	I	H	C	S	E	G	A

- Zorg voor **afwisseling**. Bied variatie aan door klassengesprek, groepswork en individueel werken af te wisselen.
- Vraag snelle leerlingen om langzamere leerlingen te **helpen**.
- Activeer **voorkennis**, bijvoorbeeld door terug te kijken op een eerdere denkactieve opdracht.
- Heb je weinig tijd aan het einde van de les? Wijs dan een groepje aan dat in de volgende les hun aanpak en oplossing mag **presenteren**.
- Maak eens expres een **fout** en bespreek deze.
- **Differentieer** door leerlingen verschillende opgaven te geven.
- De ene leerling is visueel ingesteld, terwijl de ander liever met zijn handen werkt. Differentieer daarom in **werkvorm**: knippen en plakken of juist tekenen.
- Vraag of wiskundig gereedschap algemeen bruikbaar is of dat er **voorwaarden** aan verbonden zijn.
- Stimuleer leerlingen om mogelijke ideeën op te schrijven of te tekenen, bijvoorbeeld door het gebruik van een **kladblaadje**.
- Bedenk vooraf welke **hulpmiddelen** gebruikt mogen worden: het boek, internet, kaartjes met hints, tussenvragen en/of voorbeelden.
- Geef leerlingen geen **antwoorden** of uitwerkingen.

- Hang in je lokaal **posters** op met vragen die je aan jezelf kunt stellen bij het oplossen van een probleem. Deze posters kun je zelf maken of laten maken door je leerlingen.
- Laat leerlingen vooraf **stemmen** over de verwachte uitkomst van een probleem.
- Moedig leerlingen aan om **uitleg** te geven, ook aan elkaar.
- Heeft een leerling een opgave opgelost, vraag dan of hij ook een **alternatieve** oplosmethode kan bedenken.
- Bij het introduceren van een nieuw onderwerp kun je een eenvoudige **context** zoeken waarin alle achterliggende betekenissen van het nieuwe begrip naar voren komen.

De wiskundesectie

Gelukkig sta je er als docent niet alleen voor wanneer je de uitdaging aangaat om je leerlingen meer wiskundig te laten denken. We hebben in ons project gemerkt dat docenten het samenwerken met collega's als zeer positief en leerzaam ervaren. Binnen je wiskundesectie kun je elkaar helpen door bijvoorbeeld samen materiaal te ontwikkelen of elkaar feedback te geven. Hieronder volgt een aantal punten die kunnen bijdragen aan een effectieve samenwerking.

Een praktische reden om samen te werken is dat je met elkaar meer en betere **opgaven** kunt **ontwikkelen** dan alleen. Elke docent kan voor de eigen klassen opgaven bedenken, uitproberen en eventueel verbeteren. Al deze opgaven kunnen bij elkaar in een database worden gestopt waaruit vervolgens alle collega's kunnen putten. Een andere optie is om als docenten van parallelklassen met elkaar samen te werken aan geschikte opgaven, deze verschillende malen te testen en vervolgens aan te passen. Dit kost meer tijd, maar levert kwalitatief betere opdrachten op die meerdere jaren gebruikt kunnen worden.

Wanneer je intensief samenwerkt met collega's om opgaven te ontwerpen, dan ontdek je dat je veel **van elkaar** kunt **leren**. Dit kun je verder faciliteren door bij elkaar mee te kijken in de les. Kijk eens naar wat de ander doet om leerlingen aan het denken te zetten. Wat werkt goed en wat zou beter kunnen? Geef elkaar feedback en zet een aantal leerpunten op papier. Bij het voorbereiden van een volgende les kun je deze leerpunten er weer bij pakken en hier bewust stappen in ondernemen. Blik ook eens een maand later terug, alleen of met een collega, om te zien hoe je bent gegroeid of waaraan toch nog meer aandacht kunt besteden.

Leerlingen hebben tijd en oefening nodig om wiskundig te leren denken. Een **doorlopende leerlijn** is daarom van belang. Wanneer leerlingen al in de eerste klas beginnen met bijvoorbeeld het systematisch aanpakken van problemen, dan wordt dit een gewoonte die zij ook kunnen gebruiken bij het oplossen van een nieuw probleem. Ook is het handig als sectie te overleggen welke kennis en vaardigheden leerlingen in de verschillende leerjaren moeten beheersen. Dus welk gereedschap moet er in de kist zitten en op welk moment bied je nieuw gereedschap aan?

Tips:

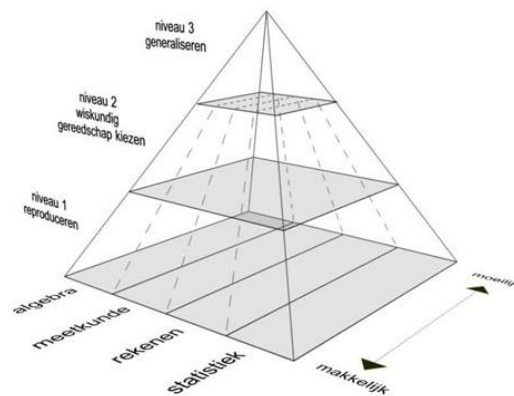
- Plan momenten in om samen inhoudelijk te overleggen of opgaven te ontwerpen. Doe dat in twee- of drietallen, bijvoorbeeld met collega's die in parallelklassen lesgeven.
- Het introduceren van wiskundig denken is niet eenvoudig. Valt het tegen, deel dan je frustratie met een collega. Het is fijn om je hart te luchten en wie weet heeft de ander nog goede tips.
- Wees kritisch op je eigen opdrachten en sta open voor feedback van collega's.

Wiskundig denken toetsen

Als wiskundig denken een belangrijk leerdoel is in de lessen, hoort het ook getoetst te worden. Maar het toetsen van wiskundig denken is niet eenvoudig. Hoe kun je beoordelen of leerlingen nieuwe problemen kunnen oplossen, met modellen kunnen werken of kunnen abstraheren? Kun je dergelijke hogere leerdoelen wel zichtbaar maken in een gewone toets? Kortom, hoe pak je dat aan, WDA toetsen?

Laten we om te beginnen kijken naar de gewone praktijk van schriftelijke toetsen en proefwerken. Een eerste mogelijkheid is om **de vragen net even anders te maken**. Vraag bijvoorbeeld niet altijd naar het eindantwoord, maar naar de eerste stap. Geef een model niet helemaal weg omdat de leerlingen het bij vervolgvragen nodig hebben, maar laat hen slechts een model opstellen en onderbouwen. Vraag hen om de fout uit een gegeven oplossing te halen. Zet een opgave eens “op zijn kop” door niet uit de gegevens tot een conclusie te komen, maar door vanuit de conclusie te onderzoeken of de gegevens nodig en voldoende zijn.

Een proefwerk vol met originele vragen kan leerlingen overvallen en kan slecht gemaakt worden. Bovendien wil je in het algemeen ook de standaardvaardigheden toetsen. Zorg daarom bij een schriftelijke toets voor een **goede balans tussen routineopgaven en denkactieve opgaven**. Als je een toets hebt ontworpen, ga dan na of zowel reproductievragen als toepassingsvragen als denkactieve vragen aan de orde komen. Denk bijvoorbeeld aan een verhouding 50% - 30% - 20% of spreek met de collega's van de sectie een andere verhouding af. Bij het nagaan of je aan je eigen criteria voldoet, kun je bepaalde modellen gebruiken, zoals de toetspiramide van PISA, het RTTI-model of het OBIT-model. De toetspiramide, afgebeeld in Figuur 1, maakt bijvoorbeeld duidelijk dat een toets grotendeels uit reproductieopgaven bestaat, maar daarnaast opgaven bevat waarin de leerling zelf het gereedschap kiest (dat is een denkstap!), en een toplaag waarin generaliseren aan bod komt. Zie de links aan het einde van dit stuk voor meer informatie hierover.



Figuur 1 Toetspiramide (De Lange, 1999)

De vraag is of een schriftelijke toets of proefwerk de meest geschikte vorm is voor het toetsen van wiskundig denken. **Gebruik daarom ook andere toetsvormen** zoals groepswerk, het houden van een presentatie, het schrijven van een rapport, het maken van een poster, of een tweetrapstoets waarbij leerlingen de gelegenheid krijgen het werk na een eerste vorm van feedback te verbeteren. Denk ook aan de landelijk georganiseerde competities zoals Kangoeroe, de onderbouwwiskunde dag, de A-

lympiade en de Wiskunde-B dag. Dergelijke activiteiten kosten meer lestijd dan een regulier proefwerk, maar kunnen bijvoorbeeld meetellen als onderdeel van het schoolexamen.

Ook in de centrale examens krijgt wiskundig denken een plaats, al is die op dit moment nog niet zo groot als men wellicht zou verwachten gelet op de grote aandacht voor dit onderwerp (zie Tabel 1). Het is dus van belang om leerlingen **voor te bereiden op denkactieve examenopgaven**. Dat kan bijvoorbeeld gebeuren door geschikte opgaven uit eerdere examens aan de orde te stellen, of door in de schoolexamens denkactieve opgaven op te nemen. Bij het bespreken van dergelijke opgaven is het goed om expliciet aandacht te besteden aan de manier waarop je aan dergelijke opgaven kunt werken. Zie ook [Een klassengesprek voeren](#).

Tabel 1: Overzicht WDA in examens wiskunde B uit Kodde-Buitenhuis (2015)

Overzicht van het aantal examenvragen waarin WDA getoetst worden in pilot- en reguliere examens voor havo (2011-2015) en vwo (2012-2015) en bijbehorende percentages

Afnamejaar	Vwo pilot		Vwo regulier		Havo pilot		Havo regulier	
2011					8/19 (42%)		3/19 (16%)	
2012	9/15 (60%)		7/17 (41%)		5/19 (26%)		1/19 (5%)	
2013	9/17 (53%)		6/18 (33%)		4/17 (24%)		1/19 (5%)	
2014	9/18 (50%)		4/18 (22%)		6/19 (32%)		2/19 (11%)	
2015	6/16 (38%)		6/17 (35%)		6/16 (38%)		4/19 (21%)	
Totaal	33/66 (50%)		23/70 (33%)		29/90 (32%)		11/95 (12%)	

Tips:

- Stel ook originele en niet-routine vragen in schriftelijke toetsen en proefwerken.
- Gebruik de toetspiramide of het RTTI-model of het OBIT-model om te zorgen voor een goede balans tussen reproductie en wiskundig denken in je toetsen.
- Bespreek met de collega's van de sectie hoe je wiskundig denken in toetsen vorm gaat geven en wissel toetsen uit om dit beleid samen vorm te geven.

Wil je meer weten over het toetsen van wiskundig denken, dan zijn de volgende bronnen aan te raden:

Bergsma, S., Brouwers, A., van der Laan, E., Legierse, A., & Visser, T. (2006). *Het schriftelijk toetsen van denkvaardigheden*. Enschede: SLO.

<http://www.slo.nl/downloads/archief/het-schriftelijk-toetsen-van-denkvaardigheden-voor-alle-vakken.doc/>

Over toetsen:

- Dekker, T., Vos, P., & Lagerwaard, K. (2012). Wiskundetoetsen. In P. Drijvers, A. van Streun & B. Zwaneveld, *Handboek wiskundendidactiek* (pp. 299-338). Amsterdam: Epsilon.
- Webb, D., & Dekker, T. (2009). Beter toetsen, beter leren? *Nieuwe Wiskrant*, 28(3), 41-45. http://www.fi.uu.nl/wiskrant/artikelen/283/283maart_webb-dekker.pdf

Over denkactiviteiten in de centrale examens wiskunde van havo en vwo:

- Kodde-Buitenhuis, H. (2015). *Wiskundig denken in de pilotexamens van de nieuwe wiskundecurricula havo/vwo*. Master thesis. Utrecht / Arnhem: Universiteit Utrecht / Cito. <http://dspace.library.uu.nl/handle/1874/318236>
- Van Streun, A. (2014). *Het onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten*. Enschede: SLO. <http://www.slo.nl/downloads/2014/onderwijzen-en-toetsen-van-wiskundige-denkactiviteiten.pdf/>

Over wiskundewedstrijden waarin denkactiviteiten een grote rol spelen:

- <http://www.uu.nl/nieuws/wiskunde-wedstrijden-voor-teams-1>
- <http://www.w4kangoeroe.nl/kangoeroe/>

Wiskundige DenkActiviteiten: theoretische achtergronden²

Inleiding

Tot zover bevat deze handreiking vooral concrete tips en suggesties voor het vormgeven van denkactieve wiskundelessen. In het stuk dat nu volgt gaan we dieper in op de achtergronden hiervan. In een kort bestek komt de theorie aan de orde die mede de basis is van de handvatten over wiskundige denkactiviteiten. Daarmee willen we een kader geven om de ideeën van WDA beter te begrijpen.

Wat verstaan we onder wiskundig denken?

Als we wiskundig denken als een centraal doel van wiskundeonderwijs zien, rijst de vraag wat we daar nu precies onder verstaan. Wat is wiskundig denken en wat maakt het specifiek wiskundig? In de literatuur vinden we verschillende visies daarop.

Keith Devlin (2011) stelt dat wiskundig denken vooral een manier van kijken is, en zaken terugbrengen tot numerieke, structurele of logische kernen en patronen. Volgens de National Research Council (1989) gaat het bij wiskundig denken vooral om verschillende veelzijdige en krachtige denkwijzen, zoals modelleren, abstraheren, optimaliseren en het gebruik van symbolen. Schoenfeld (1992) gaat in op hoe je wiskundig denken leert: je moet een wiskundig standpunt ontwikkelen en mathematiseren en abstraheren kunnen toepassen, en vervolgens het bijbehorende gereedschap kunnen gebruiken om de structuur te begrijpen en wiskundige betekenis te geven. Ook zien we in de literatuur soms opsommingen van elementen van wiskundig denken. Dreyfus en Eisenberg (1996) noemen bijvoorbeeld analogie, structuur, representatie, visualisatie en omkeerbaarheid als aspecten van wiskundig denken. In Nederland kennen we de lijst van denkactiviteiten van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO, dat ook terugkomt in de syllabi voor de centrale examens wiskunde 2017 (havo) en 2018 (vwo) (CvTE, 2015):

Centrale denkactiviteiten [in het wiskundeonderwijs van havo en vwo] zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. (cTWO, 2007, p. 21)

Al met al is er van alles geschreven over wiskundig denken en wordt daarbij een aantal termen gebruikt die voor een deel overlappen, maar die ook om verduidelijking vragen. We gebruiken de volgende definitie:

Wiskundig denken is bedenken hoe je wiskundig gereedschap kunt gebruiken om een probleem aan te pakken.

Laten we sommige woorden hierin verder toelichten.

- *Hoe*

Met 'hoe' wordt bedoeld dat je kunt kiezen welk gereedschap je gaat gebruiken, in welke volgorde je dat doet en onder welke voorwaarden dat gereedschap zinvol gebruikt kan worden. Het gaat er dus ook om dat je weet wat de kracht en de beperking is van de verschillende 'tools' die je tot je beschikking hebt;

² Dit stuk is gebaseerd op eerdere publicaties van Drijvers (2015a, 2015b).

- *Wiskundig gereedschap*
De term 'wiskundig gereedschap' vatten we ruim op: het kan specifiek en concreet gereedschap zijn, zoals de *abc*-formule voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen, maar het omvat ook theoretisch-methodisch gereedschap, zoals vaardigheden in probleemoplossen, modelleren en abstraheren. Schoenfeld (1992) noemt als belangrijk wiskundig gereedschap abstractie, symbolische voorstelling, en het manipuleren van symbolen. In feite maakt juist dit gereedschap het denken tot wiskundig denken.
- *Gebruiken*
Met 'gebruiken' wordt niet alleen het toepassen van een bestaande, kant-en-klare methode bedoeld, maar ook het ontwikkelen daarvan, of het op maat maken en aanpassen van een bestaande methode voor een specifiek doel. Bovendien vraagt het gebruik van gereedschap of van een methode niet alleen ervaring in het toepassen, maar ook inzicht in het waarom erachter. Hier komt het onderscheid van pas tussen instrumenteel en relationeel inzicht (Skemp, 1976). Met instrumenteel inzicht wordt bedoeld dat je weet hoe het werkt en relationeel inzicht betekent dat je ook weet waarom het werkt en hoe een methode of begrip samenhangt met andere, zodat wiskunde een samenhangend geheel wordt in plaats van een verzameling van losse gereedschappen;
- *Probleem*
Een probleem is niet zomaar een opgave, maar een vraag waarvoor de leerling nog geen kant-en-klare oplosmethode ter beschikking heeft, een niet-standaard opgave van binnen of buiten de school, binnen of buiten de wiskunde, die de leerling (nog) niet routinematig kan oplossen. Zoals Van Streun en Kop (2012) stellen, betekent dit dat de oplosser eerst zal moeten nadenken over wat gegeven is, wat de vraag is en hoe het probleem kan worden aangepakt. In dit oplossingsproces heb je parate kennis nodig, concrete vaardigheden, maar ook probleemoplossende vaardigheden.

Wanneer we de literatuur over wiskundig denken overzien, dan gaat het vaak over probleemoplossen, modelleren en abstraheren (zie Figuur X). Niet dat de andere door cTWO genoemde activiteiten niet van belang zijn, maar die zijn toch meer ondersteunend. We werken de drie 'hoekpunten' van de driehoek hieronder wat verder uit.



Figuur 2: Drie centrale 'hoekpunten' van wiskundig denken

Probleemoplossen

Probleemoplossen is misschien wel het belangrijkste aspect van wiskundig denken. Zoals Halmos (1980) al zei gaat het bij wiskunde uiteindelijk over het oplossen van problemen, die voor de leerling op dat moment nog niet standaard zijn. Het interessante is dat wiskunde een vakgebied is waarin je aan probleemoplossen uitstekend aandacht kunt besteden, terwijl het ook buiten de wiskunde van grote waarde is. Pólya stelt zelfs dat problemen oplossen een karakteristieke activiteit is, mogelijk gemaakt door de menselijke intelligentie:

Solving a problem means finding a way out of a difficulty, a way around an obstacle, attaining an aim which was not immediately attainable. Solving problems is the specific achievement of intelligence, and intelligence is the specific gift of mankind: problem solving can be regarded as the most characteristically human activity. (Pólya, 1962, p. v).

Pólya heeft het proces van probleemoplossen ingedeeld in een viertal fasen: het stellen van het probleem, het probleem begrijpen, een aanpak bedenken, die aanpak uitvoeren en monitoren, en terugkijken op het proces om te verifiëren of het doel is bereikt en om de denkstappen te expliciteren. In praktijk wisselen deze fasen elkaar vaak af.

Probleemoplossende vaardigheden omvatten ook manieren om aan een probleem te beginnen, om met het nieuwe om te gaan en het probleem op te lossen. Dergelijke manieren worden wel heuristische genoemd: een schets maken, iets afleiden uit de gegevens, of juist terug redeneren vanuit de gewenste uitkomst, een probleemaanpak bedenken, een randgeval zoeken, een getallenvoorbeeld doorrekenen, een meerstaps strategie uitvoeren zonder de draad kwijt te raken, of weten hoe je zaken die je al kunt of kent in een nieuwe situatie creatief kunt inzetten. Zoals Van Streun (2001) zegt, is het ontwikkelen en expliciteren van dergelijke heuristische een centraal leerdoel van onderwijs in probleemoplossen.

Modelleren

Modelleren gaat over de relatie tussen wiskunde en problemen uit de wereld om ons heen, over de manier waarop dergelijke problemen kunnen worden aangepakt met wiskundige middelen, bijvoorbeeld om een verschijnsel te voorspellen of een proces te optimaliseren. De vernieuwingscommissie wiskunde cTWO omschrijft modelleren als “een praktisch en creatief proces waarbij realistische problemen in wiskundige vorm worden vertaald” (cTWO, 2007, p. 25). Een probleem wordt dus geformuleerd in wiskundige termen, bijvoorbeeld door het opstellen van formules en vergelijkingen of het maken van een meetkundige figuur. In de praktijk gaat het veelal om (stelsels) differentiaalvergelijkingen, maar dat is voor het VO in het algemeen een brug te ver.

Het proces van het modelleren wordt ook wel voorgesteld als het doorlopen van een cyclus, die bestaat uit (1) het vertalen van het probleem in wiskundige termen, (2) het oplossen van het wiskundige probleem, (3) het terugvertalen van de modeloplossing naar het praktijkprobleem en (4) het nagaan of het oorspronkelijke probleem inderdaad is opgelost (Drijvers, 2012; Spandaw & Zwaneveld, 2012). Net als voor de fasering van probleemoplossen geldt dat een dergelijke indeling wel kan helpen op het beschrijven en begrijpen van het proces, maar dat je in praktijk vaak aan verschillende fasen door elkaar heen werkt.

Een bijzondere vorm van modelleren is aan de orde als het wiskundige gereedschap niet direct beschikbaar is maar nog moet worden ontwikkeld. Dan geeft de probleemsituatie aanleiding tot allerlei informele, situatie-specifieke beschrijvingen. Zo kan het zinvol zijn een schetsje te maken, afkortingen te gebruiken of om specifieke symbolen in te voeren. Dit wordt emergent modelleren genoemd (Doorman & Gravemeijer, 1999; Gravemeijer, 2007).

Modelleren heeft ook te maken met mathematiseren en in het bijzonder met wat Treffers (1987) horizontaal mathematiseren heeft genoemd: je gebruikt wiskunde om problemen uit de wereld om ons heen te organiseren en op te lossen met wiskundige middelen. Je gaat van de 'echte' wereld naar de wereld van wiskundige symbolen.

Abstraheren

Abstraheren betekent dat de leerling uit concrete probleemsituaties overeenkomsten en verschillen destilleert, die vervolgens leiden tot de vorming van betekenisvolle wiskundige objecten met eigenschappen en relaties. Zoals de Vakontwikkelgroep Wiskunde al in 1995 stelde: bij abstraheren gaat het om de wiskundige theorie of methode, los van de werkelijkheid, die geanalyseerd kan worden met wiskundige wetmatigheden. Of, in de woorden van Tall (1988, p. 2): "Abstraction is the isolation of specific attributes of a concept so that they can be considered separately from the other attributes".

Tijdens het abstraheren verschuift geleidelijk aan het accent van het oplossen van de concrete problemen naar het inzicht in en redeneren met de wiskundige begrippen die daarin een rol spelen en waarbij de leerling zich wat kan voorstellen. Daarmee is abstraheren een van de krachtigste aspecten van de wiskunde: je gaat op een hoger niveau redeneren over zaken en verbanden op een manier die nog steeds iets voor je betekent. Tegelijkertijd is het volgens velen (zie bijvoorbeeld Mason, 2000) ook een van de moeilijkste aspecten.

Skemp (1986) maakt onderscheid tussen het proces van het abstraheren en het resultaat daarvan, de abstractie of het concept, dat daaruit ontstaat. Het abstraheren kan in gang worden gezet door bijvoorbeeld te generaliseren over een bepaalde categorie van voorbeelden, door het gemeenschappelijke uit een aantal situaties te halen, waardoor dat op zichzelf een nieuwe wereld wordt. Als leerlingen bijvoorbeeld een aantal voorbeelden zien van situaties met lineaire verbanden (de bekende vaste kosten – variabele kosten), dan komen op een gegeven moment de gemeenschappelijke kenmerken daarvan aan de orde: startgetal, een vast hellingsgetal dat je kunt aflezen als de stapgrootte in de tabel, een rechte lijn als grafiek, enzovoort. Zo wordt uit de voorbeelden het concept "lineair verband" geabstraheerd.

Een andere manier om abstraheren op te roepen is om operaties van een hogere orde op concepten toe te passen waardoor deze een objectkarakter krijgen. Denk bijvoorbeeld aan het differentiëren van machtsfuncties. Oorspronkelijk waren machtsfuncties voor leerlingen misschien vooral rekenprocessen, waarin je bij een invoergetal een uitvoergetal moet berekenen. Later zijn het wellicht klassen van functies geworden. Maar op het moment dat machtsfuncties worden gedifferentieerd volgens de regel $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$ fungeren deze functies op hun beurt als invoer voor een proces van hogere orde. Daarmee krijgen ze nog meer het karakter van een object. Sfard gebruikt in dit verband de term reïficatie (Sfard, 1991).

Het resultaat van dit abstractieproces is dat je je beweegt op een hoger niveau van wiskundige objecten en hun relaties en daarmee kunt redeneren. Dan heb je dus in feite het abstracte concreet gemaakt, wat de voltooiing is van het abstractieproces (Mason, 1989). Bij moeilijkheden of onbegrip kun je terugvallen op een lager niveau van concreetheid, van betekenis. Deze kijk op het abstraheren is in lijn met het hierboven besproken idee van emergent modelleren. Daarnaast is abstraheren ook verbonden met verticaal mathematiseren (Treffers, 1987): het proces waarin het wiskundige bouwwerk wordt gereorganiseerd, uitgebreid en samenhangender wordt in het hoofd van de leerling.

Wiskundig denken leren en onderwijzen

Wat is er bekend over het leren en onderwijzen van wiskundig denken? Van Streun (2014) geeft in zijn brochure “Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten” een groot aantal voorbeelden, waaruit twee zaken duidelijk naar voren komen. Ten eerste is het probleem dat aan de orde wordt gesteld van groot belang: bevat het het juiste niveau van uitdaging voor leerlingen, is het interessant en voorstelbaar genoeg, heeft het een bij de doelgroep passende mate van openheid en structuur? Ten tweede is het de docent die ervoor zorgt dat het probleem ook echt gaat leven in de klas en leidt tot wiskundig denken. Zoals Doorman, Fechner, Jonker en Wijers (2014) zeggen: de opdracht heeft een grote invloed, maar docenten kunnen een denkactieve opgave ook zo presenteren en structureren dat het denkactieve verdwijnt. Maar docenten zijn soms ook in staat om een reproductieopgave net een draai te geven zodat die denkactiverend wordt.

Om wiskundig denken te onderwijzen is het belangrijk dat de docent meer doet dan informatie overdragen. Pólya (1963, pp. 605) formuleert dit als volgt:

“Teaching to think” means that the mathematics teacher should not merely impart information, but should try also to develop the ability of the students to use the information imparted: he should stress know-how, useful attitudes, desirable habits of mind.

Als we nu de driedeling probleemoplossen – modelleren – abstraheren langslopen vanuit het perspectief van de docent, dan heeft het op het eerste gezicht iets paradoxaals om probleemoplossen te onderwijzen: je wilt leerlingen problemen laten oplossen, in de hoop dat ze daardoor leren om te gaan met andere problemen, die nieuw zijn en waarin de oplossingen die ze hebben leren kennen niet direct toepasbaar zijn. Dat is dus een subtiele zaak. De sleutel daarvoor ligt in het voorbeeldgedrag van de docent, die ook zelf een probleemoplosser moet zijn, en in het expliciteren van het probleemoplossingsproces en de bijbehorende heuristieken.

Het lastige met het onderwijzen van modelleren is dat modelleren tijdrovend kan zijn. Grote modelleerproblemen, zoals bijvoorbeeld die van de OnderbouwWiskundedag, wiskunde A-lympiade en de wiskunde-B dag, zijn in de reguliere onderwijs- en toetspraktijk lastig frequent te organiseren. Maar ook door middel van kleine en eenvoudige problemen kan in de les aandacht aan modelleren worden besteed. Als het om het opstellen van een model gaat, moet worden vermeden dat het model gegeven is, zoals bijvoorbeeld bij examenopgaven vaak het geval is.

Modelleren en abstraheren lijken wel eens tegenpolen te zijn. Maar ook bij modellen en toepassingen gaat het vaak niet om de uitkomst: je wilt ook graag inzicht hebben in het model, in de eigenschappen, in de methoden. Modelleren kan op die manier leiden tot abstraheren. De kunst is dus om ook aan abstraheren aandacht te besteden. Dat kun je doen door samen met de leerlingen

afstand te nemen van de concrete probleemsituatie en na te denken over de wiskunde die daarin een rol speelt. Wat is algemeen en overstijgt het specifieke probleem? Wat leren we hiervan wat we ook een andere situatie kunnen gebruiken? Hoe hangt een en ander samen met wat we al wisten? Door zulke vragen aan de orde te stellen kan aandacht aan abstraheren worden besteed.

Referenties:

- College voor Toetsen en Examens (2015). *Wiskunde B VWO. Syllabus Centraal Examen 2018 (bij het nieuwe examenprogramma)*. Utrecht: CvTE.
https://www.examenblad.nl/examenstof/syllabus-2018-wiskunde-b-vwo/2018/f=/syllabus_wiskunde_b_vwo_2018.pdf
- Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (2007). *Rijk aan betekenis. Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO. <http://www.fi.uu.nl/ctwo/>
- Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (2012). *Denken & doen, wiskunde op havo en vwo per 2015*. Utrecht: cTWO. <http://www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/CTWO-Eindrapport.pdf>
- Devlin, K. (2011). *Mathematics Education for a New Era: Video Games as a Medium for Learning*. Boca Raton, FLA: Taylor & Francis.
- Doorman, M., & Gravemeijer, K. (1999). Modelleren als organiserende activiteit in het wiskundeonderwijs. *Tijdschrift Voor Didactiek Der β -Wetenschappen*, 16(1), 38-55. Retrieved from http://www.cdbeta.uu.nl/tdb/fulltext/Tdbeta_16_1_Doorman_1999.pdf
- Doorman, M., Fechner, S., Jonker, V., & Wijers, M. (2014). *Mascil. Richtlijnen voor het ontwikkelen van lesmateriaal voor onderzoekend leren in wiskunde en natuurwetenschappen met behulp van beroepscontexten*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/2014_mascil_richtlijnen_voor_ontwerp.pdf
- Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 253–284). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Drijvers, P. (2011). Wat bedoelen ze toch met... denkactiviteiten? *Nieuwe Wiskrant*, 31(2), 38-41. http://www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/artikelen/312/312december_drijvers.pdf
- Drijvers, P. (2012). Wat bedoelen ze toch met... modelleren? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 31(4), 34-37.
http://www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/artikelen/314/314juni_drijvers.pdf
- Drijvers, P. (2015a). Kernaspecten van wiskundig denken. *Euclides*, 90(5), 4-8.
- Drijvers, P. (2015b). *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT*. Inaugurele rede. Utrecht: Universiteit Utrecht. ISBN 978-90-70786-33-5.
http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/Oratie_Paul_Drijvers_facsimile_2015_521.pdf

- Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. the 14th ICMI study*. (pp. 137-144). Berlin: Springer. doi:10.1007/978-0-387-29822-1_12
- Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*, 87, 519-524.
- Mason, J. (1989). Mathematical abstraction and the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 2-8.
- Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 97-111.
- National Research Council (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.
- Pólya, G. (1962). *Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving (Vol. 1)*. New York – London – Sydney: Wiley & Sons.
- Pólya, G. (1963). On learning, teaching, and learning teaching. *The American Mathematical Monthly*, 70(6), 605-619.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 334-370). New York: Macmillan.
http://howtosolveit.pbworks.com/f/Schoenfeld_1992%20Learning%20to%20Think%20Mathematically.pdf
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26.
- Skemp, R. R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics (2nd ed.)*. Harmondsworth, U.K.: Penguin.
- Spandaw, J., & Zwaneveld, B. (2012). Modelleren, van werkelijkheid naar wiskunde en weer terug. In P. Drijvers, A. van Streun, & B. Zwaneveld (Red.), *Handboek Wiskundendidactiek* (pp. 235-264). Utrecht: Epsilon.
- Tall, D. (1988). *The Nature of Advanced Mathematical Thinking. Discussion paper for the working group on advanced mathematical thinking*. PME-XII, Vezprém, Hungary.
<https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1988i-nature-of-amt-pme.pdf>.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas project*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

- Vakontwikkelgroep Wiskunde (1995). Advies examenprogramma havo/vwo wiskunde. Enschede: SLO.
- Van Streun, A. (2001). *Het denken bevorderen*. Oratie. Groningen: RUG.
- Van Streun, A. (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten*. Enschede: SLO.
- Van Streun, A., & Kop, P. (2012). Wiskundige denkactiviteiten. In P. Drijvers, A. van Streun & B. Zwaneveld (Eds.), *Handboek wiskundendidactiek* (pp. 339-368). Amsterdam: Epsilon.