Kees Hoogland
APS – nascholing docenten
Zwarte Woud 2
3524 SJ Utrecht
K.Hoogland@aps.nl

Onderwijs

Nostalgische terugblik op de staartdeling

Het realistisch rekenen staat onterecht in een negatief daglicht: zo betoogt Kees Hoogland. Uitgaande van de staartdeling zoals die veertig jaar geleden in het basisonderwijs werd gedoceerd, legt hij uit waarom de manier om kinderen te leren delen is veranderd en waarom in het algemeen het realistisch rekenen een betere strategie is om kinderen te leren rekenen. Kees Hoogland is senior internationaal consultant bij het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum (APS) en was vele jaren hoofdredacteur van het tijdschrift Euclides.

Eind jaren zestig van de vorige eeuw zat ik op de basisschool. In wat toen nog klas 5 heette, heb ik de staartdeling geleerd. Die fascineerde me mateloos. Ik hield erg van sommen maken. Ook op de middelbare school bleef dat zo. Uiteindelijk ging ik wiskunde studeren in Leiden en kreeg daar college van een groep jonge enthousiaste docenten als Rob Tijdeman, Frits Beukers, Jozef Steenbrink en Jan van de Craats. Wiskunde, maar meer nog wiskundeonderwijs, werd mijn beroep.

Lagere school

Ik probeerde laatst te reconstrueren wat mij nu eigenlijk aan die staartdeling boeide. Als de deler onder de tien was vond ik het niet zo spannend, dan was het toch vooral stug doorwerken tot het eind. De vraag hoe vaak 7 in 40 paste of hoeveel keer 6 uit 19 genomen kon worden was voor mij blijkbaar vrij triviaal.

7/402598\   6/190278\

Ik kan me nog wel herinneren dat het spannender werd met delers tussen de tien en honderd. Hoeveel keer 23 paste in 140 of hoeveel keer 58 paste in 376. Dan moest je goed oppassen of je niet eentje te laag of eentje te hoog zat.

23/140277\   58/376246\

Delers boven de honderd vond ik meer van hetzelfde. Blijkbaar lette ik alleen op de eerste twee cijfers van de deler.

231/1408869\   582/3775434\

Ik kan me niet meer precies herinneren of ik wist wat staartdelingen te maken hadden met delen of verdelen. Op dat moment wist ik zeker niets van plaatswaarde en de rol die dat speelde in dit algoritme. Ook had ik geen idee over hoe specifiek deze werkwijze was. En hoe dat eventueel in andere landen ging. Ik weet nog wel dat die staartdeling voor veel van mijn klasgenoten in Vlaardingen erg moeilijk was. Dat merkte ik omdat mijn meester mij soms vroeg of ik andere kinderen kon helpen. Ik vond het erg vreemd dat veel andere kinderen deze procedure maar moeizaam konden leren en onthouden. En ik vond het ook vreemd dat die leerlingen soms geïrriteerd of gefrustreerd reageerden op mijn uitleg van zoiets eenvoudigs. Veel later zou ik pas ervaren dat dit onderwijs een grote groep mensen geen bruikbare en duurzame pen-en-papiermethode had opgeleverd voor het uitvoeren van delingen. Het was te abstract voor ze en ze konden zich er weinig bij voorstellen.

Voortgezet onderwijs

In het begin van de jaren zeventig deed ik gymnasium B aan een scholengemeenschap. Ik denk dat wij de eerste generatie waren die vanaf klas 3 een rekenmachine mochten gebruiken. Peperduur waren die dingen toen, wel over de honderd gulden. Maar machtig mooi vond ik het. Alle logaritmen, sinussen en e-machten zo bij de hand. Interessant om $\log 3$, $\log 30$, $\log 300$ in te typen en dan te zien wat er gebeurde. Of net zo lang de wortel te trekken tot er onvermijdelijk 1 verscheen op het scherm en dan weer kwadrateren en heel ergens anders uitkomen. Ben ik op de middelbare school de staartdeling wel eens tegengekomen? O ja, één keertje: bij het delen van een eerstegraadspolynoom op een hogeregraadspolynoom, waarschijnlijk om bij een gebroken functie de primitieve te berekenen.

Actief in wiskundeonderwijs

Tijdens en na mijn studie ben ik gaan lesgeven in de onderbouw en de bovenbouw van havo en vwo, nog weer later ook op eerste-

1417:13=1 01	1417:13=1 0117	1417:13=10 0117	1417:13=109 0117 000
13 op 14 gaat 1 keer 14-13 = 01 opschrijven	17 aanvullen	13 op 11 gaat 0 keer	13 op 117 gaat 9 keer 117-117 = 000

Figuur 1 Delen op de Balkan

en tweedegraadslerarenopleidingen. In de jaren tachtig kwamen veel allochtone leerlingen het onderwijs binnen. Er was opeens veel aandacht in onderwijskringen voor allerlei deelmethoden en notatiewijzen die in andere landen, andere culturen en andere tijden gebruikt worden en werden. Soms waren dat methoden die hetzelfde waren als bij ons, soms methoden die minder uitgelijnd waren op het positiestelsel. In figuur 1 zien we bijvoorbeeld hoe het delen op de Balkan gaat en in figuur 2 hoe het delen in Marokko gaat. Deze voorbeelden zijn ontleend aan het artikel Buitenlandse rekenmethoden uit de *Nieuwe Wiskrant* (Berwald, 1988). Rond die tijd kwam ik ook in aanraking met het realistisch rekenen. Daar zag ik voor het eerst de volgende notatie.

$$\begin{array}{l}
7/15232\backslash 2000+100+70+6=2176 \\
\quad \underline{14000} \\
\quad\; 1232 \\
\quad\;\; \underline{700} \\
\quad\;\; 532 \\
\quad\;\; \underline{490} \\
\quad\;\;\; 42 \\
\quad\;\;\; \underline{42} \\
\quad\;\;\;\; 0
\end{array}$$

Vergelijk dit eens met het standaardalgoritme hieronder dat ik geleerd heb.

$$\begin{array}{l}
7/15232\backslash 2-1-7-6 \\
\quad \underline{14} \\
\quad\; 12 \\
\quad\;\; \underline{7} \\
\quad\;\; 53 \\
\quad\;\; \underline{49} \\
\quad\;\;\; 42 \\
\quad\;\;\; \underline{42} \\
\quad\;\;\;\; 0
\end{array}$$

De verschillen zijn marginaal, maar niet verwaarloosbaar. Bij de eerste notatie hoort de vraag: "Als je 15232 dingen deelt met zijn zevenen, hoeveel krijg je dan?" De notatie geeft de meest effectieve strategie weer om dat te bepalen: je geeft iedereen er eerst 2000, vervolgens heb je er nog 1232 over en geef je iedereen er nog 100 et cetera. Kortom bij de meest effectieve verdeelstrategie doe je cognitief vrijwel hetzelfde als bij het uitvoeren van de staartdeling. Het sprak mij aan omdat bij deze notatie het onderliggende deelprobleem in beeld is, inclusief de orde van grootte van het antwoord. Ook vangt het de meest voorkomende fout — het vergeten van een nul in het antwoord — bij het traditionele algoritme af.

$$\begin{array}{l}
7/1435\backslash 200+5=205 \\
\quad \underline{1400} \\
\quad\;\; 35 \\
\quad\;\; \underline{35} \\
\quad\;\;\; 0
\end{array}$$

Van die meest effectieve verdeelstrategie is het nog maar een kleine stap naar het staartdelingalgoritme zoals ik dat vroeger leerde. Op veel basisscholen zetten ze die stap wel voor de betere leerlingen. Op andere scholen doen ze het niet. Het is het eindpunt van een leerlijn. Maar wat is dan een didactische route die leidt tot die meest effectieve strategie? Er wordt veelal gebruik gemaakt van de natuurlijke kennis die leerlingen hebben over eerlijk delen. Als je leerlingen die nog nooit een deling hebben uitgevoerd het vraagstuk geeft hoe 196 te verdelen over 7 leerlingen dan geven ze iedereen eerst maar eens 10 en rekenen uit dat ze nog 126 over hebben. Vervolgens geven ze iedereen nog eens 10 en rekenen uit dat ze nog 56 over hebben dan geven ze iedereen nog 8. In die fase kun je ze dat laten opschrijven zoals ze willen. Als ze het probleem maar leren oplossen. Zwakkere leerlingen nemen vaak uit onzekerheid nog kleinere porties. Dan doen ze er langer over, maar lossen het probleem wel op. En is dat het dan? Nee, dan komen er nog vele lessen die er op gericht zijn om de strategie slimmer en algemener te maken. Het onderwijs dient er op gericht te zijn om met zoveel leerlingen als mogelijk verkortingen aan te brengen in de strategie en te streven naar de meest effectieve strategie en te streven naar een efficiënte en overzichtelijke manier van noteren. In de discussie over rekenonderwijs wordt vaak het optimaal uitgevoerde algoritme gezet tegenover allerlei dingen die leerlingen soms doen in de aanloop naar effectieve strategieën. Dat verheldert de discussie niet.

Kwaliteit en doorschieten

Is het realistisch rekenen dan probleemloos? Nee, zeker niet. Moderne benaderingen in het onderwijs streven altijd naar toename in kwaliteit. Maar als je in sommige uitgangspunten doorschiet, ontstaan ook zo maar flinke vervormingen. Ik zet er even een paar op een rijtje.

- Realistisch rekenen legt de verbinding tussen rekenen en de werkelijkheid waarin dat rekenen functioneert. Goed voor de bruikbaarheid en voor de motivatie en het begrip van leerlingen. Te eenzijdig doorgeschoten is dat die verbinding met de werkelijkheid veel te veel is vormgegeven in een boek met sommen met te talige contexten.
- Realistisch rekenen erkent dat er rekenmachines op grote schaal voorhanden zijn en dat daar dus aandacht aan besteed moet worden. Als mensen beweren dat je niet meer hoeft te leren rekenen omdat er rekenmachines zijn, is dat een vervorming.
- Realistisch rekenen benadrukt dat inzicht belangrijk is voor het beklijven van kennis en vaardigheden. Als mensen beweren dat er daarom niet meer veelvuldig geoefend hoeft te worden, is dat een vervorming.
- Realistisch rekenen benut de verschillende strategieën die kinderen van nature

$\bar{1}417\vert\underline{13}$ $\quad\vert 1$	$\bar{1}417\vert\underline{13\qquad}$ $0117\vert 1$	$1417\vert\underline{13}$ $0117\vert 10$ -	$1417\vert\underline{\quad 13}$ $0117\vert\ 109$ --	$1417\vert\underline{\quad 13}$ $0117\vert\ 109$ 000
Boogje op getal waar je mee begint. 13 op 14 gaat 1 keer	14-13=01 opschrijven en aanvullen	Boogje bij getal (11) waarmee je verder gaat. 13 op 11 gaat 0 keer	Boogje bij getal (117) waarmee je verder gaat. 13 op 117 gaat 9 keer.	117-117 = 000 opschrijven

Figuur 2 Delen in Marokko

inzetten bij rekenproblemen. Vervorming treedt op als kinderen allerlei verschillende strategieën aangeboden krijgen in plaats van dat gestreefd wordt naar de meest effectieve strategie.
– Realistisch rekenen probeert een zo breed mogelijke populatie bruikbaar rekenen aan te leren. Vervorming treedt op als de top 10% van de leerlingen niet in de gelegenheid wordt gesteld hun plafond te bereiken.

Om het rekenonderwijs op een hoger plan te brengen moeten de kwaliteiten van realistisch rekenen benadrukt en gepraktiseerd worden. Maar op dit moment is het minstens zo belangrijk de vervormingen stevig aan te pakken. Opleiding en professionalisering van leerkrachten die zich daar expliciet op richt, is cruciaal. In de rekenverbetertrajecten die nu op 375 scholen starten, staat dit centraal.

De discussie over het rekenen

Ook de discussie over het rekenonderwijs kun je op deze manier bekijken.

- Het is heel belangrijk als er wordt benadrukt dat je in rekenlessen zoveel mogelijk moet halen uit de top 10% van de leerlingen op de basisschool. Die leerlingen kunnen al behoorlijk abstracte structuren en algoritmen aan en die moet je niet vermijden. Een vervorming in de discussie treedt op als de top 10% van de leerlingen als norm wordt genomen en benaderingen die recht doen aan grote groepen andere leerlingen worden weggezet als ineffectief of sektarisch.
- Het is prima als er kritisch wordt stilgestaan bij het onderwijs in rekenen en de soms vreemde onderbrekingen in de loopbaan van leerlingen die daarin zitten, zoals de commissie Meijerink heeft gedaan. Er treedt vervorming op als de discussie gevoerd wordt via ingezonden brieven, via internetfora en in de media waarbij vermeende tegenstellingen op populistische wijze worden opgeblazen. En als met cynisme de huidige onderwijspraktijk voortdurend in een negatief daglicht wordt geplaatst.

Vanuit die laatste vervorming is namelijk onderwijs nog nooit beter geworden. En dat is evidence based.