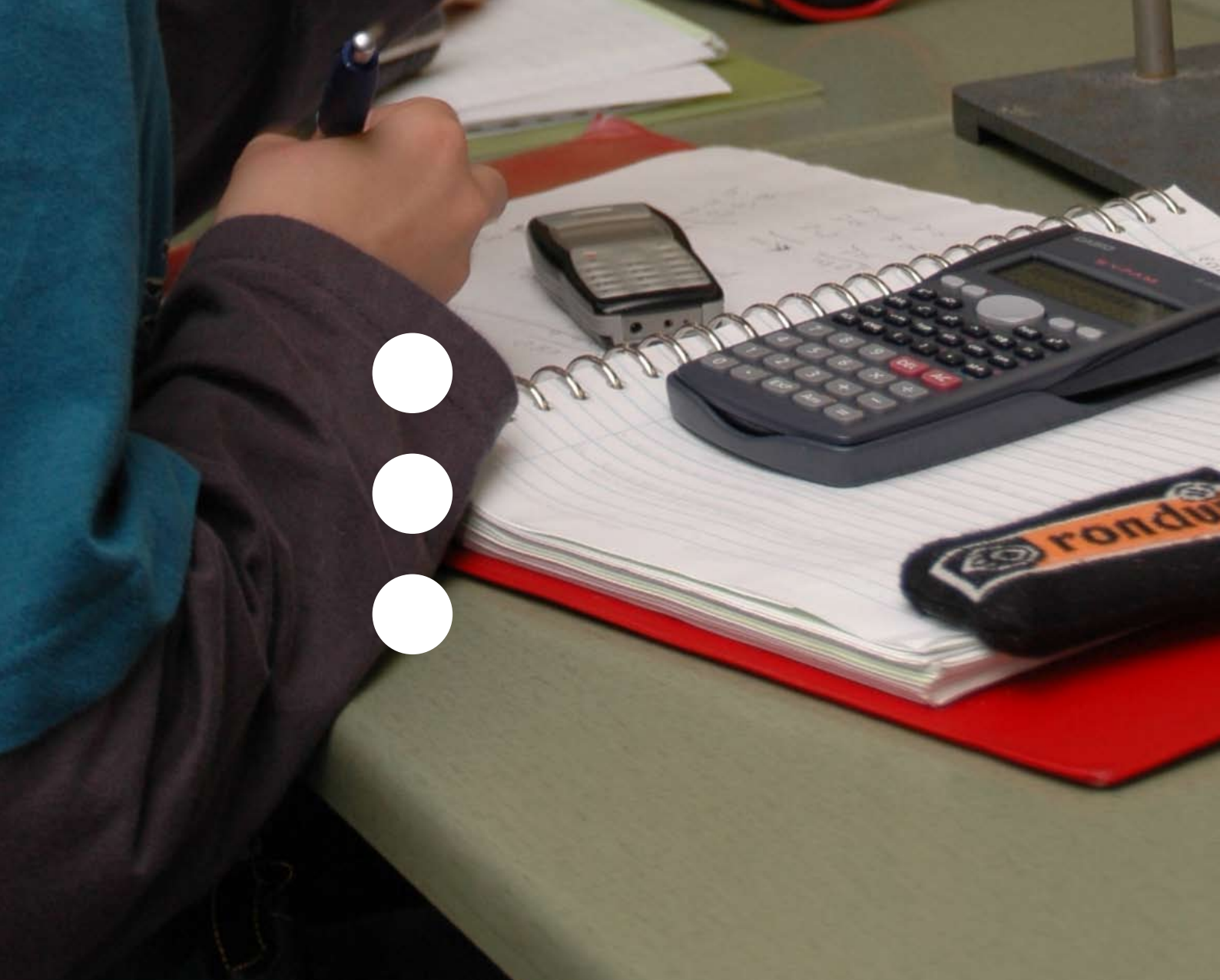




ReAL Leerlijnen 'van rekenen naar algebra'

SLO • nationaal expertisecentrum voor leerplanontwikkeling

Wiskunde in de onderbouw van het havo vwo

slo



ReAL Leerlijnen “van rekenen naar algebra”

Wiskunde in de onderbouw van het havo vwo

slo

Leerlijnen “van rekenen naar algebra”

Voor wiskunde in de onderbouw van het havo vwo

Van rekenen naar algebra zijn vele leerlijnen te trekken die het onderhouden en verdere leren van reken- en algebraïsche vaardigheden ondersteunen.

Niet alle leerlijnen

Gezien de omvang van het ReAL project kiezen wij voor het beschrijven van enkele doorlopende leerlijnen. Dat zijn voorbeelden van leerlijnen waar naar onze mening in de meest gebruikte lesboeken (te) weinig aandacht aan besteed wordt.

De vermenigvuldiglijn

Deze lijn laat zien hoe het vermenigvuldigen van getallen inzichtelijk gekoppeld kan worden aan het vermenigvuldigen van algebraïsche expressies. Dit wordt geïllustreerd met behulp van een achterliggend model; het zogenoemde rechthoek- of oppervlaktemodel. Het gaat hierbij om het illustreren van een vermenigvuldiging met het berekenen van de oppervlakte van een rechthoek en niet die van andere vormen. De keuze voor dit model is mede ingegeven omdat de distributieve en associatieve eigenschap er helder mee kunnen worden geïllustreerd. Het rechthoekmodel kan eventueel geabstraheerd worden tot een tabel.

De breukenlijn

Veel bewerkingen met breuken zijn op getalsniveau inzichtelijk te maken voor leerlingen. Daartoe wordt allereerst een breukentaal ontwikkeld waarmee de diverse handelingen met breuken op een inzichtelijke wijze kunnen worden verwoord. Deze handelingen gaan over in analoge handelingen bij breuken waarin variabelen zijn opgenomen.

De formulelijn

In de wereld om ons heen zijn vele patronen en verbanden aan te geven waarin een rekenkundige relatie tussen variabelen aan de orde is. Het ontdekken van deze rekenkundige relaties en het verwoorden daarvan met behulp van de taal van de algebra is de kern van deze lijn.

De keuze voor deze drie lijnen sluit aan bij onze analyse van de huidige situatie in de doorlopende lijn van primair onderwijs (PO) naar voortgezet onderwijs (VO).

- In het VO stopt al snel het rekenen, in het bijzonder met breuken, en wordt gestart met algebra, zonder dat er voor de leerling zichtbaar is hoe rekenen en algebra met elkaar samenhangen en hoe nieuwe onderwerpen voortbouwen op reeds bestaande kennis en vaardigheden.
- Er wordt heel beperkt gebruik gemaakt van (visuele) modellen die het denken ondersteunen. Voor zover wij die modellen nu in de lesboeken zien zijn het voorbeelden waarin de achterliggende algebra soms wordt aangeboden, echter zonder enige systematiek.
- Leerlingen krijgen formules aangeboden, waarover en waarmee zij diverse vraagstukken op moeten lossen. Het zelf aanpassen van formules, het construeren van nieuwe formules en het redeneren naar aanleiding van de gebruikte formules blijven volgens ons onderbelicht in de huidige generatie methoden.

Toetsen

Door middel van toetsen wordt omschreven welke vaardigheden een leerling verwacht wordt te

beheersen om zonder wezenlijke problemen verder te kunnen binnen de beschreven leerlijnen in de volgende onderwijsperiode van het beoogde schooltype.

De opdrachten binnen de toets zijn van die aard dat van een leerling die het beoogde niveau heeft verwacht kan worden deze nagenoeg foutloos te maken.

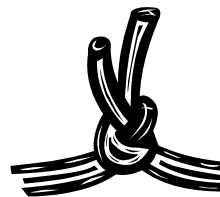
Wij bevel sterk aan deze toets vooral diagnostisch te gebruiken, met andere woorden aanwijzingen te vinden welke zaken nog nadere aandacht behoeven.

Deze toetsen beogen beslist niet een volledig beeld te geven van wat aan reken- en algebraïsche vaardigheden beheerst zou moeten worden op de hierboven genoemde momenten.

Samenhang

De drie leerlijnen vertonen veel samenhang. Men kan zelfs spreken van een continue verknoping.

In alle drie de lijnen is sprake van het vertalen van rekenhandelingen naar bewerkingen met algebraïsche expressies, van het gebruik van (visuele) modellen die het denken ondersteunen en van het zelf formuleren in algebrataal. Echter ieder van die aspecten dient regelmatig expliciete aandacht te krijgen, vandaar het niet volledig verknoopt aanbieden.



Als laatste maar beslist niet de minst belangrijke karakteristiek van de genoemde leerlijnen noemen wij het belang van het zelf kunnen manipuleren met formules. Het nadenken over en doordenken van de structuur van formules is belangrijk maar komt in de methoden te weinig aan de orde. Hier kan het vaker aanbieden van open opdrachten waarin leerlingen zelf algebraïsche expressies construeren uitkomst bieden.

Waarom algebraïsche vaardigheden?

Het beheersen van de taal van formules, dan wel algebra, het kunnen redeneren met behulp van deze taal en deze gebruiken bij het beschrijven van verschillende praktische situaties mag in het algemeen van iedere op havo of vwo opgeleide Nederlander verwacht worden.

Daarboven is voor het succesvol doorlopen van de meeste profielen in de bovenbouw van havo en vwo het beheersen op een zeker niveau van formule -, dan wel algebraïsche vaardigheden een voorwaarde.

Voorbeeld lesmateriaal

In apart ontwikkeld lesmateriaal is beschreven hoe ideeën uit deze leerlijn concreet vorm kunnen krijgen voor gebruik in de klas, aanvullend of in plaats van delen van de lesmethode. Dit lesmateriaal vormt geen onderdeel van deze leerlijn aangezien de grenzen waarbinnen de methoden konden worden aangepast het niet altijd mogelijk maakten recht te doen aan de in de leerlijnen geformuleerde uitgangspunten.

Nog veel meer leerlijnen.

Met de drie genoemde leerlijnen zijn de mogelijkheden beslist niet uitgeput.

Om een voorbeeld te noemen, een leerlijn die het verband tussen vermenigvuldigen en delen weergeeft:

Je weet $2 \times 3 = 6$ en $\frac{6}{3} = 2$ en $\frac{6}{2} = 3$.

Je weet ook: als $a \times b = c$, dan is $\frac{c}{b} = a$ en $\frac{c}{a} = b$, en omgekeerd, welke getallen je ook voor a , b en c invult

(met 0 moet je even oppassen)

Dit verband komt op vele plaatsen terug, zowel bij wiskunde (sin, cos) als bij natuurwetenschappen ($U = I \times R$; $P \times V = T$) Het is bovendien een goed voorbeeld van de 'verknoping' van de verschillende doorlopende leerlijnen.

Om welke kerndoelen gaat het?

De door ons gekozen leerlijnen staan in directe relatie met kerndoel 26 voor het basisonderwijs.

basisschool kerndoel 26

De leerlingen leren structuur en samenhang van aantallen, kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen.

Kerndoel 22 voor het voortgezet onderwijs beschrijft de directe voortzetting van deze inhoud.

voortgezet onderwijs kerndoel 22

De leerling leert de structuur en samenhang te doorzien van positieve en negatieve getallen, decimale getallen, breuken, procenten en verhoudingen, en leert ermee te werken in zinvolle en praktische situaties.

De overgang naar algebraïsche expressies wordt verwoord in het 'verbanden-kerndoel'.

voortgezet onderwijs kerndoel 25

De leerling leert informele notaties, schematische voorstellingen, tabellen, grafieken en formules te gebruiken om greep te krijgen op verbanden tussen grootheden en variabelen.

Binnen de onderbouw havo en vwo moet het onderwijs rond deze kerndoelen gericht zijn op het kunnen hanteren van rekenkundige en algebraïsche expressies op een toenemend formeel en abstract niveau.

Kerndoel 23 voor het voortgezet onderwijs, dat hieronder wordt vermeld heeft betrekking op exact en schattend rekenen.

De leerling leert exact en schattend rekenen en redeneren op basis van inzicht in nauwkeurigheid, orde van grootte en marges die in een gegeven situatie passend zijn.

Dit kerndoel gaat niet in de eerste plaats over technieken en algoritmes van het rekenen maar heeft vooral betrekking op het rekenen en interpreteren van uitkomsten in toepassingssituaties. Bij het schatten van de uitkomst van een berekening hoort ook het meewegen van de orde van grootte en de gewenste nauwkeurigheid, rekening houdend met de situatie. Zijn de getallen waarmee gerekend wordt exacte waarden? Zijn ze afgerond op bijvoorbeeld duizend of miljoen? Hoe nauwkeurig moet het antwoord zijn? Het heeft bijvoorbeeld geen zin de hoeveelheid meel die nodig is voor het bakken van oliebollen te noteren in milligrammen.

Afronden van de uitkomst kan volgens formele regels gebeuren maar binnen een gegeven situatie kunnen ook andere regels gelden. Zo wordt behang per rol en niet per meter verkocht.

Voor het exact rekenen mag in het VO een rekenmachine gebruikt worden, het schatten van de (orde van grootte) van de uitkomst heeft hierbij een ondersteunende en controlerende functie. Bij het verstandig inzetten van de rekenmachine hoort ook het –indien nodig- benaderen van breuken en wortels als decimale getallen.

Kerdoel 23 komt gedurende alle leerjaren van de onderbouw havo/vwo aan de orde, maar in beperkte mate en vooral in de vorm van “onderhoud”. In de boeken voor leerjaar 1 worden er in twee à drie rekenhoofdstukken enkele paragrafen aan besteed. In leerjaar 2 en 3 komt het onderwerp niet in een apart rekenhoofdstuk aan de orde maar is het ingebed in andere wiskundige domeinen. Zo krijgt het aandacht in de meetkundehoofdstukken over oppervlakte, inhoud en vergroten, in de hoofdstukken over statistiek en kans en in hoofdstukken over machten in het bijzonder wanneer het gaat over de wetenschappelijke notatie.

Schattend en exact rekenen, zoals dat voorkomt in de gangbare wiskundemethoden, levert voor zover ons bekend in de onderbouw van het havo en het vwo weinig problemen op. We hebben bij dit kerndoel dan ook geen aanvullende leerlijn beschreven. Wel is er een toets ontwikkeld die in bijlage 1 is opgenomen. Dit is een entreetoets voor 3 havo om na te gaan hoe het aan het eind van de onderbouw met rekenvaardigheid is gesteld.

Leerlijn vermenigvuldigen

Onderdeel: Van vermenigvuldigen met gehele getallen naar rekenen met algebraïsche expressies.

Belangrijke kenmerken: Modelondersteuning; getallenlijn, oppervlaktemodel

In deze leerlijn willen wij het doorzien van structuur en samenhang bij het rekenen, in het bijzonder bij het vermenigvuldigen, gebruiken voor het ontwikkelen van de nodige algebraïsche vaardigheden die voor het havo en vwo in het 'verbanden-kerndoel' verscholen zijn. Bij de vormgeving hiervan kan gebruik worden gemaakt van ondersteunende (visuele) modellen als de getallenlijn en het rechthoekmodel.

Uiteraard is het rechthoekmodel niet toereikend voor alle situaties waarin vermenigvuldigd wordt, doel is ook niet om te oefenen met een bepaald model. Leerlingen beschikken later echter wel over een model waarop ze indien nodig kunnen terugvallen.

Inhoudelijke beschrijving

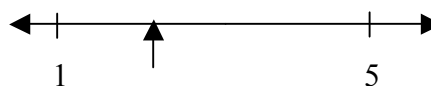
De beschreven leerlijn dient vooral om te laten zien hoe het gebruik van het rechthoekmodel leerlingen kan ondersteunen bij het begrijpen, interpreteren en uitvoeren van vermenigvuldigingen, ontbindingen en herleidingen van algebraïsche expressies. Eigenschappen zoals de commutatieve eigenschap en de distributieve eigenschap worden met behulp van dit model zichtbaar. Voor leerlingen in het basisonderwijs kan het gebruik zich beperken tot een informeel niveau. Verdere formalisering kan dan in het voortgezet onderwijs volgen.

Het basisonderwijs

Wij behandelen het vermenigvuldigen in de basisschool niet uitputtend. Wel geven we een aantal belangrijke stappen aan waarbij (visuele) modellen een ondersteunende rol kunnen spelen.

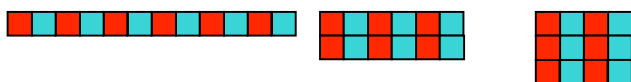
Vermenigvuldigen is gedurende een groot deel van de basisschoolperiode aan de orde. Vaak wordt het vermenigvuldigend rekenen met behulp van getallenlijn en getalstroken ondersteund.

- getallen ordenen op een getallenlijn.
Voorbeeld: Waar vind je 4 op deze getallenlijn? Welk (heel) getal ligt het dichtst bij de pijl?
Later worden sprongen op de getallenlijn gemaakt als inleiding op het vermenigvuldigen.



Het rechthoekmodel wordt in de gangbare methoden vooral in groep 3 t/m 5 gebruikt bij het aanvankelijk vermenigvuldigen (tafels tot 10). Het model komt daar op een natuurlijke manier naar voren vanuit het handig tellen van concrete voorwerpen, bijvoorbeeld tegels in de vorm van tegelvloertjes. In de hogere leerjaren, bij vermenigvuldigingen van getallen van twee of meer cijfers, van kommagetallen en van breuken wordt het model nauwelijks meer gebruikt. Er zijn zeker mogelijkheden om ook in de bovenbouw van het basisonderwijs hier meer aandacht aan te geven. In deze leerlijn worden die mogelijkheden op enkele plaatsen genoemd.

- getallen verdelen. Voorbeeld: Maak of teken een tegelvloer die uit 12 tegels bestaat.



leerlingen leren informeel dat $1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$

Dit is de eerste keer dat het rechthoekmodel aan de orde komt.

- halveren en verdubbelen. Bijvoorbeeld informeel, dus nog niet in rekentaal: 8×3 kun je vinden door 4×3 te verdubbelen; $8 \times 3 = (4 \times 3) \times 2$
- vermenigvuldigen als herhaald optellen; 3×7 of drie rijen van zeven is $7 + 7 + 7$
- ontwikkelen rekentaal
- flexibel rekenen;
- $6 \times 8 = 5 \times 8 + 1 \times 8$ (informeel gebruik distributieve eigenschap)
- $6 \times 3 = 3 \times 6$ (informeel gebruik commutatieve eigenschap)
- Hier kan het rechthoekmodel goed dienst doen als ondersteuning.



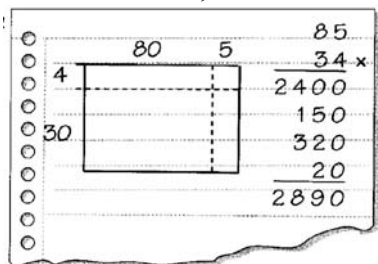
- tafels van vermenigvuldiging
- vermenigvuldigen met meer dan twee getallen. Voorbeeld met pakken wc-rollen:



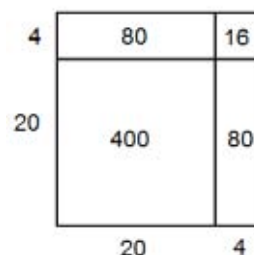
Er zijn steeds twee rollen papier op elkaar gestapeld. Hoeveel rollen zijn er in totaal? Welke vermenigvuldiging hoort daarbij? Heeft iedereen in de groep dezelfde (goede) vermenigvuldiging? $2 \times 6 \times 4$; 12×4 ; 24×2 ; $4 \times 2 \times 6$

- handig rekenen.
- Voorbeeld $6 \times 99 = 6 \times 100 - 6 \times 1$; $8 \times 0,25 = 4 \times 0,50 = 2 \times 1$
- vermenigvuldigen met grote getallen, de 10-structuur, 1 10 100 1000
- Gebruik van het rechthoekmodel voor vermenigvuldigen van getallen van twee of meer cijfers.

Voorbeeld (Uit de basisschoolmethode “Rekenrijk”) : In een kas komen 85 plantjes op een rij. Er kunnen 34 rijen gemaakt worden. Hoeveel plantjes zijn dat in totaal? Leerlingen kunnen de berekeningen op verschillende manieren maken. Hieronder worden er drie vermeld; rechthoekmodel, onder elkaar vermenigvuldigen en splitsen.



$$34 \times 85 = 4 \times 80 + 30 \times 80 + 4 \times 5 + 30 \times 5$$



Opmerking: Een bekende misconceptie is dat $24 \times 24 = (20 \times 20) + (4 \times 4) = 416$
 (N.B. Bij optellen gaat dit wel op!!)
 Het rechthoekmodel laat direct zien dat en vooral waarom dit antwoord fout is.

- vermenigvuldigen met breuken en decimale getallen

Voorbeeld: Laat zien dat $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = 6\frac{1}{4}$

Ook bij deze vermenigvuldiging kan het rechthoekmodel uitstekend gebruikt worden om te laten zien dat $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = (2 + \frac{1}{2})(2 + \frac{1}{2}) = 4 + 1 + 1 + \frac{1}{4}$.

Eenzelfde misconceptie als in het vorige voorbeeld, namelijk $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = 4\frac{1}{4}$ komt veel voor bij leerlingen. Voor het rechthoekmodel hier kan worden ingezet zou het de voorkeur verdienen wanneer leerlingen dit model al eerder met gehele getallen gebruikt hebben. Daarbij moeten we opmerken dat veel leerlingen moeite hebben met het begrip oppervlakte, het berekenen ervan en het omrekenen van oppervlaktematen. Om het rechthoekmodel als (visuele) ondersteuning van vermenigvuldigregels te kunnen gebruiken, zal hieraan aandacht moeten worden besteed.

Het grensvlak tussen basisonderwijs en voortgezet onderwijs

Het oppervlaktemodel komt zoals gezegd nauwelijks voor in de bovenbouwdeelen van veel gebruikte basisschoolmethodes en ook weinig in gangbare wiskundemethodes in het voortgezet onderwijs.

Wil een docent in het voortgezet onderwijs meer aandacht besteden aan modelondersteuning bij het onderhouden en verder leren van reken- en algebraïsche vaardigheden, dan moet hij de leerlingen al vroeg met deze modellen kennis laten maken. Om een doorgaande leerlijn te realiseren is het aan te bevelen wanneer ook docenten in het basisonderwijs dit model langer als (visuele) ondersteuning bij diverse vermenigvuldigingen zouden gebruiken.

De docent kan voorbeelden als hierboven genoemd ter introductie gebruiken.

- flexibel rekenen;
 $6 \times 8 = 5 \times 8 + 1 \times 8$ (informeel gebruik distributieve eigenschap)
 $6 \times 3 = 3 \times 6$ (informeel gebruik commutatieve eigenschap)
 De docent kan na deze informele inleiding laten zien dat je de genoemde eigenschappen met alle getallen kunt doen.



Zoals al eerder gezegd, moet vanaf het begin duidelijk zijn voor de leerlingen dat het beheersen van het model geen doel op zich is, maar dat het model een middel is om inzicht te bieden in (regels voor) vermenigvuldigen en leerlingen te ondersteunen in het correct uitvoeren ervan, in het bijzonder wanneer de getallen vervangen zijn door variabelen.

Een diagnostische toets die gebruikt kan worden om de voorkennis te bepalen die leerlingen op het gebied van modelgebruik bij vermenigvuldigen hebben, is dan ook op zijn plaats.

Een voorbeeld van zo'n toets is opgenomen als bijlage 2.

De onderbouw in het voortgezet onderwijs

In de publicatie: 'Oefeningen in Algebra' (pagina 14) wordt een aantal aandachtspunten genoemd, dat van belang is bij het leren en verder ontwikkelen van algebraïsche vaardigheden op basis van structuur en samenhang.

Een van de lastige zaken bij het verwerven, oefenen en toepassen van algebraïsche vaardigheden is, dat er bij een enigszins complexe vorm op vele vaardigheden tegelijkertijd een beroep wordt gedaan.

Om vat te houden op structuur en samenhang en om ten behoeve daarvan het gebruik van ondersteunende modellen een wezenlijk rol te geven

Bij het uitwerken van een expressie als $(a^2 - 3b)(-\frac{2}{3}a - b^3)$ komen tegelijkertijd het rekenen met breuken, het rekenen met machten, de rekenregels voor negatieve getallen, het vermenigvuldigen van tweetermen en het samennemen van gelijksoortige termen aan de orde.

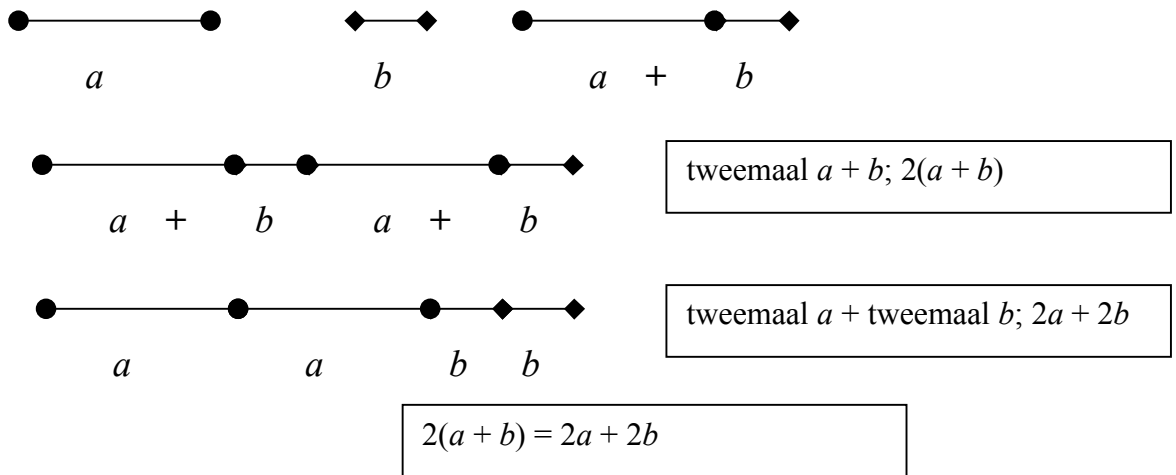
is het volgens ons van groot belang om niet te snel een gecombineerd beroep te doen op al deze instrumentele vaardigheden.

In 'Oefeningen in Algebra' wordt daarom aanbevolen om het rekenen met negatieve getallen uit te stellen, in ieder geval het gebruik daarvan bij het oefenen van algebraïsche vaardigheden. Ook wordt aanbevolen om algebra te laten starten met natuurlijke getallen.

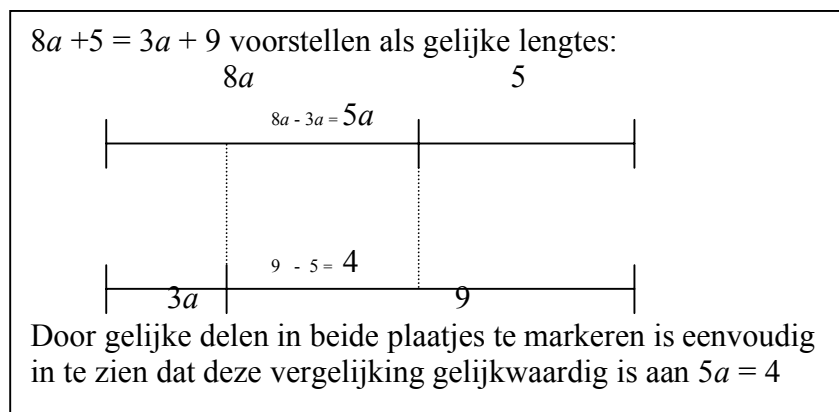
Aan de andere kant is de opbouw van de algebra in de huidige methoden ook een gegeven. De kunst is om, daar waar soms zeer snel overgegaan wordt naar algoritmisch trainen van algebraïsche vaardigheden in een haast maximale complexiteit, toch ruimte te maken voor een leerlijn die mogelijkheden biedt aan het inzichtelijk opbouwen van structuur en samenhang. Anderzijds zal ook voldoende aandacht moeten blijven voor het oefenen van algebraïsche vaardigheden. Dat moet echter niet alleen algoritmisch oefenen zijn, maar ook mogelijkheden bieden voor eigen (informele) constructies van de leerling en daarmee voor het opbouwen van een conceptueel netwerk.

Concrete mogelijkheden

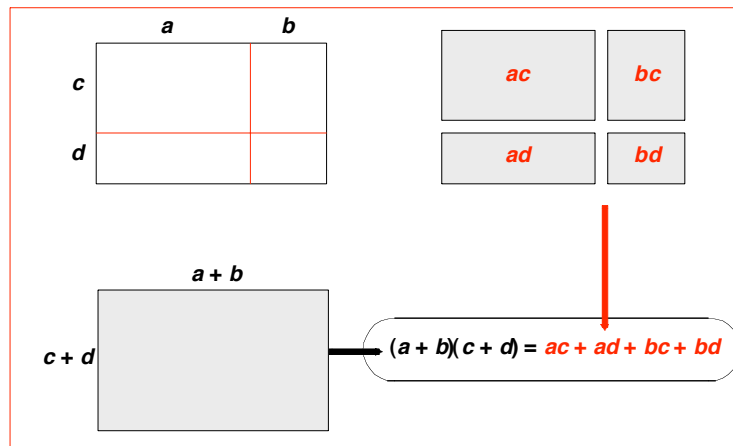
- operaties met algebraïsche expressies ondersteunen met een 'lijnstukken' model, zoals het voorbeeld op de volgende pagina laat zien.



Dit voorbeeld is zeer elementair. Het gebruik van het visuele model ondersteunt begrip van de rekenregel en geeft de mogelijkheid om een verbinding te leggen met bijvoorbeeld het oplossen van vergelijkingen. Gelijksortige algoritmische handelingen worden door hetzelfde model ondersteund:

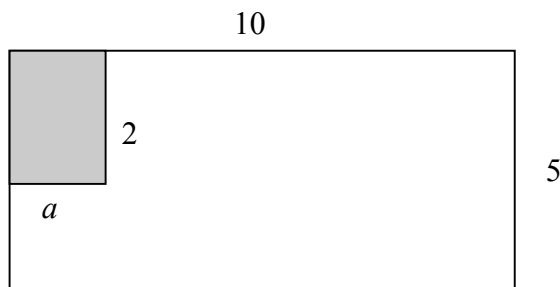


- Operaties met expressies ondersteunen met een rechthoekmodel.



- Opdrachten met visuele modellen die eigen constructies van leerlingen toestaan, of liever nog vereisen.

Bijvoorbeeld: Uit onderstaande rechthoek is het grijze stuk weggeknipt.



- Geef een formule voor de oppervlakte van het overgebleven deel.
(Met bespreking van alle mogelijke antwoorden.)
- Een aantal mogelijke antwoorden is: $50 - 2a$; $2(10 - a) + 30$; $3a + 5(10 - a)$
Hoe is iedere expressie tot stand gekomen?
Laat zien door algebraïsche bewerkingen dat alle expressies equivalent zijn.
(Equivalent betekent hier: wat je ook voor a invult, je krijgt steeds dezelfde uitkomst.)

- Ondersteuning door visuele modellen bij het bepalen van equivalentie van expressies.
Bijvoorbeeld. Laat met een tekening zien dat $x^2 + 5x + 6$ en $(x + 2)(x + 3)$ equivalente expressies zijn.

- Ondersteuning door gebruik van modellen bij het uitvoeren van algebraïsche bewerkingen en daarbij het leggen van verbindingen met algoritmen.

Bijvoorbeeld. Bereken $(x^2 + 2x + 3)(x + 5)$

Dat kan op verschillende manieren,

Rechthoekmodel

	x^2	$2x$	3
x	x^3	$2x^2$	$3x$
5	$5x^2$	$10x$	15

Tabel

x	x^2	$2x$	3
x	x^3	$2x^2$	$3x$
5	$5x^2$	$10x$	15

Vermenigvuldiging onder elkaar

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x + 3 \\
 \underline{x + 5 \quad \times} \\
 5x^2 + 10x + 15 \\
 x^3 + 2x^2 + 3x \quad + \\
 \hline
 x^3 + 7x^2 + 13x + 15
 \end{array}$$

Laat zien wat deze drie manieren met elkaar te maken hebben, door bijvoorbeeld de verschillende tussenuitkomsten van de laatste berekening aan te geven in de eerste twee modellen.

- Gebruik van geometrische problemen die leiden tot het oplossen van 2^e graads vergelijkingen

Bijvoorbeeld:

De oppervlakte van het grijze deel is 364;

de vergelijking kun je schrijven als

$$z^2 + 4 \times 3z = 364$$

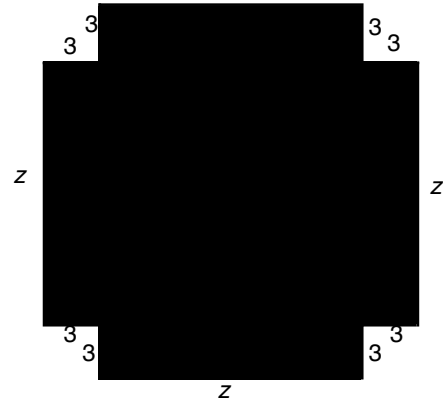
Vul de kleine vierkantjes op de hoeken op, de totale oppervlakte van het nieuwe vierkant is $364 + 4 \times 9 = 400$.

Je weet dat als de oppervlakte van een vierkant gelijk is aan 400, de zijde gelijk is aan 20, want $20^2 = 400$

De zijde van het nieuwe vierkant is $z + 6$

$$z + 6 = 20$$

$$z = 14$$



In dit geval stelt z een lengte voor en kan er dus alleen een positieve waarde voor z gevonden worden.

Dat er ook een negatief getal voor z bestaat, waarvoor geldt dat $z^2 + 4 \times 3z = 364$ kan zeker aan de orde worden gesteld, ook of misschien zelfs wel juist voordat algemene oplossingen voor kwadratische vergelijkingen aan de orde komen.

Dat geeft ook voor de leerlingen weer aan dat het model vooral een ondersteuning voor het denken is en geen leerdoel op zich.

- Bij de activiteiten met geometrisch te beschrijven expressies kunnen langzamerhand steeds meer expressies (met hier en daar negatieve getallen en/of breuken) opgenomen worden. Soms kan de rechthoek dan nog steeds ondersteunen, een tabel biedt echter vaak betere mogelijkheden.

Voorbeeld lesmateriaal

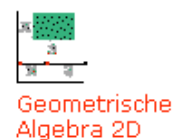
Voorbeelden zijn te vinden in het apart ontwikkelde lesmateriaal.

Verder zijn voorbeelden van oefenmateriaal te vinden in:

Oefeningen in Algebra

Martin Kindt, uitgave Freudenthal Instituut Utrecht

Diverse *applets* met bijbehorend lesmateriaal waarin de genoemde visuele geometrische modellen bij het oefenen van algebraïsche vaardigheden worden ingezet zijn beschikbaar via www.wisweb.nl. Een voorbeeld staat hiernaast



Voorbeeld toetsen

Bij deze leerlijn is een toets ontwikkeld voor het begin van de brugklas, zie bijlage 2.

Met deze toets kan een docent vaststellen welke hiaten en misconcepties aanwezig zijn.

Verder is een voorbeeld van een toets bijgevoegd, die op dezelfde manier te gebruiken is aan het eind van de brugklas dan wel aan het begin van klas 2 havo/vwo. Zie bijlage 3.

Leerlijn breuken

Onderdeel:	Van rekenen en redeneren met breuken naar rekenen en redeneren met gebroken algebraïsche expressies.
Belangrijke kenmerken:	Invoering variabelentaal Verwoording, veralgemenisering en abstractie van handelingen bij het rekenen met breuken Modelondersteuning; getallenlijn, oppervlaktemodel

Inhoudelijke beschrijving

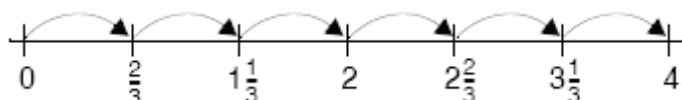
Het rekenen met breuken is na het basisonderwijs niet af. Met name de formele operaties met breuken komen niet altijd zodanig aan de orde dat alle havo/vwo leerlingen ze bij binnenkomst in het VO beheersen. Ook is er in het basisonderwijs weinig aandacht voor breuken als ‘nieuwe getallen’, als uitbreiding van het getalsysteem. In de onderbouw van het voortgezet onderwijs komt het rekenen met breuken zeer beperkt voor. Wel komt voor havo/vwo leerlingen in de tweede of derde klas het werken met gebroken vormen in algebraïsche expressies voor. Met de hier beschreven doorgaande leerlijn voor breuken willen we dit ondersteunen.

breuken in het basisonderwijs

- Breuken in het dagelijks leven
Ontwikkelen van een breukentaal, een *half* brood, een *kwart* appel, een *zesde* deel van een banketstaaf. Een strook die in vieren gevouwen is en waarvan *driekwart* gekleurd is.
- De breuk als het resultaat van een eerlijke verdeling
Beredeneerd verdelen; hoe verdelen we die in zessen verdeelde pizza onder drie personen; onderzoek van de relaties tussen delen in zessen, in drieën en halveren.
- De breuk als een deel-geheel relatie.
Hoe vaak past een zesde deel van de banketstaaf op een halve?
- De breuk als het resultaat van een nauwkeurige meting.
 $6\frac{1}{2}$ meter
- Operaties uitvoeren.
Beredeneerd optellen en aftrekken bouwt voort op beredeneerd gelijknamig maken. Hoeveel van de pizza hebben we samen opgegeten?
- De breuk als operator
“Deel van” relateren aan een vermenigvuldiging, $\frac{2}{3}$ deel van 4500 kilo kun je schrijven als $\frac{2}{3} \times 4500$. (Die overgang van ‘deel van’ naar ‘vermenigvuldigen met’ blijkt een heel lastige, ook voor leerlingen in het voortgezet onderwijs. Dit vereist namelijk het kunnen interpreteren van een breuk als een getal in plaats van als een operator!). De *helft* van vijf kun je schrijven als $\frac{1}{2} \times 5$; als $5 : 2$, als $5/2$ en als $\frac{5}{2}$.
- De breuk als verhouding.

Drie van de vijf leerlingen heeft een huisdier, $\frac{3}{5}$ deel

- De breuk als kans.
Bij het tossen met een munt is de kans op kop $\frac{1}{2}$
- De breuk als een getal.
Plaatsen van breuken op een getallenlijn, ordenen van breuken, breuken vergelijken, gelijkwaardige breuken
- Verband tussen breuken, verhoudingen, kommagetallen en procenten.
- Aanzetten tot het ontwikkelen van routinematige procedures. Bij 5 gedeeld door $\frac{1}{2}$ kun je bijvoorbeeld denken aan vijf liter tomatensaus die je verdeelt over flesjes van een halve liter. Sprongen van $\frac{2}{3}$. Hoeveel sprongen is het tot 4?



In de kerndoelen en dus ook in de eindtoets voor de basisschool van Cito neemt het uitvoeren van operaties met breuken geen belangrijke plaats in. Een voorbeeld van een opgave die in die toets zou kunnen voorkomen is:

Lisette is aan het sparen voor een computerspel. Ze heeft al $\frac{1}{4}$ van het bedrag gespaard. Drie maanden later heeft ze nog eens $\frac{3}{8}$ deel van het bedrag gespaard en haar vader zegt dat hij de rest betaalt. Welk deel is dat?

breuken in het voortgezet onderwijs

Uitgangspunt is het kort herhalen van wat op de basisschool gedaan is met uitbreiding naar de onderbouwstof. Behalve flexibel kunnen werken met breuken krijgt vooral inzicht de nodige aandacht. Formele regels worden behandeld vooral vanwege de voorbereiding op het “rekenen met letters”.

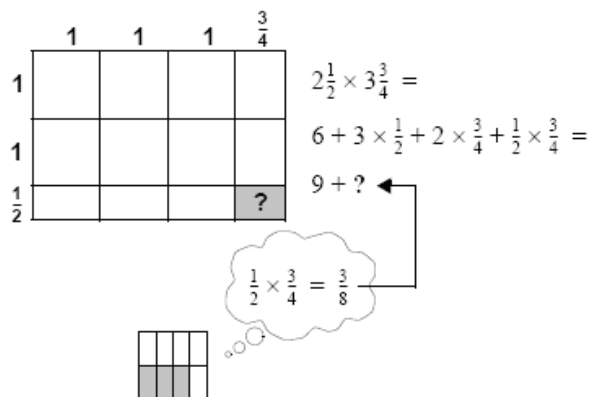
Gebruikte modellen zijn het rechthoekmodel, de getallenlijn en de verhoudingstabel.

- Breuken als uitbreiding van het getalsysteem; eerst van de natuurlijke, daarna van de gehele getallen. Breuken op de getallenlijn, ordenen, gelijkwaardigheid van breuken, het bestaan van negatieve breuken.
- Vereenvoudigen van ‘letterbreuken’ zoals:
$$\frac{2n}{3n} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{m+1}{2m+2} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{5p}{20q} = \frac{p}{4q}$$
- Vergelijken van breuken (gelijke noemers of gelijke tellers maken), gebruik van de tekens $<$ en $>$, ook met simpele algebraïsche expressies.
Voorbeeld: is $\frac{2}{n}$ groter of kleiner dan $\frac{4}{2n+1}$, waarom? (n staat voor een natuurlijk getal).
- Herhalen en formaliseren van de operaties optellen en aftrekken; het gelijknamig maken van breuken, ook weer met ‘letterbreuken’.

$$\frac{2}{m} + \frac{3}{m} = \dots \quad \frac{m}{2} - \frac{m}{3} = \dots \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \dots$$

- Informele en preformele vormen van de operaties vermenigvuldigen en delen herhalen, ook met algebraïsche expressies.

Voorbeeld rechthoekmodel:



- Vermenigvuldigen en delen als tegengestelde bewerkingen: delen door $\frac{1}{4}$ levert hetzelfde resultaat als vermenigvuldigen met 4, $\frac{\partial}{4}$ gelijk is aan $\frac{1}{4} \partial$.

Ook met variabelen:

$$\frac{n}{5} = \frac{1}{5} \times n \quad , \quad m : \frac{3}{4} = \frac{4m}{3} \quad , \quad \frac{p}{q} \times \frac{q}{p} = 1$$

- Onderzoeken en generaliseren van getalpatronen met breuken:

$$4 + 1\frac{1}{3} = 4 \times 1\frac{1}{3}$$

Kun je meer van zulke gelijkheden verzinnen?

Welke formule hoort daarbij?

- Samengestelde breuken, vergelijkingen met breuken (bordjesmethode):

$$\frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \dots \quad \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}} = \dots \quad \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}} = \dots$$

$$\frac{15}{4 + \frac{6}{1+x}} = 3 \quad \rightarrow \quad \frac{6}{1+x} = 1 \quad \rightarrow \quad x = 5$$

- Toepassingen, zoals bijvoorbeeld bij richtingscoëfficiënt, gebroken functies, vergelijkingen oplossen etc.
- Onderhoud!!!

Voorbeeld lesmateriaal

Voorbeelden zijn te vinden in het bij dit project ontwikkelde lesmateriaal ‘Breuken voor de brugklas’ van Martin Kindt, Freudenthal Instituut.
Verder zijn voorbeelden van oefenmateriaal te vinden in ‘Oefeningen in Algebra’ van Martin Kindt, uitgave Freudenthal Instituut Utrecht

Voorbeeld toetsen

Om zicht te krijgen op welke onderdelen [na](#) de basisschool beheerst worden, is een toets ontwikkeld voor leerlingen aan het begin van klas 1 van havo/vwo (zie bijlage 4). De docenten kunnen deze toets diagnostisch gebruiken en krijgen via de toetsresultaten inzicht in mogelijke hiaten en/of misconcepties.

Zie ook het artikel in de Wiskrant (december 2006, blz 6-10) “Wat doen we (niet) met breuken?”, Truus Dekker en Martin Kindt.

Leerlijn formules

Onderdeel: Representaties van verbanden in samenhang met nadruk op het redeneren over en aanpassen en zelf opstellen van formules.

Belangrijke kenmerken: redeneren over formules
formules zelf opstellen
formules aanpassen in samenhang met de andere representaties (taal, tabel, grafiek).

Inhoudelijke beschrijving

De nadruk in deze leerlijn ligt op de verschillende representaties van verbanden en hun samenhang, zie vo-kerndoel 25. In het basisonderwijs komt dit onderwerp niet systematisch aan bod. Grafieken (en tabellen) komen incidenteel voor in het PO, meestal gaat het om statistische grafieken. Deze leerlijn kan echter sterker worden opgezet als deze wortelt in de structuur van het rekenen, zoals geformuleerd in het po-kerndoel 26 en het vo-kerndoel 22.

Een onderdeel van het *greep krijgen op verbanden tussen grootheden en variabelen* (vo kerndoel 25) is het kunnen herkennen en beschrijven van regelmaat - in patronen en situaties- en het redeneren over formules. In de boeken van het VO krijgen deze zaken summier aandacht, met name de discrete kant (formules bij getalpatronen en bij visuele geometrische patronen) blijft in klas 1 t/m 3 onderbelicht. Dit komt dan in klas 4 VWO bij het onderwerp rijen aan bod, daar wordt het voor het eerst systematisch opgepakt. Ook het zelf opstellen van formules en het redeneren over formules (symbol sense) krijgt in het VO relatief weinig aandacht.

Voor dit gebied 'redeneren over formules' beschrijven we een doorlopende leerlijn van PO naar VO waarbij het 'gat' tussen onderbouw en klas 4 gedicht wordt. Bij deze leerlijn ligt het zwaartepunt in het VO, daar vindt ook de formalisering plaats.

In het PO kan op meer systematische wijze dan nu aandacht worden besteed aan een aantal onderdelen uit deze leerlijn, met name aan het herkennen en beschrijven (in woorden of met eigen notaties) van patronen en regelmaat; het gebruik van symbolen en de kennismaking met letters als variabelen (op preformeel niveau); redeneren over de patronen en de beschrijvingen ervan en over de relatie tussen een visueel patroon of getalpatroon en beschrijving.

Opmerking: de verbinding met kerndoel 22 zit onder andere in het werken met getalpatronen bijvoorbeeld in rijen, en patronen in series berekeningen. Zie het onderdeel 'algebraïsering van het rekenen'.

Voorbeelden

.....1511.... 7 ... 3.....

Welke regelmaat zie je?

maak deze rij aan twee kanten langer

Naast deze leerlijn is er binnen kerndoel 25 een verbanden/functielijn, die we hier niet beschrijven. Deze lijn heeft dwarsverbanden naar de hier beschreven lijn, met name waar het gaat om opstellen van en redeneren over formules bij verbanden. Daaraan besteden we waar mogelijk in de uitwerking in voorbeeldtoetsen en -lesmateriaal wel aandacht.

In de leerlijn komen formules aan de orde in relatie met visuele patronen, met (handig) herhaald rekenen en met situaties en metingen.

Het gaat daarbij om:

- o Visuele patronen en getalpatronen herkennen, voortzetten en beschrijven van regelmaat door middel van (woord)formules
- o Werken met symbolen (ook letters)
- o Begrip hebben van wat een variabele is en ermee kunnen werken
- o Verbanden beschrijven met behulp van (woord)formules, ook deze formules zelf opstellen
- o Redeneren over formules: over de geldigheid (domein), over effecten van verandering in coëfficiënten; over de structuur van de formule (bijvoorbeeld een formule vertalen in rekenacties, werken met haakjes) - zowel meer globaal 'symbol sense' (als deze waarde groter wordt, wordt die kleiner), als met gebruik van algebraïsche technieken (formule omwerken).

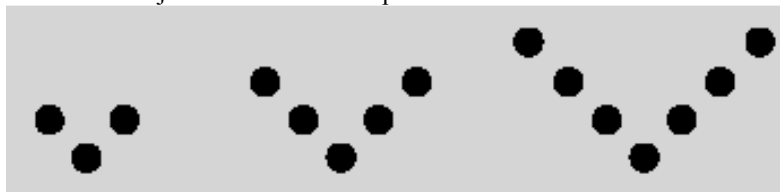
Onderdelen van de leerlijn

basisonderwijs

- Regelmaat ontdekken, beschrijven en gebruiken in patronen zoals stippenpatronen of tegelpatronen o.a. patroon voortzetten, erover redeneren, regelmaat beschrijven in woorden. Later kan deze beschrijving ook met eigen informele notaties en woordformules plaatsvinden.

Voorbeeldvraag uit *Patronen en Symbolen* (Mathematics in Context).

Hieronder zie je de drie kleinste V-patronen.



1. Teken het volgende V-patroon
 2. Kan een V-patroon uit 84 stippen bestaan? Leg uit waarom of waarom niet.
 3. Hoeveel paren zie je in elk V-patroon in de tekening?
 4. Hoeveel stippen heeft V-patroon nummer 6? En patroon nummer 100?
- Redeneren over hoe veranderingen in het visuele patroon doorwerken (bijvoorbeeld geschakelde V-patronen) in de regelmaat en in de beschrijving/formule.
 - Eigen notaties ontwikkelen bij het beschrijven van patronen en regelmaat.

- Redeneren over bekende formules en rekenregels.

Voorbeeld:

Voor een rechthoek geldt $oppervlakte = lengte \times breedte$

De oppervlakte blijft gelijk en de lengte wordt tweemaal zo groot, wat gebeurt er dan met de breedte?

Ik tel 5 bij de lengte op, wat gebeurt er met de breedte als de oppervlakte gelijk blijft?

- Speels omgaan met symbolen

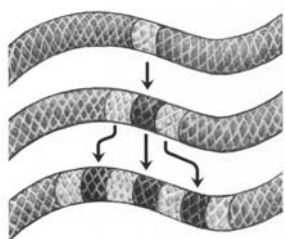
Voorbeeld uit *Groeiende Patronen* (Mathematics in Context)

Hieronder zie je hoe het strepenpatroon van een slang verandert in de jaren na zijn geboorte.

De slang wordt geboren met een *rode* ring (jaar 1)

In het tweede jaar komt er een zwarte ring in het midden van de rode.

In jaar 3 gebeurt weer hetzelfde, in het midden van elke rode ring komt een zwarte ring. De zwarte ringen veranderen niet.



1. Hoe ziet het patroon eruit in jaar 4?

Elk jaar groeit het ringenpatroon verder op dezelfde manier. Je kunt de regels voor het **groeipatroon** kort opschrijven:

R → **RZR**

Z → **Z**

2. a. Wat betekenen die regels? Schrijf dat in woorden
b. Wat is het voordeel van letters gebruiken?

Als de slang verder groeit wordt het veel te ingewikkeld om de patronen te tekenen of met letters te beschrijven. Een tabel maken om je resultaten overzichtelijk te houden helpt in dat geval.

jaar	aantal <i>rode</i> ringen	aantal <i>zwarte</i> ringen
1	1	0
2	2	1
3	4	3
4	...	...
5	...	...

3. Vul de tabel verder in.

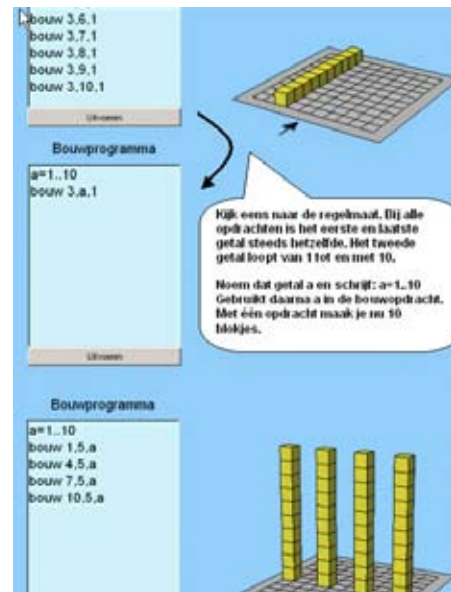
4. a. Nisa wil weten hoeveel **rode** ringen de slang in jaar 10 heeft. Hoe kan ze dat aantal vinden?
b. Hoeveel **zwarte** ringen heeft de slang in jaar 10 volgens jou? Hoe wist je dat?
c. Hoe kun je het aantal zwarte ringen in een bepaald jaar vinden als je het aantal rode ringen al weet?

Op het grensvlak van PO en VO

Kennismaken met het gebruik van ‘variabelen’ en ervaren wat het nut daarvan is. Dit kan in onder andere in de context van patronen en verbanden. Variabelen maken patroonbeschrijvingen korter en maken het noteren en uitvoeren van een serie ‘dezelfde’ berekeningen handiger (Excel).

Voorbeelden:

- Blokkenhuizen programmeren (applet, www.wisweb.nl), door het gebruik van een of meer variabelen kunnen leerlingen sneller en efficiënter een blokkenbouwsel maken.
- ‘Pistolets en croissants’: maak prijslijst voor alle combinaties van aantallen pistolets (à 29 ct) en croissants (à 76 ct) tot 15 van elk. Gebruik Excel! Houd rekening met mogelijke prijsveranderingen.
- Fietsenstalling: een jaarabonnement kost 87 euro het gaat 1 januari in. Het kan ook een latere week ingaan, je betaalt dan minder. Bij de stalling hangt een prijslijst, je ziet voor elke week wat een abonnement voor de rest van het jaar kost. Maak zo’n lijst met Excel, doe het handig.

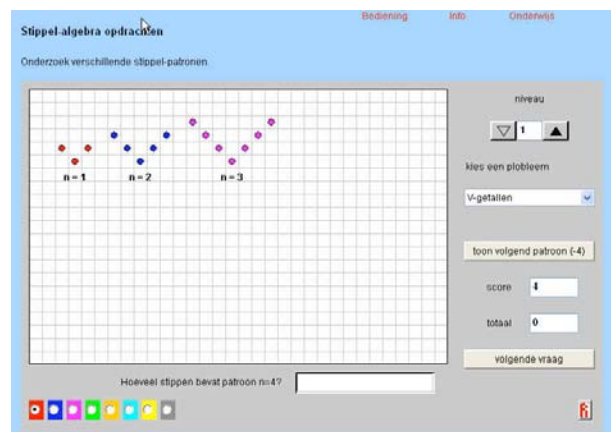


Voortgezet onderwijs

- Regelmaat ontdekken, beschrijven en gebruiken in diverse patronen (onder andere stippenpatronen of tegelpatronen). Activiteiten zijn onder andere het patroon voortzetten, erover redeneren, regelmaat beschrijven met formules. Dit zit beperkt in de wiskundeboeken voor klas 1 t/m 3 maar het kan voortgezet en uitgebreid worden zodat het in een doorgaande lijn voorbereidt op discrete wiskunde over rijen in klas 4 vwo.

Voorbeeld:

Opdrachten bij de applet stippelalgebra. (www.wisweb.nl). Het redeneren over patronen en het gebruik van variabelen om patronen te beschrijven staat centraal.

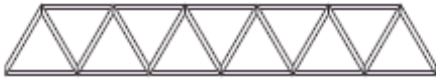


Ook in het boek *Oefeningen in Algebra* (Martin Kindt, uitgave Freudenthal Instituut Utrecht) kunnen veel voorbeeldopgaven worden gevonden.

- Redeneren over ‘formules’.

Voorbeeldvraag: redeneren over formules bij patroon (uit *Building Formulas, Mathematics in Context*):

Lengte (L) van deze balk is 6, er zijn 23 stangetjes (R) voor nodig



1. Maak een regel voor het vinden van het aantal stangetjes (R) als je de lengte (L) weet.
2. Leg uit (met een tekening) dat de regels hieronder allemaal kloppen bij dit patroon

de regel van Angelina:	$R = L \times 3 + (L - 1)$
de regel van David:	$R = L + (L - 1) + 2L$
de regel van Maria:	$R = 3 + (L - 1) \times 4$

De activiteit in het voorbeeld ondersteunt en geeft inzicht in het werken met equivalente expressies.

- Redeneren over formule en een aangepaste formule opstellen

Voorbeeldvraag: redeneren over de formule rond maximale hartslag (PISA-studie)

nieuw: **Maximale hartslag** = $208 - (0,7 \times \text{leeftijd})$

oud: **Maximale hartslag** = $220 - \text{leeftijd}$

1. Vanaf welke leeftijd neemt de maximale hartslag toe als gevolg van het gebruiken van de nieuwe formule?
2. Wat gebeurt er met het antwoord op de vorige vraag wanneer je het getal 0,7 in de nieuwe formule wijzigd?
Je traint effectief wanneer je hartslag 80% van de maximale hartslag is.
3. Maak een formule die met deze gegevens rekening houdt. Doe dit alleen voor de nieuwe formule.
Effectieve hartslag =

- Omgaan met formules in Excel.
Voorbeeld: Een algebra-opdracht van Aad Goddijn (Freudenthal Instituut). Opgenomen als bijlage 5.

- Herkennen en maken van equivalente vormen

$$p = qt \text{ is hetzelfde als } \frac{p}{t} = q$$

Maar ook vormen met en zonder haakjes (distributieve eigenschap). Steunpunten hierbij zijn het rekenen ($8 = 4 \times 2$ dus $\frac{8}{4} = 2$) en het werken met modellen als het rechthoekmodel.

- Redeneren over de betekenis van de getallen en bijbehorende dimensies in formules.

Bijvoorbeeld: bewerking van opg. 16 uit MW 1b Hdst. 15, , pag. 169:

Hoe dieper je in de aarde komt, hoe warmer het daar is.

Voor de temperatuur in een mijnschacht geldt de formule: $0,01 \times d + 15 = t$.

Hierin is d de diepte in meters onder de oppervlakte en t de temperatuur in graden Celsius.

De volgende vragen op het gebied van redeneren over formules kunnen aan de oorspronkelijke opdracht worden toegevoegd:

Wat is de betekenis van het getal 0,01? en van het getal 15?

Welke *dimensie* (eenheid) heeft het getal 0,01? Leg dit uit.

Voorbeeld lesmateriaal

Bij de meest gebruikte methodes is vervangend dan wel aanvullend lesmateriaal ontwikkeld.

Voorbeeld toetsen

In bijlage 6 is een voorbeeldtoets opgenomen voor eind klas 2 havo/vwo over het omgaan met en redneren over formules. In bijlage 7 zijn vragen opgenomen die gebruikt kunnen worden om na te gaan wat leerlingen aan het eind van klas 3 havo en 3 vwo kunnen op het gebied van redeneren over formules. De vragen hebben betrekking op kwadratische en gebroken formules omdat die in voorgaande hoofdstukken in klas 3 aan bod zijn geweest. Vergelijkbare vragen kunnen gemaakt worden voor lineaire formules, deze kunnen dan in klas 2 worden ingezet.

Wat gaat eraan vooraf? Aanbevelingen voor het PO.

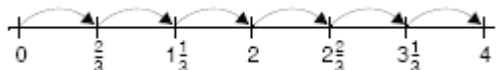
Bij de analyses die voor het ReAL project zijn uitgevoerd werd geconstateerd dat sommige leerlijnen van PO naar VO niet “doorlopen” terwijl andere soms vrijwel geheel ontbreken. Behalve voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs worden daarom in dit document ook aanbevelingen gedaan voor het rekenen/wiskunde onderwijs in het PO. Het gaat daarbij vooral maar niet uitsluitend over de leerlingen van groep 8 die zich voorbereiden op het voortgezet onderwijs in diverse richtingen. De voorbeelden die bij de aanbevelingen zijn opgenomen (bijlage 8) zijn allemaal bestemd voor toekomstige havo- en vwo-leerlingen.

Gebruik van modellen

Zowel voor PO als voor VO wordt bij het gebruik van rekenmodellen aanbevolen die het denken ondersteunen. Deze modellen zouden in het primair onderwijs al vroeg aan de orde moeten komen, uiteraard eerst in een informele, simpele vorm. Anders kan er in het VO niet op aanwezige kennis worden voortgebouwd. De modellen helpen leerlingen hun rekenstrategieën te ordenen en overzichtelijk te houden. Doel is echter nooit het oefenen met een bepaald model. Meestal zal de keuze van de strategie aan de leerling worden overgelaten. Enkele voorbeelden van rekenmodellen zijn (in willekeurige volgorde):

De getallenlijn.

In het PO wordt de ‘lege’ getallenlijn gebruikt als hulpmiddel bij het optellen en aftrekken. Ook bij het delen van breuken komt een getallenlijn wel voor:



Bij 4 gedeeld door $\frac{2}{3}$ kun je bekijken hoeveel sprongen van $\frac{2}{3}$ je moet maken om bij 4 te komen.

Veel leerlingen zullen zich afvragen of de getallen links van de nul ook doorgaan, een goede gelegenheid om het bestaan van ‘negatieve getallen’ aan de orde te stellen.

In de bovenbouw volgen opgaven waarbij getallen (hele getallen, decimale getallen, breuken) op de goede plaats op een getallenlijn moeten worden aangegeven. Zie voorbeeldopgave in bijlage 8.

De verhoudingstabel

Het gebruik van een verhoudingstabel kan helpen om je berekeningen geordend en overzichtelijk te houden. Een verhoudingstabel kan uit meerdere rijen bestaan.

Een voorbeeld van een verhoudingstabel die in groep 8 of in de brugklas kan voorkomen:

Vraag: Op de kassabon staat dat $1\frac{1}{4}$ kg kersen € 8.20 kost. Wat is de prijs per kilo?

gewicht (in kg)	$1\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	5	10	1
prijs (in euro)	8.20	16.20	32.40	64.80	6.48

De verhoudingstabel kent vele toepassingen, onder andere bij het uitvoeren van berekeningen die te maken hebben met verhoudingen, procenten, vergroten en verkleinen, schaal (op een kaart), breuken, decimale getallen. De berekeningen worden soms met

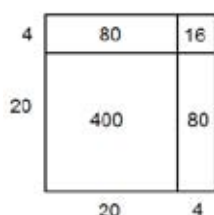
behulp van een rekenmachine uitgevoerd wanneer de getallen daartoe aanleiding geven. Zie ook de voorbeeldopgaven in bijlage 8.

Het **rechthoekmodel** voor vermenigvuldigen

Het rechthoekmodel (in het PO soms ook ‘tegelvloertjesmodel’ genoemd) is niet toereikend voor alle situaties waarin vermenigvuldigd wordt. Leerlingen beschikken later echter wel over een model waarop ze kunnen terugvallen bij het rekenen met algebraïsche expressies.

Een voorbeeld van het gebruik van het rechthoekmodel in het PO.

Vraag: Fleur berekent $24 \times 24 = 416$ Laat zien waarom haar antwoord fout is.



Antwoord: Fleur heeft vergeten 20×4 en 4×20 te berekenen.

Formele bewerkingen met breuken

Toekomstige leerlingen van vmbo-b hoeven weinig formele bewerkingen met breuken te kunnen uitvoeren. In het examenprogramma voor de basisberoepsgerichte leerweg van het vmbo staat bijvoorbeeld dat de leerlingen in betekenisvolle situaties breuken moeten kunnen optellen en aftrekken en eenvoudige breuken kunnen vermenigvuldigen met een geheel getal. Dat alles mag ook met de rekenmachine. Voor deze groep leerlingen is het breukenonderwijs in groep 8 dus wel ongeveer “af”.

Voor leerlingen die naar havo of vwo gaan is het niet altijd genoeg. In het VO is er voor “onderhoud en uitbreiding” maar weinig tijd, rekenen maakt immers maar een heel klein deel uit van de totale wiskundestof. Met name bij vermenigvuldigen en delen van breuken zouden voor deze leerlingen de routinematige procedures liefst wel behandeld moeten worden.¹ In de onderbouw van het VO kan dan vervolgens ook geoefend worden met gebroken algebraïsche vormen.

Algebra

Moet er nu echt al aan algebra gedaan worden in het basisonderwijs? Wij denken van wel, het is belangrijk dat ook deze leerlijn ‘doorloopt’ en niet pas begint in het VO. Maar natuurlijk bedoelen we dan niet zoiets als de vergelijking $3x + 7 = 12$ oplossen of een grafiek tekenen die hoort bij de formule $y = 3x - 4$.

Wat dan wel? In de leerlijnbeschrijving wordt al genoemd dat de leerlijn patronen en symbolen al op een informele manier in het PO zou kunnen beginnen.² Verder verdient het aanbeveling om te kijken naar regelmaat in getalpatronen als voorbereiding op het VO.

¹ Een deel van het breukenmateriaal van Martin Kindt is geschikt om in groep 8 te gebruiken.

² Zie voorbeeldmateriaal “Patronen en Symbolen” van MiC.

De introductie van negatieve getallen kan heel goed in het PO plaatsvinden. Dan liefst via verschillende contexten, zoals ligging onder zeeniveau, temperatuur, schulden, of bijvoorbeeld al iets formeler wanneer een leerling schrijft $38 - 75 = \dots$ in plaats van $75 - 38 = \dots$. Waarom kunnen we de eerste berekening (nog) niet uitvoeren? Informeel optellen van negatieve getallen met behulp van een getallenlijn en vermenigvuldigen van een negatief getal met een positief getal (herhaald optellen, bijvoorbeeld bij het berekenen van de gemiddelde temperatuur aan de hand van een groter aantal metingen) is ook mogelijk. Formele regels kunnen beter pas in het VO worden besproken en geleerd. Toepassingen zoals gebruik in een assenstelsel komen ook nu al in sommige methodes voor het PO voor.

Probleem oplossen

Het PISA-2003-onderzoek (Programme for International Student Assessment) heeft laten zien dat Nederlandse 15-jarige leerlingen goed zijn in simpele toegepaste wiskunde, in vergelijking met leerlingen uit andere landen. Echter, bij het onderdeel ‘probleem oplossen’ waren de Nederlandse leerlingen helemaal niet zo goed. We kunnen daar geen afdoende verklaring voor geven.

Opvallend was dat Nederlandse leerlingen het betrekkelijk snel opgeven en soms niet eens aan een opgave beginnen wanneer die veel tijd of veel inspanning vraagt. Ook duidelijk is, uit onze analyse van de gebruikte methodes, dat in het PO weinig grote (reken)opgaven voorkomen die meer dan een vraag omvatten. In de Cito-toets komen dergelijke omvangrijke contextvragen evenmin voor. Langere tijd met een ingewikkeld probleem bezig zijn is iets dat met name aan het eind van groep 8, tijdens de voorbereiding op het VO, aan de orde zou kunnen komen.³

Aan leerlingen aan het eind van het PO wordt zelden gevraagd hun uitwerking of redenering op te schrijven of een toelichting te geven bij hun antwoord. Deze vaardigheid is in het VO wel belangrijk, reden om er in groep 8 aandacht aan te besteden. Dit geldt voor alle leerlingen van groep 8, niet alleen de leerlingen die naar havo/vwo gaan.

³ Twee voorbeeld opgaven beschikbaar.

Bijlage 1

Entreetoets rekenvaardigheden, begin klas 3 havo

Je mag geen rekenmachine gebruiken.

Laat steeds zien hoe je het antwoord gevonden hebt.

1. Ik heb twee verschillende getallen gekozen onder de 10. Nul telt niet mee.
De som van de twee getallen is een kwadraat.
Het product van de twee getallen is even.
Het product van de twee getallen is een derde macht.
Welke twee getallen zijn dat?
2. Bakker Bart verhoogt de prijs van roomboterkoekjes met 10%. Nu wordt er te weinig verkocht dus verlaagt hij de prijs met 4%. Met hoeveel procent is de oorspronkelijke prijs van de koekjes uiteindelijk gestegen?
3. Merel heeft tot nu toe de volgende cijfers gehaald voor wiskunde:
3,7 5,8 5,6 7,2 7,4
Er komen nog twee proefwerken. Om een vwo-advies te krijgen heeft Merel gemiddeld een 7,2 nodig. Kan ze dat nog halen?
4. Voor een terras met sierbestrating moet een voldoende dik zandbed worden aangebracht. We gaan uit van een dikte van minstens 20 cm. Is 1 m^3 zand voldoende voor een cirkelvormig terras met een diameter van 1,90 m?
5. Voorbij Maarssen, in de richting van Amsterdam, staat een file van 3 km. De weg heeft daar 3 rijstroken in beide richtingen. Maak een schatting van het aantal auto's in de file.
6. a. Hoeveel decimalen heeft het antwoord van $0,23 \times 25,7 \times 81,35$?
b. Geef een schatting van het antwoord, afgerond op honderdtallen: $0,23 \times 25,7 \times 81,35 =$
7. Hoeveel decimalen heb je nodig om het verschil te kunnen zien tussen $\frac{100}{300}$ en $\frac{101}{300}$?
8. Is de som van $\frac{5}{7}$ en $\frac{3}{11}$ groter of kleiner dan 1?
9. Bereken $0,35 : 0,05 =$
10. a. Schrijf drie decimale getallen op die liggen tussen 0,45 en 0,46
b. Schrijf de getallen in volgorde van klein naar groot 0,5; 0,375; 0,095; 0,625; 0,25

Opmerkingen voor de docent:

De toets neemt ongeveer een half lesuur in beslag.

Doel van de toets is na te gaan of leerlingen aan het begin van klas 3 over voldoende algemene rekenvaardigheden beschikken. De opgaven zijn uiteraard slechts voorbeelden die met vele andere kunnen worden uitgebreid.

Voorbeelden van antwoorden entreetoets rekenvaardigheden, begin klas 3 havo

- $1 + 3 = 4$ (kwadraat, product is oneven)
 $1 + 8 = 9$ (kwadraat, product is even, product is een derde macht)
 $2 + 7 = 9$ (kwadraat, product is even)
 $3 + 6 = 9$ (kwadraat, product is even)
 $7 + 9 = 16$ (kwadraat, product is even)
Antwoord: de getallen 1 en 8
- | | |
|--------------|-------------------|
| Prijs was | 100% |
| Verhoging | $\frac{10\%}{+}$ |
| Nieuwe prijs | 110% |
| Verlaging | |
| 4% | $\frac{4,4\%}{-}$ |
| Prijs nu | 105,6% |

De prijs is 5,6% gestegen ten opzichte van de oorspronkelijke prijs.
- Merel kan hoogstens tweemaal een tien halen voor de laatste twee proefwerken.
 $3,7 + 5,8 + 5,6 + 7,2 + 7,4 + 10 + 10 = 49,7$
 $49,7 : 7 = 7,1$, dat is niet genoeg.
- Ga eerst uit van een vierkant terras met zijde 1,9 m. Indien nodig daarna alsnog de oppervlakte van een cirkelvormig terras uitrekenen.
 $1,9 \times 1,9 \times 0,2 = 0,722 \text{ m}^3$ Dus 1 m^3 zand is zeker genoeg.
- Voorbeeld van een schatting. Per auto inclusief tussenruimte nodig 5 m. (Beetje ruim maar er staan waarschijnlijk ook vrachtauto's in de file). 3 km, 3 rijstroken dus 9000 m.
 $9000 : 5 = 18000 : 10 = 1800$ auto's in de file.
- a. 5 decimalen
b. De uitkomst is ongeveer 500. Bijvoorbeeld $0,25 \times 80 \times 25 = 20 \times 25 = 500$
- Het verschil is $\frac{1}{300}$. Als je daar een decimaal getal van maakt zijn de eerste twee cijfers achter de komma gelijk aan nul. Dus heb je minstens drie decimalen nodig.

8. $\frac{5}{7} + \frac{3}{11} = \frac{55}{77} + \frac{21}{77} = \frac{76}{77}$ Dat antwoord is kleiner dan 1.

9. $0,35 : 0,05 = 35 : 5 = 7$

10. a. Veel antwoorden mogelijk, bijvoorbeeld 0,451; 0,458; 0,4509

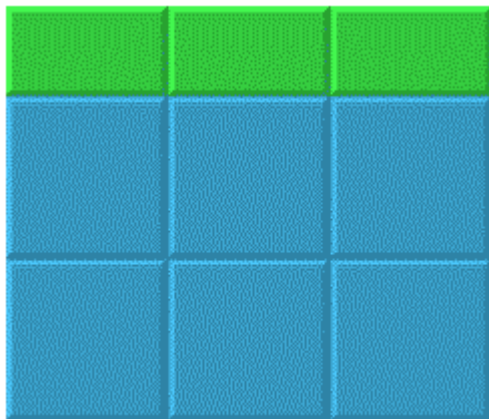
b. 0,095; 0,25; 0,375; 0,5; 0,625

Bijlage 2

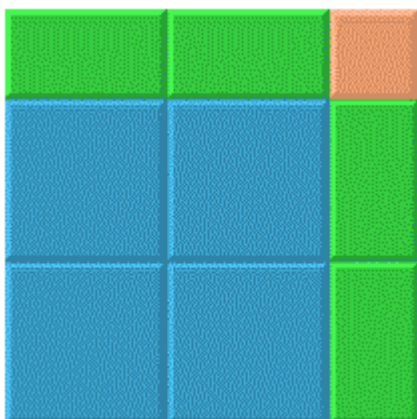
Toets vermenigvuldigen bij de start van de onderbouw van havo en vwo

Je maakt deze toets om te laten zien of je het rechthoekmodel kunt gebruiken bij het rekenen. Misschien heb je voor sommige onderdelen extra oefening nodig, de docent zal dat met je bespreken. *Je mag geen rekenmachine gebruiken.*

1. Laat zien hoe je 18×25 berekent zonder een rekenmachine te gebruiken. Bedenk dat het om de *manier* van berekenen gaat en niet alleen om het *antwoord*.
2. Noor heeft berekend $12 \times 12 = 104$ en $23 \times 23 = 409$. Hoe heeft Noor gerekend zodat ze deze foute antwoorden kreeg?
3. Thomas heeft met het applet *Legpuzzel-algebra* (www.wisweb.nl) dit tegelvloertje gemaakt:



- a. Welke vermenigvuldiging kan er volgens jou bij dit tegelvloertje horen?
 - b. Kan er nog een andere vermenigvuldiging bij hetzelfde tegelvloertje horen? Als je ja zegt, welke vermenigvuldiging is dat? Als je nee zegt, waarom niet?
4. En welke vermenigvuldiging kan er bij het tegelvloertje hieronder horen?



Je kunt een tegelvloer zoals die van vraag 3 of vraag 4 ook zelf tekenen in een simpele vorm.

5. Sanne heeft de vermenigvuldiging 16×16 met een tegelvloer getekend
Vul de ontbrekende getallen in. Wat is het antwoord van $16 \times 16 = \dots$?

	10	6
10	10×10 $= 100$	
6	60	

6. Maak zelf een tekening voor de vermenigvuldiging 37×37 . Lees de uitkomst uit je tekening af.
7. In de tekening hieronder staan wel de getallen in de tegelvloer maar de vermenigvuldiging staat er niet bij. Welke vermenigvuldiging is het? Wat is de uitkomst?

60	27
200	90

8. Bereken $2\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2} = \dots$. Doe dat op je eigen manier.
9. Bereken $1,5 : 0,5$ en laat zien hoe je dat berekend hebt.
10. Bedenk zelf een manier om in rekentaal op te schrijven dat je tien even grote stukken touw nodig hebt.



Opmerkingen voor de docent:

De toets neemt ongeveer een half lesuur in beslag.

Doel van de toets is na te gaan of leerlingen aan het begin van de onderbouw VO het rechthoekmodel kunnen gebruiken bij het uitvoeren van vermenigvuldigen. Uit de antwoorden van leerlingen worden mogelijke misconcepties duidelijk. De opgaven zijn uiteraard slechts voorbeelden die met vele andere kunnen worden uitgebreid.

Mogelijke antwoorden toets vermenigvuldigen, begin onderbouw.

1. Verschillende manieren zijn mogelijk. Een paar voorbeelden:

$$18 \times 25 = 9 \times 50 = 450$$

	20	5	
8	20×8	40	
10	20×10	50	

$160 + 40 + 200 + 50 = 450$

2. Noor rekent alleen uit $10 \times 10 = 100$ en $2 \times 2 = 4$ als ze 12×12 berekent. Net zoiets doet ze ook bij 23×23 . Met een tegelvloertje kun je laten zien dat een vloer van 12 tegels in de lengte en 12 tegels in de breedte in totaal 144 tegels bevat. Noor heeft dus twee stukken van 20 vergeten.

	10	2	
10	10×10 $= 100$		
2			4

3. a. Bij de tegelvloer kan bijvoorbeeld $3 \times 2\frac{1}{2}$ horen.
b. Je kunt niet zeker weten dat het antwoord bij a. juist is. De vermenigvuldiging 30×25 zou ook bij de vloer kunnen horen. Of 300×250 .
4. Bijvoorbeeld $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 6\frac{1}{4}$. Maar ook een goed antwoord is $25 \times 25 = 400 + 50 + 50 + 50 + 50 + 25 = 625$.
5. De ontbrekende getallen zijn 60 en 36. Het antwoord is $100 + 60 + 60 + 36 = 256$

6. In de tekening komen de getallen $30 \times 30 = 900$; $30 \times 7 = 21$; $30 \times 7 = 21$ en $7 \times 7 = 49$.
Het antwoord is $900 + 210 + 210 + 49 = 1369$

7. $29 \times 13 = 60 + 200 + 27 + 90 = 377$

8. verschillende manieren mogelijk, waaronder het maken van een “tegelvloertje”.

Antwoord: $13\frac{3}{4}$

9. Bij $1,5 : 0,5$ kun je bijvoorbeeld bedenken hoeveel flessen van een halve liter kunt vullen uit een grote fles van 1,5 liter of hoe vaak 0,5 in 1,5 past.

Dat is drie keer want $3 \times 0,5 = 1,5$.

Het antwoord is 3

10. $10 \times$ ,
of  +  + +  (10 plaatjes)
of $10 \times \text{length}$ of $10 \times l$

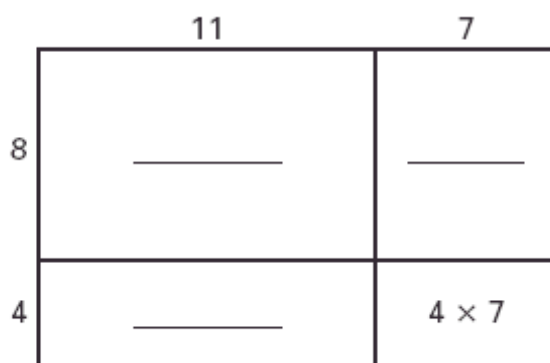
Bijlage 3

Toets bij de leerlijn vermenigvuldigen, einde brugklas of begin klas 2

Je maakt deze toets om te laten zien wat je weet van vermenigvuldigen. Misschien heb je voor sommige onderdelen extra oefening nodig, de docent zal dat met je bespreken.

Je mag geen rekenmachine gebruiken.

- Je weet dat 5^2 een korte manier is om 5×5 op te schrijven. Je weet natuurlijk ook dat $5 \times 5 = 25$
Maikel schrijft op $13^2 = 13 \times 13 = 109$ en $34^2 = 916$
Leg uit hoe Maikel gedacht heeft en laat zien waarom zijn antwoorden fout zijn.
- Laat zien dat $(4\frac{1}{2})^2 = 20\frac{1}{4}$
- a. Vul de ontbrekende getallen in:



- Schrijf de berekening op die bij het diagram hoort:
 $(8 + 4) \times (11 + 7) = 8 \times 11 + 8 \times 7 + \dots\dots\dots$
 - Bekijk de berekening $(9 + 3) \times (10 + 8)$. Hoe weet je zonder berekening dat het antwoord gelijk is aan dat van vraag b?
- Laat met een vermenigvuldiging zien dat $2^4 + 2^4 = 2^5$
 - Schrijf in wiskundetaal: De som van x en zeven wordt vermenigvuldigd met drie. Schrijf het antwoord ook zonder haakjes op.
 - Boekenplanken worden verkocht in twee lengtes, p en q . Diana heeft 10 maal de combinatie van p en q nodig. Schrijf de vermenigvuldiging die daarbij hoort op twee verschillende manieren.
 - Algebraïsche vormen die er verschillend uitzien maar dezelfde betekenis hebben heten *equivalent*. Zijn de volgende vormen equivalent of niet? Als ze equivalent zijn mag er een " $\equiv$ " teken tussen. Zijn ze niet equivalent, schrijf dan $\neq$. Leg steeds uit waarom of waarom niet.

a^2		$a \times a$
$(a + 1)^2$		$a^2 + 1$
$2a + 1$		$2 \times a + 1$
$2(a + 1)$		$2a + 2$
$a^2 + 2a + 2$		$(a + 1)^2$

8. Hieronder zie je een rij berekeningen.

$$1 \times 3 + 1 = 4$$

$$2 \times 4 + 1 = 9$$

$$3 \times 5 + 1 = 16$$

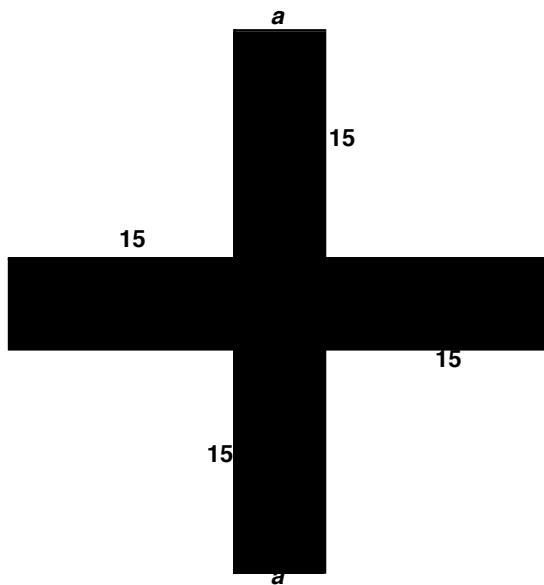
$$4 \times 6 + 1 = 25$$

a. De rij kan eindeloos voortgezet worden. Schrijf de volgende drie regels op.

b. Beschrijf hoe je een willekeurige regel in de rij berekeningen kunt vinden. Dat mag in woorden of met een formule.

9. Bereken $(3a^2 + 2a + 7)(a + 8)$. Laat zien hoe je het antwoord gevonden hebt.

10. De oppervlakte van het grijze deel is 396. Bereken de waarde van a .



Voorbeelden van antwoorden toets bij de leerlijn vermenigvuldigen

Opmerkingen voor de docent:

De toets neemt ongeveer een half lesuur in beslag.

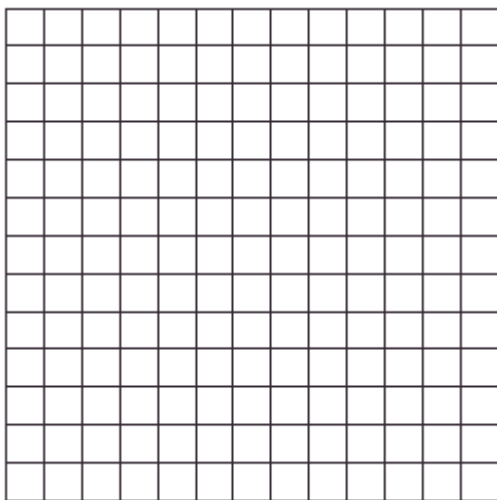
Doel van de toets is na te gaan of leerlingen aan het eind van de brugklas of het begin van klas 2 inzicht hebben in de bewerking vermenigvuldigen, zowel met als zonder expressies. Uit de antwoorden van leerlingen worden mogelijke misconcepties duidelijk. De opgaven zijn uiteraard slechts voorbeelden die met vele andere kunnen worden uitgebreid.

Naar aanleiding van de resultaten kan aan leerlingen een advies gegeven worden om bepaalde onderdelen te herhalen en te oefenen.

Enkele opgaven zijn ontleend aan 'Oefeningen in Algebra', door Martin Kindt, uitgave Freudenthal Instituut Utrecht.

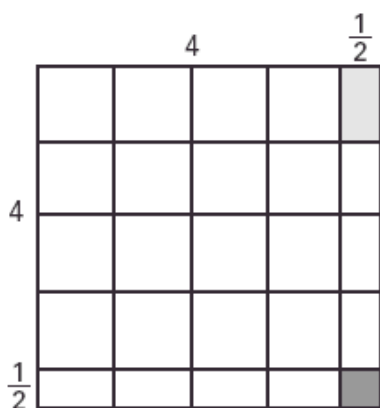
Meer oefeningen kunnen behalve in deze uitgave gevonden worden bij de algebra applets, zie www.wisweb.nl Freudenthal Instituut Utrecht

1. Maikel heeft $10 \times 10 = 100$ en $3 \times 3 = 9$ berekend. Maar hij heeft een deel van de berekening vergeten. Je kunt bijvoorbeeld op het bijgevoegde ruitjespapier laten zien dat een vierkant van 13 bij 13 bestaat uit 169 ruitjes en niet uit 109 ruitjes.



Op dezelfde manier (met een model zoals in vraag 3) kun je laten zien dat $34^2 = (30 + 4)(30 + 4) = 900 + 120 + 120 + 16 = 1156$ en geen 916.

2. Voorbeeld van een uitleg op de volgende pagina.



$$4\frac{1}{2} \times 4\frac{1}{2} = 16 + 8 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 16 + 4 + \frac{1}{4} = 20\frac{1}{4}$$

3. a. De ontbrekende vermenigvuldigingen zijn $8 \times 11 = 88$; $8 \times 7 = 56$ en $4 \times 11 = 44$.
 b. $(8 + 4) \times (11 + 7) = 8 \times 11 + 8 \times 7 + 4 \times 11 + 4 \times 7 = 88 + 56 + 44 + 28 = 216$
 c. Net als in vraag b staat hier de berekening $12 \times 18 = 216$
4. $2^4 + 2^4 = 2 \times 2^4 = 2^5$
5. $3(x + 7) = 3x + 21$.
6. $10(p + q)$ of $10p + 10q$ of $10 \times p + 10 \times q$
7. Zijn de volgende vormen equivalent of niet?

$$a^2 = a \times a \quad \text{dat is de afspraak voor de notatie } a^2$$

$(a + 1)^2 \neq a^2 + 1$ gebruik bijvoorbeeld het oppervlaktemodel om te laten zien dat de twee uitdrukkingen niet equivalent zijn.

$$(a + 1)^2 = (a + 1)(a + 1) = a^2 + a + a + 1 = a^2 + 2a + 1$$

$$2a + 1 = 2 \times a + 1 \quad \text{in plaats van } 2 \times a \text{ mag je ook } 2 \cdot a \text{ of } 2a \text{ schrijven}$$

$2(a + 1) = 2a + 2$ gebruik bijvoorbeeld lijnstukjes om te laten zien dat tweemaal $a + 1$ gelijk is aan tweemaal a en tweemaal 1.

$$a^2 + 2a + 2 \neq (a + 1)^2 \quad \text{hierboven heb je al laten zien dat } (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

8. Dit zijn de regels die al gegeven zijn:

$1 \times 3 + 1 = 4$	regel nummer 1; $n = 1$
$2 \times 4 + 1 = 9$	regel nummer 2; $n = 2$
$3 \times 5 + 1 = 16$	regel nummer 3; $n = 3$
$4 \times 6 + 1 = 25$	regel nummer 4; $n = 4$

 a. De volgende drie regels zijn:

$5 \times 7 + 1 = 36$	regel nummer 5; $n = 5$
$6 \times 8 + 1 = 49$	regel nummer 6; $n = 6$
$7 \times 9 + 1 = 64$	regel nummer 7; $n = 7$

b. Aan de rechterkant van het = teken zie je kwadraten. Als ik een willekeurige regel zoek noem ik dat bijvoorbeeld de n^e regel, of de regel met rangnummer n .

De regel met rangnummer n is dan bijvoorbeeld

$$n \times (n + 2) + 1 = (n + 1)^2$$

Je kunt controleren (gebruik het oppervlaktemodel) dat deze regel juist is door te berekenen

$$n \times (n + 2) + 1 = n^2 + 2n + 1$$

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

9. $(3a^2 + 2a + 7)(a + 8) =$

Voorbeeld van een berekening:

$$3a^2 + 2a + 7$$

$$\frac{a + 8}{3a^3 + 2a^2 + 7a}$$

$$3a^3 + 2a^2 + 7a$$

$$\frac{24a^2 + 16a + 56}{3a^3 + 26a^2 + 13a + 56}$$

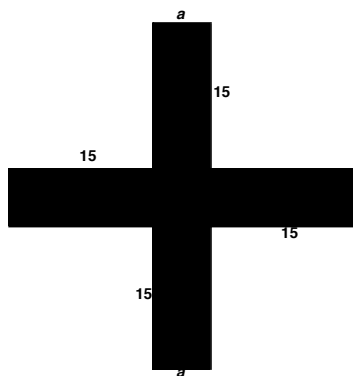
$$3a^3 + 26a^2 + 13a + 56$$

10. De oppervlakte van het grijze deel is 396. Aanvullen tot een groot vierkant met vier stukken van $15 \times 15 = 225$ geeft een totale oppervlakte van $396 + 4 \times 225 = 1296$

De zijde van een vierkant met oppervlakte 1296 is gelijk aan 36 want $36 \times 36 = 1296$

Maar je kunt de zijde van het grote vierkant ook schrijven als $15 + a + 15$, of als $a + 30$.

Je weet nu dat $a + 30 = 36$, dus $a = 6$. (Bedenk dat a een lengte is dus is er alleen een positieve waarde voor a mogelijk.)



Bijlage 4

Toets breuken bij de start van de onderbouw van havo en vwo

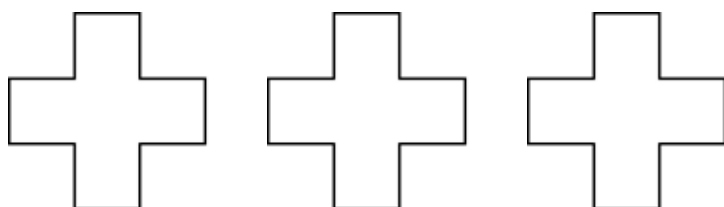
Je maakt deze toets om te laten zien wat je nog allemaal weet van wat er op de basisschool gedaan is. Misschien heb je voor sommige onderdelen extra oefening nodig, de docent zal dat met je bespreken. *Je mag geen rekenmachine gebruiken.*

1. Bij $\frac{3}{4}$ kun je aan van alles denken. Schrijf drie mogelijkheden op.
2. Schrijf “tweederde deel van 1800” in rekentaal, dus zonder woorden.
3. Schrijf een breuk met “3” in de teller.
4. Bereken: $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} =$

$$\frac{2}{7} + \frac{2}{3} =$$

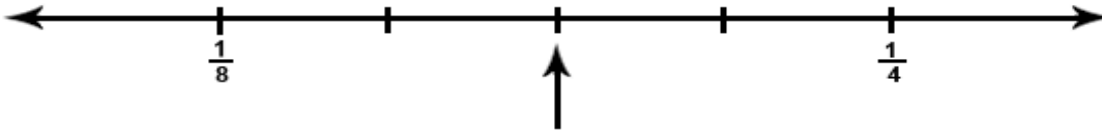
$$2\frac{3}{5} - 1\frac{3}{4} =$$

5. Kleur $\frac{1}{4}$ van de figuur. Doe dat op drie verschillende manieren.



6. Wat is meer, $\frac{1}{7}$ of $\frac{1}{8}$. Hoe weet je dat?
7. In de breuken is n een positief, geheel getal. Welke is groter, $\frac{1}{n}$ of $\frac{1}{n+1}$? Hoe weet je dat?

8. Hieronder zie je een stukje van een getallenlijn. Welk getal hoort op de plaats van de pijl? Leg uit hoe je dat weet.



9. Schrijf een breuk met “17” in de noemer.
10. Jantine beweert dat $2\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{3} = 6\frac{1}{6}$. Leg uit waarom dat fout is.
11. Schrijf in het diagram hieronder de ontbrekende getallen op.

	3	...
2	...	15
..	9	...

12. Schrijf de vermenigvuldiging op die hoort bij dit diagram:

	...	...
...	1/4	3
...	1	12

Wandelroute



In Estes Park, in de Rocky Mountains (VS) staat een bord met twee wandelroutes. .

Hieronder staat de beschrijving van de wandelroutes in Estes Park.

1 mijl is ongeveer 1,6 km en 1 voet is ongeveer 30 cm.

- Mill's Lake route. Dit is een route van $2\frac{1}{2}$ mijl met een stijging van ongeveer 700 voet.
- Naar Emerald Lake. Dat is 605 voet boven het startpunt bij Bear Lake en de totale afstand is $1\frac{3}{4}$ mijl.

13. Bij de beschrijvingen ontbreken de woorden *gemakkelijk* en *moeilijk*. Vergelijk de steilte van de routes en zet het goede woord bij de twee routes.

14. Schrijf hieronder op welke bewering het best bij jou past. Je hoeft alleen de letter A, B of C op te schrijven.

- Bewering A: De vragen zoals in 1 t/m 13 heb ik allemaal al op de basisschool leren maken.
- Bewering B: Sommige vragen zoals in 1 t/m 13 heb ik nooit eerder gehad.
- Bewering C: Ik weet niet meer precies of ik vragen zoals in 1 t/m 13 al eerder heb gehad.

Voorbeelden van antwoorden toets breuken bij de start van de onderbouw van havo en vwo

Opmerkingen voor de docent.

De toets neemt ongeveer een half lesuur in beslag.

De bedoeling van deze toets is na te gaan wat leerlingen na de basisschool beheersen, vooral op het gebied van rekenen met breuken en waar eventuele hiaten zijn. Leerlingen (ook die van havo/vwo waar deze toets voor bestemd is!) komen immers in het VO binnen met een verschillende achtergrond op het gebied van rekenen. Gebruik deze toets als een “diagnostische toets” voor het hoofdstuk breuken en procenten behandeld wordt en maak duidelijk dat het vooral gaat om te zien wat de leerlingen al weten en kunnen.

1. Leerlingen moeten drie goede beschrijvingen geven. Meerdere antwoorden zijn mogelijk. Voorbeelden (mag ook met een tekening):
Deel van een geheel; driekwart van een chocoladereep is over.

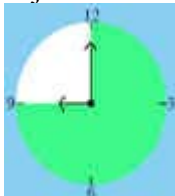


Verhouding; drie van de vier leerlingen hebben een rugzakje.

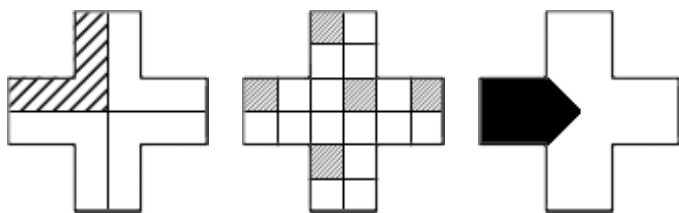


Getal op de getallenlijn; $\frac{3}{4}$ is een getal tussen $\frac{1}{2}$ en 1.

Tijd: Drie kwartier.



2. $\frac{2}{3} \times 1800$
3. Veel verschillende antwoorden mogelijk. Controle of leerling het begrip “teller” kan gebruiken.
4. Hoe voeren leerlingen de bewerkingen uit?
$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$
$$\frac{2}{7} + \frac{2}{3} = \frac{6}{21} + \frac{14}{21} = \frac{20}{21}$$
$$2\frac{3}{5} - 1\frac{3}{4} = 2\frac{12}{20} - 1\frac{15}{20} = 1\frac{32}{20} - 1\frac{15}{20} = \frac{17}{20}$$
5. Verschillende manieren mogelijk. Leerlingen moeten inzien dat een vierde deel van “iets” op verschillende manieren kan worden aangegeven. Voorbeelden:



6. $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$ of $\frac{1}{7}$ is groter dan $\frac{1}{8}$. Het (juiste) antwoord op deze vraag geeft aan of een leerling op een informeel niveau over breuken denkt (“Wanneer je een stuk krijgt van een in zeven stukken verdeelde taart krijg je meer dan wanneer je een achtste krijgt.”) dan wel op een formeel niveau “ $\frac{8}{56}$ is meer dan $\frac{7}{56}$ ” of “De breuk $\frac{1}{7}$ ligt op de getallenlijn dicht bij 1 dan de breuk $\frac{1}{8}$.” Zijn er leerlingen die ‘vertalen’ naar decimale getallen voor ze een uitspraak doen?
7. $\frac{1}{n}$ is groter. Let op dat alleen het geven van een voorbeeld ($\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$) hier niet voldoende is. Van de leerlingen wordt nu een algemene uitspraak verwacht. Het getal $n + 1$ is groter dan n . Wanneer je door een groter positief geheel getal deelt wordt de uitkomst kleiner.
8. (De onderlinge afstanden zoals op de getallenlijn aangegeven zijn gelijk).
Antwoord: $\frac{3}{16}$ of $\frac{6}{32}$.
De vraag is welke breuk precies tussen $\frac{1}{8}$ en $\frac{1}{4}$ ligt. De leerling kan bijvoorbeeld redeneren:
 $\frac{1}{8}$ en $\frac{1}{4}$
 $\frac{1}{8}$ en $\frac{2}{8}$
 $\frac{2}{16}$ en $\frac{4}{16}$. Daar precies tussen ligt $\frac{3}{16}$.
Een leerling die breuken bij alle streepjes probeert te schrijven zal waarschijnlijk als antwoord $\frac{6}{32}$ geven.
9. Veel verschillende antwoorden mogelijk. Controle of leerling het begrip “noemer” kan gebruiken.
10. Uitleggen kan op verschillende manieren. Gebruiken de leerlingen een rechthoekmodel?
11. Zie diagram.

	3	$7\frac{1}{2}$
2	6	15
3	9	$22\frac{1}{2}$

12. $2\frac{1}{2} \times 6\frac{1}{2}$

13. Mill's Lake

gemakkelijk

Van Bear Lake naar Emerald Lake

moeilijk

Sommige leerlingen zullen de uitkomst misschien schatten. Vraag eventueel hoe ze het antwoord gevonden hebben. Leerlingen hebben in het PO vaak niet geleerd hun uitwerkingen op te schrijven.

Mogelijke uitwerking met behulp van verhoudingstabellen:

Mill's Lake

<i>afstand</i> (mijl)	$2\frac{1}{2}$	5	10	
<i>hoogteverschil</i> (voet)	700	1400	2800	

van Bear Lake naar Emerald Lake

<i>afstand</i> (mijl)	$1\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	$10\frac{1}{2}$
<i>hoogteverschil</i> (voet)	605	1210	2420	3630

Bijlage 5

Een algebra-opdracht over en met Excel.

Wiskunde met kleine stapjes

In de wetenschap worden vaak wiskundige modellen gebruikt die de situatie zo goed mogelijk, maar wel vaak wat vereenvoudigd beschrijven. Daarna wordt er geprobeerd te voorspellen wat er in de loop van de tijd verandert, daarom noemen we dit *dynamische modellen*. Voor het doorrekenen wordt een computerprogramma gebruikt, zoals Excel.

Om te bekijken hoe zo'n wiskundig model werkt gebruiken we de volgende situatie.

Wat is er aan de hand? De situatie.

Carlos heeft 900 euro, zijn vriendin Eisa heeft 100 Euro. “Weet je,” zegt Eisa, “het verschil is maar 800 euro. Als we dat verschil delen hebben we precies evenveel!”

1. Hoeveel geld heeft ieder wanneer ze het verschil delen?

“Sorry”, zegt Carlos, “ik vind dat ik jou nu wel heel veel tegelijk geef.” “Je hebt helemaal gelijk,” zegt Eisa. “Eigenlijk ben ik ook best tevreden met een tiende deel van het verschil.”

C: “Schappelijk van je. Doen we meteen.” Zo gezegd, zo gedaan.

Het gaf Carlos een goed gevoel. “Ze vindt me vast heel gul en zoveel ben ik er nou ook weer niet op achteruit gegaan.

De volgende dag komen ze elkaar weer tegen. En weer gaat het gesprek over geld en de ongelijke verdeling ervan in de wereld. “Weet je,” zegt Eisa.....

Het loopt er wéér op uit dat Carlos een tiende van het verschil tussen hun bedragen aan Eisa geeft. En zo gaat dit verhaal door....en door.... en door.... Hoe loopt dat af?

2. Probeer te voorspellen wat er na verloop van tijd zal gebeuren.

Een model doorrekenen met Excel

Excel is een spreadsheet: een computerprogramma dat je kunt gebruiken voor het doorrekenen van modellen. Maar je kunt het ook gebruiken voor het opstellen van rekeningen waar berekeningen in voorkomen (BTW) of om statistische gegevens te verwerken. Deze opdracht gebruiken we om wat meer van Excel te leren.

3. Start het programma Excel en noteer de gegevens in de cellen zoals in het voorbeeld hieronder.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	dag		Carlos		Eisa		Overdracht
4	0		900		100		
5	1						
6	2						
7	3						
8	4						

4. Welke getal staat er in cel A11?
5. Welk bedrag moet er straks in cel E5 komen?

Op een plek in een spreadsheet (een “cel”) kunnen getallen, tekst of formules staan. Omdat we al weten dat we willen doorrekenen voor meer dagen is het handig om in cel G4, onder **overdracht**, geen bedrag in te vullen maar een formule die het bedrag voor ons berekent.

6. Welke berekening moet er in cel G4 uitgevoerd worden?
7. Controleer of de formule $(C4 - E4)/10$ de berekening uitvoert die je bij vraag 6 gevonden hebt. Vul nu die formule in. Onthoud dat een formule in Excel altijd begint met =
 - dubbelklik op G4
 - tik de formule in: $= (C4 - E4)/10$
8. Het bedrag dat in G4 berekend is moet nu van Carlos' bedrag worden afgetrokken. Welke formule komt er dus in C5? Vul die formule in en bevestig met Enter.
9. Het bedrag dat in G4 berekend is moet bij het bedrag van Eisa worden opgeteld. Welke formule komt er dus in E5? Vul die formule in en bevestig met Enter.

In cel G5 moet nu hetzelfde gebeuren als in cel G4, maar nu met vijven in plaats van vieren. Je zou dus weer een formule kunnen invullen.

Maar nu volgt een handige truc in Excel: **kopiëren en aanpassen**. Dat gaat als volgt:

- Enkel-klik op de cel met de formule die je gaat kopiëren en aanpassen, op cel G4 dus.
- Trek de rechteronderkant van het hok op die cel één stapje naar beneden en laat los.
- Controleer nu of in cel G5 de juiste berekening is uitgevoerd.

Als we verder willen doorrekenen, moeten we de hele regel A5 tot en met G5 ook kopiëren.

- Selecteer het stuk regel van A5 tot en met G5 met de muis. Trek weer de rechter onderhoek naar beneden. Je kunt nu zoveel regel maken als je wilt.
- De eerste regels op je scherm moeten er uitzien zoals in het voorbeeld hieronder.
Vraag hulp wanneer dat niet (goed) gelukt is.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	dag		Carlos		Eisa		Overdracht	
4	0		900		100		80	
5	1		820		180		64	
6	2		756		244		51,2	
7	3		704,8		295,2		40,96	
8	4							
9	5							

10. Kijk nu nog eens naar je voorspelling van vraag 2. Maak meer regels op het scherm en stel je voorspelling bij of laat zien dat je voorspelling goed was. Wat gebeurt er op den duur?
11. Onderzoek wat er gebeurt wanneer de bedragen waarmee Carlos en Eisa begonnen veranderen. Kies bijvoorbeeld eens 9000 en 1000 euro, 1100 en 200, 1600 en 200. Probeer eerst te voorspellen wat er zal gebeuren en reken daarna je model door.

In dit verhaal werd bij iedere stap het *verschil* door 10 gedeeld. Maar je kunt het ook zo bekijken. Elke dag gebeuren er twee dingen tegelijk:

Carlos geeft $\frac{1}{10}$ van zijn hele bedrag aan Eisa.

Eisa geeft $\frac{1}{10}$ van haar hele bedrag aan Carlos.

12. Laat met een voorbeeld zien dat dit hetzelfde resultaat oplevert.
13. Begin weer met Carlos 900 euro en Eisa 100 euro. Verander alleen de formules bij G zodat Carlos $\frac{1}{10}$ van zijn hele bedrag aan Eisa geeft en zij aan Carlos $\frac{1}{10}$ van haar hele bedrag geeft.

Nu veranderen we de hoeveelheden die ieder geeft.

Carlos geeft $\frac{1}{20}$ van zijn hele bedrag aan Eisa.

Eisa geeft $\frac{1}{10}$ van haar hele bedrag aan Carlos.

14. Pas de formules in G4 aan en kopieer ze naar beneden. Maak maar een heleboel regels. Wat gebeurt er?

Antwoorden algebra opdracht met Excel

Opmerkingen voor de docent.

Dit is een bewerking van een opdracht die Aad Goddijn maakte voor leerlingen van het Junior College in Utrecht. Daar dienen de ervaringen met Excel om een modellering van een scheikundig twee-fasen-evenwicht te bekijken. De opdracht staat in een scheikunde-wiskunde module, een mooi voorbeeld van vakkenintegratie voor de bovenbouw. Wanneer de opdracht al in de onderbouw ingeleid wordt kan hierop in de bovenbouw teruggekomen worden. Dan wordt voor de leerlingen ook beter duidelijk hoe wiskunde onder andere gebruikt kan worden als steunvak voor andere vakken. Daarnaast wordt ervaring opgedaan in het gebruiken van het computerprogramma Excel.

1. Carlos: $900 - (800 : 2) = 500$
Eisa: $100 + (800 : 2) = 500$
2. Carlos: $900 - (800 : 10) = 820$
Eisa: $100 + (800 : 10) = 180$ nieuwe verschil is $820 - 180 = 640$
Volgende dag
Carlos: $820 - (640 : 10) = 756$
Eisa: $180 + (640 : 10) = 244$ nieuwe verschil is $756 - 244 = 512$
Het bedrag van Carlos wordt steeds een beetje minder kleiner en het bedrag van Eisa wordt steeds een beetje minder groter. Misschien krijgen ze uiteindelijk op deze manier toch evenveel?
3. Antwoord staat in de tekst onder vraag 3.
4. In cel A11 staat een 7, of dag 7.
5. In cel E5 komt het startbedrag van Eisa, plus het bedrag dat ze van Carlos krijgt (de "overdracht"), dus in E5 komt $100 + 80 = 180$
6. In cel G4 wordt het verschil tussen C4 en E4 (de startbedragen van Carlos en Eisa) berekend en daar een tiende deel van.
7. De formule $(C4 - E4)/10$ (let op de kaakjes!) voert de berekening uit zoals in het antwoord van vraag 6 staat.
8. In C5 wordt ingetypt: $= C4 - G4$
9. In E5 wordt ingetypt: $= E4 + G4$
10. Hieronder staat wat er gebeurt op dag 35 tot en met 40.

39	35	500,1623	499,8377	0,032452
40	36	500,1298	499,8702	0,025961
41	37	500,1038	499,8962	0,020769
42	38	500,0831	499,9169	0,016615
43	39	500,0665	499,9335	0,013292
44	40	500,0532	499,9468	0,010634
45				

Zoals je ziet verandert er niet veel meer en hebben Carlos en Eisa vrijwel evenveel geld. De verwachting is dat ze op den duur allebei evenveel hebben.

11. Als Carlos 9000 euro heeft en Eisa 1000 krijgen ze op den duur ook evenveel maar het duurt wat langer dan bij 900 en 100 euro.
Als je begint met andere bedragen krijgen ze op den duur het gemiddelde van die twee bedragen.

12. Je mag een voorbeeld met getallen gebruiken maar dat het altijd geldt kun je laten zien met de formules.

Carlos en Eisa delen een tiende deel van het verschil tussen hun bedragen.

Een tiende van het verschil staat in G4: $(C4 - E4)/10$

Carlos krijgt: $C4 - (C4 - E4)/10 = C4 - C4/10 + E4/10$

Eisa krijgt: $E4 + (C4 - E4)/10 = E4 + C4/10 - E4/10$

Aan de uitgeschreven formules kun je zien dat Carlos een tiende van zijn bedrag 'verliest' (aan Eisa geeft) en er een tiende van Eisa's bedrag bij krijgt. Eisa verliest een tiende van haar bedrag (dat geeft ze aan Carlos) en krijgt er een tiende van Carlos' bedrag bij. Dat is precies wat er in de tekst boven vraag 12 staat.

13. De formule bij G4 moet nu zo worden ingetypt: $= (C4/10) - (E4/10)$

14. Hieronder staan enkele regels van het spread sheet. Carlos en Eisa krijgen nu niet evenveel maar de verhouding is 2 : 1.

dag	Carlos	Eisa	Overdracht
0	900	100	35
1	865	135	29,75
2	835,25	164,75	25,2875
3	809,9625	190,0375	21,49438
4	788,4681	211,5319	18,27022
5	770,1979	229,8021	15,52969
6	754,6682	245,3318	13,20023
7	741,468	258,532	11,2202
8	730,2478	269,7522	9,537168
9	720,7106	279,2894	8,106593
10	712,604	287,396	6,890604
11	705,7134	294,2866	5,857014
12	699,8564	300,1436	4,978461
13	694,8779	305,1221	4,231692
14	690,6463	309,3537	3,596938
15	687,0493	312,9507	3,057398
16	683,9919	316,0081	2,598788
17	681,3931	318,6069	2,20897
18	679,1842	320,8158	1,877624
19	677,3065	322,6935	1,595981
20	675,7106	324,2894	1,356584
21	674,354	325,646	1,153096
22	673,2009	326,7991	0,980132
23	672,2207	327,7793	0,833112
24	671,3876	328,6124	0,708145
25	670,6795	329,3205	0,601923
26	670,0776	329,9224	0,511635
27	669,5659	330,4341	0,43489

Bijlage 6

Voorbeeldtoets redeneren over formules, klas 2 havo/vwo

1. Anneke⁴ wil een hok maken voor haar konijnen. De konijnen hebben genoeg ruimte als de oppervlakte van de vloer $3,6 \text{ m}^2$ is. Anneke heeft verschillende mogelijkheden voor lengte l en breedte b van de vloer.
- a. Als Anneke de lengte groter maakt, wat moet ze dan met de breedte doen? De oppervlakte blijft natuurlijk gelijk.
- b. Welke van de formules hieronder kun je gebruiken om het verband tussen de lengte (l) en breedte (b) van de vloer te beschrijven? Schrijf alle mogelijkheden op en leg uit waarom de formule juist is.

$$b = \frac{3,6}{l}$$

$$l \cdot b = 3,6$$

$$l = \frac{3,6}{b}$$

$$b = 3,6 \cdot l$$

2. Jochem begint een bedrijfje dat mensen helpt die problemen hebben met hun computer. Hij heeft een website gemaakt met deze tekst:

Hulp nodig bij uw computerproblemen? Wij komen bij u thuis!
Binnen de provincie Utrecht betaalt u € 15,- voorrijkosten en € 37,50 per half uur.
Bel direct voor een afspraak



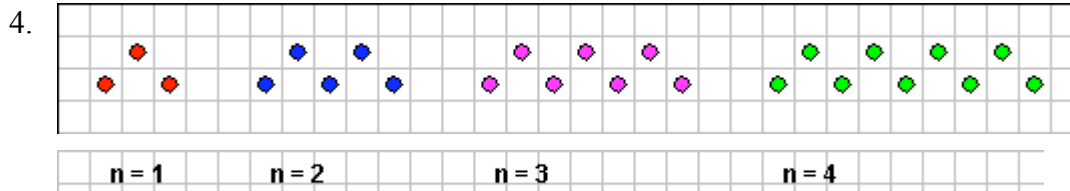
- a. Maak een formule die het verband aangeeft tussen de *totale kosten* (in euro's) per bezoek en de *tijd* (in halve uren).

Stel je voor dat je zelf ook zo'n bedrijfje wilt beginnen. Je wilt goedkoper zijn dan Jochem en je denkt dat de meeste klussen niet meer dan twee uur zullen duren.

- b. Maak een formule voor je eigen bedrijf. Laat zien dat jouw bedrijf inderdaad goedkoper is dan dat van Jochem.

⁴ Bewerking van een opgave uit materiaal van Salvo-project

3. Natascha heeft een watertank gemaakt met een slang eraan om haar balkonplanten water te geven als ze op reis is. In de tank gaat 18 liter water. Per dag loopt er 0,4 liter water uit de tank op de planten.
- Er is een verband tussen het *aantal liters* water in de tank en de *tijd* (in dagen). Maak een formule die dit verband beschrijft.
 - Als Natascha op reis gaat zit er 15 liter water in de tank. Pas de formule aan.
 - De planten krijgen niet genoeg water. Het water moet driemaal zo snel uit de tank lopen. Pas de formule aan.



- Laat zien (bijvoorbeeld in een tekening) dat elk van deze drie formules bij dit stippenpatroon past. In elke formule is s het aantal stippen en n het patroonnummer

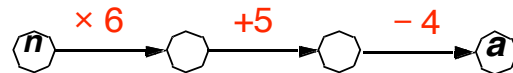
$$s = (n + 1) + n$$

$$s = 3 + (n - 1) \times 2$$

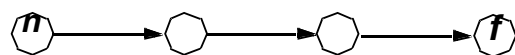
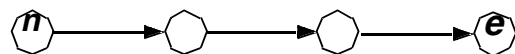
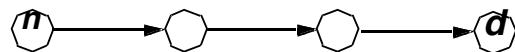
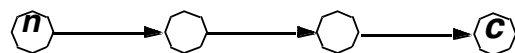
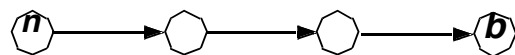
$$s = 3n - (n - 1)$$

- Schrijf alle drie de formules zo kort mogelijk.
- Laat zien hoe je de korte formule ook in de plaatjes van het stippenpatroon kunt zien.

5.



- Maak een formule bij deze pijlenketting: $a = \dots\dots\dots$
- Je kunt de bewerkingen $\times 6$, $+5$ en -4 ook in een andere volgorde zetten. Zo krijg je 5 nieuwe pijlenkettingen, zie de tekening hierna.



- c. Maak bij elk van de vijf pijlenkettingen een formule.

$b = \dots\dots\dots$

$c = \dots\dots\dots$

$d = \dots\dots\dots$

$e = \dots\dots\dots$

$f = \dots\dots\dots$

- d. Kies twee van de formules hierboven en schrijf die op een andere manier (anders, langer of korter, ... dat mag je zelf kiezen.)

Mogelijke uitwerkingen voorbeeldtoets redeneren over formules, klas 2 havo/vwo

Opmerkingen voor de docent.

De voorbeeldtoets voor eind klas 2 havo/vwo gaat over het omgaan met en redeneren over formules. De vragen zijn uitdrukkelijk bedoeld als voorbeelden die door andere vervangen kunnen worden. Gebruik deze toets diagnostisch, om eventuele hiaten en misconcepties al aan het begin van het schooljaar op te sporen.

- 1a. Als de lengte groter wordt moet de breedte kleiner worden.
Extra vraag ter bespreking: is er een onder/bovengrens?
Antwoord: vanuit wiskunde ja, $\text{lengte/breedte} > 0$; vanuit context speelt de vorm van het hok ook een rol, heel lang en te smal is mogelijk niet fijn voor het konijn.
- b. Alle formules behalve de laatste zijn goed, de eerste drie formules zijn equivalent.

2. a. $\text{totale kosten} = 15 + 37,50 \times \text{halve uren}$
 $k = 15 + 37,5 \times h$ met k de totale kosten van de klus in euro's en h het aantal halve uren dat uitvoering van het werk duurde.
- b. Er zijn veel mogelijke antwoorden. Je moet laten zien of jouw formule echt tot minder *totale kosten* leidt. Een voorbeeld:
 $\text{totale kosten} = 15 + 37,50 \times \text{halve uren}$
tabel

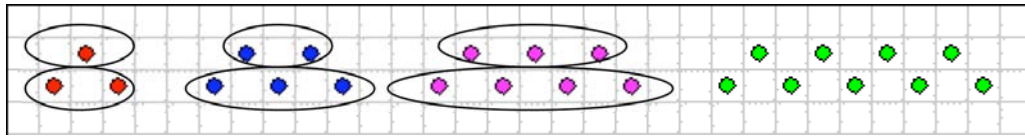
aantal halve uren	totale kosten bij HELP!	totale kosten mijn formule
0	15	17,50
1	52,50	52,50
2	90	87,50
3	127,50	122,50
4	165	157,50
10	390	367,50

- 3a. Voorbeelden van formules:
 $w = 18 - 0,4 \times d$ met w is aantal liter water in de tank en d het aantal dagen.
 $\text{aantal liters} = 15 - 0,4 \times \text{aantal dagen}$
- b. $w = 15 - 0,4 \times d$
- c. $w = 18 - 1,2 \times d$

4a.

$$s = (n + 1) + n$$

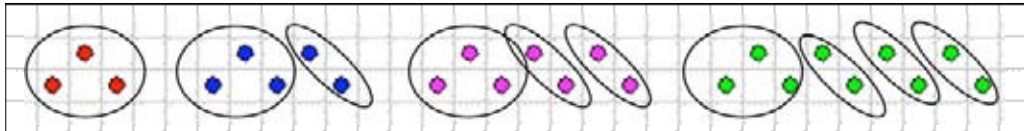
tekening:



Uitleg: onderste rij $n + 1$ stippen, bovenste rij n stippen

$$s = 3 + (n - 1) \times 2$$

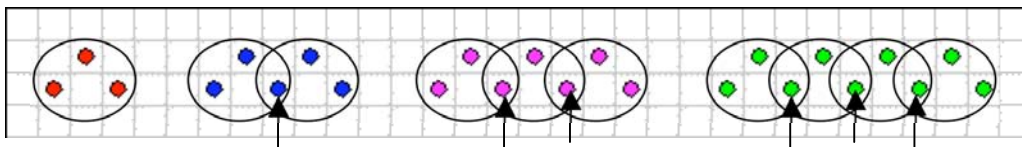
Tekening:



Uitleg: drie stippen in een driehoekje plus 'eentje-minder-dan-n' schuine rijtjes van 2 stippen.

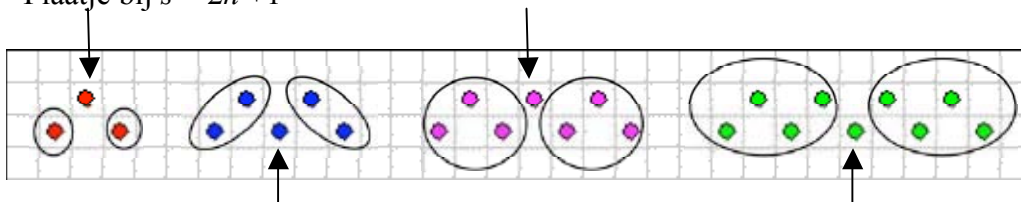
$$s = 3n - (n - 1)$$

Tekening:



Uitleg: n keer een driehoekje (dus n keer 3 stippen), min de dubbel getelde stippen (dat zijn er $n-1$).

- b. Alle formules kunnen worden vereenvoudigd tot $s = 2n + 1$
 Dat algebraïsch doen doet een beroep op verschillende vaardigheden: gelijksoortige termen samennemen, verwisselen van termen (commutatieve eigenschap), haakjes uitwerken, correct omgaan met min-tekens en haakjes.
- c. Plaatje bij $s = 2n + 1$



5 a. $a = n \times 6 + 5 - 4$ of $a = 6n + 1$

b. Pijlenkettingen (vijf volgordes van de bewerkingen)

$$\times 6 \quad - 4 \quad + 5$$

$$+ 5 \quad \times 6 \quad - 4$$

$$+ 5 \quad - 4 \quad \times 6$$

$$- 4 \quad \times 6 \quad + 5$$

$$- 4 \quad + 5 \quad \times 6$$

Bespreek zonodig de manier om systematisch alle mogelijkheden te noteren.

c. Formules (volgorde van formules bij leerlingen kan anders zijn).
Bespreek het zetten van haakjes! En de volgorde van uitwerken van de uitdrukkingen.

$b = n \times 6 - 4 + 5$	of	$b = 6n + 1$	
$c = (n + 5) \times 6 - 4$	of	$c = 6n + 30 - 4$	$c = 6n + 26$
$d = (n + 5 - 4) \times 6$	of	$d = (n + 1) \times 6$	$d = 6n + 6$
$e = (n - 4) \times 6 + 5$	of	$e = 6n - 24 + 5$	$e = 6n - 19$
$f = (n - 4 + 5) \times 6$	of	$f = (n + 1) \times 6$	$d = 6n + 6$

Extra ter bespreking: waarom zijn de formules voor a en b hetzelfde en voor d en f ook?
Waarom staat er in alle formules wel $6n$, maar niet steeds 'hetzelfde getal'?

Bijlage 7

Vragen over algebraïsche vaardigheden aan het eind van klas 3 havo/vwo

Deze vragen kunnen gebruikt worden om aan het eind van klas 3 havo/vwo na te gaan in hoeverre leerlingen in staat zijn te redeneren over formules. De vragen zijn diagnostisch en kunnen bijvoorbeeld gevolgd worden door een klassengesprek.

De vragen zijn als toets afgenomen in een aantal 3 havo en 3 vwo klassen op SG Oscar Romero over de resultaten van de leerlingen wordt apart gerapporteerd.

Aan de leerlingen

Enschede. 13 april 2007

Beste leerling:

Deze toets is gemaakt in een project, waarin gezocht wordt naar mogelijkheden om leerlingen in het havo en vwo beter en begrijpelijker rekenen en algebra te leren.

Met deze toets willen wij leraren een hulpmiddel geven om er achter komen of hun leerlingen voldoende van rekenen en algebra hebben geleerd om verder te kunnen met wiskunde in de vierde klas.

Dit is de allereerste test waarin wij na willen gaan of de opgaven in de toets en de antwoorden die jullie daarbij geven, ook de gewenste informatie opleveren.

Instructie:

- Als je een opgave niet zonder meer kunt maken, of je onzeker voelt of je het wel goed doet, mag je je boek of schrift erbij nemen.
- Geef niet alleen het antwoord maar geef ook aan hoe je aan het antwoord gekomen bent. (Zoals altijd bij wiskunde.)
- Geef ook aan of je je boek of schrift gebruikt hebt. Geef dan ook aan of dat was ter controle of omdat je er anders niet uit kwam.
- Graag je naam op het antwoordvel, maar als je dat echt niet wilt is het niet verplicht.
- Wel weten we heel graag of je in 3 havo, 3vwo, of 3 gym zit.
- Ook weten wij graag welk profiel je volgend jaar kiest, of wilt kiezen.

Alvast onze hartelijke dank voor jullie medewerking.

Het ReAL-project team (Rekenen en Algebra Leerlijnen),

De opgaven

1. De grafiek die bij de vergelijking $y = (x - 2)^2 + 3$ hoort is een parabool. Hoe kun je dat aan de vergelijking zien?
2. De parabool uit vraag 1 heeft geen snijpunten met de x -as. Hoe kun je dat zeker weten zonder de grafiek te tekenen?
3. Verander de vergelijking van vraag 1 zodat de grafiek twee snijpunten met de x -as heeft.
4. Verander de vergelijking uit vraag 1 zodat de grafiek precies één snijpunt met de x -as heeft.
5. Hester beweert dat iedere parabool een snijpunt heeft met de y -as. Heeft ze gelijk? Leg je antwoord uit.
6. De parabool uit vraag 1 wordt drie plaatsen naar rechts en twee plaatsen naar boven geschoven in het assenstelsel. Hoe ziet de nieuwe vergelijking eruit?
7. Schrijf het antwoord op vraag 6 in een vorm waarbij geen haakjes nodig zijn.
8. Een andere grafiek heeft als snijpunten met de x -as alleen de punten $(1, 0)$; $(2, 0)$ en $(3, 0)$. Je weet dus zeker dat de grafiek geen parabool is. Waarom? Je mag een tekening maken om je antwoord toe te lichten.
9. Bedenk een functievoorschrift of vergelijking die past bij de grafiek uit vraag 8.
10. Stel je voor dat iedereen in je klas een goed antwoord heeft gevonden op vraag 9. Zijn al die antwoorden gelijk? Als je ja zegt, leg uit waarom je dat vindt. Als je nee zegt, geef dan een voorbeeld van een antwoord dat niet gelijk is aan dat van jou.

11. Hoort bij deze drie vergelijkingen dezelfde grafiek?

Leg uit waarom wel of waarom niet.

$$y = 2x^2 - 4x + 2$$

$$y = 2(x-1)^2$$

$$y = 2(x^2 - 1)$$

12. Gerben beweert dat de grafiek die hoort bij $g(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$ een hyperbool is, omdat het een gebroken functie is. Kim denkt dat het een rechte lijn is. Niels denkt ook dat het een rechte lijn is maar dan een lijn waaraan één punt ontbreekt. Wie heeft er gelijk en waarom?
13. Hieronder staat een tabel die een leerling gemaakt heeft bij een functievoorschrift. Het patroon wordt naar links en naar rechts op dezelfde manier voortgezet. Hoe weet je zonder een tekening te maken hoe de grafiek eruit ziet?

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	22	15,5	10	5,5	2	-0,5	-2	-2,5

14. Gegeven is het functievoorschrift $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$
- a. Hoort bij het functievoorschrift $g(x) = \frac{3+x}{3x}$ dezelfde grafiek als bij $f(x)$? Leg je antwoord uit.
- b. Schrijf een functievoorschrift of een vergelijking op waarbij dezelfde grafiek hoort als bij het gegeven voorschrift.

Voorbeelden van antwoorden

1. Bij een 2^e graads vergelijking hoort een parabool als grafiek. Je kunt zien dat $y = (x - 2)^2 + 3$ van graad twee is wanneer je de haakjes wegwerkt,
 $y = (x - 2)^2 + 3 = x^2 - 4x + 4 + 3 = x^2 - 4x + 7$
De hoogste macht van x die voorkomt is een tweede macht.
2. Kijk naar $y = (x - 2)^2 + 3$ Het eerste stuk van het deel rechts van het $=$ teken is een kwadraat, dus hoogstens nul maar niet negatief. Daar komt nog 3 bij dus y is altijd positief, wat je ook voor x invult. De parabool is verder een dalparabool want het getal voor x^2 (bij $1 \times x^2$ of $1x^2$ laat je de 1 weg) is positief. Dan kunnen er geen snijpunten met de x -as zijn.
3. Er zijn zeer veel antwoorden mogelijk. Je moet de grafiek in gedachten naar beneden schuiven totdat $(x - 2)^2 + 3$ ook negatieve antwoorden op kan leveren. Omdat het eerste deel, $(x - 2)^2$, nul is of groter dan nul, kan dat alleen door in plaats van $+3$ een negatieve term in te vullen. Een voorbeeld is $y = (x - 2)^2 - 5$
4. Nu moet er uit de parabool uit vraag 1 precies op de x -as terecht komen. Dat kan door 3 naar beneden te schuiven. Er is slechts één goed antwoord mogelijk, $y = (x - 2)^2$
5. Ja, Hester heeft gelijk. Om het snijpunt met de y -as te vinden moet je $x = 0$ invullen in de vergelijking (of het functievoorschrift) van de parabool. Dat kan altijd. In het voorbeeld uit vraag 1 is het snijpunt met de y -as het punt $(0, 7)$.
6. De top van de parabool is eerst bij $x = 2$. Kijk maar naar het antwoord op vraag 4. Wanneer de parabool drie plaatsen naar rechts schuift, komt de top bij $x = 5$. De vergelijking is dan $y = (x - 5)^2 + 3$. Nu nog twee plaatsen naar boven (y wordt steeds 2 groter). De vergelijking wordt $y = (x - 5)^2 + 5$
7. Vergelijkingen of functievoorschriften die er niet hetzelfde uitzien maar die dezelfde grafiek beschrijven heten *equivalent*. Wanneer je de vorm $y = (x - 5)^2 + 5$ in een vorm zonder haakjes schrijft krijg je een *equivalente* vergelijking.
 $y = (x - 5)^2 + 5 = x^2 - 10x + 25 + 5 = x^2 - 10x + 30$
8. Een parabool kan hoogstens twee snijpunten met de x -as hebben en hier zijn er drie. Maak eventueel een schets.

9. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$. Controleer dat de vergelijking $y = 0$, dus $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ als oplossingen $x = 1$; $x = 2$ en $x = 3$ heeft.

10. De eenvoudigste manier om de vergelijking op te schrijven bij vraag 8 is als $y = (x-1)(x-2)(x-3)$. Dan kun je direct de snijpunten met de x -as aflezen. Maar andere vormen zijn zeker mogelijk, werk de haakjes geheel of gedeeltelijk weg. Voorbeelden $y = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$ of $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (Zie de berekening hieronder).

$$\begin{array}{r} x^2 - 5x + 6 \\ \quad \times \\ \hline x^3 - 5x^2 + 6x \\ \quad - x^2 + 5x - 6 \\ \hline x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \end{array}$$

11. Schrijf de vergelijkingen in dezelfde vorm om ze te kunnen vergelijken.

$$y = 2x^2 - 4x + 2$$

$$y = 2(x-1)^2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2x^2 - 4x + 2$$

$$y = 2(x^2 - 1) = 2x^2 - 2$$

De eerste twee vergelijkingen horen bij dezelfde grafiek, de derde is anders. Alle drie zijn het parabolen.

12. De functie $g(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$ heeft geen betekenis als $x = -5$, de noemer mag immers niet

gelijk aan nul worden (je kunt niet door nul delen). De vorm $\frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$ kun je schrijven

als $\frac{(x+5)(x-2)}{x+5}$. Zolang x maar ongelijk is aan -5 kun je teller en noemer door dezelfde

factor delen, namelijk door de factor $x + 5$. Het functievoorschrift

$g(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$ kun je schrijven als $g(x) = x - 2$ behalve voor $x = -5$. Niels heeft dus gelijk,

de grafiek is een rechte lijn maar het punt voor $x = -5$ ontbreekt.

13. De waarden voor x in de bovenste rij van de tabel worden steeds één groter. Kijk hoe de waarden voor y in de onderste rij veranderen.

y	22		15,5		10		5,5		2		-0,5		-2		-2,5	
		6,5		5,5		4,5		3,5		2,5		1,5		0,5		eerste verschil
			1		1		1		1		1		1		1	tweede verschil

Omdat de rij van de tweede verschillen steeds gelijk is aan 1 weet je dat het hier gaat om een tweede graads verband. De grafiek die erbij hoort is een parabool.

14. a. Nee, bij $g(x)$ hoort niet dezelfde grafiek als bij $f(x)$. Vul maar een waarde voor x in, bijvoorbeeld $x = 3$.

$$f(3) = \frac{3}{3} + \frac{3}{3} = 1 + 1 = 2$$

$$g(3) = \frac{3+3}{3 \times 3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

b. Bijvoorbeeld $h(x) = \frac{9}{3x} + \frac{x^2}{3x} = \frac{9+x^2}{3x}$

Bijlage 8

Voorbeeldopgaven bij de aanbevelingen voor het PO

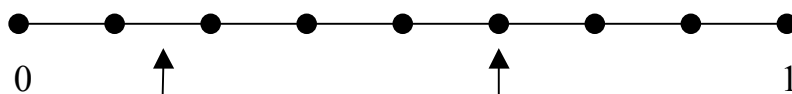
Enkele voorbeelden die bij de ‘Aanbevelingen’ gebruikt kunnen worden zijn hier opgenomen.

De getallenlijn.

Een activiteit voor in de klas:

Hang een touw op ooghoogte (of leg het touw op de grond). In plaats van een touw kan er ook een krijtlijn op het schoolplein getrokken worden. De leerkracht heeft een aantal kaartjes gemaakt met getallen erop, gehele getallen, breuken en gemengde getallen (een geheel getal plus een breuk, zoals bijvoorbeeld $4\frac{1}{5}$). Hang met een knipper (gebruik een pijl bij de krijtlijn) enkele cijfers op de goede plaats, bijvoorbeeld 0, 1 en 4. Laat leerlingen kaartjes met andere getallen op de juiste plaats hangen. Vraag ook welk getal er op een leeg kaartje geschreven moet worden dat door de leerkracht is opgehangen.

Voor veel leerlingen is het belangrijk om de kaartjes ook letterlijk op te hangen of op de goede plaats te gaan staan bij een op de vloer getekende getallenlijn. Minder concreet is de volgende opdracht, nu met een getekende getallenlijn.



Mogelijke vragen:

1. Welke breuken kunnen er op de plaats van de pijlen staan?
2. Frank en Susan hebben bij de tweede pijl niet hetzelfde antwoord. Kunnen de twee antwoorden toch allebei goed zijn? Als je nee zegt, leg dan uit waarom niet. Als je ja zegt, geef dan een voorbeeld van twee goed antwoorden.
3. Geef met een pijl aan waar de breuken op de getallenlijn horen: $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{16}$
4. Welke breuk komt precies in het midden tussen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$ op de getallenlijn?
5. Welke breuk ligt dicht bij 0, de breuk $\frac{1}{32}$ of de breuk $\frac{3}{64}$? Waarom?

De verhoudingstabel

Het gebruik van een verhoudingstabel kan helpen om je berekeningen geordend en overzichtelijk te houden. Zie bijvoorbeeld TAL-website: <http://www.fi.uu.nl/talbovenbouw/welcome.html> (ga naar voorbeeldlessen) voor het boek *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen*.

Bedenk dat er ook tegenvoorbeelden gegeven moeten worden.

Dit is géén verhoudingstabel. Waarom niet?

<i>afstand</i> (in mijlen)	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	10	20
<i>prijs</i> (in dollars)	10	10.50	11.00	12.00	30.00	50,00

In deze verhoudingstabel is een fout gemaakt. Welke?

<i>afstand</i> (in mijlen)	40	80	160	10
<i>tijd</i> (in uren)	1	2	4	$\frac{1}{4}$

Een voorbeeld van een (realistische) opgave voor leerlingen uit groep 8. Naar een idee van Marjolein Kool.



Op de etiketten van flessen sap en limonade staat allerlei informatie. De etiketten op sapflesjes zijn heel geschikt voor het maken van allerlei opdrachten over verhoudingen. Hierbij kan bijvoorbeeld het werken met een verhoudingstabel aan de orde komen. Ook kan het verband tussen verhoudingen en procenten op een natuurlijke manier besproken worden. De opdracht kan tenslotte aanleiding zijn om te bespreken hoeveel milligram er in een gram gaan.

Enkele gegevens van de etiketten op twee flesjes vruchtensap zijn hieronder overgenomen:

Versgeperst sinaasappel-kiwisap

500 ml

Ingrediënten: 80% sinaasappelsap,
20% kiwisap

Voedingswaarde per 100 ml

Energie.....165KJ (39 kcal)

Eiwit.....1,0 g

Koolhydraten.....8,5 g

waarvan suikers.....8,5 g

Vet.....0 g

Voedingsvezel.....2,0 g

Percentage van de aanbevolen dagelijkse hoeveelheid:

Vitamine C 78%.....47 mg

Een glas versgeperst sinaasappel-kiwisap (150 ml)
bevat 59 kcal en 71 mg vitamine C

Versgeperst sinaasappel-mango-passievruchtensap

500 ml

Ingrediënten: 50% sinaasappelsap, 43% mangomoes,
7% passievruchtensap

Voedingswaarde per 100 ml

Energie.....220KJ (52 kcal)

Eiwit.....0,9 g

Koolhydraten.....12 g

waarvan suikers.....12 g

Vet.....0 g

Voedingsvezel.....3,5 g

Percentage van de aanbevolen dagelijkse hoeveelheid:

Vitamine C 60%.....36 mg

Een glas versgeperst sinaasappel-mangosap (150 ml)
bevat 78 kcal en 54 mg vitamine C

Mogelijke vragen

1. Hoeveel mg is de aanbevolen dagelijkse hoeveelheid vitamine C?
2. Is die aanbevolen hoeveelheid vitamine C op beide etiketten gelijk?
3. Bedenk zelf een vraag die je kunt beantwoorden door de etiketten te bekijken.

Antwoord vraag a.

Met behulp van etiket 2 en een verhoudingstabel. (Voor etiket 2 wordt gekozen omdat daar de getallen “mooier” lijken).

Leerlingen moeten bedenken dat de aanbevolen dagelijkse hoeveelheid vitamine 100% is.

Aantal % vitamine C	60	30	10	100
Aantal milligram	36	18	6	60

De aanbevolen hoeveelheid vitamine C is 60 mg per dag.

Antwoord vraag b.

Er zijn verschillende strategieën mogelijk. Gebruik bijvoorbeeld een nieuwe verhoudingstabel voor etiket 1 en bereken opnieuw de aanbevolen hoeveelheid per dag. Omdat het lastige getallen zijn, werken we eerst met benaderde getallen.

Aantal % vitamine C	78	Ongeveer 80	40	10	100
Aantal milligram	47	Ongeveer 48	24	6	60

Je weet nu dat de aanbevolen hoeveelheid per dag op allebei de etiketten aardig gelijk is. Nu kun je nog nauwkeuriger gaan rekenen om het antwoord precies te vinden. Mogen de leerlingen daarbij een rekenmachine gebruiken?

Aantal % vitamine C	78	39	390	10	100
Aantal milligram	47	23,5	235	6,025	60,3

Probleem Oplossen

Bloed

(Aangepaste opgave uit de “Oefenbundel 1993”, Truus Dekker en George Schoemaker)

Je mag bij deze opgave een rekenmachine gebruiken.

Om ongeveer te berekenen hoeveel bloed je lichaam bevat wordt wel de volgende vuistregel gebruikt:

$$\text{hoeveelheid bloed (in liters)} = \frac{1}{13} \times \text{gewicht (in kg)}$$

1. De moeder van Sanne weegt 65 kg. Hoeveel liter bloed heeft ze volgens de vuistregel?
2. Hoeveel kg weeg jij? Hoeveel liter bloed heb je dan volgens de vuistregel?

Marco weegt 70 kg. Hij zegt: “Dan heb ik dus 5,385 liter bloed.” Volgens de juf van Marco is het in dit geval niet goed om drie cijfers achter de komma op te schrijven.

3. Leg uit waarom dat niet goed is.
4. Het zusje van Marco is nog geen jaar oud. Ze weegt 6,5 kg. Hoeveel bloed zou ze volgens de vuistregel hebben? Wat is je commentaar?

De vuistregel kun je eigenlijk alleen gebruiken voor volwassenen met een normaal gewicht.

5. Bedenk zelf een voorbeeld van een volwassene voor wie je de vuistregel niet kunt gebruiken. Gebruik de vuistregel om te laten zien dat je voorbeeld goed is gekozen.

Mogelijke antwoorden

1. $65 : 13 = 5$ De moeder van Sanne heeft ongeveer 5 liter bloed.
2. Deel je gewicht (in kg) door 13 en rond het antwoord af.
3. Een vuistregel geeft niet zo’n nauwkeurige uitkomst, het is meer een schatting. Marco kan beter zeggen dat hij ongeveer $5\frac{1}{2}$ liter bloed heeft of ongeveer 5 liter.
4. Volgens de vuistregel zou Marco’s zusje 0,5 liter bloed hebben (kijk ook naar de uitkomst van vraag 1). Dat is wel erg weinig.
5. Iemand die bijvoorbeeld 130 kg weegt zou volgens de vuistregel wel 10 liter bloed hebben. Dat is wel heel veel. Een gewicht van 130 kg is geen ‘normaal’ gewicht voor een volwassene.

Tegelactie

(Aangepaste opgave uit Examenbundel 1990, Truus Dekker, Nanda Querelle)

Je mag een rekenmachine gebruiken.

In een krant staat deze advertentie:

TEGELACTIE



Nu voordelig tegels kopen bij het **TEGELPALEIS!**

Maximaal 25% voordeel

Bij aankoop van tegels voor 1 m^2 oppervlak krijgt u 1 % korting

Bij 2 m^2 krijgt u 2 % korting, enzovoort

Dus..... 15 m^2 gekocht, dan 15% korting!

Uw voordeel maximaal 25%, we ronden kortingen af op hele procenten

1. Hoeveel procent korting krijgt iemand die voor $2,7 \text{ m}^2$ aan tegels koopt bij het Tegelpaleis?
2. En hoeveel korting als je voor 30 m^2 tegels koopt?
3. Waarom moet er in de advertentie wel een maximale korting genoemd worden?

Mohammed gaat zijn badkamer vernieuwen. De afmetingen zijn:

lengte $2,75 \text{ m}$

breedte $2,20 \text{ m}$

hoogte $2,40 \text{ m}$

deur $2,10 \times 1 \text{ m}$

Mohammed gaat alle muren van de badkamer helemaal van tegels voorzien. De deur natuurlijk niet. De vloer en het plafond ook niet.

4. Hoeveel korting kan Mohammed bij het Tegelpaleis krijgen?

Mogelijke antwoorden

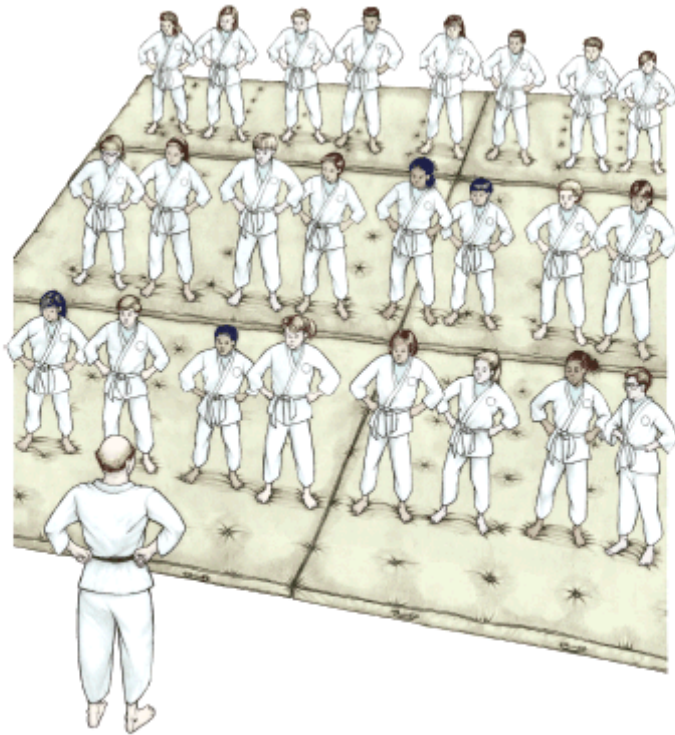
1. 3% (korting)
2. 25% korting want dat is het maximum
3. Als er geen maximum was zou je 100 m^2 tegels kunnen kopen en 100% korting krijgen. Dan hoefde je dus niets te betalen.
4. 2 muren van $2,75 \times 2,40$, totaal $13,2 \text{ m}^2$
2 muren van $2,20 \times 2,40$, totaal $10,56 \text{ m}^2$ +
 $23,76 \text{ m}^2$

Voor de deur gaat er $2,10 \text{ m}^2$ af dus totaal is er voor $21,66 \text{ m}^2$ aan tegels nodig.
Mohammed krijgt 22% korting.

Algebra

Een voorbeeld (vertaald en aangepast) van het door het FI ontwikkelde materiaal voor Amerikaanse Middle Schools. Bestemd voor leerlingen uit groep 5 of 6.

Patronen en symbolen

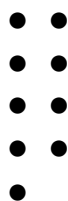
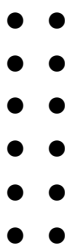


Dit is de klas van meester Miako, die karateles geeft.

1. Hoeveel leerlingen zitten er in de klas van meester Miako?
2. Op dinsdag geeft meester Miako les aan een groep van 37 leerlingen.
Welk probleem heeft hij?
3. Meester Miako moet woensdag twee groepen combineren, eentje met 19 leerlingen en eentje met 23 leerlingen. Gaat dat goed?

De vragen hiervoor hebben te maken met *even* en *oneven* getallen. Je kunt dat laten zien met bolletjes.

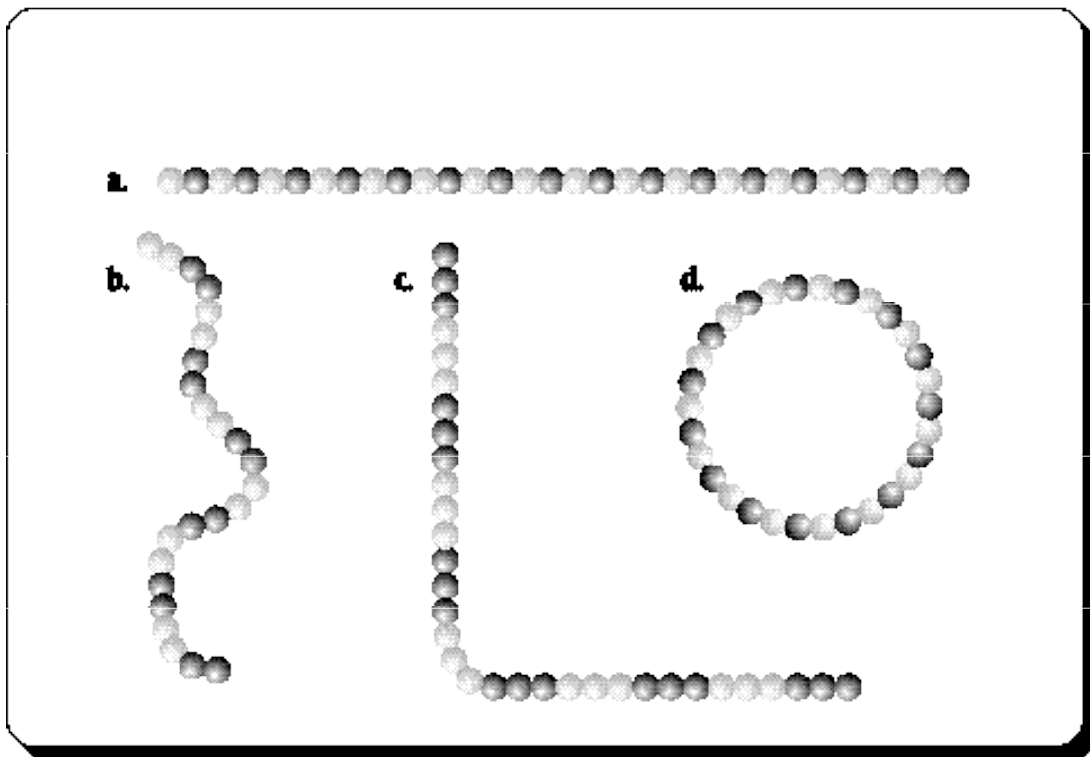
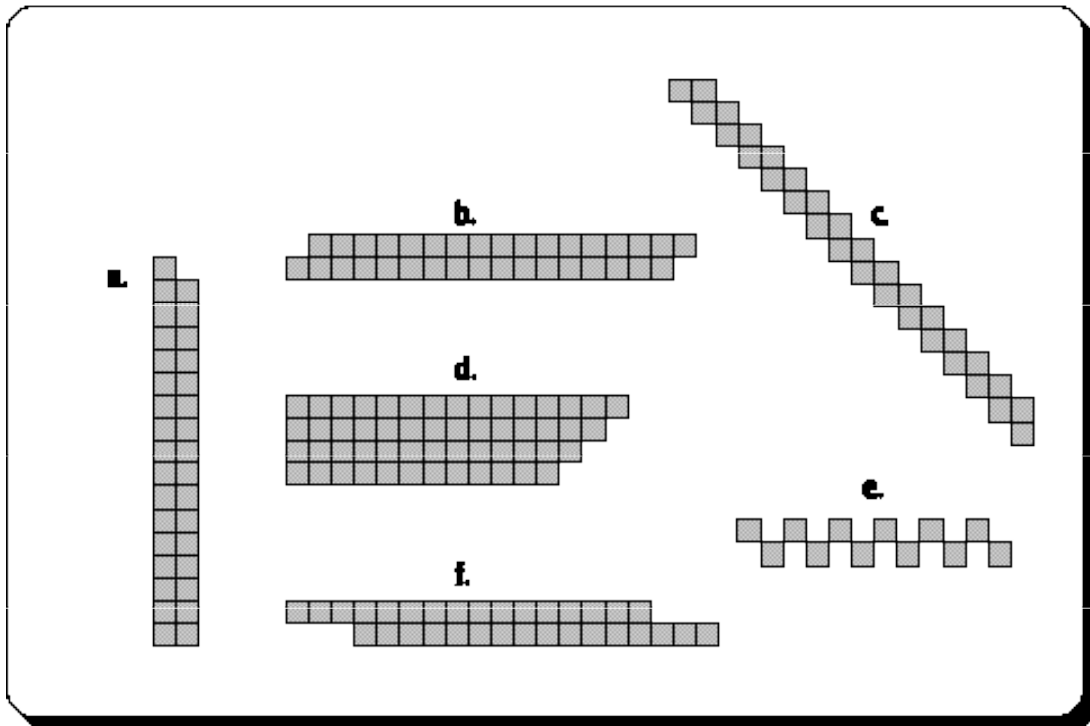
4. Welk getal hieronder is even en welk getal is oneven? Hoe weet je dat?



5. Maak zelf een bolletjespatroon voor de getallen 6, 13, 16 en 17. Zijn die getallen even of oneven?

6. Schrijf drie getallen op die even zijn en drie getallen die oneven zijn.

7. Je hoeft de vierkantjes of kralen niet te tellen om te zien of het totale aantal even of oneven is. Schrijf maar “even” of “oneven” naast elke figuur op het volgende blad.



8. Merel was vandaag niet op school. Schrijf voor Merel op hoe ze even en oneven getallen kan herkennen.

V-patronen

Soms zie je vogels vliegen in een V-patroon:



Zo'n patroon kun je gemakkelijker met bolletjes weergeven. Hier zijn de drie kleinste V-patronen



- 9.a. Teken het vierde V-patroon ernaast.
b. Kan een V-patroon 84 bolletjes hebben? Waarom of waarom niet?
c. Hoeveel bolletjes zitten er in V-patroon nummer 6? En hoeveel in nummer 10?
10. Teken een V-patroon met 19 bolletjes.

Soms is het handig om je resultaten in een tabel te laten zien. Het begin van zo'n tabel is hieronder al gemaakt:

V-nummer	Aantal bolletjes
1	3
2	5
3	7
4	
5	
6	

11. a. Vul de tabel in.
b. Aan het V-nummer kun je zien hoeveel paren vogels er in ieder V-patroon zitten. Zie je nog andere patronen?
12. Je kunt de rij met V-patronen net zo lang maken als je zelf wilt. Hoeveel bolletjes zitten er in het patroon met V-nummer 100? Hoe wist je dat?
13. a. Kies twee even getallen onder de 100 en tel ze op. Is hun som even of oneven?
b. Doe hetzelfde met twee oneven getallen onder de 100.
c. Ik heb twee getallen gekozen en als ik ze optel krijg ik een oneven getal als antwoord. Wat weet je over mijn twee getallen?

Boven het IJsselmeer vliegen twee groepen wilde ganzen, allebei in een mooie V-vorm. Voor ze naar het zuiden vertrekken komen ze bij elkaar.

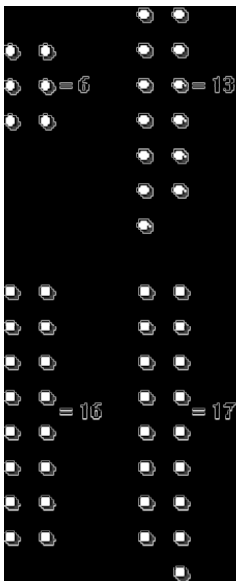
14. Kan de nieuwe groep een perfecte V vormen? Waarom of waarom niet?

Antwoorden Patronen en Symbolen

1. 24 (Vraag: hebben de leerlingen stuk voor stuk of in paren geteld?)
2. Meester Miako kan de klas niet in tweetallen verdelen (in paren verdelen). Hij kan 18 tweetallen maken en een leerling blijft over.
3. $19 + 23 = 42$ en dat aantal kan precies in tweetallen (paren) verdeeld worden. (Vraag: zijn er leerlingen die tekeningen maken en groepjes verdelen zoals hieronder?)



4. Het eerste getal is even (12) en het tweede is oneven (9). Je kunt dat zien door tweetallen te maken, bij het tweede getal blijft er eentje over en daarom is die oneven.
5. 6 is even
 13 is oneven
 16 is even
 17 is oneven



6. Eigen productie van leerlingen. Laat antwoorden door medeleerlingen controleren. (Vraag: zijn er leerlingen die getallen boven de 100 of zelfs nog groter kiezen?)
7. De tekeningen met de vierkantjes:
 - a. oneven (een vierkantje over)
 - b. even (schuif de bovenste rij eentje op)
 - c. oneven (streep steeds horizontaal tweetallen door, onderaan blijft er dan eentje over)
 - d. even (kijk naar dat laatste “trappetje” en maak paren)
 - e. even (streep steeds paren door)

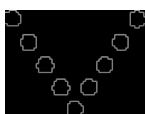
f. even (schuif het bovenste rijtje in gedachten drie naar rechts)

De tekeningen met de kralen:

- even (steeds een witte plus een zwarte kraal)
- even (steeds twee witte en twee zwarte kralen)
- oneven (geef steeds paren aan, eentje blijft over) (Vraag: zijn er leerlingen die redeneren: steeds drie zwarte en drie witte, dus even? Of: steeds drie zwarte en drie witte maar aan het eind blijven drie zwarte over, dus oneven?)
- even (steeds een witte en een zwarte kraal, dat kan precies)

8. Eigen productie van leerlingen. Bespreek enkele antwoorden.

9. a. Het vierde patroon



b. Voorbeelden van antwoorden:

- er zijn steeds paren en er is maar één leider. Met 84 vogels heb je 42 paren maar er is geen leider
- 84 is een even getal en in de V-patronen heb je alleen oneven getallen (3 - 5 - 7 - 9 -)
- $84 = 2 \times 42$, er is nog een bolletje extra nodig en dat is er niet

c. V-patroon nummer 6: 13 bolletjes (6 paren plus een leider, of $2 \times 6 + 1 = 13$)

V-patroon nummer 10: 21 bolletjes (10 paren plus een leider, of $2 \times 10 + 1 = 21$)

10. $2 \times 9 + 1$ (tekening)

11. a. tabel:

V-nummer	Aantal bolletjes
1	3
2	5
3	7
4	9
5	$2 \times 5 + 1 = 11$
6	$2 \times 6 + 1 = 13$
7	$2 \times 7 + 1 = 15$
8	$2 \times 8 + 1 = 17$
9	$2 \times 9 + 1 = 19$

b. Mogelijke antwoorden:

- als het V-nummer eentje groter wordt, wordt het aantal bolletjes twee groter
- de getallen in de kolom met “Aantal bolletjes” zijn allemaal oneven
- als je het aantal bolletjes wilt vinden voor een V-nummer dat niet in de tabel staat doe je twee keer dat V-nummer plus nog eentje

12. 201 (Vraag: wat hebben leerlingen gedaan om dat getal te vinden?)

13. a. de som is even
b. de som is even
c. het ene getal is even en het andere getal is oneven (Opm. gebruik eventueel bolletjespatronen om dat te laten zien)

14. Nee, dat kan niet. Mogelijke antwoorden:

- Alle twee de groepen hebben paren plus een leider. De twee leiders vormen samen een paar, nu is er geen leider meer
- omdat $\text{oneven} + \text{oneven} = \text{even}$

Aanvulling. Wanneer er tijd over is of de leerlingen willen zelf nog verder, bespreek dan de **super-even** getallen.

Neem de helft....

Kies een getal onder de 100, bijvoorbeeld 56. Neem steeds de helft tot je niet meer verder kunt zonder breuken te gebruiken:

$56 \rightarrow 28 \rightarrow 14 \rightarrow 7$

(Dat laatste getal is oneven dus kunnen we niet verder)

1. Maak rijen met de volgende getallen: 84, 30, 96, 100, 47, 32 en 160

Als je door kunt gaan met de helft nemen tot **1**, noem je het getal super-even.

2. Is 218 super-even? Hoe weet je dat?

3. Schrijf alle super-even getallen onder de 1000 op. Hoe heb je ze gevonden?

4. Hoe kun je snel weten of een groot getal, bijvoorbeeld 2 097 152 even is of niet? En hoe weet je of het een super-even getal is?

5. Vermenigvuldig twee super-even getallen met elkaar. Wat weet je van het antwoord?

6. Vouw een blaadje papier dubbel en daarna weer dubbel en weer dubbel, tot het niet meer gaat. Wat heeft deze opdracht met super-even getallen te maken?

Antwoorden aanvulling

1. $84 \rightarrow 42 \rightarrow 21$
 $30 \rightarrow 15$
 $96 \rightarrow 48 \rightarrow 24 \vee 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3$
47 kan niet verder, is oneven
 $32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
 $160 \rightarrow 80 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5$

2. ja, neem maar steeds de helft (deel door twee)

$218 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

3. Het kleinste super-even getal is 2. Dat getal kun je steeds verdubbelen, dan vind je alle super-even getallen:

$2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow 256 \rightarrow 512 \rightarrow 1024$

Dat laatste getallen is meer dan 1000, dus die telt niet meer mee!

4. Als je wilt weten of een getal even is moet je naar het laatste cijfer kijken. Als dat door twee deelbaar is, dan is het getal even. Bijvoorbeeld 3 996 is een even getal want 6 kun je door 2 delen en 2 097 152 is dus ook even. Als je wilt weten of 2 097 152 super-even is moet je alsmaar door 2 delen en kijken of je op 1 uitkomt:

$2\ 097\ 152 \rightarrow 1\ 048\ 576 \rightarrow 524\ 288 \rightarrow 262\ 144 \rightarrow 131\ 072 \rightarrow 65\ 536 \rightarrow 16\ 384 \rightarrow$

$8\ 192 \rightarrow 4\ 096 \rightarrow 2\ 048 \rightarrow 1\ 024 \rightarrow 512$

We weten al dat 512 super-even is dus hoeven we niet verder te gaan, 2 097 152 is ook super-even.

5. Het product van twee super-even getallen is weer super-even. Leerlingen kunnen dat nu alleen nog met voorbeelden aannemelijk maken, met een beetje algebra kun je het ook bewijzen: Een super-even getal kun je schrijven als macht van 2, bijvoorbeeld 2^a . ($8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $512 = 2^9$) Omdat $2^a \times 2^b = 2^{a+b}$ is de uitkomst weer een macht van 2.

6. Als je een blaadje dubbel vouwt heb je twee stukken. Weer dubbel vouwen geeft er vier, dan 8 dan 16 enz. Hoeveel vouwen kun je maximaal maken voor het niet meer lukt?