Verhoudingen: doorlopende leerlijn?!

M. Wijers
FIsme, Universiteit Utrecht

1 Inleiding

U bent bij de supermarkt op zoek naar pindakaas. U staat voor de keuze tussen een pot van 190 ml van merk *A* voor € 0,99 of 350 ml van merk *B* voor € 1,80. Welke pot schaft u aan?
Het is duidelijk dat bij een dergelijke keuze diverse overwegingen meespelen: is *A* lekkerder dan *B*? Eet u vaak pindakaas of niet? Hoeveel geld wilt u uitgeven? Heeft u voorkeur voor een grote of een kleine pot? Stel dat u toch ook even de prijs wilt vergelijken: is pindakaas van merk *A* goedkoper of duurder dan van merk *B*? Gelukkig hoeft u dit rekenwerk niet zelf te doen, maar helpen de meeste supermarken u hierbij door ergens op het schap in kleine letters de prijs per eenheid te vermelden.

Een ander voorbeeld: bij de Olympische spelen 2008 zag u dat het wereldrecord op de 100 meter werd verbroken: Powell liep de 100 meter in 9,72 seconden. Dat is snel; maar waarmee is die snelheid te vergelijken? Fiets, auto, ... ?

Nog eentje: als verpleegkundige moet u een patiënt 6 gram toedienen van een medicijn dat beschikbaar is in een 3 procent oplossing. Hoeveel ml dient u deze patiënt toe?

Tenslotte: u wilt een illustratie vergroten van *A*5 naar *A*4. Bij het oude kopieerapparaat kunt u dat niet met één druk op een knop regelen maar dient u een (vergrotings)percentage in te stellen

In al deze gevallen heeft u te maken met een verhoudingsvraagstuk. Dergelijke vraagstukken komen veelvuldig voor in allerlei toepassingssituaties, ook binnen de wiskunde, en doen een beroep op behoorlijk wat rekenwiskundige kennis, begrip en vaardigheden. Het belang van verhoudingen voor de doorlopende leerlijnen rekenen-wiskunde zal duidelijk zijn.

Subdomein verhoudingen

In het rapport ‘over de drempels met rekenen’, uitgebracht door de ‘Expertgroep Doorlopende leerlijnen taal en rekenen’, is verhoudingen een van de vier subdomeinen waarvoor in termen van kennen en kunnen de gewenste opbrengsten van het onderwijs worden beschreven. Dit gebeurt op twee beheersingsniveaus: het fundamentele niveau (*F*) en het streefniveau (*S*) (fig1).

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
A Notatie, taal en betekenis	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
– Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken	– een vijfde deel van alle Nederlanders korter schrijven als $\frac{1}{5}$ ‘deel van ...’ – 3,5 is 3 en $\frac{5}{10}$ – ‘1 op de 4’ is 25% of ‘een kwart van’ – geheel is 100%	– schrijfwijze $\frac{1}{4} \times 260$ of $\frac{260}{4}$ – formele schrijfwijze 1 : 100 (‘staat tot’) herkennen en gebruiken – verschillende schrijfwijzen (symbolen, woorden) met elkaar in verband brengen
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	– notatie van breuken (horizontale breukstreep), decimale getallen (kommagetal) en procenten (%) herkennen – taal van verhoudingen (per, op, van de) – verhoudingen herkennen in verschillende dagelijkse situaties (recepten, snelheid, vergroten/verkleinen, schaal enz.)	– schaal
	Weten waarom	**Weten waarom**
		– relatieve vergelijking (term niet)
12 jaar	1 - fundament	1 - streef
B Met elkaar in verband brengen	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
– Verhouding, procent, breuk, decimaal getal, deling, ‘deel van’ met elkaar in verband brengen	– eenvoudige relaties herkennen, bijvoorbeeld dat 50% nemen hetzelfde is als ‘de helft nemen’ of hetzelfde als ‘delen door 2’	– procenten als decimale getallen (honderdsten) – veel voorkomende omzettingen van percentages in breuken en omgekeerd
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	– beschrijven van een deel van een geheel met een breuk – breuken met noemer 2, 4, 10 omzetten in bijbehorende percentages – eenvoudige verhoudingen in procenten omzetten bijv. 40 op de 400	– breuken en procenten in elkaar omzetten – breuken benaderen als eindige decimale getallen – verhoudingen en breuken met een rekenmachine omzetten in een (afgerond) kommagetal
	Weten waarom	**Weten waarom**
		– relatie tussen breuken, verhoudingen en percentages – breuken omzetten in een kommagetal, eindig of oneindig aantal decimalen

figuur 1: uit het rapport over de drempels met rekenen

Het rapport beoogt voornamelijk inhoud te beschrijven (‘het wat’) en niet de didactiek (‘het hoe’).[1]

Het domein van verhoudingen is gekozen om diverse redenen. Zoals ook de voorbeelden uit de inleiding van dit artikel laten zien is verhoudingen bij uitstek het gebied waarop veel toepassingproblemen betrekking hebben, waarvan het oplossen kennis, vaardigheden en inzicht op diverse terreinen van rekenen-wiskunde vraagt. Dit domein heeft in die zin een verbindend karkater. Het begrip verhouding is een kernconcept binnen het leergebied rekenen-wiskunde. Het laat zich misschien wel het best karakteriseren met deze uitspraak van Freudenthal (1984, pag.70):

> Juist 'verhouding' is een prachtvoorbeeld om zich te realiseren hoe wij – van de wieg af aan- theoretische ervaringen opdoen en vaardigheden ontwikkelen, aanvankelijk onbewust en geleidelijk bewuster.

Omdat verhoudingen overal voorkomen met een veelheid aan verschijningsvormen, zowel binnen als buiten rekenen-wiskunde, lijken ze soms geen eigen plaats te hebben in het curriculum. Het subdomein verhoudingen omvat in het rapport van de 'Expertgroep' ook breuken, kommagetallen en procenten voor zover daarvan het verhoudingskarakter centraal staat. Het rapport sluit daarin aan bij de omschrijving van dit subdomein in het PPON-rapport van 2005 (Janssen, e.a., p.135).

> Verhoudingen kunnen beschreven worden:[2]
>
> – in verhoudingentaal, zoals bij 'één op de tien Nederlanders' of 'het aantal fietsers is twee keer zo groot als het aantal automobilisten';
> – in breukentaal, bijvoorbeeld 'driekwart van de inwoners is ouder dan 25 jaar';
> – met procenten, zoals 70 procent van de mensen is voor de aanleg van een randweg.
>
> Begrip van verhoudingen houdt in dat de relatie tussen die verschillende beschrijvingen kan worden gelegd en dat leerlingen dit begrip kunnen inzetten bij het oplossen van verhoudingsvraagstukken.

Het TAL-team schrijft over de relatie tussen breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen het volgende (TAL-team, 2005, pag.43):

> In zekere zin is 'verhouding' een algemener concept dat in breuken, procenten en kommagetallen op een specifieke manier terugkomt.

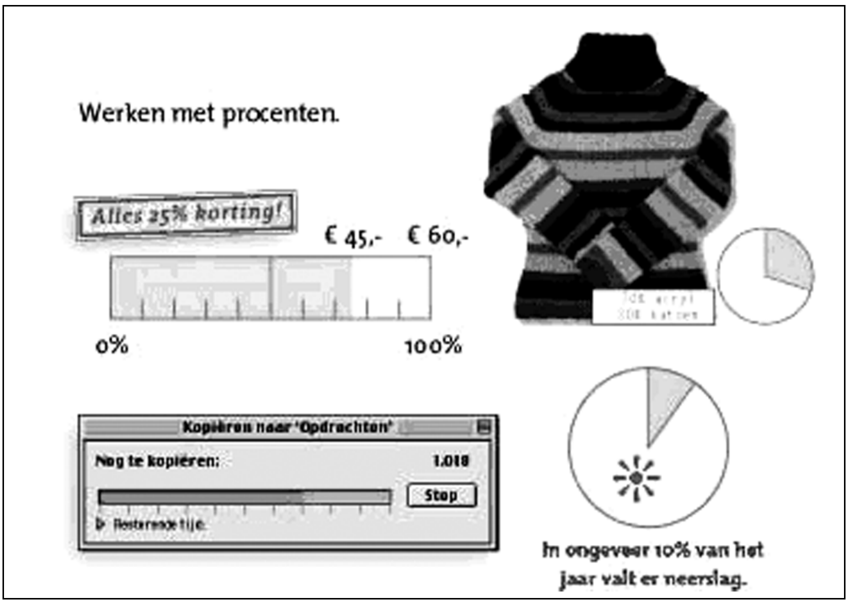
Men kan op verschillende manieren tegen verhoudingen aankijken. Zo kan het subdomein gezien worden als een toepassingsgebied van getallen en bewerkingen (Van der Craats, 2007). Het kan ook beschouwd worden als een wiskundig verschijnsel in brede zin en daarmee als een verbindend en overkoepelend begrip, of een 'spin' in het web. Tenslotte kan verhoudingen gezien worden als een op zichzelf staand subdomein, naast breuken, procenten en kommagetallen dat van vier tot veertien jaar uitgelijnd is. Deze manieren van kijken vullen elkaar aan en kunnen allemaal in het onderwijs geconcretiseerd worden.

2 doorlopende leerlijn?!

basisonderwijs

In de onderbouw van het basisonderwijs is de aanpak van verhoudingen veelal kwalitatief en worden verhoudingen meestal niet als zodanig be-

noemd. Het gaat vaak om situaties op het terrein van meten en meetkunde. Als het al om het kwantitatieve aspect van verhoudingen gaat, worden ze vaak met één getal beschreven: ‘drie keer zo groot’, ‘een kwart van de bevolking’, ‘50 km/u’.
In de bovenbouw komt de kwantitatieve kant in beeld en worden de relaties met onder andere breuken en procenten gelegd. Vaak echter blijven verhoudingen als zodanig verborgen of impliciet. Verhoudingsvraagstukken betreffen situaties die ook in het dagelijks leven voorkomen, zoals recepten omrekenen, prijzen vergelijken, een tekening vergroten. Ze zijn vaak in alledaagse taal beschreven.
Ter ondersteuning bij het structureren van het probleem en het rekenwerk dat er bij komt kijken wordt vaak gewerkt met een dubbele getallenlijn of dubbele strook als model (fig.2).



figuur 2: van de site van ‘Alles telt’

Het bijbrengen van inzicht staat daarbij voorop. Omdat dezelfde modellen ook een rol spelen bij het werken met breuken, procenten en kommagetallen, wordt de samenhang visueel ondersteund en kan een gemeenschappelijke taal ontstaan voor het hele gebied van verhoudingen en 'rationale getallen'.
De fase van werken met 'benoemde verhoudingen' gaat vooraf aan die van werken met onbenoemde, ‘pure’, verhoudingen als 3 : 5 (‘drie staat tot vijf’). Formele verhoudingsbeschrijvingen komen minder vaak voor in het

basisonderwijs. Een belangrijk deel van de leerstof gaat over redeneren en rekenen met evenredigheden. Bij het rekenen wordt als hulpmiddel vaak de verhoudingstabel gebruikt (fig.3).

kinderen naar n.s.o.	2					
alle kinderen	5					240

figuur 3: verhoudingstabel

Deze helpt bij het structureren van het probleem en ondersteunt tevens het handig en inzichtelijk rekenen. Het beheersen van procedures in het subdomein verhoudingen is voor het basisonderwijs een differentieel doel.

3 onderbouw voortgezet onderwijs

Met de invoering van de basisvorming in het voortgezet onderwijs is rekenen als expliciet subdomein van wiskunde opgenomen in de kerndoelen en de examenprogramma's. Het was duidelijk dat het 'leren rekenen' in het basisonderwijs niet was afgerond en dat met name op het gebied van verhoudingen, kommagetallen, procenten en breuken de lijn moest doorlopen. De nadruk is daarbij voor verhoudingen sterk gelegd op de rekenkant. In rekenhoofdstukken van de wiskundemethoden werd de verhoudingstabel daarbij geïntroduceerd als hulpmiddel. Aanvankelijk werd dit vrij uitgebreid gedaan en werden alle manieren van rekenen die toegestaan zijn in een verhoudingstabel geïntroduceerd. Later bleven daarvan alleen het vermenigvuldigen en delen van een kolom over. Daarnaast is er veel aandacht voor de vermenigvuldigingsfactor tussen de rijen.

THEORIE

Je kunt op twee manieren **rekenen in een verhoudingstabel**. In de linker tabel hieronder zijn horizontale pijlen handig en in de rechter tabel zijn verticale pijlen handig.

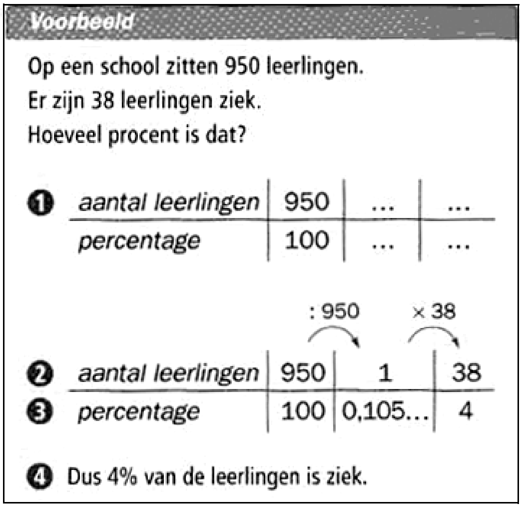
	× 3	× 5	: 2	
aantal kinderen	32	96	480	240
aantal brillen	6	18	90	45
	× 3	× 5	: 2	

aantal spinnen	2	5	9	7
aantal poten	12	30	54	42

× 6

figuur 4: rekenen in verhoudingstabel uit 'Moderne Wiskunde', havo vwo 1a, 9e editie

De verhoudingstabel wordt in het voortgezet onderwijs ook gebruikt voor rekenen met procenten (fig.5). Hoewel er enerzijds sprake lijkt van een doorlopende lijn nu verhoudingen (en ook procenten, breuken en kommagetallen) ook in de wiskundemethoden van het voortgezet onderwijs aandacht krijgen, zijn er ook nog wel zwakke punten in die aansluiting.


Voorbeeld

Op een school zitten 950 leerlingen.
Er zijn 38 leerlingen ziek.
Hoeveel procent is dat?

❶

aantal leerlingen	950	...	...
percentage	100	...	...

: 950 × 38

❷	*aantal leerlingen*	950	1	38
❸	*percentage*	100	0,105...	4

❹ Dus 4% van de leerlingen is ziek.

figuur 5:procenten in verhoudingstabel uit ‘Moderne Wiskunde’,
havo vwo 1a, 9e editie

Zo wordt er in de onderbouw van het voortgezet onderwijs bij de introductie van verhoudingen niet of nauwelijks gewerkt met de uit het basisonderwijs bekende modellen zoals dubbele strook en dubbele getallenlijn. De nadruk ligt op het correct uitvoeren van bewerkingen en er is weinig aandacht voor de begripsmatige aspecten van verhoudingen. Dat maakt dat ook in het voortgezet onderwijs verhoudingen vaak impliciet blijven. Een bijkomend gevolg lijkt te zijn dat de verhoudingstabel niet ingezet wordt als handig hulpmiddel, maar een doel op zich lijkt te zijn geworden. Zo wordt de verhoudingstabel niet expliciet ingezet in andere hoofdstukken uit het wiskundeboek als het bijvoorbeeld gaat om vergroten en verkleinen bij meetkunde. Bij andere vakken is de verhoudingstabel meestal helemaal onbekend en worden andere manieren gebruikt om met verhoudingen te rekenen. Dat maakt het voor de leerlingen niet overzichtelijker.

4 bovenbouw havo en vwo

In de bovenbouw van havo en vwo heeft rekenen niet altijd een expliciete plaats. Binnen het vak wiskunde A voor de havo wordt er nog aandacht aan besteed tot en met het eindexamen (fig.6). Sinds kort wordt, mede naar aanleiding van de discussie over de rekenvaardigheden van pabostudenten, ook in het examenprogramma wiskunde A rekenvaardigheid weer apart benoemd.

Opgave 1 Hypotheken

Als je een huis koopt, moet je meer betalen dan alleen de koopsom. Je moet bijvoorbeeld belasting betalen en de kosten van de notaris. Deze bijkomende kosten zijn voor een nieuwbouwhuis ongeveer 6% van de koopsom en voor een bestaande woning ongeveer 12%.

Iemand heeft een bestaande woning gekocht. De koopsom en de bijkomende kosten hebben haar in totaal 300 000 gulden gekost.

1 □ Bereken de koopsom.

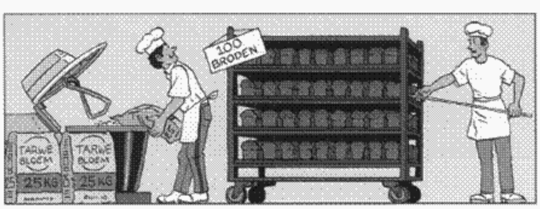
figuur 6: opgave uit ‘CSE’ wiskunde havo A, 1

Verhoudingen komen daarnaast in het wiskundecurriculum nog op diverse plaatsen voor, bijvoorbeeld bij evenredige verbanden, in de context van exponentiele groei (rente op rente) en bij de meetkundige verhoudingen (goniometrie). Ze worden dan echter vaak niet als zodanig benoemd.

5 bovenbouw vmbo en mbo

In de bovenbouw van het vmbo krijgen leerlingen die kiezen voor de basis- en kaderberoepsgerichte leerweg een aantal beroepsgerichte vakken. Daarbij krijgen zij in praktische situaties regelmatig te maken met verhoudingsvraagstukken. Ook op examens van de beroepsgerichte vakken zien we dergelijke vraagstukken (fig.7).

Tarwe, door de boer geteeld, wordt in de fabriek verwerkt tot bloem. De bakker verwerkt de bloem tot brood.



100 kg tarwe → 75 kg bloem → 100 broden

23 → Hoeveel kilogram bloem is nodig voor 60 broden? Schrijf de berekening op.

figuur 7: opgave uit ‘CSE landbouw breed’ vmbo BB 2004-1

Het vraagstuk uit figuur 7 zou uitstekend kunnen worden opgelost met een verhoudingstabel (fig.8).

bloem (kg)	75	7,5	15	45
broden	100	10	20	60

: 10 ×2 ×3

figuur 8

De verhoudingstabel is echter buiten rekenen-wiskunde op school niet of nauwelijks bekend. Daar komt nog bij dat lang niet alle leerlingen in vmbo en mbo rekenen-wiskunde als vak hebben. in de sectoren Economie en Zorg en welzijn van het vmbo is wiskunde niet verplicht. De ondersteuning van het rekenen vanuit het vak (en de docent) wiskunde valt dan volledig weg. In het mbo is er in veel opleidingen ook geen expliciete aandacht voor rekenen wiskunde.[3] Het is niet ondenkbaar dat er in die situatie geen expliciete aandacht is voor het vertalen van het probleem uit de beroepscontext naar rekenen-wiskunde. Deze stap is juist binnen vmbo en mbo waar de verhoudingen zich met name voordoen binnen de contexten van de beroepsopleiding van groot belang.
Zowel in vmbo als mbo zal het rekenen onderhouden moeten worden, aldus een van de aanbevelingen van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (p. 78). Dit geldt ook voor leerlingen die geen wiskunde (meer) hebben. Het onderhouden van de relevante rekenwiskundige vaardigheden zou dan heel goed kunnen door in ieder geval in de andere vakken expliciet aandacht aan het rekenen te besteden en dit ook op elkaar af te stemmen. Daarbij zouden verhoudingen zeker uitgebreid aandacht moeten krijgen, vanwege de al eerder genoemde veelheid aan situaties waarin ze een rol spelen en vanwege het verbindend karakter. De afstemming met het beroepsgericht rekenen is daarbij van groot belang.

6 slot

Het feit dat verhoudingen ook in het advies van de ‘Expertgroep’ als belangrijk domein gezien wordt, schept (opnieuw) de mogelijkheid die leerlijn ook daadwerkelijk te laten doorlopen. Een belangrijk punt van het rapport van de Expertgroep is dat de niveaubeschrijvingen over de 'drempels' heenlopen waardoor de beschrijvingen voor twaalf jaar (1F en 1S) en 16 jaar (2*F* en 2*S*) in vergelijkbare termen zijn geformuleerd en op elkaar aansluiten. Hiermee ligt er een kader om een doorgaande leerlijn verhoudingen te realiseren. De niveaubeschrijvingen samen met al bestaande beschrijvingen in kerndoelen, tussendoelen en leerlijnen in bijvoorbeeld de TAL-boeken en op de TULE-website, alsmede voorbeelden in schoolboeken, examens en andere bronnen vormen de nodige bouwstenen en verbindingsstukken. Om hiervan een didactisch verantwoord en bruikbaar geheel te maken moet nog wel wat werk worden verzet. Een aantal belangrijke punten daarbij is:

– aansluiten op eerder in het onderwijs gebruikte modellen;
– verhoudingen daar waar ze voorkomen ook expliciet benoemen;
– relaties verstevigen tussen verhoudingen en breuken, procenten en kommagetallen;
– naast rekenen met verhoudingen ook blijven werken aan het begrip van verhoudingen;
– in andere vakken verwijzen naar bekende modellen en methoden uit rekenen-wiskunde.

Het zou mooi zijn als iemand die de mbo opleiding tot verpleegkundige instormt de uitspraak: ‘Hanteer de regel 1% = 1 g/100 ml = 10 mg/ml’, onmiddellijk in verband kan brengen met wat er in het voorgaande onderwijs op het gebied van procenten en verhoudingen aan de orde is geweest.

noten

1 Voor uitleg over en uitwerkingen van de deze referentieniveaus verwijzen we naar het rapport zelf.
2 Bron: PPON, pag.135, tekst enigszins aangepast en aangevuld met elementen uit (uitwerkingen van) kerndoelen, leerstofbeschrijvingen en examenprogramma’s.
3 In deze situatie komt verandering doordat vanaf 2010 in de kwalificatiedossiers van alle opleidingen rekenen-wiskunde is opgenomen. Dat gebeurt op basis van het recent ontwikkelde raamwerk rekenen wiskunde mbo.

literatuur

Cevo (2007). *Syllabus wiskunde A havo centraal examen 2009*. Utrecht: Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven vwo, havo, vmbo.

Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008b). *Over de drempels met rekenen. Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen*. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen.

Freudenthal, H. (1984). *Appels en peren/wiskunde en psychologie*. Apeldoorn: Van Walraven.

Janssen, J., F. van der Schoot & B. Hemker (2004). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4. PPON-reeks nr.32*. Arnhem: Ci-

to.
SLO (2006). *Tussendoelen en leerlijnen*. Tule. http://tule.slo.nl/ Enschede: SLO.
TAL-team (2006). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen*. Groningen: Wolters Noordhoff.
Wijers, M., V. Jonker, J. Huisman e.a. (2007). *Raamwerk rekenen/wiskunde mbo*. Utrecht: Freudenthal Instituut.