

“Elke positieve actie begint met critiek”

In herinnering aan mijn grootvader, W.A. van Gemert (1914-1996)

Voor Steven, en voor Mats, Anna en de kleine ...

Deze publicatie werd mede mogelijk gemaakt dankzij financiële steun van de Stichting Tijdschrift Janus, de J.E. Jurriaanse Stichting en het Dr. Hendrik Muller's Vaderlandsch Fonds.

Illustratie omslag: Rijksarchief in Noord-Holland, Papers of Hans Freudenthal (1905-1990), mathematician, 1906-1990.

Deze dissertatie heeft geen eigen ISBN.

Het ISBN van de handelseditie is 90-6550-912-7.

©2006 Sacha la Bastide-van Gemert & Uitgeverij Verloren

Postbus 1741, 1200 BS Hilversum

www.verloren.nl

Opmaak AlfaGrafica, Hilversum

Omslagontwerp Robert Koopman, Hilversum

Druk Wilco, Amersfoort

Brochage Van Strien, Dordrecht

No part of this book may be reproduced in any form without written permission from the publisher.

RIJKSUNIVERSITEIT GRONINGEN

“Elke positieve actie begint met critiek”
Hans Freudenthal en de didactiek van de wiskunde

Proefschrift

ter verkrijging van het doctoraat in de
Letteren
aan de Rijksuniversiteit Groningen
op gezag van de
Rector Magnificus, dr. F. Zwarts,
in het openbaar te verdedigen op
donderdag 11 mei 2006
om 14:45 uur

door

Sacha la Bastide-van Gemert

geboren op 19 maart 1973
te Leiderdorp

Promotores: Prof.dr. K. van Berkel
Prof.dr. J.A. van Maanen

Beoordelingscommissie: Prof.dr. M.J. Goedhart
Prof.dr. W.E. Krul
Prof.dr. A. Treffers

Inhoudsopgave

Woord vooraf	9
1 Inleiding. “A way to master this world”	11
2 Middelbaar wiskundeonderwijs en wiskundendidactiek in het interbellum	21
2.1 Het middelbaar onderwijs in het interbellum	22
2.1.1 Het ontstaan van de schooltypen van het VHMO	22
2.1.2 Enkele schooltypen	23
2.1.3 De concurrentiestrijd tussen HBS en gymnasium	25
2.2 Discussies over het wiskundeonderwijs op het VHMO	27
2.2.1 Het aanvankelijk meetkundeonderwijs en de oprichting van <i>Euclides</i>	30
2.2.2 De commissie-Beth en de invoering van de differentiaal- en integraalrekening	34
2.2.3 De strijd om de mechanica	37
2.2.4 De opleiding tot wiskundeleraar	40
2.2.5 Nieuwe inzichten en de Wiskunde Werkgroep	43
3 Hans Freudenthal – een schets	47
3.1 Hans Freudenthal – een impressie	47
3.2 Luckenwalde	49
3.3 Berlijn	51
3.4 Amsterdam	53
3.5 Utrecht	62
4 ‘Rekendidaktiek’	69
4.1 De datering van ‘Rekendidaktiek’	70
4.2 Aanleiding en intentie	71
4.3 Het rekenonderwijs op de lagere school	74
4.4 Freudenthals ‘Rekendidaktiek’: de inhoud	77
4.4.1 Woord vooraf	77
4.4.2 Hulpwetenschappen	78
4.4.3 Doel en nut van het rekenonderwijs	83
4.5 ‘Rekendidaktiek’: elke positieve actie begint met kritiek	84

5	Een nieuw begin	89
5.1	Opvoeden	96
5.1.1	Opvoeden thuis	96
5.1.2	‘Onze taak als opvoeders nu’	97
5.1.3	‘Opvoeding tot denken’	99
5.1.4	‘Opvoeden’ in <i>De Groene Amsterdammer</i>	106
5.1.5	‘De medewerkende taak van de opvoeder bij de mensvorming’	109
5.1.6	Opvoeding: een samenvatting	111
5.2	Het Hoger Onderwijs	112
5.2.1	Studium Generale	113
5.2.2	De lerarenopleiding	117
5.2.3	Studieloon	123
5.2.4	Hoger onderwijs: een bouwvallig parthenon of schoon schip?	125
5.3	De Wiskunde Werkgroep	126
5.3.1	Activiteiten van de Wiskunde Werkgroep	127
5.3.2	‘De algebraïsche en analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde’	130
5.3.3	‘De wiskunde voor niet-mathematische richtingen’	136
5.3.4	De wiskunde werkgroep van Freudenthal	137
6	Van roepende aan de zijlijn naar autoriteit	139
6.1	Wiskundeonderwijs en de opvoeding van het denkvermogen	142
6.2	Een lijk onder de vloer: het mechanicaonderwijs	149
6.3	Vorbereidingen voor een nieuw leerplan	156
6.4	Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek: een studieboek	163
6.5	Paedagogums, paedagogochelaars en vakwetenschappers: de lerarenopleiding	169
6.6	Freudenthal internationaal	178
7	Freudenthal en de niveautheorie van de Van Hieles. Een leerproces	181
7.1	Inleiding: een bijzonder promotieonderzoek	181
7.2	Freudenthal als promotor	182
7.3	‘De problematiek van het inzicht’: de niveautheorie van Van Hiele	187
7.4	Freudenthal en de theorie van de Van Hieles: van ‘niveautheorie’ naar ‘guided reinvention’	193
7.5	Analyse van een leerproces: reflectie op reflectie	204
7.6	Tot slot	206
8	Methode versus inhoud. New Math en de modernisering van het wiskundeonderwijs	207
8.1	Inleiding: tijd voor modernisering	207
8.2	New Math	209
8.2.1	De kloof tussen moderne wiskunde en wiskundeonderwijs	209
8.2.2	Modernisering van het wiskundeonderwijs in de Verenigde Staten	211
8.3	Royaumont: een bridgeclub met onvoorziene gevolgen	215
8.3.1	Freudenthal in ‘the group of experts’	216
8.3.2	Royaumont zonder Freudenthal: de lancering van New Math	223

8.4	Freudenthal over moderne wiskunde en de betekenis ervan voor het wiskundeonderwijs	225
8.4.1	Het karakter van moderne wiskunde	225
8.4.2	Moderne wiskunde voor het grote publiek	228
8.4.3	De wiskundige “in der Unterhose auf der Straße”	230
8.4.4	Sprookjes en doodlopende wegen	232
8.4.5	Moderne wiskunde als dé oplossing?	235
8.5	Modernisering van het wiskundeonderwijs in Nederland	236
8.5.1	Initiatieven in binnen- en buitenland	237
8.5.2	Freudenthal: van ww naar “meewerken om bij te sturen”	240
8.5.3	De Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde	243
8.5.4	De bijscholing van leraren	246
8.5.5	Een nieuw leerplan	247
8.6	Meetskundeonderwijs	252
8.6.1	Freudenthal en meetskundeonderwijs	254
8.6.2	Freudenthal over het aanvankelijk meetskundeonderwijs: passen en meten	256
8.6.3	Axiomatiseren in plaats van axiomatic – maar niet in de meetkunde	258
8.6.4	Moderne meetkunde in het onderwijs volgens Freudenthal	260
8.7	Logica	262
8.7.1	Exacte logica	262
8.7.2	De toepassing van moderne logica in het onderwijs	265
8.8	Freudenthal en New Math: conclusie	268
8.8.1	Een eenzame tegenstander van New Math?	268
8.8.2	Meewerken om bij te sturen	270
8.8.3	Kennis als wapen in de strijd voor beter wiskundeonderwijs	271
8.8.4	Freudenthal over het doel van het wiskundeonderwijs	274
9	Freudenthal ziet het zo	275
9.1	Inleiding: veranderingen van het strijdtoneel	275
9.2	Educational Studies in Mathematics	279
9.2.1	Met frisse tegenzin: de oprichting	279
9.2.2	Freudenthal als bewaker van het niveau	282
9.3	Het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs	285
9.3.1	Van CMLW naar IOWO	285
9.3.2	Freudenthal en het IOWO	288
9.4	Wereldverkennen van de straatstenen tot de maan	295
9.4.1	Observeren als vader in ‘Rekendidaktiek’	295
9.4.2	Observeren als grootvader: wandelen met kleinkinderen	298
9.4.3	Opa Hans: een kritische noot	301
9.4.4	Wandeling over de rails: wiskunde van een driejarige	304
9.4.5	Observeren en het IOWO	307
9.5	De observatie als bron	309
9.5.1	Professor of kindse grootvader?	309
9.5.2	Het paradigma: voorbeeld der voorbeelden	311
9.5.3	Freudenthal ziet het zo: getalbegrip en didactische fenomenologie	315
9.5.4	Het recht op zindelijke wiskunde voor allen	323

9.6	Enfant terrible	330
9.6.1	Onkruid wieden	330
9.6.2	Trommelen op lege vaten	333
9.6.3	Freudenthal over Piaget: bewondering en genadeloze kritiek	338
9.7	De opdracht voor de toekomst	346
10	Epiloog. De cirkel is rond	349
	Summary	355
	Afkortingen	363
	Bibliografie	365
	Namenregister	378

Woord vooraf

Dit promotieonderzoek is in 1996 gestart als onderdeel van het onderzoeksprogramma ‘Ontsluiting wetenschapsarchieven’, een samenwerkingsverband tussen de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO) en het Rijksarchief in Noord-Holland. In het Centrum voor Wetenschapsarchieven van het Rijksarchief in Noord-Holland, dat zich toelegt op het beheer van wetenschappelijke archieven, bevindt zich het persoonlijk archief van Hans Freudenthal, waarvan in 1999 de bijbehorende inventaris is gepubliceerd. NWO verzorgde het aanstellingsverband als Onderzoeker in Opleiding, waarbij de Rijksuniversiteit Groningen als standplaats fungeerde, de nodige faciliteiten verleende en in 2005 een korte vervolgaanstelling verzorgde.

Dat promoveren eenzaam werk is, is inherent aan het afleggen van de proeve die een promotieonderzoek behoort te zijn. Dit constaterende ben ik extra dankbaar, dat – hoe eenzaam soms ook – ik het desalniettemin niet *alleen* heb hoeven doen. Iedereen bedanken zonder in de gebruikelijke dankwoord-clichés te vervallen is een onmogelijke opgave. Daarom toch op deze plaats, mét clichés, maar zeker niet minder gemeend: woorden van dank aan iedereen die op zijn of haar manier een waardevolle bijdrage aan het totstandkomen en voltooiën van dit onderzoek heeft geleverd.

Zoals elk promotieonderzoek, staat of valt een succesvolle voltooiing ervan met de begeleiding. Prof.dr. K. van Berkel en prof.dr. J.A. van Maanen vormden samen een prachtig team van stimulerende, altijd meedenkende begeleiders. Klaas, ik wil je heel hartelijk danken dat je het al die jaren geleden aandurfde dit geschiedenisproject aan een wiskundige toe te vertrouwen. Nog belangrijker voor mij was dat je dit vertrouwen (ongeacht welk onvoorzien obstakel het onderzoek telkens weer deed stokken!) altijd hebt gehouden en me hebt weten ‘om te scholen’ tot wetenschapshistoricus. Jan, ook jou wil ik bedanken voor je vertrouwen, je schouderklopjes, je bemoedigende woorden en het af en toe ‘gewoon even bijpraten’ gedurende de hele rit. Jullie waren van begin tot eind een enorm steun.

Graag wil ik hier ook alle mensen hartelijk bedanken die in de loop der jaren mondeling of schriftelijk hun herinneringen aan Freudenthal met mij wilden delen:

prof.dr. F. van der Blij, prof.dr. A. Treffers, prof.dr. F.J. Keune en prof.dr. A. van Streun. Ook dank ik veel aan prof.dr. A.W. Grootendorst, met wie ik voor zijn dood in 2004 uitgebreid over mijn onderzoek sprak, en aan dr. Leen Streefland, die mij in het begin van mijn onderzoek waardevolle tips gaf, maar door wiens vroegtijdig overlijden in 1998 het helaas ook niet mogelijk is hem het eindresultaat voor te leggen. Meer waardevolle tips, nieuwe invalshoeken en ideeën kwamen van prof.dr. J. Terwel, prof.dr. H.J.M. Bos, prof.dr. E.M. de Jager en doctoren Ed de Moor, Marjolein Kool, Rijkje Dekker, C. de Pater, mr. B.D. van der Velden en mr. M. Freudenthal.

De leden van de leescommissie, prof.dr. A. Treffers, prof.dr. W.E. Krul en prof.dr. M.J. Goedhart, wil ik hartelijk danken voor hun kritische en snelle beoordeling van mijn proefschrift.

Paula Velthuys-Bechthold was met haar kennis van zaken een enorme hulp bij mijn zoektocht in Freudenthals persoonlijk archief in Haarlem, dank je wel voor alle koffie en bijbehorende gesprekken na de lange treinreis. Dat het fenomeen ‘kinderopvang’ naast werktijd ook waardevolle vriendschappen oplevert, bewezen Harriët Hamstra, Marieke Nelissen en Jeannette Hendriksen: dank jullie wel voor het lezen en corrigeren van het manuscript in de eindfase. Ook wil ik Nanette Jockin-la Bastide en Ilse van Gemert graag hier bedanken voor het controleren en corrigeren van de ‘Summary’.

In de periode dat ik fysiek niet in staat was aan het onderzoek verder te werken, hielden Djoeke van Netten en Ilse het onderzoek toch gaande door uren computerwerk van mij over te nemen. Dankzij de geweldige medische begeleiding van het UMCG-pijnteam en met hulp en steun van (schoon)familie en goede vrienden kon ik de draad uiteindelijk toch weer zelf oppakken, waarvoor ik iedereen ontzettend dankbaar ben. Wiskundige en minder-wiskundige vriendinnen ver weg en dichtbij: bedankt voor jullie onmisbare steun en meeleven in de afgelopen jaren.

Tot slot woorden van dank voor alle steun die ik kreeg van familie en schoonfamilie. Papa en mama, dankzij de van jullie geleerde discipline kon ik dit karwei afronden. Paranimfen Nanne Huiges en Ilse, fijn dat jullie die taak op jullie wilden nemen en zo samen symbool kunnen staan voor de vereniging van ‘alfa en bèta’ tijdens mijn promotie. Mijn ouders en schoonouders bleken als oppas en logeeraadressen voor de kinderen een onmisbare schakel in de combinatie van promotie en gezinsleven: dank jullie wel voor al jullie goede zorgen.

Lieve Steef, het is dankzij jou dat dit alles gelukt is. Je eindeloze geduld, begrip en vertrouwen maakten dit boek. Mats en Anna, het: “Mama, straks als je boek af is, ...” ... is nu!

Inleiding

“A way to master this world”

En toch probeer ik – ook in mijn geschriften – één en al spontaniteit te zijn. Iedere volzin die ik schrijf, wordt, eer hij geschreven en gedrukt wordt, gewikt, gewogen en gewenteld tot het summum van spontaniteit is bereikt. Het moet erop lijken of al wat ik schrijf me net te binnen is geschoten. [...] Het is niet eenvoudig je te tonen zoals je bent, vooral als je helemaal niet zo bent. [...] Zijn niet al mijn schrijfsels verkleedpartijen? Nee, ik schrijf gekleed, maar niet verkleed.

Hans Freudenthal in *Schrijf dat op, Hans*, 1987¹

Hans Freudenthal: hoogleraar wiskunde, wetenschapper, literator. Maar bovenal de man van het wiskundeonderwijs, onlosmakelijk verbonden met de omwentelingen die er in dat wiskundeonderwijs en de wiskundendidactiek in de tweede helft van de vorige eeuw plaatsvonden. Hij is tot op de dag van vandaag dé dominerende figuur binnen de wiskundendidactiek in Nederland. In een discussie over wiskundeonderwijs kan niemand om Freudenthal heen: ‘wiskundeonderwijs volgens Freudenthal’ dient ofwel als inspiratie, ofwel om andere invalshoeken tegen af te zetten. Wie Freudenthal zegt, zegt wiskundendidactiek. Dat alleen zou al een reden zijn om een studie aan Freudenthal te wijden. Maar er is meer.

Wiskundendidactiek en Hans Freudenthal: probleem- en vraagstelling

Wie zich verdiept in de didactiek van de wiskunde, loopt vroeg of laat tegen de vraag aan: wat is wiskunde eigenlijk? Waar begint wiskunde? Het bestuderen van de manier waarop kinderen wiskunde leren kan een antwoord leveren op die vraag. Het tot stand komen van wiskunde bij kinderen kan als aanknopingspunt dienen bij het beantwoorden van de vraag wat wiskunde is.

Vanaf het moment dat de didactiek van de wiskunde studieterrein is geworden, komen steeds ook vragen over aard en betekenis van wiskunde in het algemeen aan de orde. In het interbellum werd de *vormende waarde* van de wiskunde als een van de grootste deugden van het wiskundeonderwijs gezien. Door wiskunde als een deductief, gesloten systeem te onderwijzen, zou de vormende waarde van die wiskunde goed tot zijn recht komen. Wiskunde werd op die manier als ‘kant en klaar’ aan de leerling aangeboden. De zuiverheid en de eerlijkheid van het mathematisch denken zouden van het grootste belang zijn voor de ontwikkeling van het intellect en

1 Hans Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven* (Amsterdam 1987) 11.

het verhogen van het morele peil van de leerling, zo meenden voorstanders van deze aanpak. Het wiskundeonderwijs had daardoor, vooral in het voortgezet onderwijs, een nogal elitair karakter: wiskunde begrijpen was voorbehouden aan een handjevol leerlingen.

Door de hoge mate van abstractheid en de ogenschijnlijk beperkte rol van de wiskunde in de maatschappij was de invulling en verantwoording van het schoolvak wiskunde na de introductie ervan in de negentiende eeuw nooit een vanzelfsprekendheid. Het schoolvak wiskunde moest zich al in de negentiende eeuw met grote regelmaat legitimeren en verantwoorden voor doel en inhoud. Dit maakte dat een zekere traditie was ontstaan in het nadenken over het waarom en waarvoor van wiskundeonderwijs.²

Op het moment dat Freudenthal zich na de Tweede Wereldoorlog steeds nadrukkelijker met de wiskundendidactiek bezig ging houden, betrad hij begaanbaar terrein. Anderen voor hem hadden al over wiskundendidactiek geschreven en discussie gevoerd. Die discussies over wiskundeonderwijs waren er met regelmaat en de beoefening van de wiskundendidactiek nam in aanzien toe.

De veranderende rol van de wiskunde in de maatschappij was daar indirect debet aan. Nu het belang van de praktische toepassingen van de wiskunde na de Tweede Wereldoorlog duidelijker werd, werd de invalshoek ‘wiskunde als cultuurfactor’ meer en meer naar de achtergrond verdrongen ten gunste van die van ‘wiskunde als productiefactor’.³ Het praktisch nut van de wiskunde was niet alleen binnen het vakgebied een steeds nadrukkelijker aanwezig fenomeen, ook in het onderwijs kon men er niet langer omheen: ‘wiskunde om de wiskunde’ voldeed steeds minder naarmate meer mensen wiskunde nodig hadden.

Juist op dit punt stapte Freudenthal in de discussie en door zijn activiteiten heeft hij een stempel gedrukt op de wiskundendidactiek in Nederland (en ver daar buiten). Wiskundeonderwijs in Nederland geniet namelijk al jarenlang internationale faam en Freudenthals reputatie als onderwijsvernieuwer is daar debet aan. Hij wordt binnen én buiten het vakgebied van de wiskundendidactiek gezien als degene die verantwoordelijk was voor het soort wiskundeonderwijs waarbij het oefenen van technieken als afzonderlijke vaardigheden naar de achtergrond verdween.⁴

2 Iets vergelijkbaars gebeurde er met betrekking tot het onderwijs in de klassieke talen, dat in de negentiende eeuw een legitimatie verloor. Discussie over legitimering van het vak leidde tot meer aandacht voor de didactiek met nadruk op de vormende waarde ervan; Arie Jan van Duyvendijk, *De motivering van de klassieke vorming: een historisch-paedagogische studie over twee eeuwen* (Groningen 1955); W. Hoving en J. van IJzeren, *Onderzoek naar de wenselijkheid en de mogelijkheid om bij het onderwijs in de oude talen op gymnasia en lycea de lectuur met na-klassieke schrijvers uit te breiden beoordeeld in verband met de betekenis van het klassieke onderwijs in zijn geheel* (Groningen 1940); Pim Verhoeven, *Tekstbegrip in het onderwijs Klassieke Talen. Een onderzoek naar de verwezenlijking van nieuwe doelstellingen in het schoolonderzoek Grieks en Latijn* 1997.

3 Deze terminologie is ontleend aan die in het werk van Gerard Alberts, *Jaren van berekening. Toepassingsgerichte initiatieven in de Nederlandse wiskundebeoefening 1945-1960* (Amsterdam 1998).

4 Een voorbeeld van dit beeld van Freudenthal is te lezen in: A. Freeman-Smulders, ‘Lezen als ongedeelde vaardigheid. Een Freudenthal voor het leesonderwijs gezocht’, *Leesgoed: tijdschrift voor kinderboeken* 24 (1997) 30-33.

In plaats van het opgelegd krijgen van een kant en klare wiskunde kwam er plaats voor het zelf ontdekken en opbouwen van wiskunde in een voor de leerling relevante context. Het mathematiseren van de werkelijkheid werd uitgangspunt: wiskunde is overal. Hierbij was er aandacht voor de interactie tussen leerlingen onderling, voor samenwerking en voor het zoeken naar verschillende oplossingsstrategieën. ‘Realistisch wiskundeonderwijs voor allen’ is een aansprekende typering van het soort wiskundeonderwijs waarmee de naam Freudenthal geassocieerd wordt.

Dit proefschrift wil een antwoord geven op de vraag: wat was de rol van Freudenthal binnen het wiskundeonderwijs? Hoe terecht is het beeld van de sleutelrol die hij in de vernieuwingen zou spelen? Om hierop een antwoord te formuleren, moeten in de eerste plaats belangrijke deelvragen beantwoord worden. Wat waren zijn ideeën over wiskunde, onderwijs en didactiek? Hoe ontstonden ze, waardoor werden ze beïnvloed en hoe veranderden ze (of niet)? Op welke manier hadden ze welke invloed op de toen heersende opvattingen?

Met de beschrijving van de veranderingen binnen het wiskundeonderwijs komt ook de visie op wiskunde als cultuurelement aan de orde. In zijn veelzijdigheid als wetenschapper, gecombineerd met zijn aanzien als hoogleraar en zijn drang om voortdurend naar buiten te treden met zijn publicaties, heeft juist Freudenthal op dat gebied een belangrijke sociale functie vervuld. Het organiseren van het eerste internationale congres voor wiskundeonderwijs was zijn verdienste, net als de oprichting van het internationale tijdschrift voor wiskundeonderwijs *Educational Studies in Mathematics*. Onvermoeibaar was zijn inzet om wiskundendidactiek als serieus beoefende wetenschap te funderen. Freudenthals visie op de wiskunde – wat is wiskunde? waar begint wiskunde? – was indirect voortdurend van invloed op zijn denkbeelden over wiskundeonderwijs. Voor hem was dit een leidraad in zijn zoektocht naar de juiste invalshoek bij de ontwikkeling van wiskundeonderwijs.

Freudenthal zag voor de wiskunde een essentiële rol weggelegd in ieders wereld. Juist de wiskunde uit de alledaagse werkelijkheid was voor hem essentieel in het onderwijs, niet het opleggen van een zuiver wiskundig systeem aan leerlingen door de leraar:

Opposite to this view of mathematics as a sophisticated subject matter, dropped from above to below, is that of mathematics as a natural and social activity which develops according to the growth and the growing needs of the individual in an expanding world. Mathematics is an attitude, a way to master this world cognitively, practically, emotionally.⁵

Wiskunde was overal en voor iedereen, en het was deze wiskunde die volgens Freudenthal als uitgangspunt genomen moest worden bij de ontwikkeling van wiskundeonderwijs. In de jaren zeventig zag hij deze visie in de praktijk gebracht door het onderwijs-ontwikkelwerk zoals dat door medewerkers van het Instituut voor de

5 Hans Freudenthal, ‘New Math or new education’, *Prospects* IX (1979) 321-331, aldaar 322.

Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO) gedaan werd. Zijn successen op dit gebied legitimeren op zich al een nader onderzoek.

Don Quichote: de mythe Freudenthal?

Freudenthals rol in de veranderingen van het wiskundeonderwijs heeft in de overlevering haast mythische vormen aangenomen. Een mythe, die nog werd versterkt door het stereotype imago dat hem omringde. Met zijn vlinderstrik en pijp was hij een wat excentrieke professor, wiens reputatie als wiskundige al gevestigd was toen hij zich voor de didactiek ging interesseren.

Freudenthal heeft ook zelf impliciet – en wellicht onbewust – bijgedragen aan deze mythe. Zijn rol in de wiskundendidactiek beschreef hij uitgebreid in zijn autobiografie *Schrijf dat op, Hans* uit 1987.⁶ Met de door het geraffineerde citaat aan het begin van deze inleiding voorgewende spontaniteit en een karakteristieke terloopse nonchalance schetste hij hierin eind jaren tachtig zijn carrière als onderwijsman. Ook in andere artikelen en boeken in de jaren zeventig en tachtig blikt hij regelmatig nadrukkelijk terug op de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in Nederland en beschreef zijn eigen rol daarin. In het beeld dat hij van zichzelf als didacticus geeft, overheerst dat van een Don Quichote, een eenzame strijder tegen kwalijke tendensen in het wiskundeonderwijs. Hij omschrijft zichzelf als een ‘enfant terrible’, trots op zijn ‘ondeugden’, altijd tegen de stroom oproeïende en, uiteindelijk, met het gelijk aan zijn kant.

Deze omschrijving correspondeert met het algemeen heersende beeld van de didacticus Freudenthal. Toch zijn er ook andere geluiden te horen. Uit een enquête onder oud-medewerkers van het IOWO bleek geen overeenstemming over de rol van Freudenthal in het grote geheel van het ontwikkelwerk aldaar.⁷ Bovendien is het verbazingwekkend hoe Freudenthal door verschillende mensen op verschillende en haast tegenstrijdige manieren herinnerd wordt. In gesprekken met mensen die met hem werkten, bij hem studeerden of slechts zijdelings met hem te maken hadden, komt opvallend vaak telkens weer een ander beeld van Freudenthal naar voren. Waar hij voor de een moeilijk benaderbaar, afstandelijk en ongenaakbaar leek, kenden anderen hem als hartelijk en enthousiast, op het kinderlijke af. Enerzijds was er het beeld van de tedere grootvader, anderzijds dat van de onbenaderbare professor voor wie men bang was en die men het liefste meed.

Sociaaldemocraat, eigenwijs, loyaal, recht voor zijn raap, maar ook, vaak uit tactische overwegingen, behoudend en berekenend. Uiterst kritisch, snoeihard en vasthoudend in zijn oordeel, nooit bang om kritiek te uiten en fouten genadeloos af

6 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans*; Naast de terloopse opmerkingen door het hele boek heen, wijdde hij er een volledig hoofdstuk aan: ‘Werken aan onderwijs. Op weg’; *ibid.*, 335-363.

7 E.W.A. de Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde. Een historisch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw* (Utrecht 1999) 484-485.

te straffen. Hij was de ontzagwekkende wiskundige, maar tegelijkertijd ook de down-to-earth onderwijzman, observerend in een klaslokaal. De tijdens een discussie slapende toehoorder, die dan toch ineens niet bleek te slapen en uit het niets een wakkere opmerking kon plaatsen. Voor de een overheerste het beeld van een onbeheerste, autoritaire, ronduit slechte collegegever en spreker, voor de ander juist dat van een briljant inspirator met hart voor leerlingen, studenten en studentenzaken.

Onderzoeksmethode: het gebruik van Freudenthals persoonlijk archief

Zoals elke visie is ook Freudenthals eigen visie op de rol die hij speelde in de wiskundedidactiek gekleurd, maar het is wel een visie die een extra dimensie aan dit onderzoek geeft. Met grote regelmaat spreekt Freudenthal daarom vanuit zijn *Schrijf dat op, Hans* in dit onderzoek mee in de reconstructie van zijn werk, waardoor ook voor zijn versie van het gebeurde ruimte ontstaat. Zijn autobiografie en het beeld dat hij daar van zijn onderwijscarrière schetst, vormen echter nergens de leidraad van deze reconstructie.

Om tot een eigen interpretatie te komen heb ik juist Freudenthals persoonlijk archief als het voornaamste uitgangspunt van het onderzoek genomen. De reconstructie van gebeurtenissen en activiteiten is voornamelijk gebaseerd op de stukken zoals die in die zestien meter archief te vinden zijn.⁸ Naast de door Freudenthal zelf opgestelde lijst met ruim tweehonderd van zijn publicaties op het gebied van wiskundeonderwijs, bleek zich in dit archief nog een overvloed aan (on)gepubliceerd materiaal te bevinden op of nauw gelieerd aan het gebied van opvoeding, onderwijs en wiskundedidactiek. Niet in de laatste plaats bleek Freudenthals zorgvuldig bewaarde correspondentie een belangrijke bron.

Het laten spreken van de teksten houdt direct een zekere afstand van mij tot Freudenthal in en daardoor een minder uitgesproken mening over de persoon Freudenthal. Dit was nodig om een zekere distantie te bewaren zodat de mythe-Freudenthal tegen het licht – of misschien: tegen een ander dan het gebruikelijke licht – gehouden kon worden. Het resultaat is een reconstructie van de voornamelijk schriftelijke gegevens, waarbij een antwoord gevonden kan worden op de vraag in hoeverre de ‘mythe-Freudenthal’ correspondeert met de realiteit – of in ieder geval de realiteit, zoals die naar voren komt uit de hier gebruikte bronnen.

Het gebruik van Freudenthals persoonlijk archief had ook de nodige haken en ogen. Freudenthals enorm gevarieerde en uitgebreide interessegebieden hebben een rijk en intrigerend persoonlijk archief opgeleverd en bij het doorwerken ervan is het risico groot, af te dwalen naar het schrijven van een biografie. Freudenthal kon als geen ander nieuw verworven kennis soepel in zijn eigen gedachtegoed integreren, veelal zonder een directe verwijzing naar de bron van zijn ideeën. Om de ontwik-

8 P.J.M. Velthuys-Bechthold, *Inventory of the papers of Hans Freudenthal (1905-1990), mathematician. 1906-1990* (Haarlem 1999).

keling van dat gedachtegoed toch in kaart te kunnen brengen was veel werk nodig in het archief. Daarbij was het makkelijk door Freudenthals persoonlijkheid en gezichtspunten meegeslept te worden. Het gemak waarmee hij schreef, was daar debet aan. Hij zegt zelf over zijn schrijfstijl:

Ik hoef me geen geleerd lijkende taal aan te meten om diepte voor te spiegelen. Ik heb geen carrière voor me waarin zo'n taal tot aanbeveling zou kunnen strekken, en ik stel er geen prijs op het nageslacht aan het werk te zetten om dieptes van een onleesbare tekst te doorgronden. Aan mijn geestelijk portret valt niets meer te wijzigen, op mijn denkbeeld van wetenschappelijkheid hoef ik geen correctie aan te brengen. Simplex sigillum veri – vertaal ik als: wat waar is mag je onomwonden zeggen.⁹

Bij het doorwerken van zijn geschriften was het verleidelijk de nuchtere en schijnbaar bescheiden manier van schrijven zoals in zijn *Schrijf dat op, Hans* ook in dit onderzoek de toon te laten zetten. De uitdaging lag daar in het bepalen van een middenweg tussen een zakelijk-afstandelijke beschrijving van Freudenthals werk en een romantisch-biografisch betoog. Voor het vermijden van het eerste was een verder kijken dan de teksten en het integreren van correspondentie een manier, voor het vermijden van het tweede een zekere kritische terughoudendheid in het gebruiken van oral history en het niet klakkeloos overnemen van Freudenthals eigen reconstructie van zijn carrière.

De aard van het onderzoek en historiografie

Dit onderzoek is geen didactisch of wiskundig onderzoek, hoewel het in die zin wel relevant kan zijn. Het doel was niet Freudenthals gedachtegoed te toetsen op didactische waarde of in te zetten als bron voor onderwijsontwikkeling. Het onderzoek was evenmin het schrijven van een biografie. Biografische elementen heeft het onderzoek alleen voor zover deze betrekking hebben op Freudenthal als *didacticus*. Talloze aspecten van Freudenthals werk en leven kregen daardoor binnen dit onderzoek helaas geen plaats.

Het voornaamste doel van dit onderzoek was het uitvoeren van een historische analyse: Freudenthals didactische gedachtegoed wordt aan een historische analyse onderworpen, waarbij zijn persoonlijk archief als uitgangspunt genomen wordt. Het geeft geen volledig verslag van 'hoe het geweest is', maar distilleert uit de manuscripten *een* mogelijke manier om tegen Freudenthal en zijn werk aan te kijken. Het zo ontstane beeld van Freudenthal wordt daarbij getoetst aan dat van de 'mythe-Freudenthal'.

Over Freudenthals didactisch werk en de geschiedenis van het wiskundeonderwijs is al het een en ander geschreven. Dit onderzoek past binnen twee lijnen. Enerzijds past het binnen de lijn van de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. Over

9 Hans Freudenthal, *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren* (Utrecht 1984) 191-192.

de periode voor de Tweede Wereldoorlog schreef Klaas van Berkel over het wiskundeonderwijs in zijn biografie van E.J. Dijksterhuis.¹⁰ E.W.A. de Moor schreef in zijn proefschrift over de geschiedenis van het meetkundeonderwijs in Nederland, H.J. Smid over wiskundeonderwijs op Latijnse en Franse scholen in de negentiende eeuw.¹¹ Over de geschiedenis van het rekenonderwijs is er een overzichtsartikel van Jo Nelissen en over wiskundeonderwijs in de vorige eeuw verscheen de bundel *Honderd jaar wiskundeonderwijs*.¹² Ook in de dissertatie van Henk Klomp is veel aandacht voor de ontwikkelingen op het gebied van wiskunde- en natuurkundeonderwijs in het interbellum, met daarbij de nadruk op democratisering.¹³ Tot slot is er over de veranderende rol van wetenschap(pers) en de wereld van de wiskunde in Nederland na de Tweede Wereldoorlog veel te vinden in de proefschriften van Gerard Alberts en Leo Molenaar.¹⁴

De tweede lijn waarbinnen dit onderzoek past is de biografische lijn (hoewel biografische aspecten ook zeker voorkomen in werken uit de eerste lijn). Allereerst is daar Freudenthals autobiografische werk *Schrijf dat op, Hans*, waarin hij ook een analyse van zijn eigen didactisch werk geeft. Aspecten van Freudenthals didactische en historische werken worden besproken in *The legacy of Hans Freudenthal*.¹⁵ Kort na zijn dood verschenen diverse andere artikelen over Freudenthals leven en werk, zoals die van J. Adda, A. Bishop, J. van Dormolen, W.T. van Est en J. de Lange.¹⁶ Een analyse van een deel van Freudenthals didactisch gedachtegoed wordt onder meer gegeven in de proefschriften van De Moor, A. van Streun en J. Terwel.¹⁷ De laatste wijdde samen met K. Gravemeijer ook een artikel aan de didacticus

10 Klaas van Berkel, *Dijksterhuis. Een biografie* (Amsterdam 1996).

11 De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde*; H.J. Smid, *Een onbekookte nieuwigheid? Invoering, omvang, inhoud en betekenis van het wiskundeonderwijs op de Franse en Latijnse scholen 1815-1863* (Delft 1997).

12 Jo Nelissen, 'Eeuwenlang rekenen. Historische ontwikkelingen in het rekenonderwijs', *Willem Bartjens* 18 (1998/99) 36-39; Fred Goffree, Martinus van Hoorn, Bert Zwaneveld, eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs – een jubileumboek* (Leusden 2000).

13 Henk A. Klomp, *Relativiteitstheorie in Nederland. Breekijzer voor democratisering in het interbellum* (Utrecht 1997).

14 Alberts, *Jaren van berekening*; Leo Molenaar, 'Wij kunnen het niet langer aan de politici overlaten.' *De geschiedenis van het Verbond van Wetenschappelijke Onderzoekers 1946-1980* (Delft 1994).

15 Dit zijn de artikelen uit het 'In memoriam HF ('90)'-exemplaar van *Educational Studies in Mathematics* door Josette Adda, Fred Goffree, Henk J.M. Bos, W.T. van Est, A. Treffers, L. Streefland, J. de Lange, Christine Keitel; Leen Streefland, ed., *The Legacy of Hans Freudenthal* (Dordrecht 1993).

16 J. Adda, 'Freudenthal cursief. Hans Freudenthal (1905-1990)', *Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs* 10 (1991) 26; A. Bishop, 'Freudenthal cursief. HF – an inspiration in the search for truth', *Nieuwe Wiskrant* 10 (1991) 13; J. van Dormolen, 'Freudenthal cursief. Hoe didactiek een deel van wiskunde kan worden', *Nieuwe Wiskrant* 10 (1991) 19; W.T. van Est, 'Hans Freudenthal. 17 september 1905 – 13 oktober 1990', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 9 (1991) 131-136; W.T. van Est, 'Hans Freudenthal. 17 september 1905 – 13 oktober 1990', *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Jaarboek 1991* (Amsterdam 1991) 139-142; J. de Lange, 'In memoriam Hans Freudenthal', *Nieuwe wiskrant* 10 (1990) 3.

17 De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde*; A. van Streun, *Heuristisch wiskunde-onderwijs. Verslag van een onderwijsexperiment* (Groningen 1989); J. Terwel, *Onderwijs maken* (Harlingen 1984).

Freudenthal.¹⁸ In Van Berkels *Dijksterhuis. Een biografie* komt de didacticus Freudenthal aan de orde als opponent van Dijksterhuis. Tenslotte worden in Dirk van Dalen, *L.E.J. Brouwer. Een biografie* aspecten van Freudenthals leven en werk in Amsterdam besproken.¹⁹ Korte biografieën van Freudenthal zijn ook te vinden in het proefschrift van Molenaar en in de bundels *Honderd jaar wiskundeonderwijs en Kopstukken van het laagland*.²⁰

De opbouw van het boek

Dit boek heeft in hoofdlijnen een chronologische opbouw. Het eerste hoofdstuk geeft een schets van de stand van zaken in het (wiskunde)onderwijs in het interbellum, waarbij de nadruk ligt op HBS en gymnasium. Voor een goed begrip van de aard en de achtergronden van de discussies omtrent het wiskundeonderwijs in die periode wordt eerst gekeken naar de diverse onderwijsvormen zoals die in die tijd binnen het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs (VHMO) bestonden en worden de daarbij horende ontstaansgeschiedenis, achterliggende motieven en bedoelingen belicht. Naast de schoolsoorten passeren de strijdpunten binnen het wiskundeonderwijs en enkele belangrijke kopstukken op dat gebied de revue.

Vervolgens wordt in een biografisch hoofdstuk in grote lijnen het leven van Freudenthal neergezet. De nadruk ligt hierbij op de periode voor de Tweede Wereldoorlog met een meer globale aanduiding van de periode erna. De relevante biografische aspecten van deze latere periode komen op de desbetreffende plaatsen in de rest van het boek aan de orde.

In de laatste jaren van de Tweede Wereldoorlog schrijft Freudenthal een didactisch manuscript, het ongepubliceerde ‘Rekendidactiek’, zijn eerste op dat gebied. Hoofdstuk 3 beschrijft dit manuscript, dat afgezet tegen zijn ideeënontwikkeling in de jaren zeventig veel belangwekkends biedt. ‘Een nieuw begin’ heet vervolgens het hoofdstuk waarin de periode vlak na de Tweede Wereldoorlog wordt beschreven. In deze jaren zette Freudenthal zijn eerste stappen op het gebied van het wiskundeonderwijs en de wiskundedidactiek en zagen zijn eerste publicaties op deze gebieden het licht. Het is de periode waarin hij zich in Utrecht een plek veroverd en een actief en prominent lid van de Wiskunde Werkgroep zal worden.

Hoofdstuk 5 beslaat de periode 1950-1957, wanneer Freudenthals reputatie als ‘onderwijsman’ nationaal en internationaal meer vorm krijgt door zijn bemoeienissen in commissies, maar ook door zijn publicaties in bijvoorbeeld *De Groene Amsterdammer*. Zijn wiskundig-didactische ideeën krijgen een belangrijke nieuwe impuls door het werk van het echtpaar Van Hiele eind jaren vijftig. Freudenthal is

18 K. Gravemeijer en J. Terwel, ‘Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory’, *Journal of curriculum studies* 32 (2000) 777-796.

19 Dirk van Dalen, *L.E.J. Brouwer. Een biografie. Het heldere licht van de wiskunde* (Amsterdam 2001).

20 Martijn van Calmthout, ‘Hans Freudenthal. Kampioen van de alledaagse wiskunde’, in: P. Brill, red., *Kopstukken van het laagland. Een eeuw Nederland in honderd portretten* (Amsterdam 1999).

hierbij als promotor van Pierre van Hiele nauw betrokken en vindt in Van Hieles niveautheorie een inspirerende nieuwe didactische invalshoek. Een analyse van deze theorie en de manier waarop deze in Freudenthals gedachtegoed terug te vinden is, wordt gegeven in hoofdstuk 6.

Het hoofdstuk 'Methode versus inhoud' beslaat de periode rond 1960, wanneer de vanuit de Verenigde Staten overgewaaid moderniseringsgolf 'New Math' binnen het wiskundeonderwijs aan de orde is. In deze jaren speelt Freudenthal de rol die in de overlevering voortleeft als die van 'de eenzame tegenstander van New Math'. Het laatste hoofdstuk tenslotte is getiteld 'Freudenthal ziet het zo'. Hierin worden de jaren rond 1970 beschreven. In deze periode staat, naast uiteraard een grote rol voor het IOWO (de voorloper van het huidige Freudenthal Instituut en even onlosmakelijk met de naam Freudenthal verbonden), voornamelijk de consolidering van Freudenthals (wiskunde)onderwijsfilosofie centraal. De opbouwfase van Freudenthals didactiek is afgesloten. Hier eindigt het onderzoek.

Hiermee is de kous voor Freudenthals wiskundedidactiek nog lang niet af. Immers, Freudenthal werkt tot zijn overlijden in 1990 nog onvermoeibaar verder aan de ontwikkeling van wiskundeonderwijs en -didactiek. Op het moment waarop dit onderzoek eindigt, is de basis van een belangrijk deel van Freudenthals didactische ideeën echter uitgekristalliseerd. De richting waarin zijn werk zich zal ontwikkelen is daarmee in grote lijnen uitgezet. In de epiloog wordt tenslotte voor- en achteruit geblijkt.

HOOFDSTUK 2

Middelbaar wiskundeonderwijs en wiskundedidactiek in het interbellum

Om mijn verhaal goed in te kaderen, moet ik nog veel verder teruggaan en dan tot 1924 – jaren voor ik in Nederland kwam – het soort annus mirabilis van de wiskundedidactiek in Nederland.

Hans Freudenthal over het Nederlandse wiskundeonderwijs
in *Schrijf dat op, Hans*, 1987¹

Hans Freudenthals eerste kennismaking met het Nederlandse onderwijs was eind 1930 als 26-jarige docent aan de Universiteit van Amsterdam. Zijn beeld van de Nederlandse student was die van een vlijtige, weinig zelfstandige leerling, die bovendien nog langzaam van begrip was ook. Opvallend was, hoe Freudenthal de passieve houding van de studenten toeschreef aan het veel (en uit het hoofd) moeten leren van vreemde talen. Hij schreef in een brief in 1931:

Das Niveau des hollaendischen Studenten ist geringer als das des deutschen; das haengt mit dem etwas schwerfaelligen, traetigen Volkskarakter zusammen. Der hollaendische Student arbeitet sicher fleissich, begreift aber sehr langsam. Selbststaendig produktives Arbeiten findet man bei ihm sehr selten. Schuld daran ist vielleicht auch das Viellernenmuessen, das von dem Zwang Sprachen zu beherrschen, der bei einem kleinen Volk verstaendlich ist, herkommt. [...] Leider habe ich mit den Studenten noch nicht viel Kontakt bekommen und sehe sicherlich manche Dinge noch sehr vom Gesichtspunkt des Dozenten. Die Studenten sind sehr schuechtern, stellen weder in der Vorlesung noch nachher Fragen, man kommt sich waehrend des Vortrages wie ein Prediger in der Wueste vor.²

Meer dan het uiten van deze verbazing over de verschillen tussen Nederlandse en Duitse studenten deed Freudenthal niet. In de jaren dertig besteedde hij zijn tijd hoofdzakelijk aan het werk als assistent van de wiskundige L.E.J. Brouwer. Tijdens de Tweede Wereldoorlog raakte hij geïnteresseerd in het rekenonderwijs van de lagere school en de bijbehorende rekendidactiek en hield hij zich bezig met een literatuurstudie over dit onderwerp.³

Pas na deze oorlog zou Freudenthal zich actief met het wiskundeonderwijs en de wiskunedidactiek in Nederland gaan bemoeien en met zijn ideeën naar buiten treden. Hij richtte zich daarbij in de jaren veertig en vijftig vooral op het wiskundeon-

1 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 339.

2 Freudenthal aan Darlehenkasse des Deutschen Studentenwerks E.V., 30 mei 1931; Rijksarchief in Noord-Holland, Papers of Hans Freudenthal (1905-1990), mathematician, 1906-1990 (voortaan: RANH, Hans Freudenthal Papers), inv.nrs. 21, 141.

3 Meer over deze literatuurstudie in hoofdstuk 4.

derwijs op het vHMO. Hij begaf zich daarmee niet op onontgonnen terrein. Vóór Freudenthals bemoeienissen hadden zich daar al de nodige discussies afgespeeld.

Om een idee te krijgen hoe Freudenthal in dit wiskundig-didactisch landschap paste, is allereerst een globale schets van het wiskundeonderwijs in het interbellum nodig. Hoe zag het vHMO en het wiskundeonderwijs dat er gegeven werd er in die tijd uit? Welke discussies werden er gevoerd? En wie waren de toonaangevende personen binnen die discussies? ⁴

2.1 Het middelbaar onderwijs in het interbellum

2.1.1 Het ontstaan van de schooltypen van het vHMO

Rond 1918 was het middelbaar onderwijs in Nederland vastgelegd in de wet op het middelbaar onderwijs van 1863 (de MO-wet), de eerste wet op het middelbaar onderwijs. Een schooltype als de ULO (uitgebreid lager onderwijs) en MULO (meer uitgebreid lager onderwijs) behoorden tot het lager onderwijs, het gymnasium tot het hoger onderwijs. De ontwerper van de MO-wet, de liberaal Johan Rudolf Thorbecke (1798-1872), had een duidelijk tweeledige functie van het onderwijs voor ogen, die direct samenhang met de hiërarchie van de standenmaatschappij.

Allereerst was er het soort onderwijs dat een opleiding zou bieden, direct gericht op de maatschappelijke behoefte. Dit onderwijs was bedoeld voor wat Thorbecke zag als ‘de kern van de maatschappij’, gevormd door de grote middengroep burgers (bestaande uit respectievelijk de ‘eenvoudige burgerstand’ en de ‘grote burgerij’). Voor deze groep moest het onderwijs modern, algemeen vormend en praktijkgericht zijn. Zo zou het een goede voorbereiding bieden voor de taak die de kinderen uit de burgerij in de maatschappij zouden gaan vervullen, bijvoorbeeld in het bedrijfsleven en de administratie. Voor dit doel werden de burgerscholen en hogere burgerscholen (HBS) ontworpen. Als aanvulling hierop was er de Polytechnische School te Delft. Tezamen met de middelbare scholen voor meisjes (MMS) behoorden deze schooltypen tot het middelbaar onderwijs. De HBS en de Polytechnische School zouden uiteindelijk de meest succesvolle schooltypen blijken.⁵

Hiernaast onderscheidde Thorbecke het hoger onderwijs, waartoe het gymnasium en de universiteit behoorden. Het gymnasium bood als enige school een klassieke opvoeding, voorbehouden aan de geleerde stand en vormde zo de enig moge-

4 Bij het samenstellen van de volgende paragrafen zijn gegevens ontleend aan de volgende werken: A. Bartels, *Een eeuw middelbaar onderwijs 1863-1963* (Groningen 1963); P.Th.F.M. Boekholt en E.P. de Booy, *Geschiedenis van de school in Nederland vanaf de middeleeuwen tot aan de huidige tijd* (Assen/Maastricht 1987); N.L. Dodde, *Het Nederlandse onderwijs verandert* (Muiderberg 1983); De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde*; Smid, *Een onbekookte nieuwigheid?*; Joh.H. Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraars. Delen I, II, III* (Groningen 1971, tweede druk).

5 Ph.J. Idenburg, J. Karsemeijer en H.H. Janssen, *Een eeuw middelbaar onderwijs herdacht* (Groningen 1963) 5-6.

lijke weg naar een studie aan de universiteit.⁶ Thorbecke, die een strikte scheiding tussen ‘geest’ (hoger onderwijs) en ‘zaak’ (middelbaar onderwijs) voorstond, handhaafde zo het gymnasium als aparte instelling met hoge status.

2.1.2 Enkele schooltypen

De HBS

Een van de kenmerken van het Nederlandse onderwijs in die tijd was de grote vrijheid die er, althans in eerste instantie, aan de scholen gelaten werd. De MO-wet stelde geen eisen aan het eindexamen, het vakkenpakket of de leerstof voor de diverse vakken. Om toch een zeker opleidingsniveau van de abiturienten te kunnen garanderen, werd al snel overgegaan tot instelling van een staatsexamen met regels voor zowel de inrichting, de inhoud, als de beoordeling van het eindexamen.⁷

Helaas veroorzaakte deze regeling een enorme overbelasting en een te uitgebreid vakkenpakket op de HBS. Ook klonken er klachten over de verouderde stof die onderwezen werd. Vele pogingen zijn er gedaan om hierin orde te scheppen en diverse plannen zijn in de loop der jaren door ministers en inspecteurs ontworpen, maar tot een grootscheepse reorganisatie in het middelbaar onderwijs kwam het niet.

Niettemin groeide de HBS uit tot de meest succesvolle van de in de wet van 1863 voorgestelde vormen van middelbaar onderwijs. Als tegenhanger van het gymnasium, waar vooral het onderwijs in de klassieke talen overheerste, lag binnen het onderwijs op de HBS het accent op moderne talen en de exacte vakken als wis- en natuurkunde. Gemiddeld een derde van de tijd werd er op de HBS aan de exacte vakken besteed. Zoals ook op andere schooltypen gebruikelijk, was het klassikale schoolsysteem op de HBS het meest gangbaar. Het eindexamen bepaalde de te behandelen stof.

Voor de wiskunde bestond het eindexamen HBS-B uit de onderdelen reken- en stekunde (algebra), driehoeksmeting (trigonometrie), stereometrie en beschrijvende meetkunde. De wiskundeles verliep volgens het stramien ‘uitleggen, voordoen, nadoen en eindeloos oefenen’. Pierre van Hiele, wiskundedocent en didacticus, schreef over de toenmalige houding ten opzichte van de te onderwijzen wiskunde:⁸

Geen leerling betwijfelde de noodzaak van bewijzen in de ‘wiskunde’. Er waren er natuurlijk genoeg die daar moeite mee hadden. Als je wiskunde per se nodig had, deed je je uiterste best om er ten minste zoveel van te begrijpen dat je later niet in de moeilijkheden kwam. In het andere geval kon je je werpen op de vraagstukken om zo hoog mogelijk te scoren. De leraren speelden daarop in: zij beijverden zich om de stof zo exact mogelijk voor te dragen, maar zij hielpen de leerlingen met de uitwijkmogelijkheid van de vraagstukken. Per slot van rekening nam de bewijsvoering op het eindexamen niet zo’n grote plaats in.⁹

6 Ibid., 6.

7 Ph.J. Idenburg, *Schets van het Nederlandse schoolwezen* (Groningen 1964) 40-41.

8 Meer over Pierre van Hiele en zijn wiskundig-didactisch werk in hoofdstuk 7.

9 Pierre van Hiele, ‘De illusie van het streng redeneren’, in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs* 71-82, aldaar 72.

Ondanks het grote succes van dit schooltype was er ook veel kritiek op de HBS. E. Jensema, in 1927 directeur van de Rijks-HBS te Groningen, onderscheidde in deze tijd drie punten van algemene kritiek. Zo zou het onderwijs op de HBS te wiskundig zijn en zou het leerlingenverloop te groot zijn. De school zou bovendien te tweeslachtig zijn door tegelijkertijd zowel eindonderwijs als voorbereidend (hoger) onderwijs te willen verzorgen.¹⁰

Het gymnasium

Het eerste gymnasium ontstond in 1838 als resultaat van een fusie tussen de Latijnse school en de gemeentelijke lagere school “van de hoogste klasse” in Den Haag.¹¹ Het gymnasium had twee afdelingen: de eerste afdeling, die fungeerde als voortzetting van de Latijnse School en waar de nadruk lag op het onderwijs in Latijn en Grieks als voorbereiding op de universiteit. Binnen de tweede afdeling lag de nadruk op wis- en natuurkunde en moderne talen. Deze afdeling voorzag in de groeiende behoefte naar een opleiding voor de maatschappij.

Het gymnasium behield zijn formele en sociale status na de invoering van de MO-wet van 1863. Ook de Latijnse scholen vielen sinds 1878 onder de noemer ‘gymnasium’. Sinds de wet op het hoger onderwijs van 1876 waren het lesprogramma en lesrooster op het gymnasium nauwkeurig voorgeschreven. Wiskunde was een van de verplichte vakken.

Hier was dus geen sprake van de vrijheid bij de invulling van het onderwijs zoals die bijvoorbeeld op de HBS gold. Toen het praktisch nut van de studie van de klassieke talen in de maatschappij steeds kleiner bleek, werd het aloude argument van de vormende waarde van de klassieken voor handhaving van de klassieke opleiding aangevoerd. Echter, de concurrentie van de HBS werd steeds duidelijker gevoeld en leidde in 1876 tot splitsing van de gymnasia in een α -afdeling (met een taalkundig gericht programma) en een β -afdeling (waar, naast de klassieke talen, ook veel aandacht aan de exacte vakken werd gegeven). Het schriftelijke eindexamen wiskunde voor de β -variant bestond uit algebra, analytische meetkunde, stereometrie en goniometrie.

De MMS

De middelbare school voor meisjes was een van de schooltypen dat zich in volle vrijheid kon ontwikkelen en handhaven en een alternatief bood voor de overwegend door jongens bezochte HBS. Er waren geen wettelijke bepalingen die de inhoud en vorm van het onderwijs vastlegden en pas in 1935 werden er enige studierechten aan dit schooltype verbonden. Wiskunde maakte geen deel uit van het eindexamen, hetgeen grote vrijheid bood aan docenten en auteurs van de schoolboeken. Veelal werd er op de MMS alleen in de eerste drie klassen wiskundeonderwijs gegeven.¹²

10 E. Jensema, *Het middelbaar onderwijs en de critiek, die daarop uitgeoefend wordt* (Groningen 1927) 6-7; zie ook paragraaf 2.1.3.

11 Smid, *Een onbekookte nieuwigheid?* 41, 143.

12 N. Blom en F. Meester, ‘Hanneke koos toch wiskunde’, in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs* 281-296, aldaar 286.

Het lyceum

In 1909 werd in Den Haag het eerste lyceum opgericht door de rector R. Casimir (1877-1957), de latere eerste hoogleraar pedagogiek in Nederland. Het lyceum, bestaande uit een gymnasium, een HBS en soms ook een MMS onder één dak, had als oorspronkelijk doel de schoolkeuze van de leerlingen uit te stellen door een gezamenlijke onderbouw te bieden. Immers, de keuze gymnasium of HBS op 12-jarige leeftijd bepaalde direct de toekomstige (studie)mogelijkheden van de leerlingen. Bovendien was het efficiënter en goedkoper om drie scholen ineens te stichten dan drie afzonderlijke.

Over het belang van de lycea voor onderwijshervorming schreef Wansink:

De vernieuwende tendensen op pedagogisch-didactisch terrein zijn bij de lycea sterker geweest dan bij de meer starre vormen van hogereburgerschool en gymnasium in de v.H.M.O.-periode. Bij het lyceum werd in onze schoolorganisatie voor het eerst rekening gehouden met het kind als medebepalend element.¹³

In zekere zin kan het lyceum als de voorloper van de moderne scholengemeenschap gezien worden. Het duurde tot 1968 voordat het lyceum wettelijk als schooltype gefundeerd werd. Tot die tijd bestond het lyceum bij de gratie van het feit dat de wet onder zekere voorwaarden afwijkingen bij de inrichting van gymnasia toestond.¹⁴

2.1.3 De concurrentiestrijd tussen HBS en gymnasium

Al vanaf de invoering van de MO-wet begon de opvatting post te vatten dat de HBS voor bepaalde studies aan de universiteit (met name de artsopleiding en studies aan de faculteit der wis- en natuurkunde) een minstens even goede (zo niet betere!) voorbereiding zou bieden als het gymnasium. Steeds meer HBS-ers studeerden via omwegen (zoals het volgen van testimoniacolleges Grieks, Latijn, logica en het doen van toelatingsexamen voor de universiteit) toch verder na het behalen van hun diploma. Vanaf 1865 begon de minister in uitzonderingsgevallen hiervoor vrijstellingen te geven. Ook was het vanaf 1878 mogelijk om een artsstudie te voltooien als bezitter van een HBS-diploma door het afleggen van aan de academische examens parallel lopende examens.

Dit soort regelingen die het voor HBS-ers mogelijk maakten aan de universiteit te gaan studeren kwamen er steeds meer. Dit leidde in 1917 uiteindelijk tot de indiening van een wetsvoorstel door het Tweede Kamerlid J. Limburg. Zijn voorstel, dat HBS-gediplomeerden onder andere de bevoegdheid tot het afleggen van examens aan de faculteit der wis- en natuurkunde verleende, werd met ruime meerderheid van stemmen aangenomen. Het betekende een definitief einde van de door Thorbecke voorgestane tweedeling zaak-geest. Bovendien betekende het een breuk

¹³ Zie ook: Idenburg, *Schets van het Nederlandse schoolwezen* 372; Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Deel 1* 80.

¹⁴ Gymnasium, HBS en lyceum vormden samen wat als het Voorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs (VHMO) aangeduid werd.



E.J. Dijksterhuis.

met de overtuiging dat een klassieke vooropleiding noodzakelijk was voor het doen van een academische studie en benadrukte het daarmee impliciet de waardering voor wiskunde en natuurwetenschappen. Het was nu duidelijk dat de HBS in haar oorspronkelijke opzet als maatschappijsschool en eindonderwijs niet geslaagd was. Met de splitsing van de HBS in wat later de A-afdeling (literair-economische afdeling) en de B-afdeling (met de nadruk op wis- en natuurkunde) zou worden, probeerde men in deze leemte te voorzien.

De toewijzing van studierechten aan HBS-B gediplomeerden (en later ook voor bepaalde studierichtingen aan HBS-A gediplomeerden) verzwakte de monopoliepositie van het gymnasium natuurlijk aanzienlijk. Om het gymnasium weer enigszins aantrekkelijk te maken voor leerlingen die een exacte studie wilden volgen, werd in 1919 bij Koninklijk Besluit tot modernisering van het gymnasium besloten. Er kwam meer ruimte voor wis- en natuurkunde in het programma. Daarbij werden nieuwe, moderne onderwerpen zoals de differentiaalrekening en integraalrekening geïntroduceerd als onderdeel van de te onderwijzen algebra. Zo bleef het gymnasium de HBS een stap voor. Echter, deze nieuwe zware β -afdeling, in combinatie met de status die het gymnasium van oudsher al had, maakte het tot de moeilijkste school, slechts voorbehouden aan een kleine elite.

2.2 Discussies over het wiskundeonderwijs op het Vhmo

Door de industrialisering in Nederland aan het eind van de voorvorige eeuw genoten de natuurwetenschappen, dankzij de praktische waarde en het nut die zij voor de maatschappij hadden, een steeds groter aanzien. Na de Eerste Wereldoorlog echter voltrok zich een omwenteling in de waardering voor de wis- en natuurkunde en verloren de natuurwetenschappen weer veel van hun aanzien. Er ontstond wat de wiskundige Dijksterhuis noemde een aan de mathesis vijandige tijdgeest. Deze drukte zijn stempel op veel van de ideeën over de herziening van het onderwijs.¹⁵

E.J. Dijksterhuis (1892-1965) was na zijn studie wiskunde in Groningen jarenlang wiskundeleraar op de Rijks-HBS te Tilburg en als wetenschapshistoricus gedurende zijn loopbaan verbonden aan diverse universiteiten. Als voorstander van een logisch-deductief ingericht wiskundeonderwijs speelde hij een belangrijke rol in de discussies over wiskundeonderwijs in het interbellum. Hij stelde hoge eisen aan de strengheid van het wiskundeonderwijs en was in hoge mate overtuigd van de vormende waarde die er van dergelijk wiskundeonderwijs zou uitgaan.

De vormende waarde van de wiskunde was een telkens in meer of mindere mate aanwezig argument in de discussies over wiskundeonderwijs. De overtuiging was dat er van de wiskunde een positief effect op het denkvermogen in het algemeen en het logisch redeneren in het bijzonder zou uitgaan – de zogenaamde ‘oefening van de geest’.¹⁶ Hierbij was de onderliggende gedachte dat ‘transfer’ (of overdracht) mogelijk was: het kunnen toepassen van vaardigheden in een ander (vak)gebied dan die waarin zij verkregen zijn. In de literatuur wordt daarbij onderscheid gemaakt tussen horizontale transfer (tussen taken van vergelijkbare orde) en verticale transfer (tussen een taak van lagere orde naar die van een hogere orde).¹⁷ Van positieve transfer is sprake als het eerder geleerde het erna te leren vergemakkelijkt. Inherent aan de discussie over de vormende waarde is het vraagstuk in hoeverre het ‘leren denken’ onderwijsbaar is.¹⁸

De algemene consensus eind negentiende eeuw was dat het wiskundeonderwijs vormende waarde had. In het begin van de vorige eeuw zette in Amerika echter een aan het argument van de vormende waarde tegengestelde tendens in.¹⁹ Onderzoeksresultaten van psychologen als E.L. Thorndike suggereerden geen of nauwelijks transfer, waardoor de nadruk met betrekking tot het doel van het Amerikaanse reken- en wiskundeonderwijs verschoof naar de praktische toepassingen van het

15 Van Berkel, *Dijksterhuis* 96.

16 Over definitie en discussie over de vormende waarde van de wiskunde in het interbellum, zie ook: Van Berkel, *Dijksterhuis* 90-93; De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde* 313-340.

17 H.J. Klausmeier, J.K. Davis, ‘Transfer of learning’, in: R.L. Ebel et al, ed., *Encyclopedia of educational research* (London 1969) aldaar 1483-1493.

18 Over Freudenthal en leren denken zie ook paragrafen 5.1.3 en 6.1.

19 S.S. Willoughby, ‘Mathematics’, in: R.L. Ebel et al, ed., *Encyclopedia of educational research* (London 1969) 766-777, aldaar 769.

vak.²⁰ In de jaren dertig kwam in de Verenigde Staten in deze tendens een kentering, toen uit nieuw onderzoek bleek dat met name op ‘begrip’ gericht wiskundeonderwijs wél een zekere mate van transfer teweeg bracht.

In Nederland was van vergelijkbare tendensen in het interbellum weinig te merken. Onder leraren werd de vormende waarde van de wiskunde nog steeds als vaststaand gegeven beschouwd en als belangrijk doel van het wiskundeonderwijs gezien. Ook onder pedagogen was de consensus dat wiskundeonderwijs (maar ook het onderwijs in oude talen) geschikt was om (logisch) te leren denken. De enkele kritische kanttekeningen die gehoord werden, zoals van de Amsterdamse hoogleraar wiskunde G. Mannoury in 1921 en later van D. van Dantzig, hadden hierop weinig invloed.²¹ Volgens Dijksterhuis behoorde het wiskundeonderwijs “het denkvermogen van den leerling te scherpen en moet [het] hem een inzicht geven in dat boven het materiele uitgaande streven van den menschelijken geest, waaruit de wetenschap is voortgekomen”.²²

Stond de vormende waarde van de wiskunde niet ter discussie, wel was er veel kritiek op het te wiskundige karakter van de HBS. De wiskundige H.J.E. Beth (1880-1952), directeur van de Rijks-HBS in Deventer, schreef in 1924 in het *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*:

De uitdrukkingswijze “meer en meer wiskundig karakter der HBS” is reeds zoo ingeburgerd [...], dat menigeen, buiten het wiskundig kamp opgesteld (zelfs vele wiskundige collega’s zijn het praatje gaan gelooven), zich met verbazing zal afvragen, of het dan niet waar is. Welnu, op deze vraag kunnen we antwoorden met één woord: nonsens!²³

Volgens Beth was het wiskundige karakter van de HBS de laatste jaren zelfs “op bedenkelijke wijze afnemend”. Inderdaad waren er in vergelijking met de situatie van vijfentwintig jaar eerder minder uren voor wiskunde gereserveerd.²⁴ De verminderde waardering van het vak wiskunde was op de HBS vooral toe te schrijven aan de teleurstelling van de vele afvallers, voor wie de wiskunde het struikelblok zou hebben gevormd. Ook noemde Beth veel gehoorde argumenten als “je hebt niets aan wiskunde” en “niet iedereen is geschikt voor wiskunde”.²⁵ Maar naast deze geluiden klonk ook een pleidooi voor het verder moderniseren van de wiskunde op de HBS.

In de jaren tussen beide wereldoorlogen waren er drie belangrijke discussies op

20 Kohnstamm bekritiseerde deze uitkomsten, omdat volgens hem de experimenten waarop ze gebaseerd waren niet deugden; Kohnstamm, ‘Over de “vormende waarde” der leervakken’, in: *Keur uit het didactisch werk van Prof.dr. Ph. Kohnstamm* (Groningen 1952) 1-31, oorspronkelijk gepubliceerd in 1929-1930.

21 Van Berkel, *Dijksterhuis* 92; De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde* 318.

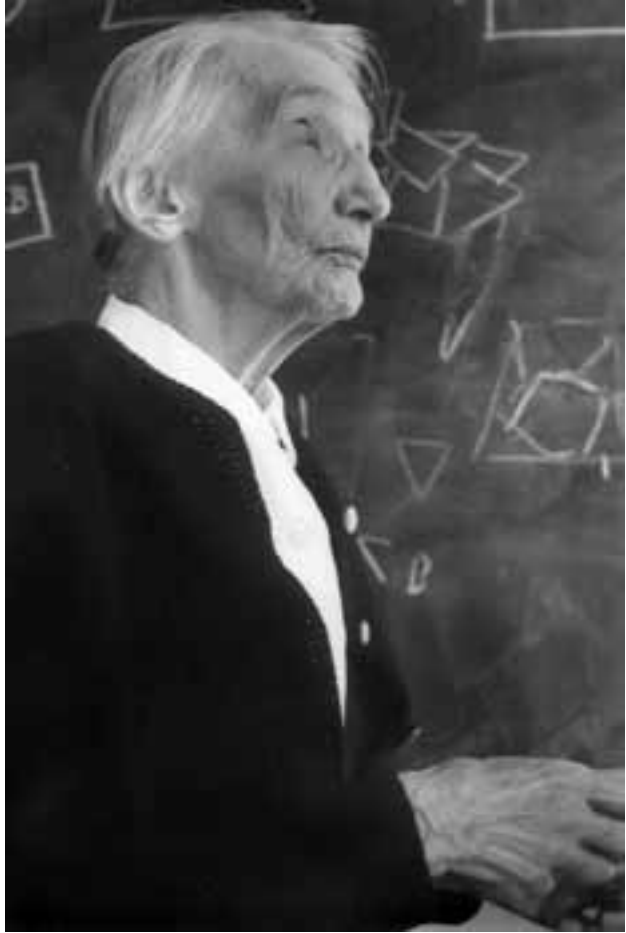
22 Zoals geciteerd in: Van Berkel, *Dijksterhuis* 91.

23 H.J.E. Beth, ‘Het “meer en meer wiskundig” karakter der H.B. School met 5-jarigen cursus’, *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 1 (1924/25) 90-100, aldaar 92-93.

24 Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Deel I* 99. In 1900 waren dit er in totaal over alle klassen genomen 29 uren per week, in 1920 waren dit er 26.

25 Beth, ‘Het “meer en meer wiskundig” karakter der H.B. School met 5-jarigen cursus’, *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 1 (1924/25) 90-100, aldaar 97-100.

T. Ehrenfest-Afanassjewa.



het gebied van het wiskundeonderwijs op de HBS te onderscheiden. Zo was er de discussie omtrent de inrichting van het aanvankelijk meetkundeonderwijs op de HBS. Daarnaast waren er de pogingen tot modernisering van het wiskundeonderwijs op de HBS, waarbij het leerplan-ontwerp van de commissie-Beth en de discussie omtrent de invoering van de differentiaal- en integraalrekening centraal stonden. Tenslotte was er de strijd om het vak mechanica: waar hoorde het thuis en door welke docenten moest het gegeven worden? In deze drie discussies kwamen de achterliggende gedachten en motieven van de diverse voor- en tegenstanders aan de orde, waardoor een goed beeld ontstaat van de heersende opvattingen over het hoe en waarom van het wiskundeonderwijs.²⁶

²⁶ Bij het samenstellen van de volgende paragrafen zijn gegevens ontleend aan de volgende werken: Van Berkel, *Dijksterhuis*; Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Delen I, II, III* en de jaargangen van *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 1-3, en *Euclides. Tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken*, 4-20.



De eerste twee jaargangen van *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde gewijd aan Onderwijsbelangen*, later omgedoopt tot: *Euclides. Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken*.

2.2.1 Het aanvankelijk meetkundeonderwijs en de oprichting van *Euclides*

In 1924 schreef de wiskundige Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa (1876-1964) de brochure *Wat kan en moet het Meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven?*²⁷ De van oorsprong Russische mevrouw Ehrenfest rondde haar studie wis- en natuurkunde af in Sint-Petersburg en studeerde daarna in Göttingen bij wiskundigen Felix Klein en David Hilbert. Naast haar wetenschappelijk onderzoek (onder andere op het gebied van de theoretische natuurkunde) gaf zij tot 1908 wiskundeles. Met haar echtgenoot, de fysicus Paul Ehrenfest (1880-1933), woonde zij vanaf 1912 lange tijd in Leiden. Mevrouw Ehrenfest had grote interesse voor onderwijs en opvoeding en gaf hieraan een concrete invulling door het organiseren van maandelijks-

²⁷ Conform de contemporaine schrijfwijze (en om onderscheid te kunnen maken met haar echtgenoot Paul Ehrenfest) wordt zij vanaf nu aangeduid met ‘mevrouw Ehrenfest’.

se wiskundig-didactische colloquia voor leraren bij haar thuis. Hier werd stevig gediscussieerd over hervorming van het in haar ogen verstarde wiskundeonderwijs in Nederland.²⁸

De al eerder genoemde Dijksterhuis schreef een reactie op de brochure van mevrouw Ehrenfest, *Moet het Meetkunde-onderwijs gewijzigd worden?*, die hij naar zijn uitgever Noordhoff stuurde. Deze stelde P. Wijdenes (1872-1972) voor het stuk in het *Nieuw Tijdschrift voor de Wiskunde* op te nemen. Wijdenes was niet alleen wiskundeleraar in Amsterdam, maar ook toonaangevend schrijver van leerboeken voor het wiskundeonderwijs. Het leidde uiteindelijk tot de oprichting van het *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde gewijd aan Onderwijsbelangen*, waarvan Wijdenes samen met J.H. Schogt (ook wiskundeleraar in Amsterdam) de redactie zou vormen.

Drie jaar later zou het *Bijvoegsel* omgedoopt worden tot *Euclides. Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken*, en nog later zou het tijdschrift het contactorgaan vormen van de lerarenverenigingen WIMECOS en LIWENAGEL. WIMECOS was de in 1925 opgerichte “Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmographie aan Hoogere Burgerscholen met vijfjarigen cursus B, Lycea en Meisjes-Hoogere Burgerscholen met 5-/6- jarigen cursus”. LIWENAGEL – “Leraren in de Wiskunde en Natuurwetenschappen aan Gymnasia en Lycea” – was vier jaar eerder al opgericht. Alle belangrijke discussies, vernieuwingen en plannen op het gebied van het wiskundeonderwijs zouden de komende jaren in *Euclides* aan bod komen.²⁹

Wat had mevrouw Ehrenfest geschreven dat zo’n reactie uitlokte? In haar brochure kaartte ze het aanvankelijk meetkundeonderwijs aan. In feite verschilde het uiteindelijke doel dat zij met dit onderwijs voor ogen had weinig met dat van Dijksterhuis: het komen tot een axiomatisch opgebouwde Euclidische meetkunde. De manier waarop zij dit wilden bereiken maakte echter direct een fundamenteel verschil in opvatting duidelijk.

Mevrouw Ehrenfest pleitte voor een betere voorbereiding van de leerlingen op de logica van de axiomatisch opgebouwde meetkunde door allereerst aandacht te schenken aan de ontwikkeling van de intuïtie en het ruimtelijk voorstellingsvermogen van de leerlingen. Dit wilde ze realiseren in een propedeutische cursus, waarbij aanschouwelijkheid en concreet handelen centraal zou staan. Hierbij zouden, althans in het aanvankelijk onderwijs, de voor de leerlingen meest evidente stellingen niet meer direct bewezen hoeven worden.

28 D. Struik, ‘Schoolwiskunde voor de Eerste Wereldoorlog’, in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs* 37-41, aldaar 40.

29 Meer over de ontwikkeling van het meetkundeonderwijs in deze periode in het algemeen en de discussie tussen mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis in het bijzonder: De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde*.

Later zou ze een dergelijke inleidende cursus meer praktisch uitwerken in haar boek *Uebungensammlung zu einer geometrischen propädeuse*. Hierin beschreef ze een kleine tweehonderd praktische opdrachten voor gebruik in de klas. Het belangrijkste resultaat dat een leraar bij het gebruik van deze opgaven kon bereiken was volgens haar de volgende:

Man wird instande sein die Schüler vor solche Probleme zu stellen, wovon der geometrische Inhalt ihnen vollkommen zugänglich sein wird, wo sie aber merken werden, dass für dessen sichere Beantwortung eine kritische Untersuchung nötig ist: sie werden den Impuls bekommen um Sätze zu beweisen!³⁰

In de ogen van Dijksterhuis vormde een dergelijke op aanschouwelijkheid stoelende aanpak een aanslag op, zoals hij het noemde,

... wat steeds als een der meest kostelijke vruchten van het wiskundeonderwijs heeft gegolden: op de zuiverheid en eerlijkheid van het mathematische denken en spreken, op de geestelijke tucht, orde en reinheid, die de mathesis nastreeft.³¹

Kennismaking met een wereld als die van de wiskunde was volgens Dijksterhuis van het hoogste belang voor de ontwikkeling van het intellect van de leerlingen. Hij zag als doel van het meetkundeonderwijs de leerlingen zuiver te leren denken en spreken. Spontane vermoedens of inzichten moesten zeker niet ontmoedigd worden, maar niets in de Euclidische meetkunde mocht in zijn ogen aanvaard worden zonder een streng logisch bewijs. Als richtsnoer voor het meetkundeonderwijs haalde Dijksterhuis een uitspraak aan van de Duitse getaltheoreticus R. Dedekind (1831-1916) uit *Was sind und was sollen die Zahlen* (1888):

Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden.³²

Dijksterhuis twijfelde ten zeerste aan de haalbaarheid van mevrouw Ehrenfests voorgestelde cursus, vooral voor de niet zo wiskundig aangelegde leerling (zonder toereikend voorstellingsvermogen):

Men kan juist den niet wiskundig aangelegden leerling geen sterkeren moreelen steun geven, dan wanneer men hem de overtuiging weet bij te brengen, dat alles wat hij op de H.B.S. van Wiskunde heeft te leeren (de vaak zo gevreesde Beschrijvende Meetkunde niet uitgesloten) voor hem bereikbaar is door zuiver logisch redeneeren en dat een goed voorstellingsvermogen weliswaar voor hem, die het bezit, een machtig hulpmiddel vormt, maar dat het gemis aan dat vermogen nooit een onoverkomelijk struikelblok kan zijn.³³

30 T. Ehrenfest-Afanassjewa, *Uebungensammlung zu einer geometrischen Propädeuse* (Den Haag 1931) 10.

31 E.J. Dijksterhuis, 'Moet het Meetkunde-onderwijs gewijzigd worden? Opmerkingen naar aanleiding van een brochure van Mevr. Ehrenfest-Afanassjewa', *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 1 (1924/25) 1-26, aldaar 11.

32 *Ibid.*, 14.

33 *Ibid.*, 21.

Hierin is al enigszins de basisgedachte te herkennen van wat Dijksterhuis op 12 februari 1934 in een rede voor de Vereniging voor Paedagogisch Onderwijs aan de Rijksuniversiteit te Groningen zou presenteren als epistemisch wiskundeonderwijs. De benaming van dit wiskundeonderwijs baseerde hij op Plato's tegenstelling tussen "εμπειρία" (kennis op grond van ervaringen) en "επιστήμη" (kennis waarbij men zich bovendien rekenschap kan geven van de onderlinge samenhang van die feiten en de grondslag waarop die kennis berust). Grondgedachte hierbij was, dat de leerling zich in het wiskundeonderwijs op elk moment rekenschap zou moeten kunnen geven van de onderlinge samenhang van hetgeen hij geleerd had. Een belangrijk hulpmiddel bij dergelijk onderwijs zou de ontstaansgeschiedenis van een vak vormen, omdat dit het inzicht bij de leerlingen zou vergroten.³⁴ Zo ver was Dijksterhuis in 1924 echter nog niet en met de uitnodiging aan mevrouw Ehrenfest om vooral door te gaan met het uiten van "hare, ook voor den tegenstander steeds zeer belangwekkende denkbeelden over het wiskundeonderwijs" besloot Dijksterhuis zijn betoog.

In haar reactie verdedigde mevrouw Ehrenfest nogmaals de noodzaak, het ruimtelijke voorstellingsvermogen te vergroten door middel van een propedeutische cursus om bij de leerlingen een besef van de noodzakelijkheid van een goede systematische opbouw van de meetkunde te doen ontstaan:

De heer D. vraagt, hoe ik verlangen kan, dat de leerlingen zich de ruimtelijke figuraties althans kwalitatief juist voorstellen, vóór ze geleerd hebben, daarover logisch bevredigende stellingen uit te spreken. Ik moet daar de vraag tegenover stellen: hoe kunnen ze iets anders doen, dan die stellingen napraten, vóór ze geleerd hebben, zich de dingen, waarover ze spreken, goed voor te stellen?³⁵

Tot slot sprak ze de hoop uit dat de vele leraren, die tot nu de gewoonte hadden slechts te denken aan de vroegere methode, in deze discussie aanleiding zouden vinden hun methode nog eens aan hun ideaal te toetsen.

In een laatste reactie bestreed Dijksterhuis nogmaals de stelling dat een heldere voorstelling noodzakelijk zou zijn voor het begrijpen van de meetkunde. Het was beter om *tijdens* de systematische opbouw van de meetkunde het voorstellingsvermogen van de leerlingen te ontwikkelen en wel vanaf het begin van die systematische cursus, zo schreef hij. Stellingen bewijzen die het kind triviaal vond, was niet erg en van dergelijke klachten trok Dijksterhuis zich dan ook niets aan:

Een kind moet tenslotte ook leren, zich tot gedachtenconcentratie te dwingen en het is niet altijd noodig, dat het het waarom beseft van de dingen, die men het laat doen.³⁶

34 E.J. Dijksterhuis, 'Epistemisch wiskundeonderwijs', *Euclides* 10 (1933/34) 165-213, aldaar 173.

35 T. Ehrenfest-Afanassjewa, 'Moet het Meetkunde-onderwijs gewijzigd worden? Een antwoord aan den heer E.J. Dijksterhuis', *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 1 (1924/25) 47-59, aldaar 55.

36 E.J. Dijksterhuis, 'Antwoord aan mevrouw Ehrenfest-Afanassjewa', *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 1 (1924/25) 60-68, aldaar 67.

Hiermee eindigde de discussie tussen mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis in het *Bijvoegsel* en begon een tijdperk waarin het tijdschrift fungeerde als een spreekbuis voor de diverse opvattingen en discussies op het gebied van het wiskundeonderwijs. Het laatste woord was aan Dijksterhuis, die, in ieder geval waar het het onderwijs voor de gevorderde leerling betrof, de meest gangbare mening vertolkte. Zo schreef de wiskundeleraar B. Coster, refererend aan bovenbeschreven discussie:

... en ik geloof met één der beoordeelaars van het Tijdschrift, dat de meeste collega's, die aan gevorderde leerlingen stereometrie hebben te onderwijzen, zich in hun overtuiging zullen plaatsen aan de zijde van den heer D.³⁷

2.2.2 De commissie-Beth en de invoering van de differentiaal- en integraalrekening

Toen in 1919 de modernisering van de inhoud van het wiskundeonderwijs op het gymnasium een feit was, kon de HBS natuurlijk niet achterblijven. Een belangrijk punt bij de herziening van het wiskundeleerplan was het al of niet op de middelbare school invoeren van de differentiaal- en integraalrekening, die tot de 'hogere wiskunde' werden gerekend. Voorstanders voor invoering werden geïnspireerd door de Duitse wiskundige Felix Klein (1849-1925), die in zijn land de initiator tot hervorming van het wiskundeonderwijs was. Klein stond bekend om de nadruk die hij legde op het ontwikkelen van wiskundig inzicht en het zelfstandig leren denken van de leerlingen, in plaats van het toen veel voorkomende drillen van technische vaardigheden.

Bij de sterk door Klein beïnvloede “Reform Beweging” (ook wel ‘Klein’sche Reform’ genoemd) uit het begin van de vorige eeuw stond de fundamentele betekenis die het functiebegrip in het wiskundeonderwijs moest krijgen centraal. In Duitsland leidde dit in 1925 tot de invoering van de analytische meetkunde en infinitesimaalrekening in het wiskundeonderwijs. Ook in Engeland en Frankrijk ontstonden verwante bewegingen. In Nederland waren er al vanaf het begin van de vorige eeuw stemmen opgegaan voor invoering van de differentiaal- en integraalrekening, het functiebegrip en de analytische meetkunde, hetgeen in 1919 tot een gedeeltelijk succes leidde bij de herziening van het leerplan op het gymnasium³⁸

In 1925 werd op initiatief van inspecteur Bolkestein een commissie onder voorzitterschap van Beth in het leven geroepen, die als doel had met voorstellen voor een nieuw wiskundeleerplan voor de HBS te komen. Secretaris van de commissie was Dijksterhuis en de overige leden waren J. van Andel (directeur van de Christelijke HBS in Den Haag) en P. Cramer (leraar op de Rooms-Katholieke HBS te Rolduc).

In 1926 publiceerde de commissie haar eerste ontwerp voor “een leerplan voor

37 B. Coster, ‘De ontwikkeling van het ruimteinzicht’, *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 3 (1926/27) 143-154, aldaar 143.

38 Zie paragraaf 2.1.3.

het onderwijs in de wiskunde, mechanica en kosmographie op de H.B. Scholen met vijfjarigen cursus” in het *Bijvoegsel*, gevolgd door een ontwerp voor het bijbehorende eindexamenprogramma. In een inleiding zette zij allereerst haar uitgangspunten uiteen. De commissie zag als doel van het HBS-wiskundeonderwijs niet in de eerste plaats het overbrengen van kennis bij de leerlingen, maar ervoor te zorgen

... dat ze [de HBS] hun geest in voldoende mate vormt en ontwikkelt, om hen tot het verwerven der kennis, die ieder op zijn eigen terrein zal behoeven, in staat te stellen. De Commissie meent zich ontslagen te mogen achten van de taak, te betoogen, dat, bij huldiging van deze opvatting, een intensief onderwijs in wiskunde en aanverwante vakken voor alle leerlingen onmisbaar is.³⁹

De vormende waarde en de bijdrage tot geestelijke vorming die van het onderwijs in de wiskunde uit zou gaan, waren voor de commissie klaarblijkelijk van groter belang dan het praktische nut dat kennis van de wiskunde zou kunnen hebben. In deze instelling was de overtuiging van Dijksterhuis te herkennen zoals die naar voren kwam in de discussie met mevrouw Ehrenfest.

In haar beschrijving van het leerplan gaf de commissie geen strikte voorschriften voor de te volgen methodiek, zij liet daarin uitdrukkelijk de vrijheid aan de docenten. Wel raadde zij aan, alle wis- en natuurkundige vakken zoveel mogelijk door één en dezelfde docent te laten geven zodat de samenhang van die wetenschappen beter tot uitdrukking zou komen.

Eén van de belangrijkste vernieuwingen van het leerplan was de eerder genoemde invoering van de differentiaal- en integraalrekening. Als voornaamste argument noemde de commissie hiervoor

... het streven, om het wiskundeonderwijs dienstbaar te maken aan de ontwikkeling van het functionele denken en daarbij gebruik te maken van het hulpmiddel der graphische voorstelling?⁴⁰

Een ander argument was de onmisbaarheid van differentiaal- en integraalrekening in het mechanicaonderwijs (waar het op verkapte manier al min of meer behandeld werd) en de wens om door het wiskundeonderwijs op de HBS (en met name door het onderwijzen van de infinitesimaalrekening) bij te dragen tot “de verspreiding van betere denkbeelden over het wezen der mathesis en over de groote rol, die zij gespeeld heeft en nog speelt in de geestelijke ontwikkeling der menschheid”.⁴¹ Op deze manier zou de infinitesimaalrekening net zulk algemeen geestelijk bezit worden als de grondslagen der Euclidische meetkunde al sinds vele tientallen jaren waren.⁴² Ook zou de invoering ervan voor aanstaande studenten in de wiskunde of

39 H.J.E. Beth, J. van Andel, P. Cramer en E.J. Dijksterhuis, ‘Ontwerp van een leerplan voor het onderwijs in wiskunde, mechanica en kosmographie op de H.B. Scholen met vijfjarigen cursus’, *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 2 (1925/26) 113-139, aldaar 113.

40 Ibid., 125.

41 Ibid., 126.

42 Ibid., 128.

technische wetenschappen (maar ook chemie, biologie en medicijnen) de overgang van middelbaar naar hoger onderwijs aanzienlijk vergemakkelijken.

Zoals te verwachten was, leidde de publicatie van de voorstellen van de commissie tot reacties van diverse docenten in de volgende nummers van het *Bijvoegsel*. Deze reacties waren overwegend positief. Vooral de grondigheid waarmee de commissie ‘schoon schip’ maakte in het verouderde wiskundeonderwijs en brak met vele diep ingewortelde standpunten, oogstte veel waardering. Opvallend was dat, hoewel niet iedereen het eens was met de uitwerking ervan, de meesten zich goed konden vinden in de door de commissie-Beth beschreven uitgangspunten.

Tussen deze reacties valt het artikel van David van Dantzig (1900-1959) in die zin op, dat hij een voor die tijd ongewone kwestie aankaartte: hoe het wiskundeonderwijs in te richten zodat zij een maatschappelijke waarde kan hebben? Deze in die tijd weinig populaire invalshoek zou pas na de Tweede Wereldoorlog een grotere invloed krijgen. Van Dantzig had na het behalen van middelbaar-onderwijs akten K1 en Kv wiskunde gestudeerd in Amsterdam. Hij was een wiskundige met een breed interessegebied dat zich uitstreckte van topologische algebra tot statistiek, en hij zag voor de wiskunde en het wiskundig denken een belangrijke rol in de samenleving weggelegd. Na de oorlog zou hij aan zijn wens de wiskunde maatschappelijk dienstbaar te maken concreet vorm geven door zijn aandeel in de oprichting van het Mathematisch Centrum (MC).⁴³ In de tijd van de commissie-Beth stond Van Dantzig in de wereld van het wiskundeonderwijs vrijwel alleen in zijn overtuiging aan de vormende waarde van het wiskundeonderwijs geen waarde te willen hechten en sociale en maatschappelijke aspecten bij de discussie omtrent het wiskundeonderwijs te moeten betrekken.⁴⁴

Er kwamen ook andere weinig lovende reacties op het voorstel van de commissie-Beth. Zo trok de ‘Vereeniging van Directeuren van Hoogere Burgerscholen met 5-jarigen cursus’, naar aanleiding van een overigens wel zeer summiere enquête onder haar leden, de conclusie dat het programma overladen zou zijn en niet geschikt voor de gemiddelde leerling. Dit rapporteerde ze in een verslag aan de inspecteurs van Onderwijs, dat ook in het *Bijvoegsel* verscheen.⁴⁵ De commissie legde in een reactie in hetzelfde nummer van het *Bijvoegsel* deze kritiek naast zich neer, daar ze niet

43 Gedurende de Tweede Wereldoorlog woonde Van Dantzig in Amsterdam, waar hij en Freudenthal geregeld contact hadden. Meer over Van Dantzigs bemoeienissen met het wiskundeonderwijs in: H.J. Smid, ‘David van Dantzig en het onderwijs in de wiskunde’, in: Gerard Alberts en Hendrik Blauwendraat, red., *Uitbeelden in wiskunde. Proceedings van het symposium Van Dantzig 2000, gehouden op 22 september 2000 ter gelegenheid van de 100e geboortedag van David van Dantzig op 23 september 2000* (Amsterdam 2000); Gerard Alberts, *Twee geesten van de wiskunde. Biografie van David van Dantzig* (Amsterdam 2000). Over de oprichting van het Mathematisch Centrum zie hoofdstuk 5.

44 D. van Dantzig, ‘Over de maatschappelijke waarde van onderwijs in wiskunde’, *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 3 (1926/27) 186-196.

45 ‘Verslag, door de Vereeniging van Directeuren van Hoogere Burgerscholen met 5-jarigen cursus, in zake het rapport der Commissie-Beth, uitgebracht aan den Inspecteur E. Jensema’, *Bijvoegsel* 3 (1926/27) 69-72.

overtuigd was van de kwaliteit van de enquête en veel van de geuite kritiek bij beter lezen van het programma ongegrond achtte. Verder bood het rapport van de Vereniging te weinig houvast voor concrete verbeteringen van het leerplan, iets waar de commissie uitdrukkelijk om gevraagd had.

Ook WIMECOS had op verzoek van de inspecteur een rapport over het leerplan opgesteld, maar dat was aanzienlijk positiever en raadde aan tot invoering van het leerplan over te gaan. De commissie (die overigens op alle commentaren in het *Bijvoegsel* een reactie had geschreven) verwerkte kritiek en goede raad en kwam in 1927 met een enigszins gewijzigd leerplan waarin onder andere de integraalrekening iets minder uitgebreid aan bod kwam.

Maar ook dit aangepaste leerplan leidde nog niet tot een officiële vernieuwing van het wiskundeonderwijs. Wel zou het tot verbetering van de leerboeken hebben geleid.⁴⁶ In 1931 werd door de leden van WIMECOS unaniem voor invoering van het nieuwe leerplan gestemd, maar pas nadat inspecteur Jensema opgevolgd was door Van Andel werd in 1937 eindelijk het wiskundeprogramma op de HBS herzien en de differentiaal- en integraalrekening ingevoerd. Echter, de bijbehorende eindexameneisen werden niet aangepast, waardoor de invoering in feite slechts een schijnvertoning bleef. In het door Wijdenes en Beth geschreven schoolboek *Nieuwe school-algebra* werden de differentiaal- en integraalrekening bijvoorbeeld pas aan het eind van het boek behandeld, na het hoofdstuk 'Vraagstukken van het staatsexamen'.⁴⁷ Door het uitbreken van de Tweede Wereldoorlog lieten verdere ontwikkelingen op dit gebied tot de jaren vijftig op zich wachten.

2.2.3 De strijd om de mechanica

Parallel aan de discussie omtrent de invoering van het leerplan-Beth liep de discussie over de toekomst van het vak mechanica op de HBS. Dit vak werd tot de wiskunde gerekend en overeenkomstig die overtuiging werd het als geaxiomatiseerde, theoretische mechanica onderwezen. Al vanaf het begin van de jaren twintig gingen er vanuit het natuurkundige kamp stemmen op om de mechanica meer bij het natuurkundeonderwijs te betrekken om zodoende het experimentele karakter van deze wetenschap beter tot uitdrukking te laten komen.

In 1926 stelde het Bestuur van de Nederlandsche Natuurkundige Vereniging een commissie in onder voorzitterschap van de natuurkundige A.D. Fokker (1887-1972) met als doel onderzoek te doen naar het natuurkundeonderwijs aan HBS en gymnasium. In overleg met de commissie-Beth (in wier rapport oorspronkelijk voor handhaving van de zelfstandigheid van de mechanica als vak gepleit werd) werd een compromis bereikt, waarin de uren voor de mechanica verdeeld zouden

⁴⁶ E.J. Dijksterhuis, 'Epistemisch wiskundeonderwijs', *Euclides* 10 (1933/34) 165-213, aldaar 169.

⁴⁷ Ook H.J. Smid schreef hierover: H.J. Smid, 'Dien onvergetelijken stap vooruit', in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs 297-313*; P. Wijdenes en H.J.E. Beth, *Nieuwe school-algebra. Derde deel* (Amsterdam 1947).

worden tussen de wiskundigen en de natuurkundigen. Zo zou de inductief-experimentele basis van de mechanica binnen het natuurkundeonderwijs gelegd kunnen worden en de wiskundige inkleding en theoretische fundering tot de hogere klassen uitgesteld.⁴⁸

Echter, nog voordat een discussie over de gevolgen van dit compromis op gang kon komen, werd op een vergadering van de Natuurkundige Vereeniging een voorstel (gesteund door Utrechtse fysici als L.S. Ornstein (1880-1941) en M.J.C. Minnaert (1893-1970)) tot totale inlijving van de mechanica bij de natuurkunde aangenomen, zonder enig overleg, noch met leraren, noch met de commissie-Beth. Op 11 juli 1928 werd in een adres aan de minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen gepleit voor opheffing van de mechanica als zelfstandig vak. Aan de comotie en discussie die dit teweegbracht, wijdde *Euclides* in 1928 een speciaal nummer.

Beth opende de discussie met een betoog waarin hij nogmaals de beweegredenen van de commissies-Beth en -Fokker uiteenzette. Hij verwoordde zijn gevoelens omtrent de beslissing, zoals genomen op de vergadering van de Natuurkundige Vereeniging, als volgt:

Met groote teleurstelling heb ik dan ook kennis genomen van het besluit van de op 19 Mei te Amsterdam door de Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging gehouden vergadering, waarin de doodstraf voor de rationeele mechanica wordt geëischt.⁴⁹

Voorts pleitte hij vóór inleidend inductief-empirisch ingericht mechanicaonderwijs, maar dit mocht zeker niet als einddoel gelden. Hij waarschuwde voor overschatting van de waarde van het experiment in de mechanica. Volgens Beth was de inrichting van het mechanicaonderwijs niet zozeer een didactisch, als wel een maatschappelijk vraagstuk, waarbij hetgeen men van de HBS verwachtte de doorslag zou moeten geven:

Wil de HBS echter blijven, wat zij m.i. steeds heeft trachten te zijn, dan moet zij de grondslagen van de vakken, die zij onderwijst, met de bereikbare wetenschappelijke nauwgezetheid behandelen, en de bovenste grens van wat zij bereiken kan, zal bepaald worden door het hoogste niveau, waarop zij, van den grond af degelijk opbouwend, komen kan; zij mag geen genoegen nemen met het oppervlakkige succes, dat de belangstelling slechts prikkelt en niet verzadigt.⁵⁰

Dijksterhuis bestreed in een artikel in hetzelfde nummer één van de belangrijkste argumenten van de Natuurkundige Vereeniging om tot inlijving van de mechanica bij de natuurkunde over te gaan: het historische argument dat de mechanica in het onderwijs moest zijn wat het overal en altijd was geweest, namelijk een onderdeel van de natuurkunde, en dat het derhalve een proefondervindelijk karakter zou heb-

48 H.J.E. Beth, 'Het experimenteel georiënteerde onderwijs in mechanica', *Euclides* 5 (1928/29) 49-60, aldaar 50.

49 *Ibid.*, 50-51.

50 *Ibid.*, 59.

ben. Met historische voorbeelden liet Dijksterhuis zien dat juist in de geschiedenis van de ontwikkeling van de mechanica het experiment een zeer beperkte rol speelde. Als er al geëxperimenteerd werd, gebeurde dit achteraf, “ter illustratie, ter bevestiging, ter controle van de langs rationalistische weg verkregen waarheden”.⁵¹

In hetzelfde nummer van *Euclides* pleitte Schogt voor de onmisbare steun die het vak mechanica aan het wiskundeonderwijs gaf. Juist een aan de wiskunde zo verwant vak als de mechanica was een uitstekend middel, de leerlingen te oefenen in het voor de wiskunde zo kenmerkende juiste gebruik van de taal en het vormen van een kritische geesteshouding.⁵² Hier is duidelijk de grondgedachte van het wiskundeonderwijs zoals die door de commissie-Beth geformuleerd was te herkennen.

Van Dantzig tenslotte wees in een artikel onder andere op het gebrek aan onderscheid in de mechanicadiscussie tussen experimenten in de fysica als noodzakelijk fundament van een theorie en de rol die het experiment op school speelde: “een hulpmiddel ter veraanschouwelijking van het onderwijs”.⁵³ Het voorstel van de fysici voor meer experimenten in het mechanicaonderwijs met als doel het vak meer in overeenstemming met de wetenschappelijke beoefening van de fysica te brengen, was dus niet gerechtvaardigd. Een fundamenteel verschil tussen de wis- en natuurkunde bestond niet, want beiden hadden als uitgangspunt het verkrijgen van een grotere rijkdom aan ervaringen door formalisering of mathematiseren van de taal:

Samenvattende: niet de intuïtief [sic] geordende, maar de in scherp omgrensde woorden uitdrukbare en in een gemathematiseerd taalsysteem samengevatte ervaring is inhaerent aan de fysica.⁵⁴

De ongerustheid en commotie die uit bovenbeschreven reacties bleek, waren een jaar later al weer achterhaald: bij Koninklijk Besluit van 8 juni 1929 werd mechanica als zelfstandig vak zelfs weer een verplicht eindexamenvak.⁵⁵ In 1930 kwam Dijksterhuis nog eens terug op het onderwerp, dit naar aanleiding van de verschijning van *Nieuw Leerboek der Natuurkunde* van W. Reindersma en T. van Lohuizen, beiden lid van de commissie-Fokker. In hun boek werd de mechanica op experimentele basis behandeld. Dijksterhuis gaf toe, na lezing van dit werk meer waardering voor experimentele hulpmiddelen als waardevol bestanddeel van het

51 E.J. Dijksterhuis, ‘De aanslag op de mechanica’, *Euclides* 5 (1928/29) 61-69, aldaar 64. Dat Dijksterhuis wist waarover hij sprak, had hij al laten merken in een artikel dat een jaar eerder in *Euclides* verscheen en waarin hij een historische benadering voor het mechanicaonderwijs uiteenzette, te weten: E.J. Dijksterhuis, ‘De historische behandelingswijze van de axiomatie der mechanica van Newton’, *Euclides* 4 (1927/28) 245-255.

52 J.H. Schogt, ‘De mechanica als afzonderlijk leervak op de hogere burgerschool’, *Euclides* 5 (1928/29) 70-79, aldaar 73.

53 D. van Dantzig, ‘Woord en werktuig. De strijd om het mechanica-onderwijs’, *Euclides* 5 (1928/29) 86-103, aldaar 91-92.

54 *Ibid.*, 90. J. Scheltens zou dit later in een artikel betwisten. Volgens hem was er wel degelijk verschil: de fysica keerde terug naar naar het experiment, dit in tegenstelling tot de wiskunde. De mechanica echter rekende hij wel tot de wiskunde; J. Scheltens, ‘Natuurkunde en wiskunde’, *Euclides* 5 (1928/29) 268-269, aldaar 268-269.

55 H.J.E. Beth, ‘Mechanica opnieuw examenvak’, *Euclides* 6 (1929/30) 44-48.

mechanicaonderwijs te hebben gekregen, maar kon allerminst waardering opbrengen voor de onexacte en onzorgvuldige manier waarop in zijn ogen in dit boek het mechanicaonderwijs werd gepresenteerd.⁵⁶ Het was niet de experimentele methode zelf, zo betoogde hij, die oppositie wekte, maar de manier waarop het tot dusver door haar voorstanders in de praktijk was gebracht. Hij besloot zijn artikel met de woorden:

Het laatste woord over de mechanica als leervak op de middelbare school is blijkbaar nog niet gesproken.⁵⁷

Overeenstemming over de aard en de gewenste aanpak van het mechanicaonderwijs was dus nog lang niet bereikt. In 1962 zal de mechanica uiteindelijk op de middelbare school afgeschaft worden om als experimenteel gefundeerde discipline bij de natuurkunde te worden ingelijfd.⁵⁸

2.2.4 De opleiding tot wiskundeleraar

Tot in de twintigste eeuw ontbrak een specifiek op het leraarschap gerichte opleiding in Nederland. De opvatting overheerste, dat wat men goed geleerd had, ook zonder bezwaar kon onderwijzen. Weinig tijd en aandacht was er dus voor een didactisch-pedagogisch onderdeel in de opleiding van de toekomstige leraren. Wel was er sinds 1828 een verplichte pedagogische vorming op de universiteit, die voor de aanstaande docenten bestond uit colleges over de algemene theorie van het opvoeden, de methodologie van de leervakken en praktische oefening in de kunst van het onderwijzen. Praktisch werd er echter niets geregeld, waardoor deze regeling in de praktijk weinig effect had.

Sinds de invoering van de M.O.-wet van 1863 waren ook ingenieurs bevoegd tot het lesgeven op het middelbaar onderwijs in die vakken waar ze zelf les in hadden gehad (hieronder viel ook de wiskunde). Ook werden in deze wet de diverse middelbare akten wettelijk onderscheiden en eisen gesteld aan de pedagogisch-didactische voorbereiding van de bezitters van deze akten (o.a. kennis van de onderscheiden leerwijzen, de voor- en nadelen en de geschiedenis ervan). Wederom bleef het in de praktijk echter bij mooie woorden. Een echte opleiding tot leraar kwam nooit tot stand. Gevolg van dit ontbreken van een pedagogisch-didactische vorming voor leraren was dat de Nederlandse leraren lange tijd weinig “education-minded” waren, zoals Wansink het noemde.⁵⁹

Langzamerhand kwam in deze situatie verandering en groeide het besef van de noodzaak van een meer pedagogisch-didactische opleiding voor leraren. In 1918 werd Casimir aangesteld als eerste bijzonder hoogleraar in de pedagogiek te Leiden,

⁵⁶ E.J. Dijksterhuis, ‘Opmerkingen over het onderwijs in mechanica als onderdeel der physica’, *Euclides* 7 (1930/31) 76-94, aldaar 78.

⁵⁷ *Ibid.*, 94.

⁵⁸ Zie ook paragraaf 6.2.

⁵⁹ Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Deel I* 229.

een jaar later gevolgd door Ph.A. Kohnstamm te Amsterdam. In 1921 was het na een herziening van de wet op het hoger onderwijs eindelijk mogelijk om academische examens in de pedagogiek af te leggen.⁶⁰

In 1926 publiceerde Dijksterhuis namens de commissie-Beth een artikel over de opleiding tot wiskundeleraar in het *Bijvoegsel*.⁶¹ Hierin betoogde hij dat de universiteit wel degelijk een voorbereiding behoorde te bieden op de toekomstige werkring van haar studenten (hiertegen was nogal wat verzet in academische kringen), aangezien met een goede vervulling van die werkring een wetenschappelijk belang gemoeid was. Uiteraard zou dit moeten gebeuren zonder dat de universiteit haar wetenschappelijk karakter verloor. Om de overgang van de 'hogere wiskunde' op de universiteit naar de 'lagere wiskunde' (wat de aankomend docent moest onderwijzen) te vergemakkelijken, pleitte Dijksterhuis allereerst voor meer aandacht op de universiteit voor de 'lagere wiskunde van hooger standpunt uit', een frasering, waaruit direct de invloed van Klein bleek.

Voorts was in zijn ogen een historische beschouwing van de ontwikkeling van wis- en natuurkundige vakken onmisbaar voor de aankomende docent. Dit zou niet alleen dienen om deze historische kennis aan de leerlingen over te kunnen dragen, maar zou de aankomende leraar ook helpen (door zijn kennis van de problemen waar men in de geschiedenis mee geworsteld heeft) zich beter in te kunnen leven in de problemen van zijn leerlingen. Dit voorkwam wat Dijksterhuis een methodische fout noemde: "... want het is een fout, niet te kunnen begrijpen, dat men niet begrepen wordt".⁶²

Tot slot noemt Dijksterhuis nog het gemis aan "philosophische, in het bijzonder kennis-theoretische voorlichting over het wezen en de methoden der wis- en natuurkundige wetenschappen". Deze voorlichting zou tot voor een leraar onmisbaar inzicht in de grondslagen van deze wetenschappen leiden. Boven alles, zo benadrukte Dijksterhuis nogmaals, moest men zich hoeden voor verlaging van het wetenschappelijk peil van de universitaire opleiding tot leraar ter wille van de voorbereiding op de latere werkring:

Men kan zoo volhouden, dat men (...) geen Euclidische meetkunde kan doceeren, zonder de niet-Euclidische te kennen, geen drie-dimensionale, als men niet in de vier-dimensionale eenigermate thuis is.⁶³

Geen woord in dit artikel wijdde Dijksterhuis echter aan een eventueel pedagogisch-didactisch element en slechts terloops kwam de wenselijkheid van het opdoen van praktische ervaring ter sprake. Ook in een later artikel over de niet-academische opleiding tot leraar repte hij hier niet over.⁶⁴

60 W.J. Brandenburg, *Modernisering van het wiskundeonderwijs* (Groningen 1968) 104.

61 E.J. Dijksterhuis, 'Beschouwingen over de universitaire opleiding tot leeraar in wis- en natuurkunde', *Bijvoegsel 2* (1925/26) 81-95.

62 *Ibid.*, 88.

63 *Ibid.*, 94.

64 E.J. Dijksterhuis, 'Nadere beschouwingen over de opleiding tot leeraar in wis- en natuurkundige vakken', *Bijvoegsel 2* (1925/26) 146-157.

Onder voorzitterschap van D.P.A. Verrijp (leraar wiskunde aan het gymnasium in Arnhem) werd in 1926 een commissie ingesteld, belast met het onderzoek naar de opleiding voor leraar in de wiskunde en aanverwante vakken. Dijksterhuis werd secretaris van deze commissie en de inhoud van zijn hierbovenbeschreven artikel over de lerarenopleiding vormde het uitgangspunt van de commissie. Naar aanleiding van reacties van de diverse universiteiten op het rapport van de commissie-Beth kwam deze commissie met het voorstel voor een voor toekomstige leraren apart universitair examen (naast het wiskundig doctoraalexamen) dat onderwijsbevoegdheid zou verlenen.⁶⁵ Opvallend hierbij was, dat enkel in de reactie van de faculteit wis- en natuurkunde van Amsterdam een protest werd geuit over de nadruk die de commissie op het ‘strenger maken’ van het onderwijs legde teneinde dit te verbeteren. Volgens de schrijvers getuigde dit

...van een volkomen miskennen van de psychologische en paedagogische gezichtspunten (...), die bij de ontwikkeling van het wiskundig denken in het oog gehouden dienen te worden.⁶⁶

Voorts legde deze faculteit de nadruk op de wenselijkheid van het opdoen van praktische ondervinding van de studenten aan de lerarenopleiding.

In haar uiteindelijke aanbevelingen benadrukte de commissie-Verrijp nogmaals het belang van kennis van de lagere wiskunde, de kennistheoretische ontwikkeling van de wiskunde, de geschiedenis van de wiskunde en het nut van methodologische en didactische scholing.

Mede op verzoek van de commissie-Verrijp werd een paar jaar later een commissie ingesteld die onder leiding van de Groningse hoogleraar B. Sijmons onderzoek deed naar de kwestie van de lerarenopleiding in het algemeen. In 1929 verscheen het rapport van deze commissie-Sijmons.⁶⁷ Als een van de vertegenwoordigers van de Algemeene Vereeniging van Leeraren bij het Middelbaar Onderwijs was ook Dijksterhuis hierbij betrokken. In *Euclides* schreef hij over het verschijnen van het rapport het volgende:

Het is een bewijs, hoe onder de leeraren bij het Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs, die in groote meerderheid jaren lang met volstrekte onverschilligheid tegenover het vraagstuk van de opleiding hebben gestaan, het besef begint te groeien, dat het belang van het onderwijs eischt, dat volgende generaties van docenten niet even onvoorbereid hun moeilijke en verantwoordelijke betrekking zullen aanvaarden, als zij dat indertijd zelf hebben moeten doen.⁶⁸

In het rapport van de commissie-Sijmons werd voorgesteld over te gaan tot een splitsing van de lerarenopleiding in een pedagogisch en een didactisch deel. Het pe-

65 ‘De universitaire opleiding tot leeraar in wiskunde en aanverwante vakken’, *Euclides* 4 (1927/28) 41-57.

66 *Ibid.*, 45-46.

67 Brandenburg, *Modernisering van het wiskundeonderwijs* 104.

68 E.J. Dijksterhuis, ‘De opleiding tot leeraar in wis- en natuurkunde volgens de plannen van de commissie-Sijmons’, *Euclides* 6 (1929/30) 185-203, aldaar 185.

dagogische deel zou bestaan uit algemene colleges pedagogiek, gegeven door een hoogleraar in de pedagogiek, en zou de theoretische voorbereiding op het leraarschap verzorgen. Het didactische deel, dat een praktische voorbereiding op het leraarschap zou moeten vormen, zou door de hoogleraren tijdens hun colleges aan bod moeten komen en door nieuw aan te stellen lectoren (die ook een onderwijsbaan bij de HBS of gymnasium zouden moeten hebben) verzorgd moeten worden. Deze didactische opleiding (met veel ruimte voor de geschiedenis van de wiskunde!) zou als noodzakelijk bijvak voor het doctoraal-examen beschouwd moeten worden. Het laatste onderdeel van de didactische opleiding bestond uit het opdoen van praktische ervaring in het lesgeven. Tenslotte stipte Dijksterhuis in zijn betoog de andere opleidingen tot het leraarschap aan, waarin hij voorstelde dat, wanneer de nieuwe plannen voor de universitaire opleiding tot leraar uitgevoerd zouden worden, de eisen voor de middelbare akten en de ingenieursopleiding op eenzelfde niveau gebracht werden.⁶⁹

De uitvoering van deze plannen zou echter nog tientallen jaren op zich laten wachten. Wel ging het Rijk in 1939 over tot aanstelling aan alle universiteiten van docenten in de didactiek van alle leervakken van het middelbaar onderwijs. Het duurde uiteindelijk tot 1952 voordat er bij Koninklijk Besluit eisen gesteld werden aan de onderwijsbevoegdheid van doctorandi.⁷⁰

2.2.5 Nieuwe inzichten en de Wiskunde Werkgroep

Grofweg is vast te stellen dat in het interbellum in de discussies omtrent het wiskundeonderwijs de vormende waarde van de wiskunde als uitgangspunt een centrale rol speelde. Om de vormende waarde van de wiskunde zo goed mogelijk tot uiting te laten komen, wilden voorstanders van de streng logisch-deductieve aanpak als Dijksterhuis het liefst de wiskunde zodanig aan de leerlingen presenteren dat er geen of weinig concessies aan de strengheid of exacte formulering werden gedaan. De grote massa wiskundedocenten echter had een meer gematigd traditionele instelling, maar kon zich in grote lijnen vinden in de logisch-deductieve aanpak – zij het minder streng. Ondanks het uitblijven van concrete resultaten hebben het werk van de commissie-Beth, de commissie-Fokker en de diverse discussies omtrent het wiskundeonderwijs een belangrijke bijdrage geleverd aan de opbouw van het zelfvertrouwen en de eigenwaarde die de wiskundedocenten aan het begin van de jaren twintig schenen te missen.

Naast de logisch-deductieve instelling, zoals vertegenwoordigd door Beth, Schogt en Dijksterhuis, waren er ook andere benaderingen van het wiskundeonderwijs te onderscheiden. Zo pleitte mevrouw Ehrenfest voor een meer psychologische benadering van de leerstof, waarbij meer rekening gehouden werd met de opgroeiende leerling. Ook vanuit de meer op vernieuwing ingestelde lycea gingen her-

⁶⁹ Ibid., 203.

⁷⁰ Brandenburg, *Modernisering van het wiskundeonderwijs* 104.

vormingsinitiatieven uit. Zo was W. Reindersma (leraar wis- en natuurkunde aan het Nederlandsch Lyceum in Den Haag) een voorstander van een meer informele aanpak binnen het wis- en natuurkundeonderwijs.⁷¹ Dat er hier sprake was van een heuse tegenstelling met de genoemde leden van de commissie-Beth bleek uit een brief van Wijdenes aan Dijksterhuis uit 1925, waarin hij over Gunning (buitengewoon hoogleraar pedagogiek), Reindersma, Mannoury, Casimir en Kohnstamm als tegenvoeters sprak, die “in Den Haag al genoeg te zeggen hebben gehad”.⁷²

Philip Abraham Kohnstamm (1875-1951) had zich na na zijn natuurkundestudie en promotie steeds meer verdiept in onderwijskundige en maatschappelijke zaken.⁷³ Hij was een van de hoofdbestuurders van de Maatschappij tot Nut van 't Algemeen en werd in 1919 benoemd tot hoogleraar pedagogiek aan de Universiteit van Amsterdam. Kohnstamm stond voor ‘persoonlijkheidspedagogiek’, waarbij de waardigheid van ieder persoon als uitgangspunt diende. Hij pleitte voor een meer democratisch schoolsysteem, waarin iedere burger een bij zijn persoonlijk karakter passend onderwijs kon volgen en dat uiteindelijk de intellectuele cultuur voor meer lagen van de bevolking toegankelijk zou maken. Hij hekelde het selectieve en elitaire karakter van de HBS, die vele afvallers telde. In zijn opvatting lag de waarde van een vorming in het mogelijke gebruik ervan in concrete levenssituaties. Hij ging met zijn ideeën dus in tegen de opvatting van bijvoorbeeld Dijksterhuis, voor wie de vormende waarde van het HBS-onderwijs (en dan met name dat van het wiskunde-onderwijs) in de didactiek voorop stond. Na de Tweede Wereldoorlog werden veel van Kohnstamms ideeën gerealiseerd in de verdere democratisering van het Nederlandse onderwijs.⁷⁴

Zo waren er meer stemmen te horen die pleitten voor een wiskundeonderwijs dat het kind en niet het wiskundig systeem als uitgangspunt zou nemen. In 1936 werd de Wiskunde Werkgroep (ww) opgericht, als onderdeel van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs (wvo). Deze Werkgemeenschap (onder leiding van de onderwijsvernieuwer Kees Boeke (1884-1966)) was in datzelfde jaar officieel benoemd tot de Nederlandse afdeling van de internationale organisatie “New Education Fellowship” (NEF), een door diverse pedagogen in 1929 opgerichte organisatie voor ‘Nieuwe Opvoeding’.⁷⁵ Deze organisatie had als doel het bevorderen van opvoedkundige en onderwijskundige verbeteringen en vernieu-

71 E. de Moor, ‘Het ‘gelijk’ van Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa’, *Nieuwe Wiskrant* 12 (1993) 15-24, aldaar 16. Meer over Reindersma in: De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde* 245-250.

72 Van Berkel, *Dijksterhuis* 134-135.

73 Over Kohnstamms ontwikkeling van natuurkundige tot democraat zie: Klomp, *De relativiteitstheorie in Nederland*.

74 *Ibid.*, 198.

75 De volgende gegevens zijn ontleend aan: Joh.H. Wansink, ‘De wiskunde werkgroep van de w.v.o.’, *Euclides* 28 (1952/53) 197-205, E. de Moor, ‘Didactische pioniers’, in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs* 193-206; J.D. Imelman en W.A.J. Meijer, *De nieuwe school gisteren en vandaag* (Amsterdam 1986).

wingen over de hele wereld, waarbij ‘elk kind helpen worden wat het is’ een belangrijk motto was. De ww hield zich voornamelijk bezig met het organiseren van periodieke bijeenkomsten, waarin werd gesproken over vraagstukken op het gebied van de didactiek en methodiek van het wiskundeonderwijs. De bijeenkomsten vonden plaats bij mevrouw Ehrenfest thuis en vormden zo min of meer een vervolg op haar didactische colloquia.

In de periode vóór de Tweede Wereldoorlog richtten de ww-leden hun aandacht vooral op het meetkundeonderwijs en de problematiek van de aansluiting tussen lager en middelbaar onderwijs. In overleg met Kohnstamm kwam in 1938 een commissie tot stand, bestaande uit leden van de ww en enige medewerkers van het Nutsseminarium voor Pedagogiek te Amsterdam, die zich over deze aansluitingsproblematiek bogen. Het was een gemêleerd gezelschap: onder anderen zaten in deze commissie mevrouw Ehrenfest, E.W. Beth en Dijksterhuis. Hiernaast werden er kleinere studiegroepen samengesteld, die zich over diverse subproblemen bogen.

Bijzonder aan de ww was dat zowel leraren als niet-leraren op gelijke voet konden discussiëren, aangezien een ieder die zich voor de verbetering van het wiskundeonderwijs interesseerde (in de geest van de wvo en nef) lid kon worden van de werkgroep. Anders dan in de meer gestructureerde lerarenverenigingen heerste er binnen de ww een informele sfeer, waarbinnen onderwijshervormers als het echtpaar Ehrenfest en Kohnstamm hun vernieuwende ideeën ter discussie stelden. Ook waren er via mevrouw Ehrenfest contacten met Casimir en Reindersma van het Nederlandsch Lyceum. Zo ontstond er binnen de ww een samenwerking van zowel hoogleraren, academische docenten, vertegenwoordigers van het Nutsseminarium als beginnende en ervaren leraren. Wansink besloot in 1953 een artikel over de ww (verschenen naar aanleiding van de totstandkoming van de door de ww ontworpen concept-leerplannen voor het wiskundeonderwijs op het gymnasium- β en HBS-B) als volgt:

De wiskundewerkgroep van de w.v.o. is een groep van theoretiserende en practiserende, enthousiaste didactici, die het m.i. verdienen, dat er van hun werk enige nota wordt genomen.⁷⁶

In de jaren na de Tweede Wereldoorlog zal de ww de leiding van de vernieuwingsgezinde stroming van vóór de oorlog langzamerhand overnemen en zo de bovenaan gaan voeren in de voortgaande discussies omtrent de vernieuwing van het wiskundeonderwijs in Nederland. Het was binnen deze werkgroep dat Freudenthal zich na de oorlog voor het eerst actief bezig hield met wiskundeonderwijs en naam maakte op dat gebied. In 1945 hield hij zijn eerste voordracht over opvoeding en onderwijs op de zomerconferentie van de wvo in 1945.

Hoe toevallig waren deze keuzes van de wiskundige Freudenthal voor ww en

76 Wansink, ‘De wiskunde werkgroep van de w.v.o.’, *Euclides* 28 (1952/53) 197-205, aldaar 204.

wvo? Hoe vloeiden ze voort uit Freudenthals overtuiging en interesses in die periode? Welke rol speelde zijn gezin – en met name zijn vrouw – hierbij?

Wie wás Hans Freudenthal?

HOOFDSTUK 3

Hans Freudenthal – een schets

3.1 Hans Freudenthal – een impressie

“... elke positieve actie begint met critiek” schreef Freudenthal in 1944 in zijn ‘Rekendidaktiek’.¹ Deze uitspraak zou hij zijn hele leven trouw blijven. Kritisch was hij, zowel naar zichzelf:

Mijn hele leven ben ik een slecht leermeester geweest. Ik was me er ook van bewust en om er het beste van te maken ben ik al vroeg over onderwijs gaan nadenken. Aan mijn leraren heb ik me niet gespiegeld, evenmin als, wat opvoeding betreft, aan mijn opvoeders. Of wel, maar dan in de zin van: het moest beter. Aan mezelf heb ik me aldoor gespiegeld. Ook: het moest beter.²

... als naar het werk van anderen:

Son intelligence était particulièrement aigüe et son esprit critique acéré. Mieux valait pour vous que vos travaux lui plaisent car ses remarques pouvaient être des flèches redoutables! [...] Arracher les mauvaises herbes et semer [...], là était son devoir.³

... maar altijd met de positieve bedoeling mensen verder te helpen:

However, this critical stance regarding knowledge did not necessarily mean that he was also critical of the person. He was, to my eyes, a very supportive and sympathetic colleague, and he saw another of his major responsibilities as being that of helping people.⁴

Freudenthal presenteerde zelf een bescheiden man:

1 Hans Freudenthal, ‘Rekendidaktiek’ (ongepubliceerd 1944) 91; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465. Zie ook hoofdstuk 4.

2 Freudenthal, *Schrijf dat op*, *Hans* 335-336.

3 J. Adda, ‘Freudenthal *curisief*. Hans Freudenthal (1905-1990)’, *Nieuwe Wiskrant* 10 (1991) 26.

4 A. Bishop, ‘Freudenthal *curisief*. HF-an inspiration in the search for truth’, *Nieuwe Wiskrant* 10 (1991) 13.

Zelfs wat ik wiskundig heb gewrocht is, voor zover het zijn nut heeft bewezen, al in de kringloop opgenomen en van het minst onbelangrijke dat ooit aan mijn wiskundig brein is ontsproten, kent haast niemand de bron.⁵

... maar wel één die niet over zich heen liet lopen:

‘Don’t shout at me, because I can shout as loud as you can and in more languages!’⁶

Een man die ontzag inboezemde:

Nu was Freudenthal in die tijd niet iemand waarbij je veilig ging vragen wat hij precies bedoelde. We waren eigenlijk een beetje bang voor hem en begrepen niet, dat diens scherpe kritieken helemaal niet betekenden dat hij je dom vond. Jaren later leerde ik dat hij het juist in iemand waardeerde als die met hem in debat wilde gaan, maar als jong leraar begon je daar niet aan.⁷

... met het uiterlijk van de typische professor, met pijp en vlinderstrikje, wiens naam ergens voor stond:

Een magische naam. Die magie werd onmiddellijk bevestigd door de eerste ontmoeting: deze professor zag er precies uit zoals een professor eruit diende te zien. Bovendien was zijn gedrag geheel in overeenstemming met zijn uiterlijk.⁸

Freudenthal was geen wiskundige die zich liet opsluiten in zijn spreekwoordelijke ivoren toren. Zijn kennis en interesse beperkten zich niet tot een smal wetenschappelijk gebied:

Er zijn wetenschappers en er zijn geleerden. Hans Freudenthal was een geleerde. Er zijn er wier werkzaamheid zich geheel afspeelt in de beslotenheid van de wetenschappelijke wereld en er zijn er wier activiteiten de grenzen hiervan ver overschrijden. Tot deze laatste categorie behoorde Hans Freudenthal. Als weinigen is hij in staat geweest een breed terrein van kennis te integreren tot een geheel met de wiskunde als dominante noot.⁹

Wie was deze opmerkelijke persoonlijkheid? Waar kwam hij vandaan? Welke gebeurtenissen in zijn leven zijn cruciaal geweest voor zijn ontwikkeling?

5 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 13.

6 Freudenthal tegen Dieudonné tijdens een discussie; J. Adda, ‘Une lumière s’est éteinte. H. Freudenthal – Homo Universalis’, in: Streefland, ed., *The legacy of Hans Freudenthal* 9-19, aldaar 18.

7 J. van Dormolen, ‘Freudenthal *cursief*. Hoe didactiek een deel van wiskunde kan worden’, *Nieuwe Wiskrant* 10 (1991) 19.

8 Jan de Lange, ‘Nieuwlichters’, in: ‘Kijk op Hans’, een bundel opstellen van IOWO-medewerkers, aangeboden aan prof.dr. H. Freudenthal ter gelegenheid van zijn vijfenzeventigste verjaardag (ongepubliceerd 1980) 37-38, aldaar 37-38.

9 W.T. van Est, ‘Hans Freudenthal. 17 september 1905-13 oktober 1990’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 9 (1991) 131-136, aldaar 131.

De kleine Hans met zijn moeder (ca. 1906).



3.2 Luckenwalde

Hans Freudenthal werd geboren op 17 september 1905 in Luckenwalde, een kleine stad niet ver van Berlijn.¹⁰ Zijn Hebreeuwse naam was Jitschak (Isaak), maar thuis werd hij “Hans” of “Hansing” genoemd. Hij was de oudste zoon van Joseph Freudenthal (1879-1967) en Elsbeth Ehmann (1882-1929). Joseph Freudenthal was godsdienstleraar en voorzanger van de joodse gemeente van Luckenwalde. Freudenthal karakteriseerde zijn moeder als “de mooiste vrouw” in het stadje, zijn vader als de vrolijkste man:

Mijn moeder was sterk van lichaam en geest, slim handig, hartstochtelijk, mateloos in haar doen en laten, in haat en liefde, een diepe zee onder een bruisend oppervlak. Mijn vader was – ik vertelde het al – een vrolijkere, iemand die elke keer dat hij de deur uit was geweest en thuiskwam, een verhaal kon vertellen, terwijl zijn zoon – ook een beetje een verteller – zijn verhalen uit de krant, uit andermans verhalen of moeizaam uit de diepte van zijn geheugen moet knippen.¹¹

¹⁰ Voor deze biografie zijn gegevens ontleend aan de volgende werken: Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans*; Hans Freudenthal, *Berlin 1923-1930. Studiënerinnerungen von Hans Freudenthal* (Berlin 1987); Van Dalen, *L.E.J. Brouwer*; Fred Goffree, ‘HF: Working on mathematics education’, in: Streefland, ed., *The legacy of Hans Freudenthal*.

¹¹ Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 63.



Hans en Lotte (ca 1920).

Sinds 1740 woonden Freudenthals voorvaderen in Luckenwalde. Hier bracht Freudenthal zijn kinderjaren door en werd in 1909 zijn enige zuster Lotte geboren. “Een lastpak, een huilebalk en een plaaggeest voor zijn drieënehalf jaar jongere zuster”, zo karakteriseerde Freudenthal zichzelf als kind, maar: “bij ooms en tantes bij wie hij op bezoek kwam, wist hij zich voorbeeldig te gedragen”.¹²

Vanaf 1911 bezocht Freudenthal de Vorschule van het Reform-Realgymnasium, de Friedrichsschule. Naar eigen zeggen was hij “een goede leerling en graag bereid te laten zien dat hij de beste van de klas was”, dit ondanks het feit dat hij door zijn zware astma-aanvallen vaak en veel ziek thuis moest blijven.¹³ Lezen en schaken waren twee van zijn grootste hobby’s in die tijd. Zijn interessegebied strekte zich uit van de relativiteitstheorie en filosofie tot film, theater en architectuur, waarover hij stukjes schreef in de schoolkrant van de Friedrichsschule. Verslag van zijn activiteiten in de jaren 1918-1923 deed Freudenthal bijna dagelijks in zijn dagboeken.¹⁴

¹² Ibid., 67.

¹³ Ibid., 67.

¹⁴ Dagboeken Hans Freudenthal 1931-1988; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 91-139.

Toen hij deze dagboeken tijdens het schrijven van zijn autobiografie teruglas, schreef hij:

Wat me wel verrast heeft, is dat ik me, vijftien à zestien jaar oud, volkomen doorzie, weet wie en wat ik ben, wat ik kan, waartoe ik (niet) in staat ben. Ik doorzie mezelf, dat wil zeggen precies zoals ik me nu doorzie, en ondertussen heeft mijn leven en werk voor mijzelf bevestigd dat ik mezelf toen goed heb doorzien.¹⁵

In 1923 deed Freudenthal eindexamen en besloot vervolgens aan de Universiteit van Berlijn wiskunde te gaan studeren. Van wat hem te wachten zou staan, had hij toen nog geen flauw benul:

Geen ogenblik vatte ik het idee op dat wiskunde iets was om zelf voort te brengen, maar dit had alles te maken met de wijze waarop je met wiskunde – op school en buitenschools – werd geconfronteerd. Daarbij stond al vanaf, zeg, mijn negende levensjaar vast dat ik eens wiskunde zou gaan studeren. Maar in het stadje en ook elders kwam ik met niemand in aanraking die me had kunnen vertellen wat wiskunde nu echt was, behalve dan wat er uit de boeken op me af kwam.¹⁶

Op 19 april 1923 begon Freudenthal officieel met zijn studie wiskunde. Het eerste semester woonde hij nog thuis in Luckenwalde en reisde hij dagelijks naar Berlijn met de trein. Dankzij zijn bijverdiensten als privé-leraar en later als Hilfsassistent in de wiskunde en redactieassistent bij het *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* kon hij zich al gauw het huren van een gemeubileerde kamer in Berlijn veroorloven.¹⁷

3.3 Berlijn

Freudenthal genoot van zijn studietijd in Berlijn, een stad die hij al goed kende van de culturele uitstapjes die hij er met zijn ouders en later alleen maakte. Bovenal genoot hij van de sfeer die er op de universiteit heerste, in het bijzonder op de afdeling wiskunde, door hem omschreven als “ein buntscheckige Gesellschaft [...] wo jeder seiner ihm zugestandenen Narrenfreiheit frönen konnte”.¹⁸ Freudenthal benutte de mogelijkheden die de universiteit hem bood volop. Hij volgde colleges bij wiskundigen als Erhard Schmidt (Hilbertruimten), Richard von Mises (projectieve meetkunde), Issai Schur (abstracte algebra), Ludwig Bieberbach (analytische meetkunde), Karl Löwner (differentiaal- en integraalrekening), John von Neumann (grondslagen en functionaalanalyse) en Heinz Hopf (topologie). Hij volgde ook

15 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 150.

16 *Ibid.*, 91.

17 Freudenthal, *Studienerinnerungen* 4. De door Freudenthal als student zeer bewonderde Georg Feigl (1890-1945) was vanaf 1925 redacteur van het *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Het *Jahrbuch* was lange tijd het enige wiskundige tijdschrift met besprekingen van wiskundige publicaties en bestond van 1868 tot 1944; *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* 51 (1925), 54 (1928).

18 Freudenthal, *Studienerinnerungen* 18.

colleges natuurkunde (bij Max Planck (1858-1947) en Albert Einstein (1879-1955)), geschiedenis, Grieks, Russisch en strafrecht.

In 1927 studeerde hij een zomersemester in Parijs, waar hij colleges liep bij Jacques Hadamard, Gaston Julia en Emile Picard. Parijs was voor Freudenthal een kennismaking met een heel nieuwe wereld: “heerlijk, maar intens ouderwets”. De wiskunde in Parijs viel hem erg tegen:

De meeste hoogleraren waren een generatie ouder dan mijn Berlijnse leermeesters. Hun colleges waren traditioneel, tientallen jaren achter bij de wiskunde die ik thuis geleerd had. [...] Van mijn generatie wiskundigen, die na de Tweede Wereldoorlog de toon zouden aangeven, zag ik er haast geen.¹⁹

Bij terugkomst in Berlijn woonde Freudenthal de gastcolleges van de Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer bij. Freudenthal was erg geïnteresseerd in de grondslagen theorie waar Brouwer toen veel aan werkte, het intuïtionisme. Hij schreef:

Der Intuitionismus war, wie ich bald lernte, in Berlin das Tagesgespräch. War es Sympathie für den Aufruhr im Grundlagenstreit, oder betrachteten die Berliner den Holländer Brouwer als einer der ihren im Gegensatz zum Göttinger Hilbert? Keine Revolution, sondern ein Putsch – so hatte Hilbert den Intuitionismus verurteilt, und “Putschist” wurde der Ehrenname, den die Brouwer-Supporter annahmen...²⁰

Bertus Brouwer (1881-1966) was sinds 1912 (buitengewoon) hoogleraar in Amsterdam. Hij genoot niet alleen aanzien als groot wiskundige door zijn topologisch werk, maar was vooral beroemd als grondlegger van het intuïtionisme. De grondslagenstrijd waaraan Freudenthal refereerde was die tussen de toonaangevende wiskundige David Hilbert (1862-1943) van de universiteit van Göttingen en Brouwer, die beiden een verschillende filosofie voorstonden.²¹

De voordrachten van Brouwer in Berlijn zorgden voor het eerste contact tussen hem en de student Freudenthal, die goed voorbereid naar deze bijeenkomsten kwam:

Durch Lektüre und Arbeitszirkel auf die Vorlesungen wohl vorbereitet, habe ich damals – schriftlich einzureichende – Diskussionsfragen gestellt, denen ich Separate und meine spätere Assistentur in Amsterdam verdanken sollte.²²

19 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 115-116.

20 Freudenthal, *Studiënerinnerungen* 10.

21 Het intuïtionisme (de ‘school’ van Brouwer) was naast het logicisme en formalisme een nieuwe derde stroming binnen de filosofieën over de grondslagen van de wiskunde. Tot dan was het formalisme – zoals voorgestaan door Hilbert – de meest gangbare. Hierbij werd wiskunde niet opgevat als een bestaande entiteit, maar als een verzameling formules met bijbehorende spelregels, zonder directe betekenis of waarde. Brouwers intuïtionisme was gebaseerd op het ontbreken van het principe van de uitgesloten derde (“alle wiskundige uitspraken zijn waar of onwaar”). Het uitgangspunt hierbij was dat alleen die wiskundige objecten betekenis hadden, die met een eindig aantal stappen uit de natuurlijke getallen geconstrueerd konden worden. Dit uitgangspunt maakte veel wiskundige theorieën onbewijsbaar. De grondslagenstrijd, waarbij ook Hermann Weyl (1885-1955) een belangrijke rol speelde, wordt uitgebreid beschreven in: Van Dalen, *L.E.J. Brouwer*; P.J. Davis en R. Hersch, *The mathematical experience* (Boston 1984).

22 Freudenthal, *Studiënerinnerungen* 10.

In de hierop volgende jaren stuurde Brouwer Freudenthal geregeld zijn wiskundige teksten ter bestudering. In 1929 schreef Freudenthal zijn wiskundig proefschrift over de einden van topologische ruimten en topologische groepen, dat in januari 1930 klaar was. Na een mondeling examen leverde hem dit op 20 februari 1930 de titel ‘doctor philosophiae’ op.²³ Het werd in 1931 gepubliceerd onder de titel ‘Über die Enden topologischer Räume und Gruppen’ en goedgekeurd door Hopf en Bieberbach.²⁴ Later zou onder anderen Hopf de door Freudenthal beschreven theorie nog verder uitbreiden.

Dan vraagt Brouwer in een brief op 3 augustus 1930 Freudenthal of hij er voor voelt

... zum naechsten Winter eine (die Habilitation mit einschliessende) Assistentenstelle bei mir zu uebernehmen. Ihre wesentlichste Aufgabe wuerde darin bestehen, mich bei der Herausgabe der neuen Zeitschrift “Compositio Mathematica” zu unterstuetzen. Ueberdies wuerden Sie eine einstuendige Vorlesung ueber einen von Ihnen selbst zu waehlenden Gegenstand zu halten und dann und wann einem Studenten bei der Vorbereitung eines Seminarvortrags oder anderweitig bei einer Schwierigkeit zu helfen haben. Ihr Gehalt wuerde 3000 bis 3500 holl. Gulden Betragen.²⁵

Op 15 november 1930 vertrok Freudenthal naar Amsterdam.

3.4 Amsterdam

Na het “van jeugd, cultuur en wetenschap sprankelende Berlijn” ervaarde Freudenthal Amsterdam als een anticlimax.²⁶ Na enkele maanden in een pension in Amsterdam te hebben gewoond, verbleef hij op verzoek van Brouwer – die het liefst zo min mogelijk naar Amsterdam kwam – een paar maanden in Laren, niet ver van Brouwers woonplaats Blaricum. In februari 1931 leerde Freudenthal de studente Susanna (Suus) Lutter kennen, die met een stel medestudenten een carnavalsfeest in hotel Hamdorff in Laren bijwoonde. “De winternacht die naar geen lente zweemde, bracht mij tot jou als vreemd’ling uit den vreemde”, zo omschreef hij deze kennismaking vijfenvijftig jaar later.²⁷

Susanna Johanna Catharina Lutter werd op 2 mei 1908 geboren als jongste dochter in een Amsterdams arbeidersgezin. Tegen alle gewoonten en verwachtingen voor

23 Hans Freudenthal, ‘Über die Enden topologischer Räume und Gruppen’ (Berlin 1931). De officiële ‘Tag der Promotion’ zoals vermeld op het proefschrift was 6 oktober 1931. Het proefschrift werd gepubliceerd in *Mathematische Zeitschrift* 1931 (33) 692-713 (Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin).

24 L. Bieberbach zou zich enkele jaren later overtuigd nationaal-socialist verklaren en onderscheid maken tussen ‘Arische wiskunde’ en ‘joodse wiskunde’: de laatste zou enkel voortborduren op bestaande wiskunde, terwijl Arische wiskundigen daarentegen ‘creatief’ waren; Van Dalen, *L.E.J. Brouwer* 361-365.

25 Brouwer aan Freudenthal, 3 augustus 1930; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 87.

26 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 117.

27 Freudenthal in de grafrede voor zijn vrouw: *ibid.*, 365. Suus Freudenthal-Lutter overleed op 24 september 1986.



Susanna Freudenthal-Lutter
(jaren dertig).

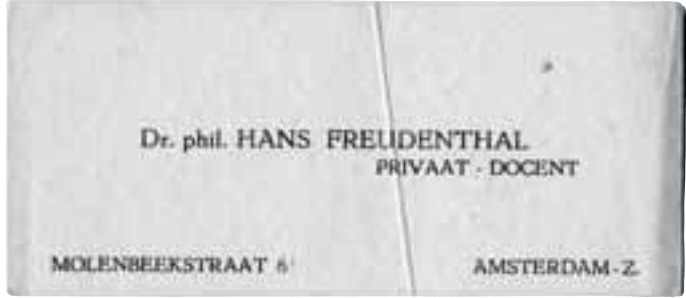
een meisje uit een dergelijk milieu in mocht ze uiteindelijk ‘verder leren’. Na zeven jaar lagere school ging ze naar een driejarige-HBS. In 1924 wist zij dankzij de bemiddeling van haar leraar Duits haar ouders over te halen haar naar het Barlaeus-gymnasium te laten overstappen. In 1928 deed ze eindexamen en begon een studie Duits aan de Universiteit in Amsterdam. In 1934 zou ze doctoraalexamen doen.

In het najaar van 1931 verhuisde Freudenthal weer van Laren naar Amsterdam, waar hij, later met zijn vrouw, tot na de Tweede Wereldoorlog bleef wonen.²⁸ Op 20 juli 1932 trouwden ze. Ze kregen 4 kinderen: Jedidja (Didi, 1935), Matthijs (Thijs, 1937), Thomas (Tom, 1939) en Mirjam (1942).

Voor Freudenthals wiskundig werk waren deze jaren in Amsterdam heel vruchtbare. Het was een tijd, waarin de Nederlandse wiskundigen een prominente plaats

²⁸ Brouwer ging uiteindelijk akkoord met deze verhuizing, maar stond erop dat Freudenthal zich een telefoonaansluiting aanschafte; Van Dalen, *L.E.J. Brouwer* 393; Brief van Brouwer, 8 juli 1932; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 87.

Freudenthals
visitekaartje. Het gezin
woonde in de
Molenbeekstraat van
juni 1936 tot mei 1939.



in de internationale wiskundige wereld veroverden. Niet onbelangrijk was hierin de rol van Brouwer, die in de periode vóór de Tweede Wereldoorlog zorgde voor nieuwe impulsen (topologie en grondslagen van de wiskunde) en het aantrekken van veelbelovende jonge wiskundigen. Zijn ideaal was hiermee ‘een tweede Göttingen in Amsterdam’ te creëren. Freudenthal was één van deze veelbelovende wiskundigen.²⁹

Op 28 mei 1931 hield Freudenthal een openbare les bij zijn aanstelling als privaattoecent aan de Universiteit van Amsterdam, getiteld: ‘Qualität und Quantität in der Mathematik’. Hierin sprak hij over de interactie tussen analyse, meetkunde en combinatoriek.³⁰ Tot hij in 1936 naar de Verenigde Staten vertrok, was de Pool Witold Hurewicz de directe collega van Freudenthal als mede-assistent van Brouwer. Volgens Freudenthal was het onder meer aan de invloed van Hurewicz te danken dat hij in die jaren niet “met al zijn kennis wetenschappelijk te gronde is gegaan”.³¹ Beiden werkten ze aan een fundamentele theorie van de homotopiegroepen. Zelf werkte Freudenthal aan onderwerpen uit de topologie, topologische groepen, de grondslagen van de wiskunde en het intuïtionisme, bijna-periodieke functies en functionaalanalyse.³² Dit resulteerde in enkele tientallen (Duitstalige) publicaties.

Opvallend in Freudenthals werk was de nadruk die hij legde op de samenhang en interactie tussen de diverse vakgebieden als topologie, algebra en analyse. Hij droeg ook in zijn latere werk veel bij aan de samenhang tussen de vakgebieden. Van der Blij schreef in 1975: “De meetkundige Freudenthal doceerde in Amsterdam dan ook analyse en in Utrecht algebra”.³³

Al vanaf het begin van zijn aanstelling had Freudenthal kritiek op de verouderde stof en onderwijsmethoden van het wiskundeonderwijs aan de universiteit. Zo introduceerde hij samen met Hurewicz in hun caput-colleges de meest moderne

29 H.J.A. Duparc en A.W. Grootendorst, ‘Historical Survey’, in: E.M.J. Bertin, H.J.M. Bos, A.W. Grootendorst, ed., *Two decades of mathematics in the Netherlands 1920-1940. A retrospection on the occasion of the bicentennial of the Wiskundig Genootschap. Part 1* (Amsterdam 1978) v-xxiv.

30 Hans Freudenthal, ‘Qualität und Quantität in der Mathematik’, *Euclides* 8 (1932) 89-98.

31 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 117.

32 W.T. van Est, ‘Hans Freudenthal. 17 september 1905 – 13 oktober 1990’, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Jaarboek 1991* 139-142; W.T. van Est, ‘Hans Freudenthal. 17 september 1905 – 13 oktober 1990’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 9 (1991), 131-136.

33 F. van der Blij, ‘Professor Freudenthal zeventig jaar’, *Euclides* 51 (1975) 3-7, aldaar 4.

wiskundige onderwerpen, die buiten de standaardstof vielen (onderwerpen als de elementaire theorie van lichamen, groepentheorie, maattheorie, verzamelingsleer, complexe functietheorie, topologie, elementaire wiskunde vanuit hoger standpunt en de theorie der lineaire operatoren). Ook introduceerden zij het fenomeen ‘werkcollege’, waarin door de studenten oefenopgaven werden gedaan.

Op 3 september 1937 werd Freudenthal aangesteld als conservator van het Mathematisch Instituut, met de mondelinge belofte op uitzicht op een aanstelling als lector wanneer de financiële situatie dat toe zou laten. Op een meer exacte wijze dan tot dan toe gebruikelijk begon hij met het geven van de verplichte colleges analyse:

De nieuwe leerstof die ik invoerde was ‘Bourbaki-avant-la-lettre’ – goede stof, maar te hoog gegrepen, hoewel door de oefeningen verzacht. Nee, ‘Bourbaki-avant-la-lettre’ – dat is weer overdreven. Het was hoog gegrepen, maar toch wel overwogen didactisch. Niemand die mij hierbij terzijde [sic] stond. Ik was de eerste die moderne wiskunde in Nederlandse collegezalen bracht en dan zijn fouten onvermijdelijk.³⁴

Zijn colleges waren moeilijk te volgen voor minder begaafde studenten en Freudenthal stond dan ook niet als goed docent bekend. W.T. van Est, die colleges analyse bij hem volgde, herinnerde zich van Freudenthals didactische kwaliteiten:

Als het erom gaat in te zien hoe het stuk speelt, dan heb ik aan hem altijd een geweldige leraar gehad. Als je wilde nagaan in hoeverre allerlei details netjes op elkaar aansloten en zonder feilen waren, dan bleek dat niet altijd 100 procent te zijn. Hij liet impliciet veel aan de student over. Het was een opvoedende ervaring voor iedere student, om de gaten in zo’n college voor zichzelf te dichten. In dat opzicht vond ik het eigenlijk wel goed, maar niet iedereen was het daarmee eens.³⁵

Een andere student uit die periode, P.M. van Hiele, schreef over Freudenthals colleges uit de jaren dertig:

Ofschoon hij toen vanzelfsprekend nogal wat moeite had met de Nederlandse taal en ook niet altijd de draad kon vasthouden, waren deze kolleges [sic] een meer dan voldoende basis voor wat ik later van deze vakken moest weten. Al heel spoedig volgde er een colloquium met als onderwerp de didactiek der wiskunde en men kan zich voorstellen, dat het er daarbij soms heel levendig toeging.³⁶

In dit didactiek-colloquium liet Freudenthal de studenten elkaar universitaire leerstof uitleggen, om zo bij hen niet alleen het begrip te vergroten, maar ze ook de kunst van het uitleggen onder de knie te laten krijgen. Veertig jaar later zou Freudenthal overigens met verbazing reageren op het hier door Van Hiele aangehaalde

34 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 336-337. Over het fenomeen Bourbaki en de invloed daarvan op het wiskundeonderwijs zie paragraaf 8.2.1.

35 G. Alberts en I. Moerdijk, ‘Interview W.T. van Est. De geometer’, *Nieuw archief voor wiskunde* 5/3 (2001) 52-56, aldaar 52.

36 P.M. van Hiele, ‘Freudenthal en de didactiek der wiskunde’, *Euclides* 51 (1975) 8-10, aldaar 8.

didactiek-colloquium. Hij was deze (nota bene als zijnde zijn eerste concrete didactische actie!) straal vergeten.³⁷

Over het Nederlands spreken schreef hij in mei 1931 aan Duitse vrienden:

Als Deutscher lernt man hollaendisch sehr schnell; obwohl ich kaum in Grammatiken geschaut habe und fuer intuitives Sprachenlernen keine Begabung besitze, spreche ich doch schon seit einem Vierteljahr nach meiner Ankunft fliessend hollaendisch.³⁸

Vanaf de geboorte van Jedidja in 1935 spraken Hans en Suus enkel nog Nederlands thuis. Pas na de oorlog zou Freudenthal op meer geregelde basis in het Nederlands gaan publiceren. Naast Hebreeuws, Frans, Latijn, Engels (geleerd op de middelbare school), Russisch en Grieks (geleerd op de universiteit in Berlijn) las Freudenthal ook Slavische en Romaanse talen, Deens, Noors en Zweeds. Ook leerde hij zichzelf Akkadisch (spijkerschrift). In 1948 zou hij uiteindelijk de Nederlandse nationaliteit krijgen.

Het uitbreken van de Tweede Wereldoorlog betekende voor Freudenthal een onderbreking van zijn wetenschappelijke carrière in Amsterdam. Als joodse werknemer werd hij in november 1940 op non-actief gesteld.³⁹ Zijn colleges werden in januari 1941 overgenomen door de natuur- en wiskundige Evert Marie Bruins (1909-1990).

Wel had Freudenthal via zijn vrouw nog toegang tot alle (ook niet openbare) bibliotheken in Nederland.⁴⁰ Dit stelde hem in staat thuis te werken. Veel tijd aan wiskundig werk besteedde hij in deze jaren niet. Wel begeleidde hij zijn twee studenten J. de Groot en A. van Heemert bij het schrijven van hun proefschrift. Beiden promoveerden (in 1942 respectievelijk 1943) bij G. Schaake in Groningen.⁴¹ Ook kreeg het gezin Freudenthal veel steun van hen en anderen (bijvoorbeeld in de vorm van pakketten levensmiddelen als boter, brood, aardappelen en uien).

Wiskundeonderwijs verzorgen deed Freudenthal nog wel: voor het cursusjaar 1942-1943 werd hij door de Centrale Commissie voor het Joodse Onderwijs van Amsterdam (later: Joodse Raad voor Amsterdam, afdeling Onderwijs) benoemd tot docent in de wiskunde aan de opleiding voor het examen voor de middelbare akten K1 en Kv. Dit onderwijs was bedoeld voor de joodse studenten, die niet langer aan de universiteit mochten studeren. Het hield voor Freudenthal het verzorgen van vier uren 'wiskunde algemeen' (het berekenen van oppervlakten, booglengte en inhoud) en 'wiskunde capita' (machtreeksen en integraaltheorie) in. Voor

37 Freudenthal aan Howson, 19 juli 1983; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 38. In het voorwoord van zijn boek *Mathematics as an educational task* van 1973 legde hij de oorsprong van zijn didactische belangstelling nog bij zijn vrouw; Hans Freudenthal, *Mathematics as an educational task* (Dordrecht 1973).

38 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 21, 141.

39 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 321.

40 Rijksarchief in Noord-Holland, Papers of Susanna Freudenthal-Lutter (1908-1986), educationalist, 1914-1986, inv.nr. 37.

41 Van Est, 'Hans Freudenthal', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 9 (1991) 131-136, aldaar 134.



Doorslag van Freudenthals brief aan de Regeeringscommissaris voor Amsterdam, waarin hij informeert naar het gebruik van de bibliotheek van het Mathematisch Instituut (12 april 1941).

beide cursussen samen waren slechts 10 cursisten. Ondanks het nauwe contact dat hij had met de leerlingen was Freudenthal niet tevreden over het resultaat. Hij schreef op 3 mei 1943 aan de Raad:

Ik denk voorlopig voort te gaan op de ingeslagen weg, de behandelde stof onophoudelijk met responsies te repeteeren; dat schijnt mij de eenige manier, om onder de tegenwoordige omstandigheden den leerlingen zoo niet veel dan toch iets van blijvende waarde te leeren.⁴²

Door de jodendeportaties bleef dit onderwijs slechts tot één cursusjaar beperkt. Freudenthal zelf werd door zijn huwelijk met een niet-joodse voorlopig afdoende voor deportatie beschermd.

In de oorlogsjaren hielp Freudenthal zijn oudste zoons geregeld met hun lees- en rekenwerk. "Schooltje houden" noemde hij het. Hij raakte hierdoor geïnteresseerd in de didactiek van het rekenen en begon een uitgebreide studie van alle publicaties die hij over dit onderwerp te pakken kon krijgen. Deze interesse in didactiek en pedagogiek werd gedeeld door zijn vrouw, die al sinds de geboorte van haar kinderen op zoek was naar een school die aan haar idealen voldeed. Zij schreef hierover: "wie

42 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 43, 322.

Antwoord van de Regeringscommissaris voor Amsterdam. Het gebruik van de bibliotheek wordt Freudenthal verboden (21 mei 1941).



Odysseus trieb ich mich ziellös in unbefriedigster Suche auf dem Pfad”.⁴³ Freudenthals uitgebreide literatuurstudie resulteerde uiteindelijk in het ongepubliceerde document ‘Rekendidaktiek’ (1944).⁴⁴

In deze periode begon Freudenthal zich ook te verdiepen in de Nederlandse geschiedenis, de geschiedenis van de wetenschap en in het bijzonder de geschiedenis van wiskunde. Hij schreef korte verhalen over onder meer Newton, Huygens, Leibniz, Chasles, Maupertuis, Legendre, Abel, Jacobi, de Bernoulli’s, complexe getallen en de Möbius-band, die hij later omschreef als “historische en filosofische novellen, wiskundig van inhoud en literair van vorm”.⁴⁵ Nog meer literaire inspiratie leidde in de oorlogstijd tot gedichten, novellen, toneelstukken en romans, waarmee hij (onder het pseudoniem V. Sirolf) zelfs prijzen wist te winnen.⁴⁶ De romans ‘De

43 RANH, Susanna Freudenthal-Lutter Papers, inv.nr. 37 (uit: ‘Die Entwicklung der Jenaplan-bewegung in den Niederlanden’, handgeschreven document bedoeld voor publicatie in *Gesamtschulinformationen*, 1985).

44 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465. Zie ook hoofdstuk 4.

45 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 282, 438 and 464; Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 314.

46 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 295, 1858. Floris V, waarvan ‘V. Sirolf’ de retrograde is, was

schuldenaar’ en ‘Viersprong der grote wegen’ werden na de oorlog uitgegeven. In een brief uit 1945 aan Hopf schreef Freudenthal over het schrijven van literatuur:

Ich setze das fort. Es ist meine eigentliche Begabung.⁴⁷

Echter, na de oorlogsjaren werd Freudenthal door ander werk in beslag genomen en liet hij de ‘letteren’ voorlopig voor wat ze waren. Wel zou hij na de oorlog een uitlaatklep voor zijn literaire (en andere) uitlatingen vinden in de columns en stukjes die hij schreef voor onder andere *De Groene Amsterdammer* (1946-1971) en later *NRC/Handelsblad* (1974-1989).⁴⁸ In 1984 ontving Freudenthal de Gouden Ganzeveer van de Koninklijke Nederlandse Uitgeversbond.

Ondanks het ‘gemengde’ huwelijk liet de bezetter het gezin niet ongemoeid. Op 2 februari 1942 werd Freudenthal gearresteerd wegens het ontbreken van de voor hem verplichte “J” in zijn paspoort. Hij bracht zes weken door in het Huis van Bewaring aan de Weteringschans. Op 15 mei 1944 werd hij bij een medisch keuring ondanks zijn astma onverwacht goedgekeurd en te werk gesteld op het in aanbouw zijnde vliegveld Havelte, waar hij allerhande zwaar lichamelijk werk moest verrichten.⁴⁹ Op 5 september – Dolle Dinsdag – wist hij te ontsnappen en met veel moeite per trein naar Amsterdam terug te reizen. Thijs en Didi verbleven vanaf februari 1945 tot na de bevrijding op het platteland in Friesland. Tom verbleef in diezelfde tijd enkele maanden in Noord-Holland. Zo wist het gezin uiteindelijk ongeschonden de hongervinter door te komen.

Terugkijkend op de vijf jaren bezetting schreef Freudenthal in een brief aan Hopf op 28 juli 1945:

Was mich selbst betrifft, so hielten wir das Risiko des Entdeckt werdens nach dem Untertauchen für größer als das Risiko von Maßnahmen gegen die Mischehen. Aber es hätte auch anders gehen können. Ich hatte jedenfalls meine falsche Identitätskarte für alle Fälle.⁵⁰

Hij was toen nog erg optimistisch over zijn terugkeer naar de Amsterdamse Universiteit. In een brief aan zijn zus Lotte schreef hij op 25 augustus 1945 (vertaald uit het Duits door Freudenthal):

De universiteit begint ook weer geleidelijk. Al mijn wiskundige collega’s en mijn opvolger zijn geschorst. Ik ben voorlopig de enige. Maar officieel benoemd ben ik nog

onderwerp van Freudenthals eerste toneelstuk uit 1941, waarvoor hij een uitgebreide studie deed. Voor zowel de roman *De schuldenaar* als *Viersprong der grote wegen* ontving Freudenthal een eerste prijs bij prijsvragen van de uitgeverij Gottmer. In 1947 ontving hij de Letterkundeprijs van het gemeentebestuur in Amsterdam.

47 Freudenthal aan Hopf, 1945; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 88.

48 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 1405-1577, 1627-1700.

49 Over de tijd in Havelte schreef Freudenthal uitgebreid in de brief aan zijn zus Lotte in 1945; Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 154-227.

50 Freudenthal aan Hopf, 28 juli 1945; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 88.



Freudenthals vervalste persoonbewijs op naam van wiskundig adviseur ‘Johann Ferdinand Terlep’.

niet en het Mathematisch Instituut kan ik ook niet openen. Ik hoop dat het nu gauw in orde komt.⁵¹

Al gauw kon Freudenthal weer zijn colleges geven op de manier, zoals hij voor de oorlog al begonnen was. Hij schreef in november 1945 aan Hopf:

Ich darf nun, wie Sie wohl schon wissen, mit Erlaubnis meines Nachfolgers meine Kollegs geben. Wir haben dreimal so viel Studenten wie sonst. Ich halte hauptsächlich Übungen ab (und zwar so daß die Studenten Aufgaben behandeln, während ich dabei rumlaufe und nachsehe, was sie machen). Es macht den Studenten und mir Spaß, und ich hoffe, daß auch daß Übrige noch geregelt werden wird.⁵²

Dit optimisme werd al snel overschaduwd. Het was duidelijk, dat Freudenthal slechts als conservator (7 mei 1945) en als privaat-docent in de Analyse, Groepen-

⁵¹ Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 225.

⁵² Freudenthal aan Hopf, november 1945; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 88.

theorie en Topologie (13 november 1945) werd herbenoemd en niet als lector werd aangesteld. Zijn plaatsvervanger Bruins uit de tijd van de bezetting was dat ondertussen wél geworden en mocht dat ook na de oorlog blijven.⁵³ Deze situatie was voor Freudenthal onaanvaardbaar. Vele protesten van Freudenthal en een handtekeningnactie van zijn leerlingen en oud-leerlingen hadden echter geen resultaat.⁵⁴ Een uitnodiging van de Universiteit in Utrecht bood uiteindelijk de oplossing. Met pijn in zijn hart verhuisde Freudenthal met zijn gezin in 1947 van Amsterdam naar Utrecht.⁵⁵

3.5 Utrecht

Hier werd Freudenthal bij Koninklijk Besluit van 4 oktober 1946 aangesteld als ‘Hoogleraar in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde aan deze Universiteit om onderwijs te geven in de zuivere en toegepaste wiskunde en de grondslagen van de wiskunde’.⁵⁶ Op 9 december 1946 sprak Freudenthal bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de Rijksuniversiteit Utrecht zijn rede ‘5000 jaren internationale wetenschap’ uit, waarin hij sprak over de geschiedenis van de wiskunde met de nadruk op de voor-Griekse wiskunde.⁵⁷

In een interview in *Vrij Nederland* vertelde hij later over zijn verhuizing naar Utrecht:

Ik was veel liever in Amsterdam gebleven, waar ik al mijn studenten had. Het heeft mij jaren gekost om daar overheen te komen maar ik heb hier nu mijn eigen existentie geschapen.⁵⁸

Die existentie zou voornamelijk liggen in het opzetten van een mathematisch instituut in Utrecht en de kwaliteitsverbetering van het onderzoek en onderwijs aldaar. De Utrechtse wiskundige Frederik van der Blij (1923) herinnert zich de hoogleraar Freudenthal als de bindende factor op het mathematisch instituut.⁵⁹ Freudenthal was elke dag van vroeg tot laat op het instituut aanwezig, in al zijn werk bijgestaan door zijn secretaresse mevrouw Breughel. Haar schreef hij deels zijn grote productiviteit in de Utrechtse jaren toe:

53 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 90, 323; P.J. Knegtman, *Een kwetsbaar centrum van de geest. De Universiteit van Amsterdam tussen 1935 en 1950* (Amsterdam 1998) 249.

54 Meer over deze kwestie en Freudenthals aanstelling in Utrecht in hoofdstuk 5.

55 Omdat de voor Freudenthals didactische gedachtegoed relevante biografische informatie in de hierna volgende hoofdstukken vanzelf uitgebreider aan de orde komen, wordt de periode 1945-1990 in de rest van dit hoofdstuk minder uitgebreid beschreven.

56 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 324.

57 Hans Freudenthal, ‘5000 jaren internationale wetenschap’, *Euclides* 22 (1946) 222-241.

58 ‘H. Freudenthal’, *Vrij Nederland* (1976) 232-247, aldaar 233.

59 Karakteristiek was het wekelijks theeuurtje op het instituut (soms met gebak!) waar de bibliotheekaanvragen besproken werden. Freudenthal ontpopte zich dan – vooral in kleiner gezelschap – als groot verteller; gesprek met Van der Blij, 20 mei 1999.

If you wonder how anybody could travel, lecture, edit, publish so much at a time, my explanation is that for 25 years I had a secretary, Mrs. Breughel, who was unsurpassable. If I die early enough to get an obituary, her name should not be forgotten.⁶⁰

In de herinneringen van zijn studenten was hij ook in Utrecht geen begaafd docent. Zijn sociale onhandigheid maakte dat hij voor de meesten afstandelijk en slecht benaderbaar bleef. Studentenzaken gingen hem echter wel aan het hart. Samen met Van der Blij hield hij de vinger aan de pols bij de studenten. Elke tweedejaars werd door hen uitgenodigd voor een voortgangsgesprek. Al vanaf de jaren vijftig werden in juni alle eerstejaars besproken op wat bekend stond als ‘De Vergadering’.⁶¹ Typerend voor Freudenthal was hoe hij spontaan zijn plaats in die vergadering afstond aan een student ten tijde van de studentenrevolutie eind jaren zestig.

Naast het werk op het instituut werden Freudenthals jaren in Utrecht gekenmerkt door een toenemende interesse voor (wiskunde)onderwijskundige zaken in het algemeen. De kiem van die interesse was natuurlijk al gelegd tijdens de bezettingjaren en werd mede gevoed door de activiteiten van zijn vrouw op het gebied van het onderwijs en de pedagogiek.

Mevrouw Freudenthals zoektocht naar de ideale school voor haar kinderen had haar namelijk in contact gebracht met de wvo.⁶² Na jaren te hebben gezocht naar een aan haar idealen voldoende school, vond ze deze in 1952 in de opvoedingsfilosofie van de Duitse pedagoog Peter Petersen (1884-1952), de stichter en bedenker van het Jenaplan-systeem. Zij schreef:

Die Odyssee war zu Ende. Die Hoffnung diese Schule einmal in den Niederlanden zu verwirklichen war geweckt.⁶³

Ze zou zich de hierop volgende jaren intensief gaan bezighouden met het verspreiden en promoten van deze opvoedingsfilosofie.⁶⁴ In 1959 werd de Werkgroep Jenaplan van de wvo opgericht, in 1969 de Stichting Jenaplan.⁶⁵ Imelman en Meijer schreven de bloei van de Jenaplan-school in de jaren tachtig in Nederland voornamelijk toe aan haar inzet:⁶⁶

Nu staat Petersens opvoedingsfilosofie volgens ons alleen nog maar overeind dank zij de enorme werk- en werfkracht van de Nederlandse voortrekster Freudenthal-Lutter. Haar energieke initiatieven op het terrein van de onderwijsvernieuwing hebben inmiddels een bloeiende zogenaamde Jenaplanpraktijk opgeleverd.⁶⁷

60 Freudenthal aan Howson, 19 juli 1983; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 38.

61 Gesprek met Van der Blij, 20 mei 1999.

62 Zie ook paragraaf 2.2.5.

63 RANH, Susanna Freudenthal-Lutter Papers, inv.nr. 37.

64 Meer over mevrouw Freudenthals onderwijswerk in paragraaf 8.5.2.

65 RANH, Susanna Freudenthal-Lutter Papers, inv.nr. 87.

66 In 1982 zou mevrouw Freudenthal een eredoctoraat van de Universiteit van Giessen krijgen als erkenning van haar verdiensten op onderwijsgebied; RANH, Susanna Freudenthal-Lutter Papers, inv.nr. 006.

67 J.D. Imelman en W.A.J. Meijer, *De nieuwe school gisteren en vandaag* (Amsterdam 1986) 107.

Naast deze Werkgroep Jenaplan kende de wvo nog verscheidene andere werkgroepen. Eén daarvan was de in 1936 opgerichte ww.⁶⁸ Ook Freudenthal raakte betrokken bij de werkzaamheden van de wvo. Hij hield in augustus 1945 een lezing getiteld ‘Opvoeding tot denken’ op een conferentie van de wvo. In een brief aan zijn zus uit datzelfde jaar schreef hij hierover (vertaling uit het Duits door Freudenthal):

Ondertussen heb ik een vierdaagse pedagogische conferentie [van de wvo op De Steeg] meegemaakt op een kasteel hier in de buurt van Arnhem. Ik heb een lezing gehouden, met veel succes, over pedagogische vraagstukken waarover ik de laatste jaren heb nagedacht. Het was daar echt fijn. Ik was er weer vier dagen buiten.⁶⁹

Vanaf begin 1947 woonde Freudenthal geregeld de bijeenkomsten van de ww bij. In februari 1950 werd hij voorzitter. Een belangrijke taak waarmee Freudenthal zich binnen de ww bezig hield was het ‘opschonen’ van de wiskundeonderwijsprogramma’s van het vHMO. Dit werk zou uiteindelijk leiden tot een programmawijziging in 1958, waarbij een nieuw wiskundeprogramma in de geest van de ww van kracht werd.⁷⁰

Van Hiele schreef over de bloei van de ww na de oorlog: “Kortom, het was een heerlijke tijd, waarin didaktiek gemaakt werd”.⁷¹ Voor Freudenthal waren dit vruchtbare jaren, waarin hij zijn ideeën op het gebied van het wiskundeonderwijs en de wiskundedidactiek kon vormen en toetsen aan de feedback die hij in deze werkgroep kreeg. Hij omschreef de ww voor zichzelf als een “milieu van wiskundig-didactische bewustwording”.⁷²

Ook op (zuiver) wiskundig terrein bleef Freudenthal actief. Er was in de naoorlogse jaren in Utrecht een, zoals Van Est het omschreef, “voortreffelijke wiskunde-(sub)faculteit” ontstaan.⁷³ In 1951 werd het Mathematisch Instituut in Utrecht geopend. Freudenthal richtte zich in zijn wiskundig werk in die tijd op het verband tussen meetkunde en de topologische groepen (Lie-groepen). In zijn dies-rede ‘De wereld in de spiegel’, gehouden tijdens zijn rectoraatsjaar aan de Utrechtse Universiteit in 1964, zou Freudenthal spreken over de hiermee samenhangende kwestie van de oriëntatie van de ruimte.⁷⁴

Dit was slechts één van de vele interessegebieden van Freudenthal. Een kleine greep uit zijn publicaties levert naast wiskundige onderwerpen uit de topologie, statistiek en logica, een grote diversiteit aan onderwerpen, variërend van de geschiede-

68 Zie ook paragraaf 2.2.5.

69 Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 224.

70 Meer hierover in paragraaf 6.3.

71 Van Hiele, ‘Freudenthal en de didaktiek der wiskunde’, *Euclides* 51 (1975) 8-10, aldaar 9.

72 Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 343.

73 W.T. van Est, ‘Hans Freudenthal. 17 september 1905-13 oktober 1990’, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Jaarboek 1991* (1991) 139-142, aldaar 140.

74 Hans Freudenthal, ‘De wereld in de spiegel’, *Jaarboek Rijksuniversiteit Utrecht* (Utrecht 1964); Van der Blij, ‘Professor Freudenthal zeventig jaar’, *Euclides* 51 (1975) 3-7, aldaar 6.

nis van de wiskunde en wetenschap, maten van damesconfectie, communicatie met buitenaardse intelligentie tot fysica en astronomie.⁷⁵ De grote gemene deler in veel van zijn publicaties was steeds het streven de wiskunde in een bredere context te belichten en de veelzijdigheid en toepasbaarheid van de wiskunde uit te dragen.

Voor zijn wetenschappelijk werk zou Freudenthal in totaal vijf eredoctoraten ontvangen.⁷⁶ Van Est schreef:

Zeer terecht is in de bul van het eredoctoraat dat de Humboldt Universität te Berlijn hem in 1960 verleende als considerans vermeld: ‘...in Würdigung seiner hervorragenden Verdienste um die Entwicklung der Theorie der topologischen und der Lieschen Gruppen und der algebraischen Topologie sowie in Anerkennung seiner vielseitigen Bemühungen, Probleme der modernen Kultur mathematisch zu durchdringen...’⁷⁷

Gedurende het collegejaar 1960/61 woonden Freudenthal, zijn vrouw en dochter een jaar in de Verenigde Staten, waar Freudenthal een ‘sabbatical year’ aan Yale University (New Haven, Connecticut) doorbracht. Terug in Utrecht vervulde hij in het collegejaar 1963/64 de rectorfunctie, hetgeen veel tijd en energie vergde en zijn aandacht grotendeels van onderwijszaken en de ww afhield.

Freudenthal verlegde zijn aandacht in de jaren zestig naar het uitdragen van de in de ww opgedane ideeën in wijdere kringen en ontwikkelde zich tot een wiskundededidacticus met internationale bekendheid.⁷⁸ Zo was Freudenthal in 1954 Beth al opgevolgd als voorzitter van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde (NOCW), een door het Wiskundig Genootschap ingestelde commissie, die tevens de Nederlandse subcommissie van de International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) was.⁷⁹ Vier jaar later werd hij ‘Member at large’, van 1966 tot 1970 ICMI-president.

Freudenthal bleef echter altijd ‘l’enfant terrible’, zoals hij zichzelf trots omschreef, vasthoudend aan zijn eigen ideeën (ook als ze niet altijd even gangbaar en geaccepteerd waren) en scherpe kritiek uitend op alles wat hij als wetenschappelijk of didactisch ‘onkruid’ beschouwde.⁸⁰ In 1968 richtte hij het eerste internationale tijdschrift voor wiskundeonderwijs op, *Educational Studies in Mathematics*.⁸¹ Ook was hij de organisator van het eerste internationale congres voor wiskundeonderwijs te Lyon in 1969.

75 Hans Freudenthal en J. Sittig, *De juiste maat* (Leiden 1951); Hans Freudenthal, *Lincos-Design of a language for cosmic intercourse. Part 1* (Amsterdam 1960).

76 Deze vijf waren die van de Humboldt-Universität (Berlijn) in 1960, de Friedrich-Alexander Universität (Erlangen-Nürnberg) in 1972, York University (Toronto) in 1974, de Vrije Universiteit (Brussel) in 1974 en de Universiteit van Amsterdam in 1977; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1858.

77 W.T. van Est, ‘Hans Freudenthal. 17 september 1905-13 oktober 1990’, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Jaarboek 1991* (1991) 139-142, aldaar 142.

78 Voor een uitgebreidere beschrijving van deze ontwikkelingen, zie hoofdstukken 8 en 9.

79 Zie ook paragraaf 6.6.

80 Freudenthal, *Schrijf dat op*, *Hans* 348.

81 Zie ook paragraaf 9.2.

Op 26 januari 1971 werd in Utrecht het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO) opgericht als professioneel instituut verbonden met de (overheids-)Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW).⁸² Freudenthal werd hoogleraar-directeur. IOWO-medewerker Jan de Lange schreef over het samenwerken met Freudenthal in die tijd:

Alhoewel iedereen het erover eens was dat HF de laatste jaren veel milder was geworden, blonken zijn bijdragen altijd uit door hun scherpte. Veel mensen stoorden zich daaraan, met name zijn slachtoffers. Ze realiseerden zich misschien niet altijd dat hij ook binnen de Vakgroep en het IOWO zijn kritiek op dezelfde heldere wijze uitte.⁸³

Het IOWO had officieel als taak het ontwikkelen van wiskundecurricula voor de leeftijdsgroep 4-18, maar hield zich ook bezig met het (bij)scholen van wiskundeleraren, het verbeteren van onderwijsmethoden en het ontwikkelen van computeronderwijs op de middelbare school.⁸⁴ Dit instituut zou voor Freudenthal een middel blijken zijn ideeën en theorieën aan de (klaslokaal)praktijk te toetsen en te ontwikkelen en tevens zijn gedachtegoed verder uit te dragen. Over de werkwijze van het IOWO schreef Freudenthal bij het aftreden als hoogleraar-directeur in 1976:⁸⁵

IOWO is no research institute; its members do not regard themselves as researchers but as producers of instruction, as engineers in the educational field, curriculum developers.⁸⁶

Tijdens deze IOWO-tijd schreef Freudenthal zijn magnum opus, *Mathematics as an Educational Task* (1973), een lijvig boekwerk waarin het merendeel van zijn tot dan toe gepubliceerde didactische artikelen voorkwamen.⁸⁷ Vijf jaar later werd dit gevolgd door het boek *Weeding and sowing. Preface to a science of mathematical education* (1978), waarin hij de weg en aanpak schetste die afgelegd zou moeten worden om tot wetenschap van wiskundeonderwijs te komen.⁸⁸

Ook na zijn afscheid als hoogleraar(-directeur) in 1976 bleef Freudenthal nauw betrokken bij het werk van het instituut. Bijna dagelijks was hij er te vinden. In 1981 echter werd het IOWO als zodanig opgeheven om op te gaan in een door de politiek zo gewenste algemene onderwijsstructuur. Een kleine groep medewerkers zette IOWO-onderzoek voort in de universitaire vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijscomputercentrum (OW&OC) van de faculteit voor Wiskunde en Informatica in Utrecht, vanaf 1991 ‘Freudenthal Instituut’ genaamd. In 1983 schreef Freudenthal *Didactical phenomenology of mathematical structures*, waar-

82 Meer over de oprichting van het IOWO in hoofdstuk 9.

83 J. de Lange, ‘In memoriam Hans Freudenthal’, *Nieuwe wiskerant* 10 (1990) 3.

84 *Educational Studies in Mathematics* 7 (1976) 351.

85 Van der Blij volgde Freudenthal op als hoogleraar-directeur van het IOWO.

86 Hans Freudenthal, ‘Preface’, *Educational Studies in Mathematics* 7 (1976) 189.

87 Hans Freudenthal, *Mathematics as an educational task*.

88 Hans Freudenthal, *Weeding and sowing. Preface to a science of mathematical education* (Dordrecht 1978).



Freudenthal krijgt de Gouden Ganzeveer uitgereikt van de minister van Onderwijs en Wetenschappen, dhr. W.J. Deetman (1984).

van een deel een jaar later in het Nederlands verscheen onder de titel *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren*.⁸⁹ In de inleiding schreef hij:

De didactische draagwijdte van mentale objecten en activiteiten en de aanzet van begripsvorming waar die didactisch mogelijk is, zijn het hoofdonderwerp van deze fenomenologie. Ze werd geschreven in de stimulerende sfeer van het IOWO en wordt derhalve opgedragen aan de nagedachtenis van die instelling die vermoord en ter ziele is, en aan haar medewerkers die doorgaan met in haar geest te werken.⁹⁰

Begin jaren tachtig begon Freudenthal met het opruimen en ordenen van al zijn papieren als voorbereiding op het schrijven van een autobiografisch werk. Op 24 september 1986 overleed zijn vrouw op 78-jarige leeftijd. In zijn grafrede sprak Freudenthal de volgende woorden:

Wat ben jij altijd flink geweest! Flink als voorbeeld voor mij en om me uit de put te helpen. Ik weet dat dat je laatste zorg is geweest: hoe zal Hans het zonder mij klaarspelen? Wees gerust, meisje, je hebt me geleerd je flinke jongen te zijn.⁹¹

89 Hans Freudenthal, *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Dordrecht 1983); Hans Freudenthal, *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren* (Utrecht 1984).

90 Freudenthal, *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren* 10.

91 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 366.

Een jaar later verscheen Freudenthals *Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven*, een verzameling anekdotes, verhalen en verslagen uit zijn leven. “Een ooggetuigenverslag van een roerig tijdperk” noemde hij het:⁹²

Ik vertel verhalen, omdat ik hoop dat anderen ze onthouden en aan het nageslacht doorgeven – een ijdele hoop. Verhalen over mezelf, maar meestal over anderen. En dan gebeurt het telkens weer dat iemand zegt ‘Schrijf dat op, Hans!’, blijkbaar omdat hij het, net als ik, zonde vindt, dat zo’n verhaal in vergetelheid raakt. Daar doe ik nu verslag van, van wat ik gezien en gehoord heb.⁹³

Freudenthal bleef actief betrokken bij de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs. Hij had zich eind jaren tachtig zelfs “tot de computer bekeerd”, zoals hij het omschreef.⁹⁴ Een geweldige uitvinding vond hij: niet alleen ging het werken ermee “zo snel als je denkt of spreekt”, ook kon hij nu naar eigen zeggen brieven schrijven, die hij anders nooit geschreven zou hebben, omdat de enigen die zijn gekriebel lezen konden allang gepensioneerd waren.⁹⁵

Op zijn oude dag zat Freudenthal nog steeds vol grootse plannen. In *Schrijf dat op, Hans* zei hij hierover:

Laat ik geen bescheidenheid veinzen. Ik doe nog nuttig werk. Ik kan het nog aan en doe het redelijk goed. Het lijkt veel, maar het is toch meer herhalen van eerder gezegde, eerder gedane zaken. Stokpaardjes berijden? Ik pak ook nieuwe ideeën op. Ideeën van anderen, wel te verstaan, om er ruchtbaarheid aan te geven. De anderen – daar ga je uiteraard selectief te werk: je vult je eigen weten en kunnen aan met wat erbij past en je ziet scherper wat er strijdig mee is. Standvastig en toch flexibel zijn is – althans in de goede verhouding – geen ouderdomskwaal, maar niet te erkennen dat er niettemin aan deze activiteit eens een eind moet komen, zou het wel kunnen zijn.⁹⁶

Na een rondreis in China in 1987, waar hij lezingen over zijn didactische ideeën gaf, voelde Freudenthal de behoefte deze nog een keer te stroomlijnen en op papier te zetten. Dit resulteerde in het boek *Revisiting mathematics education. China lectures*, dat zijn laatste zou blijken te zijn.⁹⁷ Een week nadat hij het manuscript voor het laatst doorgenomen had, overleed Hans Freudenthal, op 13 oktober 1990.

92 Ibid., 12.

93 Ibid., 13.

94 Freudenthal aan Hans Georg Steiner, 20 september 1990; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 71.

95 Ibid.

96 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 330.

97 Hans Freudenthal, *Revisiting mathematics education. China lectures* (Dordrecht 1991).

HOOFDSTUK 4

‘Rekendidaktiek’

Iets anders dat ik heb neergeschreven en niet gepubliceerd – trouwens niet eens voltooid – was een rekendidaktiek. Het manuscript – 103 bladzijden folio getypt en wat niet-getypte die zoek zijn – moet uit 1942 dateren. [...] Ik zei het al: het manuscript is niet voltooid – ik zou zelfs kunnen zeggen dat ik aan de eigenlijke rekendidaktiek niet ben toegekomen.

Hans Freudenthal in *Schrijf dat op, Hans*, 1987¹

Onvoltooid, niet gepubliceerd en eigenlijk nog niet eens een échte rekendidaktiek, zo keek Freudenthal ruim veertig jaar later terug op het manuscript ‘Rekendidaktiek’. Toch zijn er voldoende redenen om aandacht aan dit manuscript te besteden. De belangrijkste is het feit dat dit manuscript het eerste document van Freudenthal over (reken)onderwijs is dat bewaard is gebleven. Uit zijn eigen beschrijving van zijn activiteiten op dit gebied viel zelfs te concluderen dat het ook daadwerkelijk het eerste didactiek-manuscript was van zijn hand.²

Het vormde het begin van een voor hem op dat moment nieuwe interesse en een eerste neerslag van zijn ideeën en gedachten over het (reken)onderwijs. Hierin waren duidelijk een begin en aanzet van veel van zijn latere ideeën en werkwijze terug te vinden – soms tot zijn eigen verbazing:

Ik heb het manuscript van 1942 geboeid herlezen, soms, zoals ik al zei, verbaasd dat ik dit of dat toen al heb gezegd, soms teleurgesteld door het gevoel: wat heb ik er eigenlijk bijgeleerd?³

Genoeg redenen om hier uitgebreid in te gaan op uiterlijk, inhoud en functie van het manuscript ‘Rekendidaktiek’.

Het manuscript, hier aangeduid met de naam ‘Rekendidaktiek’, is 103 genummerde pagina’s lang. In het Rijksarchief te Haarlem zijn twee exemplaren aanwezig: een getypte en de doordruk ervan. Op het getypte exemplaar was bovenaan de eerste bladzijde met zwarte vulpen (hoogstwaarschijnlijk door Freudenthal zelf) geschreven:

Hans Freudenthal
Fragment Rekendidaktiek plm 1942
Woord Vooraf

1 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 337. Zoals in paragraaf 4.1 uiteengezet, dateerde het manuscript uit 1944.

2 Dagboekjes; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 147; Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 335-363.

3 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 338.

Op de doordruk staat op vergelijkbare plaats:

Onvoltooid rekendidactiek ±1942
getypt

In beide stukken waren met zwarte vulpen tik- en spelfouten gecorrigeerd en woorden en zinsdelen geschrapt en toegevoegd. Het manuscript is volgens de paginanummering te lezen, met uitzondering van de pagina's 70-72, waar een aanvulling op de tekst van bladzijde 66 staat geschreven. Voetnoten staan in de hoofdtekst, aangegeven met het handgeschreven of getypte commentaar “voetnoot”, veelal afgeschermd met een streep boven en onder de voetnoot-tekst en getypt met kleinere onderlinge regelafstand. Ook de tekst van de citaten is met kleinere regelafstand getypt en springt in. Af en toe staan in de kantlijn aanwijzingen voor het drukken geschreven, zoals “– liefst met louter hoofdletters geschreven” (pagina 13), “petit” (pagina 15), of “geen alinea” (pagina 72). Voor zover nagegaan lijken de handgeschreven correcties en commentaar in beide exemplaren identiek. Voor de verdere bespreking van het manuscript is hier van het eerste (getypte) exemplaar gebruik gemaakt.

4.1 De datering van ‘Rekendidactiek’

Zoals al eerder opgemerkt, waren beide exemplaren door Freudenthal zelf gedateerd ‘plusminus 1942’. De toevoeging ‘plusminus’ doet vermoeden dat deze datering achteraf en zonder grote zekerheid is toegevoegd, wellicht pas tijdens het schrijven van *Schrijf dat op, Hans* in de jaren tachtig. Dit vermoeden wordt bevestigd door het bestaan van een notitieboekje uit de oorlogstijd. Hierin maakte Freudenthal aantekeningen van ongeveer 370 boeken en artikelen over (reken)onderwijs, pedagogiek, psychologie en didactiek.⁴ Ook waren hierin enkele aantekeningen van rekenlessen van en gesprekken met zijn kinderen genoteerd, waarbij de leeftijd van de kinderen vermeld werd. Hieruit is op te maken dat deze aantekeningen dateren uit 1943. Ook in de tekst van ‘Rekendidactiek’ verwees Freudenthal naar deze literatuurstudie:

De konklusies, die ik uit mijn waarnemingen trok, waren niet altijd in overeenstemming met de gedachten, waardoor de auteurs van de rekenboekjes, die ik toevallig in mijn lessen gebruikte, zich hebben moeten laten leiden. Er was een zeker verschil van inzicht, en allengs gevoelde ik de behoefte, om door nauwkeurigere literatuurstudie vast te stellen, “wie gelijk had”. [...] Ik heb tenslotte, terwijl het plan van dit boek rijpte, alle voor mij bereikbare publikaties op het gebied van het rekenonderwijs bestudeerd.⁵

4 Notitieboekje met aantekeningen van een literatuurstudie over rekendidactiek, met bijbehorende aparte index op onderwerp; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 440.

5 Hans Freudenthal, ‘Rekendidactiek’ (ongepubliceerd 1944) 6-7; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465.

Dat hij naar het hierboven beschreven aantekeningenboekje refereerde, is ook op te maken uit de verwijzing ernaar in *Schrijf dat op, Hans*:

Ik heb toen – in de oorlogsjaren – Didi en Thijs rekenen en lezen geleerd, en voor het rekenonderwijs heb ik de hele literatuur die ik te pakken kon krijgen bestudeerd; het boekje aantekeningen van de literatuurstudies is er nog.⁶

Bijna alle literatuur waarnaar Freudenthal in 'Rekendidaktiek' verwees, was in dit aantekeningenboekje terug te vinden. Het aantekeningenboekje is overigens één van de weinige met aantekeningen op het gebied van de didactiek die in Freudenthals persoonlijk archief te vinden zijn.

Een logische conclusie is dus dat Freudenthal 'Rekendidaktiek' niet in 1942, maar later heeft geschreven. Een vrij precieze datering tenslotte is te halen uit zijn dagboekjes van 1940-1944. Vanaf 16 maart 1943 zijn diverse aantekeningen te vinden die verwijzen naar het doen van de literatuurstudie voor 'Rekendidaktiek'.⁷ Op 1 januari 1944 schreef Freudenthal in zijn dagboek:

Mijn voorstudie tot het rekenpaed. boek nadert langzamerhand zijn eind. Weken of maanden niets anders gedaan.⁸

Op 19 januari begon hij met het daadwerkelijk schrijven van het manuscript: "eerste 7 blz. rekenpaed. begonnen" vermeldde het dagboek, en op de dagen erna kregen als "rekenpaed. getikt" of "verder getikt". Op 14 april noteerde Freudenthal "Met rekenmethode op blz. 100". Veel meer bladzijden zou het manuscript niet krijgen. Het manuscript dateert dus uit 1944.

4.2 Aanleiding en intentie

De Tweede Wereldoorlog en de daarmee gepaard gaande gedwongen passiviteit was voor sommige geleerden een gelegenheid pas op de plaats te maken en in hun theoretische werk een nieuwe weg in te slaan.⁹ Ook op Freudenthal had het gedwongen thuis zitten een dergelijk effect. Door het in grote mate afgesneden zijn van de wetenschappelijke wereld (voor zover er in die wereld nog sprake van activiteit wás natuurlijk) kreeg Freudenthal de kans, zich op tot dan toe slechts sluimerend aanwezig zijnde interesses toe te leggen. Namen voorheen zijn wiskundig werk en alle universitaire beslommingen hem volledig in beslag, nu had hij ineens de ruimte om verhalen en romans te schrijven, zich uitgebreid in de geschiedenis te

6 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 337.

7 Dagboekjes 1940-1945; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 147.

8 Ibid.

9 Zo schreef Dijksterhuis in die tijd het eerste concept van zijn *Mechanisering van het wereldbeeld* (Amsterdam 1950) en werd er in Leiden en Utrecht baanbrekend theoretisch werk voorbereid in de astronomie; Klaas van Berkel, 'Kwaliteit en zuinigheid in het wetenschappelijk onderzoek', in: Kees Schuyt en Ed Taverne, ed., 1950. *Welvaart in zwart-wit* (Den Haag 2000) 331-354, aldaar 333.

Iedereen, die zoekende of wandelende ^{ooit} op gebieden terecht kwam, die hij bij zijn eerste stappen niet zag - laat staan overzag, zal mij geloven, wanneer ik verzeker, dat ook ik tot degene ^{het} behoor, die een geschrift als het nu verschenen niet van mij hebben verwacht. De eerste stappen op ~~dit~~ ^{dit} gebied van de didactiek methodiek van het rekenonderwijs deed ik ~~aan~~ ^{aan} ~~de~~ ^{de} kinderen hun eerste stappen doen; binnenshuis, nl. in de rekenlessen, die ik soms opzettelijk, soms terloops en meer toevallig aan mijn kinderen gaf.

Fragment uit ‘Rekendidaktiek’ (1944).

verdiepen en – niet in de laatste plaats – om de ontwikkeling van zijn kinderen op de voet te volgen.

Al in mei 1942, waarschijnlijk bij het voorbereiden van zijn lessen voor de Joodse Raad, had Freudenthal zijn vrouw boeken voor de akte Kv uit de bibliotheek laten halen.¹⁰ Aangezien hij pas een jaar later aan zijn literatuurstudie voor ‘Rekendidaktiek’ begon, leken deze lessen geen directe aanleiding voor zijn didactiekinterese te vormen.

Op het moment dat Freudenthal met het schrijven van ‘Rekendidaktiek’ begon, had hij zich nooit eerder over dit onderwerp uitgelaten in een publicatie. In zijn ‘Woord vooraf’ voelde hij de noodzaak zijn beoogde lezerspubliek de oorsprong van deze onverwachte interesse uit te leggen. Hij schreef:

Iedereen, die zoekende of wandelende ooit op gebieden terecht kwam, die hij bij zijn eerste stappen niet zag – laat staan overzag, zal mij geloven, wanneer ik verzeker, dat ook ik tot hen behoor, die een geschrift als het nu verschenen niet van mij hebben verwacht.¹¹

De directe aanleiding van deze interesse kwam voort uit de rekenlessen, die hij “soms opzettelijk, soms terloops en meer toevallig” aan zijn kinderen gaf, zonder enige “theoretische bijbedoelingen”.¹² Zijn dagboeken deden dan ook vanaf 1941 verslag van dergelijke activiteiten. Geregeld maakte Freudenthal aantekeningen van die “soms terloops[e]” gesprekjes met zijn zoons.

Ook de meer opzettelijke (reken)lessen die hij aan ze gaf, tekende hij aan. “Ik ben nu altijd de halve dag met Didi bezig. Rekent flink” schreef hij op 1 december

¹⁰ Dagboekjes 1940-1945, 27 mei 1942; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 147.

¹¹ Freudenthal, ‘Rekendidaktiek’ 2; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465.

¹² Ibid.

1941.¹³ En enkele maanden later: “weer het gewone rekenen, schrijven en lezen met de jongens”.¹⁴ Hij bleef dit zo goed en zo kwaad als het ging gedurende de oorlogsjaren doen: “elke dag doe ik met Didi en Thijs schooltje”, schreef hij op 23 april 1943.

In zijn ‘Woord vooraf’ deed Freudenthal nog een tweede grondslag voor het schrijven van ‘Rekendidaktiek’ uit de doeken:

Voor den lezer, die dit boek graag psychologisch zou willen verklaren, wil ik de andere grondslag, waar het boek op rust, niet verheimelijken: ik bedoel een bepaalde instelling van den auteur, een bepaald toegerustzijn op de behandeling van theoretische vragen en op het opwerpen en analyseren van problemen, een geestelijke instelling, die weliswaar niet op paedagogisch terrein is verworven, maar die – één keer op welk wetenschappelijk gebied dan ook verworven – niet zo licht verloochend kan worden.¹⁵

Deze wetenschappelijke houding was volgens Freudenthal essentieel om juist die “kleine incidenten in het huiselijk onderwijs” op te merken en te analyseren, die een ander zonder deze houding wellicht als niet relevant zou ervaren. Bovenal stelde deze achtergrond Freudenthal in staat “proeven” te nemen:

Ik deed dus, wat elke onderzoeker doet, die ertoe in staat wordt gesteld, waar een vraag meer dan één antwoord toeliet, doordat de ervaringsstof onvoldoende was, trachtte ik in de werkelijkheid de voorwaarden van de vraag te scheppen, om de werkelijkheid te dwingen, mij het antwoord op mijn vraag te geven.¹⁶

Hiermee paste Freudenthal het principe van ‘transfer’ op zijn eigen capaciteiten als onderzoeker toe. Immers, onder ‘transfer’ (of de vergelijkbare Nederlandse term ‘vormende waarde’) van een vak werd het kunnen toepassen van vaardigheden in een ander (vak)gebied dan die waarin zij verkregen zijn verstaan. ‘Transfer’ zou nog een geregeld terugkerend onderwerp in de discussies omtrent wiskundendidaktiek blijken.¹⁷

Het manuscript was duidelijk bedoeld als een begin van wat uiteindelijk een boek over rekendidaktiek had moeten worden, vermoedelijk bedoeld als theoretische basis voor (aankomende) onderwijzers en schrijvers van rekenmethoden. Zo had Freudenthal het geregeld over “dit boek” en verwees hij op verschillende plaatsen naar secties die (nog) niet geschreven waren. Ook duiden de al eerder genoemde aanwijzingen voor het drukken erop, dat dit stuk zeker niet slechts als schrijfoefening of gedachtespinsel bedoeld was.

13 Dagboekjes 1940-1945, 1 december 1941; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 147.

14 Dagboekjes 1940-1945, 1 april 1942; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 147.

15 Freudenthal, ‘Rekendidaktiek’ 3; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465.

16 Ibid., 4.

17 Freudenthal zou op het fenomeen transfer in het wiskundeonderwijs uitgebreid terugkomen in zijn voordracht ‘Opvoeding tot denken’ van 1945, waarover meer in paragraaf 5.1.3.

Te zeggen hoe omvangrijk het boek uiteindelijk zou zijn geworden, blijft een gok. Uit de verwijzingen naar latere, niet geschreven hoofdstukken was op te maken dat het in ieder geval Freudenthals bedoeling was meer te schrijven over het begrip getal, over de praktische eisen waaraan het rekenonderwijs zou moeten voldoen, over de vormende waarde of transfer van de wiskunde, over de positieve kanten van de psychologie, pedagogiek, algemene didactiek en methodiek als hulpwetenschappen voor de rekendidactiek, over het systematische Amerikaanse onderzoek onder leiding van C. Washburne, over de testpsychologie, over de verhoudingsdeling, over de eisen die de maatschappij aan het rekenonderwijs stelt en over het ‘leren denken’ door rekenonderwijs.¹⁸ Zoals hij zelf al opmerkte in *Schrijf dat op*, Hans had hij in ieder geval nog enkele bladzijden geschreven, die in de loop der tijd verloren zijn geraakt.¹⁹ Het manuscript eindigde dan ook abrupt onder aan de bladzijde met de volgende onvolledige zin op pagina 103:

En ik breid dit oordeel uit tot in die grensgebieden van het rekenen, die al enigszins aan wiskunde doen denken; want de innerlijke waarde van de wiskunde begint ²⁰

Maar het lijkt onwaarschijnlijk, dat er veel meer dan enkele bladzijden verloren zijn geraakt. Een maand na het schrijven van de eerste honderd bladzijden werd Freudenthal te werk gesteld in Havelte. Bij thuiskomst in september stond een lange, moeilijke hongervinter voor de deur. Het boek dat hem bij het doen van de literatuurstudie en het typen van het eerste deel voor ogen stond, zou er uiteindelijk nooit komen.

Maar tegen wie had hij het in zijn ‘Rekendidaktiek’? Hoe werd er over rekenonderwijs in die tijd gedacht en geschreven? Hoe zag het rekenonderwijs er in de praktijk eigenlijk uit?

4.3 Het rekenonderwijs op de lagere school

In 1900 werd de leerplichtwet ingesteld.²¹ Vanaf dat moment gold vanaf het zevende jaar voor alle kinderen een leerplicht van in totaal 6 jaar. Rond 1905 bezocht ruim 95% van alle kinderen in de leeftijd van 6 tot 12 jaar het lager onderwijs.

In het eerste kwart van de vorige eeuw veranderde er weinig binnen het lager onderwijs. Lager onderwijs betekende voor het merendeel van de leerlingen eind-

18 Freudenthal, ‘Rekendidaktiek’ 19, 21, 23, 26, 34, 58, 65, 95, 101 en 103; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465.

19 Zie ook het citaat op pagina 69.

20 Freudenthal, ‘Rekendidaktiek’ 103; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465.

21 Bij de samenstelling van deze paragraaf zijn gegevens ontleend aan de volgende werken: M. du Bois-Reymond, J. Lamboo, M. Smits, T. Walaardt-Sacré, *Onderwijzersleven* (Nijmegen 1981); Dodde, *Het Nederlandse onderwijs verandert*; A. Leen, *De ontwikkeling van het rekenonderwijs op de lagere school in de 19e en het begin van de 20e eeuw* (Groningen 1961); Nelissen, ‘Eeuwenlang rekenen’, *Willem Bartjens* 18 (1998/99) 36-39.

onderwijs: slechts een klein percentage van de leerlingen werd er op hogere vormen van onderwijs voorbereid. De invloed van opkomend Montessori- en Jenaplanonderwijs, waar vrijere leer- en werkvormen gehanteerd werden, was in het interbellum nog gering.

Het onderwijs op de lagere school was hoofdzakelijk klassikaal, wat geen wonder was met het vaak grote aantal kinderen per onderwijzer. Situaties van 50 of meer leerlingen in een klaslokaal, verdeeld over 2 of meer klassen waren geen uitzondering. Een juf vertelde over het lesgeven rond 1920:

Vertelvakken in een gekombineerde klas vertel je aan alle drie tegelijk. Schrijven als het kan ook alle drie tegelijk, soms afwisselend bespreken en dan weer laten maken, en dan weer een andere groep iets uitleggen enzovoort. Zo ging het ook met rekenen. De kinderen wennen aan dit systeem en het voordeel is dat ze veel zelfstandiger leren werken.²²

De nadruk binnen het onderwijs op de lagere school lag op lezen, schrijven en rekenen, waarnaast ook aandacht was voor taal, aardrijkskunde, geschiedenis, kennis van de natuur, gymnastiek en zingen. Rekenen was sinds 1806 bij wet een verplicht vak.

Het lag voor de hand, dat in een situatie zoals hier boven geschetst de nadruk in het rekenonderwijs veelal lag op het mechanisch aanleren van rekenvaardigheden. Uitleggen, voordoen, nadoen en veel oefenen was het devies. Dit werd weerspiegeld in de rekenmethoden uit die tijd.

Een rekenleerboek voor de kweekschool uit 1917 onderscheidde binnen het rekenonderwijs het "aanschouwelijk rekenen" (met aanwezige voorwerpen of tekeningen), het hoofdrekenen en het schriftelijk rekenen (waaronder het cijferen en het oplossen van vraagstukken).²³ Berucht waren de ingeklede vraagstukken, de zogenaamde 'denksommen', die een hoog puzzelgehalte hadden. Uit een invloedrijke rekenmethode van P.J. Bouman en J.C. van Zelm uit de jaren dertig stamde de volgende 'denksom':

Aan een gemeenschappelijke dis neemt de eerste gast $1/3$ van een rondgaand gerecht en iedere volgende gast neemt $1/3$ van wat hij nog op de schotel vindt. Als nu de vierde gast 47,5 gram van dat gerecht minder krijgt dan de eerste, hoeveel gram liet hij dan nog voor de overige gasten over? ²⁴

In het eerder aangehaalde leerboek voor de Kweekschool werd de waarde van het rekenen in de eerste plaats gezocht in de materiële (praktische) waarde: "het leven eischt van ons, dat wij kunnen rekenen, d.i. hoeveelheden ontbinden en samenstellen, of korter gezegd werken met hoeveelheden".²⁵ In de tweede plaats lag de waar-

²² M. du Bois-Reymond, J. Lamboo, M. Smits, T. Walaardt-Sacré, *Onderwijzersleven* 102.

²³ P.H. Heijnen, *Methodiek van het rekenen in de lagere school, ten dienste van normaallessen en kweekscholen* (Groningen 1917) 7.

²⁴ Zoals geciteerd in: Leen, *De ontwikkeling van het rekenonderwijs op de lagere school* 133-134.

²⁵ Heijnen, *Methodiek van het rekenen in de lagere school* 1.

de van het rekenonderwijs volgens de schrijver in het aankweken van goede denkgewoonten:

Elke werkzaamheid van den geest geschiedt des te vlugger en nauwkeuriger naarmate zij vaker wordt herhaald. Het rekenen geeft veel aanleiding tot oordeelen en besluiten en leert daardoor logisch denken over onderwerpen, die tot zijn gebied behooren. Het kweekt verder, door het nauwkeurig redeneeren en de telkens noodige omzichtigheid in het maken van gevolgtrekkingen, goede denkgewoonten, die ook op ander gebied nuttig zijn.²⁶

Bovendien zou de beloning van de voortdurende inspanning die de leerling moest leveren om goed werk te verrichten een zekere morele waarde aan het rekenonderwijs verlenen.

Dergelijke uitgangspunten leken gemeengoed binnen het rekenonderwijs. Desondanks lag in de praktijk de nadruk toch voornamelijk op het aanleren en automatiseren van trucjes en het leren herkennen van de juiste oplossingsstrategie bij een bepaald som-type. Vooral de denk- of redactiesommen – hoewel gekozen om hun vermeende vormende waarde – gaven daartoe aanleiding.

In het Duitse rekenonderwijs waren na de Eerste Wereldoorlog op initiatief van Johannes Kühnel wel grote veranderingen gaande. Indirect kwamen deze voort uit de Klein'sche Reform.²⁷ Kühnel bestreed in zijn 'Neubau des Rechenunterrichts' (1916) de onpsychologische opbouw van het rekenonderwijs, de onvoldoende aanschouwelijkheid, de vroegtijdige abstractie en mechanisering en de verwaarlozing van het rekenen in verband met de werkelijkheid. Als uitgangspunt bij het leren rekenen zou volgens hem het ontstaan van het getalbegrip bij het kind genomen moeten worden.

In Nederland had de onderwijzer Jan Versluys (1845-1920) in de negentiende eeuw al opgeroepen tot een meer heuristisch ('zelf-vindend') en aanschouwelijk ingericht reken- en wiskundeonderwijs.²⁸ Het verschijnen van zijn *Methoden bij het onderwijs in de wiskunde en bij de wetenschappelijke behandeling van dat vak* in 1874 wordt wel beschouwd als het ontstaan van vakdidactiek in Nederland.²⁹ Zijn ideeën hadden op de praktijk van het rekenonderwijs echter weinig effect. De starre en 'kale' rekenmethoden van Bouman en Van Zelm waren in het interbellum van grotere invloed.

Pas in de jaren dertig was er sprake van een zekere vernieuwingstendens van het rekenonderwijs in Nederland. J. Waterink was sinds 1926 hoogleraar pedagogiek aan de Vrije Universiteit in Amsterdam en publiceerde in de jaren dertig geregeld over rekendidactiek. Kohnstamm stimuleerde in diezelfde tijd de ontwikkeling van het rekenonderwijs door aandacht te besteden aan de psychologische basis voor de

26 Heijnen, *Methodiek van het rekenen in de lagere school* 2.

27 Zie ook: paragraaf 2.2.2.

28 Meer over Jan Versluys en wiskundendidactiek in: De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde* 120 e.v.

29 *Ibid.*, 120.

(reken)didactiek, die hij zocht in de denkpsychologie van Otto Selz. Ook besteedden zowel Waterink als Kohnstamm veel aandacht aan de verbetering van de aansluiting tussen de lagere en middelbare school. Met het verschijnen van de methode *Fundamenteel rekenen* van P.A. Diels en J. Nauta in 1936 kwam er meer aandacht voor het inperken van de leerstof en het teruggaan naar de basis van het rekenonderwijs: het onderwijzen van de fundamentele begrippen.

Freudenthals rekendidactiek-literatuurstudie uit de Tweede Wereldoorlog omvatte ruim 370 titels. Het enige criterium dat hij bij de selectie van die literatuur leek te handhaven, was de beschikbaarheid van de betreffende werken. Hij las letterlijk alles wat hij te pakken kon krijgen. Nagenoeg alle van de hierboven beschreven leerboeken, methodes en publicaties op het gebied van de pedagogiek (en meer) kwamen op zijn literatuurlijst voor. Freudenthal begon dus theoretisch degelijk onderbouwd aan het schrijven van zijn 'Rekendidactiek'. Van correspondentie of contacten tussen hem en didactici of pedagogen in deze tijd is echter geen spoor terug te vinden.

De ruim 300 bladzijden van zijn aantekeningenboekje had Freudenthal met een zo klein mogelijk handschrift volgeschreven met aantekeningen over de door hem bestudeerde boeken. De meeste aantekeningen waren citaten of korte samenvattingen van het betreffende werk, slechts een heel enkele keer liet hij zich verleiden tot een (ver)oordeelende uitspraak. Tussen dit relatief neutrale aantekeningenboekje en de inhoud van 'Rekendidactiek' zat dan ook een grote mentale stap, die niet in geschriften terug te vinden is.

4.4 Freudenthals 'Rekendidactiek': de inhoud

Het manuscript bestond uit drie hoofdstukken, te weten 'Woord vooraf' (pagina's 1-11), 'Hulpwetenschappen' (pagina's 11-91), en het onvolledige hoofdstuk 'Doel en nut van het rekenonderwijs' (pagina's 91-103).

4.4.1 Woord vooraf

In 'Woord vooraf' legde Freudenthal de lezer uit, hoe hij door observatie van zijn eigen kinderen tijdens het leren rekenen tot het schrijven van dit werk was gekomen. Een andere grondslag van dit werk was zijn eigen vermogen theoretische vragen wetenschappelijk te behandelen, problemen te analyseren en 'proeven' te nemen. Hij waarschuwde de lezer niet te veel pasklare antwoorden te verwachten. Zijn belangrijkste drijfveer voor deze bescheidenheid was hiermee "anderen tot eigen onderzoek te prikkelen, waar het eigen onderzoek te kort schiet".³⁰

De psychologische gegevens die Freudenthal door het waarnemen van zijn eigen

30 Freudenthal, 'Rekendidactiek' 1; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465.

kinderen verzamelde, mochten niet worden overschat. Bij dit soort (in de vakliteratuur veel voorkomende) observaties ging het immers om slechts enkele kinderen uit een intellectueel milieu, hetgeen geen goede steekproef vormde. Hij schreef hierover:

Ik zou gaarne, op kollektieve schaal willen inhalen, wat ik, helaas, moest verzuimen, maar ondertussen gaapt hier een klove, die ik, node, anders heb trachten te overbruggen.³¹

Dit overbruggen deed hij door de uitgebreide literatuurstudie, die de theoretische fundering van de door hem getrokken conclusies vormde. Helaas was het door de oorlogstijd voor Freudenthal niet mogelijk alle Amerikaanse literatuur zelf te bestuderen. Veel had hij enkel uit de tweede hand leren kennen:

...ik hoop, dat ik deze boeken, boekjes en artikels, die ik niet kon bemachtigen, onder gunstiger tijdsomstandigheden nog met vrucht zal kunnen doorbladeren, zodat ik ook op dit punt een verzuim zou kunnen inhalen.³²

Volgens Freudenthal was de geldigheid van een theorie van het rekenonderwijs veel minder nationaal beperkt dan die van andere vakken. De verschillen die er internationaal bestonden kwamen voornamelijk voort uit traditie. Tijdens zijn literatuurstudie was Freudenthal haast niets tegengekomen wat volkomen nutteloos bleek. Hij las vooral Engelse, Duitse, Nederlandse en wat Franse literatuur, en een enkel Russisch werkje. De meeste waarde hechtte hij aan de Amerikaanse literatuur:

Het meest heb ik geprofiteert [sic] van de haast overstelpende Amerikaanse literatuur – ik zeg dat met des te meer klem, naarmate mij steeds duidelijker blijkt, dat er nog bij veel belangstellenden het besef ontbreekt van de grote betekenis der Amerikaanse theoretische en praktische opvoedkunde.³³

4.4.2 Hulpwetenschappen

In dit hoofdstuk nam Freudenthal stuk voor stuk een stel wetenschappen onder de loep die voor de rekendidactiek als mogelijke hulpwetenschappen zouden kunnen functioneren.

De eerste hulpwetenschap was wijsbegeerte. Vaak werden wijsgerige beschouwingen volgens Freudenthal slechts aan het begin van een wetenschappelijk werk gegeven als ‘versierselen’ en verder niet meer door de schrijver gebruikt. Een dergelijk voorbeeld in geschriften over rekenonderwijs waren de misplaatste beschouwingen over het begrip getal, die volgens hem geen enkele zinnige bijdrage aan een rekendidactiek leverden. Een beschouwing over ‘getalbegrip’ – het *begrijpen* van

³¹ Ibid., 6.

³² Ibid., 7.

³³ Ibid., 10.

getallen – zou daar beter op zijn plaats zijn. Als voorbeeld van dergelijke nutteloze filosofische toevoegingen haalde hij onder andere enkele citaten uit het werk van Kühnel aan.³⁴ Wijsbegeerte als hulpwetenschap deed op deze manier weinig toe of af aan de kwaliteit van een rekenmethodiek en hetzelfde kon gezegd worden over bijvoorbeeld de godsdienst als hulpwetenschap.

Sociologie en economie zouden als hulpwetenschappen enkel gegevens kunnen verschaffen over de praktische eisen, waaraan het onderwijs zou moeten voldoen. Statistiek kon volgens Freudenthal slechts in zuiver technische zin een dienst bewijzen, zoals het elke andere wetenschap een dienst bewees, wanneer er numerieke gegevens overzichtelijk moesten worden gemaakt.

Wiskunde en rekenkunde kwamen aan bod bij de vraag hoeveel de aankomend onderwijzer ervan moest weten. Het zou nuttig kunnen zijn dat de onderwijzer grotere vaardigheid in het rekenen opdeed en een dieper inzicht in de stof verkreeg. Dit laatste was echter niet haalbaar binnen de opleiding tot onderwijzer. De toenmalige rekenkundes voor de onderwijzersopleiding waren volgens Freudenthal “waardeloos”:

Haast alle bewijzen, die erin staan, zijn schijnbewijzen, en het is sneu, dat de kwekling, die ze zichzelf heeft ingepompt, zich misschien wonderen verbeeldt over het geestelijk bezit, dat hij meent te hebben verworven.³⁵

De invloed van de wiskunde kon beter tot het indirecte beperkt blijven:

Wie een rekenmethodiek schrijft, kan die invloed doorgeven, maar kan niet van den lezer eisen, dat hijzelf die wiskundige begrippen verwerft, waar zulk een invloed op berust.³⁶

De ‘hoofdschotel’ van de hulpwetenschappen werd gevormd door de psychologie, de pedagogiek, de algemene didactiek en methodiek. Freudenthal besprak enkel de negatieve aspecten, de positieve zouden later aan bod komen.³⁷

De praktische pedagogiek had zich volgens Freudenthal nooit veel van de bestaande theoretische psychologie aangetrokken. Tot voor kort bestond deze theoretische psychologie dan ook slechts uit de beschrijving van een aantal wetmatigheden, die nooit daadwerkelijk aangewezen of ‘ontdekt’ werden. Maar ook nu nog liet de psychologie als wetenschap veel te wensen over:

Met een periode van lege programma’s, van strenge wetten, die er moesten zijn, maar niet waren, van uitgebreide theorieën zonder grondslag in de ervaring is ook de psychologie begonnen, en zij is haar kindsheid nog niet geheel ontgroeid; er verschijnen nog steeds boeken – en die zijn volstrekt niet door de eerste de beste psychologen

34 Ibid., 15. Freudenthal had het over Kühnells *Neuaufbau des Rechenunterrichts* van 1919.

35 Ibid., 23.

36 Ibid., 24.

37 Aan de bespreking van die ‘positieve aspecten’ van de psychologie, pedagogiek en algemene didactiek zou Freudenthal echter in ‘Rekendidaktiek’ niet meer toekomen.

geschreven – boeken, waarin een berg programma een muisje “uitvoering van dat programma” verstikt, de uitkomst van een kleine proefneming op een onderdeel van het zielsleven wordt graag met reusachtige speculaties aangelengd tot een verklaring van alles, wat er in de ziel omgaat.³⁸

De (denk)psychologie die ondertussen was ontstaan, was nog steeds niet praktisch toepasbaar. Toch werd psychologische literatuur te pas en te onpas aangehaald om meer ‘gewicht’ te geven aan rekenmethodes, tot grote ergernis van Freudenthal:

Het staat iedereen vrij, de gehele psychologie aan zijn laars te lappen; maar het staat hem dan niet meer vrij, zich tegelijkertijd te beroepen op wat hij aan zijn laars heeft gelapt. Ik noemde zo iets ergerlijk, en ik vindt het dubbel ergerlijk, als het niet één keer, maar systematisch gebeurt.³⁹

Diverse voorbeelden van dit ‘herhaaldelijk aan zijn laars lappen’ haalde hij uit de handleiding bij *Fundamenteel rekenen* van P.A. Diels en J. Nauta, waarin diverse pedagogen lukraak of foutief aangehaald werden. Over het algemeen, zo concludeerde Freudenthal, werden de rekenboeken op zich er echter niet beter of slechter door.

De psychologie die een aankomend onderwijzer tijdens zijn opleiding moest leren, was vooral een theoretische, die hij als onervaren onderwijzer niet praktisch kon verwerken. Die theoretische psychologie zou pas nuttig zijn als hij de praktische al zou kennen. Dé psychologie die als hulpmiddel van toepassing kon zijn en die van tevoren het trekken van elke conclusie rechtvaardigde, bestond nog niet.

Pasklaar levert geen psychologie mij wat ik haar vraag – ik herhaal deze oude formuleringen –; om een theorie toe te passen, is weer een hele nieuwe theorie nodig; de oude ervaringen kunnen het opdoen van nieuwe vergemakkelijken, maar niet vervangen.⁴⁰

Ook de kinderpsychologie leverde weinig resultaten als hulpwetenschap. Men beriep zich in een leerplan vaak en graag op de psychologische of logische volgorde van de leerstof, maar rekening houden met de algehele ontwikkeling van een kind op een bepaald ogenblik was volgens Freudenthal veel belangrijker.

En zolang we op dit punt niets weten, ontbreekt ons een belangrijk werktuig, dat de kinderpsychologie voor de praktische pedagoog zou kunnen vervaardigen, en zolang zal veel van het kenmerkend kinderlijke aan het elementaire onderwijs moeten ontbreken. [...] Zolang dat onderzoek ontbreekt, is de kinderpsychologie tenslotte, al haar bekoorlijkheid ten spijt, een dorre statistiek over wat kinderen op een bepaalde leeftijd doen.⁴¹

38 Freudenthal, ‘Rekendidaktiek’ 29; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465.

39 Ibid., 35-36.

40 Ibid., 47.

41 Ibid., 51.

Meer kennis over de psychologie van de onderwijzers, ofwel: 'hoe wordt werkelijk les gegeven?' zou voor het onderwijs heel bevorderlijk zijn. Bij voorkeur zou dit door het observeren van onderwijzers door derden ontwikkeld moeten worden, en niet door de onderwijzers zelf.

Ook de psychologie van de 'anormalen' kon veel informatie over de bruikbaarheid van verschillende methoden opleveren. Immers, juist deze kinderen zijn veel gevoeliger voor de kwaliteit van een methode:

Een goede maag slikt alles; of het voedsel deugdelijk is, daarover kan ons iemand met een gevoelige maag beter inlichten, en zolang er voor onderwijsmethoden geen keuringsinstantie met zo iets als reageerbuisjes en reagentia bestaat, om onderwijsmethoden goed- en af te keuren, zal de reactie van het achterlijke kind zeker een uitstekend criterium blijven.⁴²

Een van de meest pasklare psychologische methoden was te vinden op het gebied van het Amerikaanse testonderzoek. Hier in Nederland was dergelijk testonderzoek als hulpmiddel in het onderwijs afgewezen, omdat het niet afdoende op de Nederlandse situatie van toepassing zou zijn. Jammergenoeg was die eventuele toepasbaarheid hier nooit systematisch onderzocht, noch waren er ervaringen mee opgedaan:

Het vruchtbaarste psychologische gebied – dat van het testonderzoek – waar alles wat de klok slaat praktijk heet, waar het praktische als het ware voor het grijpen ligt, is voor de Nederlandse onderwijzer tenslotte weer niets anders dan een dorre woestijn, althans zolang niemand de moeite heeft genomen, om wat daar ligt te glinsteren, op te rapen en voor onze doeleinden te verwerken.⁴³

De laatste mogelijke hulpwetenschappen waren de algemene didactiek en methodiek. Als zelfstandige wetenschappen hadden deze twee eigenlijk nooit bestaan volgens Freudenthal. Een voorbeeld van systematisering van onderwijs uit de geschiedenis van de didactiek was het Socratische vraaggesprek tussen leraar en leerling. Freudenthal beschreef zijn eigen (mislukte) poging te komen tot een Socratisch vraaggesprek met een van zijn kinderen en concludeerde:⁴⁴

Leermeesters zijn meestal even hardnekkig in het ondervragen als leerlingen in het niet weten (of niet willen weten), maar zoveel er ook aan de socratische methode prijszwaardig is – toch zal de leermeester soms beter doen, om minder hardnekkig socratisch te zijn [...].⁴⁵

Een ander voorbeeld uit de pedagogiek van de negentiende eeuw waren de formele leertrappen van Herbart-Ziller, die feitelijk niet meer waren dan een systematisering van het onderwijs in natuurlijke historie. Een positieve bijkomstigheid voor

⁴² Ibid., 56.

⁴³ Ibid., 60.

⁴⁴ Dit vraaggesprek wordt beschreven in paragraaf 9.4.1.

⁴⁵ Freudenthal, 'Rekendidaktiek' 71; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465.

het onderwijs volgens deze methode was dat de leraren die deze theorie ook voor niet geschikte leerstof probeerden toe te passen, in ieder geval gedwongen werden deze goed te doordenken.

Eisen als ‘herhaling van de leerstof is noodzakelijk’ en ‘de leerstof moet boeiend gebracht worden’ behoorden volgens Freudenthal tot de algemene didactiek en moesten als algemene eisen binnen het onderwijs verwezenlijkt worden. In die zin bestond wel een algemene methodiek en didactiek: als de leer van de onderwijsstelsels. Het traditioneel gegroeide onderwijsstelsel was moeilijk bewust te maken en daardoor moeilijk over te dragen. Nieuwe stelsels zoals dat van Montessori en Dalton hadden dat probleem niet. Uiteindelijk wees de praktijk uit of een pedagogische methode bruikbaar was of niet, zoals bijvoorbeeld was gebeurd met het geslaagde (kleuter)onderwijs van Fröbel versus het ‘wansucces’ van Pestalozzi. Zo zou er een poging gedaan moeten worden om het eventuele succes van bijvoorbeeld de Montessori-school in ons land te onderzoeken:

Men heeft niet bepaald een unieke kans voorbij laten gaan, maar men heeft toch veel verzuimd, en tot nu toe is het oordeel over het stelsel-Montessori beperkt tot de particuliere meningsuitingen van Mevrouw Janssen, die in geestdrift geraakt is over de riante keukentjes, die ze bij het Montessori-vlo hebben, of van mevrouw Pietersen, die zich over Pietje Janssen ergert, en die zich gekwetst voelt, als de Montessori-leerling onuitstaanbaar neuswijs – naar het haar schijnt – en met de zelfbewustheid van een pedagogisch vakman praat over het “oranje materiaal”, waarmee hij op de Montessori-school aan het werken was, en over doos F van het werkwoord, die hij morgen “bereikt” zal hebben.⁴⁶

Er was veel terechte kritiek op deze onderwijssoort, echter, het was het enige door-dachte onderwijsstelsel als zodanig in ons land (hoe goed of slecht het ook mocht blijken). De betekenis van het Montessori-onderwijs lag in de vernuftige manier waarop één onderwijzer in staat was individueel onderwijs te geven in collectief verband. Volgens Freudenthal was het klassikale stelsel niet langer nuttig in de gebruikelijke vorm. Hij pleitte voor kleinere groepen binnen de klas:

Het klassikale stelsel zal misschien blijven, maar het starre klassikale schema zal allengs worden verlaten. Het is volstrekt niet nodig, dat het onderwijs er individualistischer door wordt. Wanneer de klas als lerend lichaam niet door individuen wordt vervangen, maar door de groep – de groep van 3-6 kinderen –, zoals in sommige stelsels is geschied, dan zal er meer collectivisme in het onderwijs zijn of kunnen zijn, dan in het klassikale onderwijs – geen klascollectivisme, maar groepscollectivisme, dat naar gelang van de omstandigheden intensiever zou kunnen zijn, dan het klascollectivisme.⁴⁷

Het stelsel-Montessori leverde de (aankomende) onderwijzer als enig onderwijsstelsel een methode en reikte de onervaren onderwijzer zo ‘werktuigen’ aan. Ook

⁴⁶ Ibid., 81.

⁴⁷ Ibid., 85.

al was hetgeen de kwekelingen nu moeten leren beter gefundeerd dan de Montessori-theorie, het miste deze noodzakelijke werktuigen voor de praktijk.

Uiteindelijk had Freudenthal dus alle hulpwetenschappen afgewezen: de een was onbruikbaar, de ander nog niet pasklaar toe te passen, een derde ontbrak ten enenmale. Overbodig als dit negatieve hoofdstuk leek, toch was het volgens hem nuttig dit te constateren om als aanzet te kunnen gebruiken voor de vraag hoe het dan wél moest. Want dat er iets moest veranderen, daarvan was hij overtuigd:

Voor den schrijver rest tenslotte de taak, de lezer te overtuigen, dat ook wat een grappige leek, ernstig bedoeld was, en dat overal, waar ontsporingen gecritiseerd werden, een stelsel gecritiseerd werd, dat niet enkel meer een ontsporing, maar een weg is met diepe karresporen, die dringend uitnodigen, er opnieuw in te rijden. Het stelsel om jonge mensen, die een taak gevonden hebben en zich voor een taak willen laten opleiden – het stelsel, om deze mensen van alles en nog wat in te stampen, onbeschrijflijke, ongeschikte hoeveelheden stof uit tal van wetenschappen, hoeveelheden stof, die gekend moeten worden, eer de poort tot het beroep opengaat, en vergeten moeten zijn, eer die poort achter de kandidaat zich sluit – dit stelsel is geen ontsporing, maar een geheiligde instelling, geheiligd niet alleen door de traditie, maar – wat veel erger is – door de namen van talloze hervormers, die er tenslotte voor moesten dienen, om als etiket op weer een onderdeel van dat geheel van onwetenswaardigheden te worden vastgeplakt.⁴⁸

Freudenthal sloot dit hoofdstuk af met een oproep aan zijn lezers:

Wie over dit hoofdstuk ontevreden is, late het niet de schrijver voelen, die er evenmin op gesteld is, maar richte zijn critiek tegen allen, die de schrijver critiseren wilde. Dat is misschien voldoende. En als het niet voldoende is, dan is het toch noodzakelijk, want elke positieve actie begint met critiek.⁴⁹

4.4.3 Doel en nut van het rekenonderwijs

Naast het 'leren rekenen' waren er in de loop van de tijd ook hogere doelen aan het rekenonderwijs toegekend. Zo hechte men in de negentiende eeuw een godsdienstige of zedelijke waarde aan het rekenonderwijs, waarbij de getallenwereld als voorbeeld van 'eerlijke wereld' gebruikt werd. Wat we volgens Freudenthal hier zochten, was een functie die specifiek was voor het rekenonderwijs.

Om zijn plaats in de maatschappij te kunnen innemen, moest het kind leren rekenen, zowel in het belang van de maatschappij als in het belang van het individu. De 'wereldhervormer' Pestalozzi wilde kinderen eerst 'denkend leren rekenen' en later 'rekenend leren denken' om ze zo tegen uitbuiting en bedrog te beschermen. Net als Pestalozzi staarde ook Montessori zich blind op het ideaal 'de wereld hervormen door onderwijs'. Dit had volgens Freudenthal de ontwikkeling van een

⁴⁸ Ibid., 89-90.

⁴⁹ Ibid., 91.

soort rekenonderwijs tot gevolg dat juist níet aan de maatschappelijke eisen voldeed.

In de negentiende eeuw was het ‘leren denken’ hét doel van het rekenonderwijs. ‘Leren denken’ als doel op zich kon geen kwaad, mits duidelijk omschreven en niet te nauw gezien, maar in combinatie met het onderwerp. Freudenthal waarschuwde ervoor, het ‘denken’ als één logisch schema of proces te willen beschrijven, zoals volgens hem door nog veel rekenonderwijzers gedaan werd:

De electricien, die een schakelaar moet repareren, de coupeur, die uit een lap stof een pak moet knippen, de zuinige huisvrouw, die met één overstapje zo veel mogelijk boodschappen wil afdoen – ze denken na, en iedereen, die voor een taak gesteld wordt, die hij niet zuiver werktuigelijk af kan, denkt na of tracht na te denken. De manier van denken, die in ons voorbeeld de electricien [er] op na houdt, of die van de coupeur, of die van de plannen makende huisvrouw gelijken weinig op elkaar, en geen van alle gelijkt op de manier te denken bij de sluitreden “alle mensen zijn sterfelijk en [sic]” of bij het vormen van dier- en plantkundige “begrippen” of bij het oplossen en beredeneren van een rekenvraagstuk. Dat het denken van de zogenaamde formele logica en het reken-denken een bijzonder eenvoudige, doorzichtige structuur bezit, maakt dit soort van denken geenszins tot een representatief voorbeeld voor het denken in het geheel, en de bewering, dat men door te leren rekenen kan leren denken, vindt in de structuur van de onderscheiden denkfuncties in elk geval geen steun.⁵⁰

Freudenthal geloofde dat het zeker mogelijk was mensen opzettelijk te leren denken, alleen het wat en waarom moest dan eerst precies geformuleerd worden. Rekenmethoden konden volgens hem zeker ander denken dan ‘rekendenken’ onderwijzen, zoals bijvoorbeeld logisch denken. Echter, dit kon veel efficiënter binnen het moedertaal-onderwijs (taalontleding) bereikt worden. Buiten het rekendenken waren er volgens Freudenthal dus geen belangrijke praktische consequenties van het rekenonderwijs, aldus eindigde het manuscript.

4.5 ‘Rekendidactiek’: elke positieve actie begint met critiek

Freudenthals aanleiding om zich in de rekendidactiek te verdiepen ontstond in de praktijk: het observeren van zijn eigen kinderen bij het leren rekenen. Als wetenschapper verdiepte hij zich in de voor hem beschikbare literatuur, ontwikkelde denkbeelden en toetste deze vervolgens opnieuw aan literatuur en praktijk. Correspondentie met anderen over dit onderwerp was niet terug te vinden. De zoektocht naar rekendidactiek was voor Freudenthal een geïsoleerde en solistische aangelegenheid.

Op het moment dat hij begin 1944 met het schrijven van ‘Rekendidactiek’ aanving, stond hem al een opzet en inhoud van dit boek voor ogen. Het moest een didactische handleiding worden, gebaseerd op wetenschappelijke proeven en onder-

⁵⁰ Ibid., 101-102.

zoek, gezuiverd van valse pretentie van 'wetenschappelijkheid' zoals hij die in al bestaande werken aantrof. Door omstandigheden kwam hij echter niet verder dan de eerste drie hoofdstukken, die wel vol staan met verwijzingen naar volgende hoofdstukken.⁵¹

Frappant was, dat hetgeen hij uiteindelijk wél had geschreven, voornamelijk bestond uit de kritiek van het hoofdstuk 'Hulpwetenschappen' (80 pagina's lang). Hierin toetste hij diverse wetenschappen op hun bruikbaarheid als hulpwetenschap voor de rekendidactiek. Om verschillende redenen keurde hij ze stuk voor stuk af.

En passant wees hij bij verschillende auteurs van rekenboeken en pedagogische werken op misbruik van een of meer van dergelijke hulpwetenschappen, met name de psychologie. Opvallend was dat Freudenthal zich noch tegen de vertegenwoordigers van een enkele stroming richtte, noch bewust partij koos voor deze of gene stroming. Op zowel werken uit de hoek van de (test)psychologie als die van de Reform-pedagogiek richtte hij zijn pijlen. De rekenboeken van Bouman en Van Zelm ontkwamen niet aan zijn kritiek, evenals die van de meer vernieuwende (maar mechanistische) Diels en Nauta. Pedagogen als Montessori, Pestalozzi, Waterink en Kühnel, alsook de Amerikaanse psycholoog Dewey en de testpsycholoog Luning Prak: allen werden ze kritisch door Freudenthal geanalyseerd op correct gebruik van hulpwetenschappen in hun werken en 'schuldig' bevonden.

Dit betekende niet automatisch, dat hij zich in de verdere inhoud van het betreffende werk niet zou kunnen vinden. Het lijkt makkelijk, enkel kritiek te leveren en het daarbij te laten. Aan een positievere evaluatie over andermans werk was hij echter in de eerste aanzet van zijn 'Rekendidaktiek' simpelweg niet toegekomen. De overdreven negatieve invalshoek van 'Rekendidaktiek' was dus niet per se een bewuste keus van Freudenthal.

Eén zeldzame – want positieve – aantekening maakte Freudenthal in zijn aantekeningenboekje over de rekenmethode van L. Lockefer en G. Dieleman, *De nieuwe koers. Rekenmethode voor de L.S.* uit 1939. Niet toevallig was dit ook de rekenmethode die Didi en Thijs op school gebruikten.⁵² Freudenthal kende deze methode dus goed. Hij schreef naar aanleiding van een ander rekenboek, *Enkele praktische sommen*, van H. Nijhof en B.J. Douwes in zijn aantekeningen:

Waarom enkel pract. sommen? Rekenen leren kan men met alle soort sommen rekenen. Leren toepassen liefst met toepasselijke. Een kind van 8-9 jaar sommen te laten rekenen, die het misschien over 6 jaar eens zou kunnen toepassen, is een dwaling. Niet practisch, maar de belangensfeer van het kind toebehooren (zie Lockefer en Dieleman) is de goede keuze. Ook L&D zondigen soms, maar alles fleuriger, concreter, niet het onophoudelijke monotone thema van Nijhof Douwes.⁵³

51 Zie ook paragraaf 4.2.

52 Dagboekjes 1940-1945, 20 april 1943; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 147.

53 Aantekeningenboekje uit 1943; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 440.

Deze aantekening is belangrijk, omdat het een glimp laat zien van ‘hoe het wél zou moeten’ volgens Freudenthal in 1943. Uitspraken als ‘leren toepassen’ en ‘de belangensfeer van het kind toebehooren’ leken zo uit Freudenthals gedachtegoed anno jaren zeventig te komen.⁵⁴ Deze aantekening stond echter alleen. In zijn ‘Rekendidaktiek’ verwerkte hij deze niet, daar hij daar nooit aan een bespreking van de inhoudelijke aspecten van het rekenonderwijs toekwam.

In ‘Rekendidaktiek’ liet Freudenthal het echter ook niet bij kritiek op de hulpwetenschappen alleen. Terwijl hij ze stuk voor stuk afkeurde, beschreef hij niet alleen de redenen, maar gaf daarmee ook een richting aan, hoe het nut van deze wetenschappen voor de rekendidaktiek wél gevonden zou kunnen worden. Daarbij kwam de grote waarde die hij hechtte aan het bedrijven van ‘echte’ wetenschap sterk naar voren. Zo keurde hij bijvoorbeeld het quasi-wetenschappelijke gebruik van loze voetnoten af en benadrukte hij het belang van het baseren van conclusies op representatieve steekproeven.

In dit opzicht deed ‘Rekendidaktiek’ denken aan zijn latere werk *Weeding and sowing. Preface to a science of mathematical education* uit 1978. Hierin beschreef hij via een analyse van de begrippen “science”, “education” en “science of education” hoe uiteindelijk tot een “science of mathematical education” te komen. Evenals in ‘Rekendidaktiek’ bekritiseerde hij in *Weeding and Sowing* de rol die psychologie en didactiek als hulpwetenschappen in de ontwikkeling van een onderwijskunde hadden gespeeld. Tien jaar later schreef hij over deze kritiek in *Schrijf dat op, Hans*:

Op mijn scepticisme ten aanzien van wat psychologie en algemene didactiek en methodenleer tot de rekendidaktiek konden bijdragen, hoef ik heden nog geen fundamentele correctie aan te brengen, van het voordeel van de twijfel dat ik toen [in ‘Rekendidaktiek’] nog aan de toetsontwikkeling wilde toekennen, is alleen de twijfel overgebleven.⁵⁵

Een groot verschil was echter, dat terwijl Freudenthal in 1943 nog overmoedig de intentie had een complete rekendidaktiek te schrijven, hij in 1978 al bij voorbaat wist, niet verder dan een ‘preface to a science of mathematical education’ te komen en slechts aanwijzingen gaf, hoe een dergelijke wetenschap op te zetten.⁵⁶

Een ander aspect dat ook in zijn latere werk terug te vinden was, was de waarde die hij hechtte aan het doen van observaties. Zo schreef hij bijvoorbeeld over het nut van het observeren van ervaren onderwijzers tijdens het lesgeven. Het beschrijven van gesprekken met zijn kinderen was ook een fenomeen dat hij zou blijven gebruiken. Zelfs in zijn boek *Mathematics as an educational task* uit 1973 greep hij nog terug op de gesprekken met zijn kinderen uit de oorlogstijd, die hij beschreven had in het eerder genoemde aantekeningenboekje van 1943.⁵⁷

Ook het pleidooi voor het gebruik van kleine groepen in het onderwijs zou

⁵⁴ Zie hoofdstuk 9.

⁵⁵ Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 338.

⁵⁶ Freudenthal, *Weeding and sowing*.

⁵⁷ Freudenthal, *Mathematics as an educational task* 141.

Freudenthal later verder uitwerken. Achteraf gezien verbaasde het hem, dat hij in 'Rekendidaktiek' al hiervoor pleitte, zonder de beweegredenen te kennen, die hij hiervoor in later werk wél formuleerde:

Ik beschouwde het toen bij voorbeeld al als een averechts idee het klassikaal onderwijs te vervangen door individueel onderwijs zoals de Montessorianen deden; ik had toen al mijn zinnen gezet op onderwijs in kleine groepen; waarom weet ik niet, want het karakter van de groep, het sociaal en eventueel heteroog karakter, komt niet uit de verf.⁵⁸

Tenslotte waren in 'Rekendidaktiek' nog twee onderwerpen terug te vinden, waarop hij in de jaren na de oorlog in artikelen en lezingen terug zou komen: het 'leren denken' door reken- en wiskundeonderwijs (en de vermeende vormende waarde ervan) en de invulling van de leraren- en onderwijzersopleiding.⁵⁹

'Wat heb ik er eigenlijk bijgeleerd?' vroeg Freudenthal zich teleurgesteld af na het herlezen van 'Rekendidaktiek' veertig jaar later, om onmiddellijk te concluderen:

Het valt mee: ik heb allereerst geleerd gedachten aan te scherpen, maar dat heeft dan ook weer veel te maken met nieuwe stromingen in het wiskundeonderwijs, die tegen mijn ideeën ingingen. [...] Het lijkt of ik toen vooruitliep op mijn kritiek op Piaget [...], maar ook op mijn kritiek op New Math.⁶⁰

Inderdaad was een van de belangrijkste speerpunten van Freudenthals latere kritiek op Piaget al in 'Rekendidaktiek' terug te vinden: het ten onrechte ontlenen van 'wetenschappelijkheid' aan een hulpwetenschap.⁶¹ Iets anders wat Freudenthal 'bijgeleerd' had – en waaraan hij in *Schrijf dat op, Hans* voorbij ging – was de waarde van de observatie van één enkel kind. In 'Rekendidaktiek' waarschuwde hij de lezer er nog voor, aan dergelijke enkele observaties niet te veel waarde te hechtten. In de jaren zeventig echter zou hij in dergelijke observaties juist een vruchtbare bron van inzichten ontdekken. Van de behoefte om waar het om observaties ging "in te halen op kollektieve schaal" zoals hij die in 'Rekendidaktiek' verwoordde, was dertig jaar later dan ook geen sprake meer.⁶²

58 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 338.

59 Over 'leren denken' en 'vormende waarde' zie bijvoorbeeld: Hans Freudenthal, 'Opvoeding tot denken' (ongepubliceerd 1945) (lezing gehouden op wvo-conferentie): RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 466; Hans Freudenthal en T. Ehrenfest-Afanassjewa, *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen? Discussie tussen T. Ehrenfest-Afanassjewa en Hans Freudenthal* (Purmerend 1951); Hans Freudenthal, 'Erziehung des Denkvermögens (Diskussionsbeitrag)', *Archimedes* 6 (1954) 87-89. Over de lerarenopleiding zie bijvoorbeeld: Hans Freudenthal, 'Oude en nieuwe universiteiten' (ongepubliceerd 1945): RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 467; Hans Freudenthal, 'Tekort aan leraren', *De Groene Amsterdammer* (3 juli 1948); Hans Freudenthal, 'Vakgeleerde of paedagoog?', *Christelijk Schoolblad* 2132, 2132 en 2133 (1953).

60 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 338.

61 Over Freudenthals kritiek op het werk van Piaget zie paragraaf 9.6.3.

62 Meer over Freudenthal en het belang dat hij hechtte aan het observeren van kinderen in hoofdstuk 9.

Met de moeilijke tijd die vooral de laatste oorlogsjaren brachten en alle nieuwe ontwikkelingen die na de bevrijding op Freudenthal afkwamen, lag het voor de hand dat ‘Rekendidactiek’ een intermezzo binnen Freudenthals werk zou blijven. Niets was minder waar. “Elke positieve actie begint met critiek” schreef hij, en in dat licht gezien lijkt ‘Rekendidactiek’ een waardig begin van Freudenthals inspanningen op het gebied van wiskundedidactiek en -onderwijs.

Een nieuw begin

Ik ben geen doorzetter, al zullen anderen zeggen van wel. In elk geval geen doordrammer. Maar het niet doorzetten werd me ook makkelijk gemaakt door al het werk dat er na de bevrijding vóór me lag en dat ik op me nam. Werk in het onderwijs volgens ideeën die ik in de tijd van 'lediggang' had ontwikkeld, werk aan de universiteit, in de faculteit, in commissies en committees, in verenigingen en besturen, maatschappelijke werk – om van het wetenschappelijke maar geheel te zwijgen. Ik had bergen te verzetten – althans dat kon ik me verbeelden.

Hans Freudenthal in *Schrijf dat op, Hans*, 1987¹

De bevrijding van mei 1945 betekende voor Freudenthal het einde van jaren gedwongen werkloosheid en “lediggang”.² Veertig jaar later wist hij over de bevrijding en de Amsterdamse wiskundige J.F. Koksma het volgende te vertellen:

Hij zag me bij de intocht van de Canadezen op een tank zittend voorbijkomen en zei later daarover: “Toen ik Freudenthal op die tank zag zitten wist ik pas zeker dat de oorlog afgelopen was.”³

Vol optimisme en goede moed verwachtte Freudenthal weer aan het werk te kunnen op de Universiteit van Amsterdam. Zijn herbenoeming als conservator op 7 mei luidde echter het begin in van een moeizame strijd voor zijn rechtsherstel. Na een korte schorsing en een berisping door het College van Herstel bleef Bruins namelijk de functie van lector behouden. Freudenthal was van mening dat deze positie hem voor het uitbreken van de oorlog al in het vooruitzicht was gesteld.⁴ Bruins weigerde echter ontslag te nemen, zoals hem door het college van herstel geadviseerd was. Brouwer steunde Bruins daarin en deed niets aan Freudenthals eerherstel. De zo ontstane situatie was voor Freudenthal een onaanvaardbare belediging aan zijn adres. Hij schreef aan de Burgemeester en Wethouders van Amsterdam:

¹ Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 323.

² Bij het samenstellen van deze en volgende paragrafen zijn gegevens ontleend aan de volgende werken: Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans*; Alberts, *Jaren van berekening*; G. Alberts, F. van der Blij, J. Nuis, red., *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen* (Amsterdam 1987); G. Alberts, H.J.M. Bos, J. Nuis, red., *Om de wiskunde. Stimulansen voor toepassingsgerichte wiskunde rond 1946* (Amsterdam 1989); Bertin, Bos, Grootendorst, ed., *Two decades of mathematics in the Netherlands*; Van Dalen, L.E.J. Brouwer; H.W. von der Dunk, W.P. Heere, A.W. Reinink, red., *Tussen ivoeren toren & grootbedrijf; De Utrechtse Universiteit 1936-1986* (Utrecht 1986); Knegtman, *Een kwetsbaar centrum van de geest*; L. Molenaar, *De rok van het universum. Marcel Minnaert. Astrofysicus 1893-1970* (Amsterdam 2003); Molenaar, ‘*Wij kunnen het niet langer aan de politici overlaten.*’. Het is helaas niet gelukt, een archief van de Wiskunde Werkgroep op te sporen.

³ Alberts e.a., red., *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen* 116. Ook Van Heemert hoorde van zijn ouders over Freudenthals tocht op een tank door Amsterdam: Van Heemert aan Freudenthal, 5 juni 1945; RANH, Papers of Hans Freudenthal, inv.nr. 36.

⁴ Zie ook: A.W. de Groot, *De universiteit van Amsterdam* (Amsterdam 1946) 86.

Ik verzoek Burgemeester en Wethouders met de meeste eerbied, het mij niet euvel te willen duiden, wanneer ik mij beroep op 15 jaar diensttijd aan deze universiteit, op de positie, die ik in de wetenschappelijke wereld meen in te nemen, en op de verwachtingen van mijn leerlingen, die aan de Amsterdamse Universiteit verder zullen studeeren, examens doen of een proefschrift indienen, en wanneer ik aan mijn verzoek om herplaatsing de hoop verbind, dat de universitaire en gemeentelijke instanties gezamenlijk een weg zullen mogen vinden om mijn herplaatsing te doen geschieden op een wijze, waarbij ik royaal word gerehabiliteerd na de disqualificatie, die voor elk buitenstaander moest blijken uit de carrière van mijn opvolger, die als natuurkundige op wiskundig-wetenschappelijk gebied een vreemdeling was en bleef en desondanks na één jaar diensttijd benoemd werd tot lector – een benoeming, die mij na haast tien jaar diensttijd ondanks talrijke beloften nog niet ten deel was gevallen.⁵

Deze brief was de eerste van een uitvoerige, maar vruchteloze briefwisseling tussen Freudenthal, B&W, Bruins en anderen, die eindigde op 8 november 1946 wanneer Freudenthal zijn functie als conservator aan de Universiteit van Amsterdam opzegt om een professoraat in Utrecht te aanvaarden. Een bittere teleurstelling:

Amsterdam-Utrecht was geen reis, maar een langdurig proces waarvan de pijnlijke wonden veel tijd nodig hadden om te helen.⁶

... maar ook een positieve nieuwe start. Aan het eind van zijn inaugurele rede in Utrecht op 9 december 1946 nam Freudenthal afscheid van ‘zijn’ Amsterdam:

Er resten mij nog enkele woorden te zeggen. Zes moeilijke jaren zijn aan dit plechtige uur vooraf gegaan. Ik ben ze met mijn gezin te boven gekomen, en ik heb mij zelfs nog enigszins aan mijn studiën kunnen wijden, dank zij vele goede vrienden, en zij vooral hebben het mij lastig gemaakt, om van Amsterdam afscheid te nemen. Ik kan geen woorden van dank op dit ogenblik met groter hartelijkheid uitspreken dan die voor de materiële en morele steun, die ik van hen heb ondervonden. Velen hunner, die ik bedanken wil, zijn aanwezig; zij mogen zich door deze woorden getroffen voelen. Anderen ontbreken, maar deze zaal zou te klein zijn, om plaats te bieden aan allen, die ik bedoel: gans het Nederlandse volk.⁷

In de zomer van 1947 verhuisde het gezin Freudenthal definitief naar Utrecht.

Deze teleurstellend moeizame start na de oorlog belette Freudenthal niet om met enthousiasme en overtuiging de resultaten van zijn werk en studies uit de oorlog uit te dragen. Duidelijker dan in de vooroorlogse periode trad hij op als een op vernieuwing ingestelde, maatschappelijk betrokken en onconventionele persoonlijk-

5 Freudenthal aan B&W van Amsterdam, 11 juni 1945; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 323. Bruins had overigens wél wiskunde gestudeerd, maar promoveerde daarna op een zowel theoretisch als experimenteel werk bij de fysicus Clay; J.A. van Maanen, ‘In memoriam prof.dr. E.M. Bruins (1909-1990)’, *Tijdschrift voor de Geschiedenis der Geneeskunde, Natuurwetenschappen, Wiskunde en Techniek* 14 (1991) 116-118, aldaar 116.

6 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 117.

7 Hans Freudenthal, *5000 jaren internationale wetenschap* (Groningen 1946) 22.

heid. Gesteund door het respect en aanzien dat hij op zijn vakgebied al genoot (in 1946 nog meer versterkt door zijn positie als hoogleraar in Utrecht), deinsde hij er niet voor terug tegen de gevestigde ‘vooroorlogse orde’ in te gaan.

Zijn houding paste binnen de geest van vernieuwingsgezindheid en wederopbouw in naoorlogs Nederland, een periode van een zekere somberheid en pessimisme, maar tegelijkertijd een van “gedisciplineerde energie” zoals Kossmann het omschreef.⁸ Ook paste het bij de veranderende plaats die de wetenschap, met name de natuurwetenschappen en de wiskunde, in de maatschappij zou gaan innemen. Meer nadruk op en vraag naar praktische toepassingen dwongen de wetenschappers uit hun ‘ivoren toren’ te komen en minder geïsoleerd wetenschap te bedrijven: minder geïsoleerd van elkaar, maar ook minder geïsoleerd van de maatschappij. ‘Teamwork’ en de ontwikkeling van toegepaste wetenschappen waren in opkomst.

Daarnaast heerste de overtuiging dat Nederland na vijf jaren bezetting op wetenschappelijk gebied een achterstand had in te halen, zowel op het gebied van de zuivere als de toegepaste wetenschap. Dit resulteerde in de oprichting van instituten zoals het Centraal Planbureau (1945), de stichting Fundamenteel Onderzoek van de Materie (1946) en de Vereniging voor Statistiek (1945). Ook de oprichting van het Mathematisch Centrum (MC) op 11 februari 1946 was hier een treffend voorbeeld van. De intentie was “een centrum voor wetenschappelijke wiskundige werkzaamheid te doen ontstaan, en tevens, middelen te beramen om nauwer contact te leggen tussen de zuivere wiskunde en hare toepassingen op andere gebieden”.⁹ Alberts noemt het Mathematisch Centrum “de uitkomst van een bezinning van de maatschappelijke rol van de wiskunde”.¹⁰

De Tweede Wereldoorlog had voor het grote publiek laten zien wat voor consequenties de ‘planning’ van wetenschap kon hebben: de ontwikkeling van atoomwapens, de ontdekking van penicilline en de ontwikkeling van grote rekenmachines in Amerika, de voorlopers van de computer, waren daar voorbeelden van. Dit veroorzaakte naast hooggespannen verwachtingen voor de rol van de wetenschap in de toekomst tegelijkertijd een zekere angst voor de gevolgen van die mogelijkheden. De ingrijpende consequenties die wetenschappelijk werk voor de maatschappij bleek te kunnen hebben dwong de wetenschappers zich te bezinnen op de plaats die ze in de maatschappij innamen en de verantwoordelijkheden die ze daarbij droegen. De oprichting van de Vereniging van Wetenschappelijke Onderzoekers (vwo) in 1946 was een direct gevolg van dit besef. Ook was het een uiting van de wens om de kloof tussen wetenschap, politiek en publiek te overbruggen en door een verdieping van het maatschappelijke verantwoordelijkheidsgevoel bij de onderzoekers ‘het hoogste rendement voor mens en samenleving te bereiken’.¹¹

8 E.H. Kossmann, ‘Nederland in de eerste na-oorlogse jaren’, in: Alberts e.a., red., *Om de wiskunde* 7-16, aldaar 15.

9 P.C. Baayen, ‘Beleid om de wiskunde’, in: Alberts e.a., red., *Om de wiskunde* 61-74, aldaar 63-64.

10 Alberts, *Jaren van berekening* 198.

11 Molenaar, ‘Wij kunnen het niet langer aan de politici overlaten’ 9.

Freudenthal hield zich alles behalve afzijdig van deze ontwikkelingen. Zijn politieke voorkeur bleek uit zijn geregelde bezoeken aan de ledenvergaderingen van de PvdA. Ook in zijn keuze van tijdschriften waarin hij publiceerde werd deze weerspiegeld, zoals die voor het humanistische blad *De Nieuwe Stem. Maandblad voor Cultuur en Politiek* en het van oorsprong communistische en in deze tijd meer algemeen links georiënteerde blad *De Vrije Katheder*.

Freudenthal werd in 1947 lid van de vwo, was vanaf 1950 lid van het algemeen bestuur en zelfs enkele jaren vice-voorzitter. Ook aan de voorlichting van het publiek over de nieuwste ontwikkelingen binnen de natuurwetenschappen droeg hij bij door zijn verslagen van de vergaderingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen in *De Groene Amsterdammer*.¹²

Bij de oprichting van het MC was Freudenthal niet direct betrokken, maar vervulde hij vooral de rol van kritisch toeschouwer. Freudenthals kritiek op het functioneren van het MC betrof vooral het feit dat de activiteiten zich te veel op Amsterdam en omstreken richtten, waardoor het nationale aspect van het Centrum niet voldoende tot uitdrukking kwam. Alberts zegt over het ontbreken van Freudenthal en anderen bij de oprichting van het MC:

Niet aan de beraadslagingen neemt deel een aantal aankomende wiskundigen van naam als Freudenthal, Haantjes, Heyting en Kloosterman. Dat zij de volgende generatie zouden gaan vormen was ook toen al zonneklaar. [...] Om te begrijpen dat ze in het geheel niet betrokken waren in de voorbereidende beraadslagingen voor het MC, moeten we bedenken dat, in die tijd ‘een hoogleraar nog een hoogleraar was’.¹³

Ook het feit dat er in die tijd nog verscheidene leerstoelen te verdelen waren speelde hierbij mee. In oktober 1945 had de Groningse hoogleraar G. van der Leeuw, minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, een ‘Commissie tot Coördinatie van het Hoger Onderwijs in de Wiskunde in Nederland’ ingesteld. Voorzitter van deze commissie was de eveneens Groningse hoogleraar J.G. van der Corput, maar ook Van Dantzig, Koksma en de Utrechtse sterrenkundige Minnaert – bij gebrek aan een Utrechtse wiskundige hoogleraar – maakten er deel van uit. Hoofdtak van de commissie was het voorbereiden van de oprichting van het MC. Daarnaast kreeg deze commissie een coördinerende en adviserende taak bij het verdelen van de vacante leerstoelen.¹⁴

In Utrecht waren na de oorlog twee leerstoelen vacant: een door het emeritaat van hoogleraar J.A. Barrau in 1943 en een door het overlijden van hoogleraar J. Wolff in een concentratiekamp in 1945. Door toedoen van de commissieleden Van Dantzig en Van der Corput volgde een ingewikkelde en dubieuze ‘stoelendans’, waarbij Van Dantzig zich vlak voor zijn benoeming in Amsterdam nog van maart

12 Hans Freudenthal, ‘Het Trippenhuys’, in: *De Groene Amsterdammer*, vanaf oktober 1951: RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1450 e.v. Freudenthal werd KNAW-lid op 28 april 1951.

13 Alberts e.a., red., *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen* 8.

14 Alberts, *Jaren van berekening* 153-154.



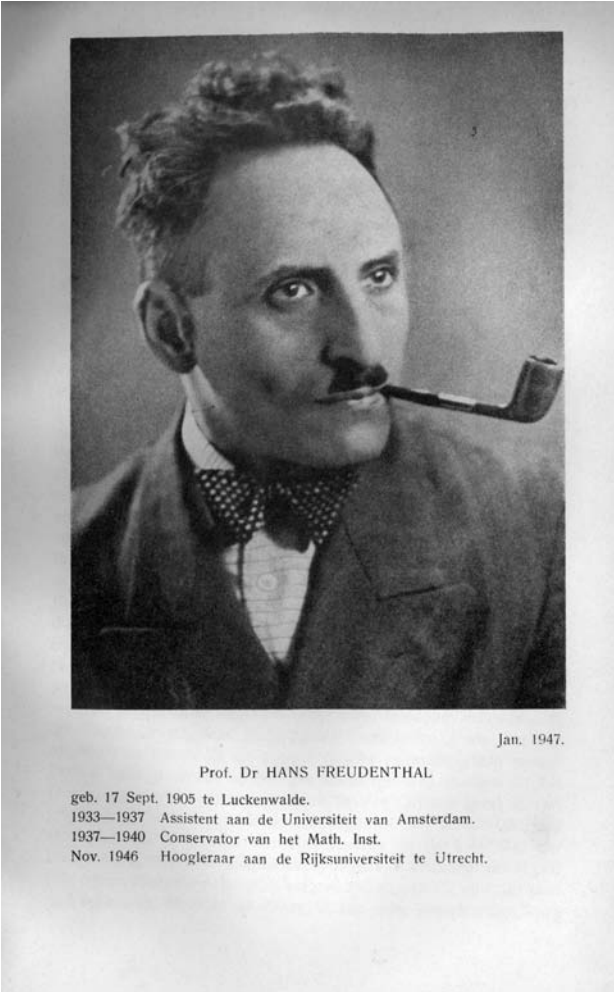
Groepsfoto ter gelegenheid van Freudenthals benoeming in Utrecht (1946). Met (onder andere) op de eerste rij van links naar rechts: mevr. Van Dantzig, Koksma en zijn vrouw, mevr. Van der Corput, Barrau en zijn vrouw, Freudenthal en zijn vrouw (met zittend op de grond hun zoons Didi en Thijs), daarnaast Van der Corput. Als tweede van links op de achterste rij staat De Iongh, links achter Barrau staat Van Dantzig, achter mevr. Barrau op de achterste rij staat Minnaert en achter mevr. Freudenthal op de achterste rij staat Popken.

tot mei 1946 tot hoogleraar in Utrecht liet benoemen. Brouwer, die Freudenthal uit Amsterdam weg wilde hebben, benaderde hierop Minnaert over een benoeming van Freudenthal in Utrecht.¹⁵

Er volgde nog een actie van enkele studenten, onder wie Van Est, om bij de wethouder in Amsterdam te pleiten voor Freudenthals zaak, maar ook dat haalde niets uit. Toen het duidelijk was dat eerherstel in Amsterdam niet te verwachten was en hij weinig steun van Van Dantzig en Van der Corput kon verwachten, accepteerde Freudenthal uiteindelijk de leerstoel meetkunde in Utrecht. J. Popken werd benoemd in de vacature analyse, de voormalige leerstoel van Wolff. H.B.A. Bockwinkel was in die jaren lector ‘propedeutische wiskunde’ in Utrecht.

Niettegenstaande deze verwickelingen was Freudenthal een actief supporter van de doelstellingen van het MC. Zo gaf hij voordrachten tijdens de MC-zomercursus-

15 Ook al apprecieerde hij Freudenthals wiskundige kwaliteiten, de excentrieke Brouwer zou de “rusteloze activiteit” van een wiskundige als Freudenthal niet langer in zijn directe omgeving kunnen verdragen. Freudenthal bleef Brouwer echter ook na deze teleurstellende verwickelen hoogachten. Zo verzorgde hij in de jaren zeventig diens verzamelde werken; Van Dalen, *L.E.J. Brouwer* 446-447; Freudenthal, ed., *L.E.J. Brouwer Collected Works 2. Geometry, analysis, topology and mechanics* (Amsterdam 1976).



Freudenthal in *Euclides*
(1947).

sen voor leraren in de jaren 1947-1950 en verzorgde hij op eigen initiatief in 1947/48 een cursus ‘Numerieke en graphische methoden’ in Utrecht, waarvoor hij de medewerking van het MC vroeg. Hij leende voor de bijbehorende oefeningen rekenmachines bij de Levensverzekering-Maatschappij ‘Utrecht’.¹⁶ Veertig jaar later zei hij hierover:

Altijd heb ik me zo opgesteld dat ik, ook als ik het ergens niet mee eens was, toch zakelijk meewerkte. Maar hoewel ik ook van binnen uit heb getracht bij het MC invloed uit te oefenen, heeft men nooit ergens naar geluisterd. Nu had ik natuurlijk ook mijn

¹⁶ F. van der Blij e.a., *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1975* (Amsterdam 1973) 81-83; syllabus behorende bij de cursus ‘Numerieke en graphische methoden’: RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 474; Freudenthal aan de Raad van Beheer van het MC op 19 april 1947, Alberts e.a., red., *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen* 139-148.

ambities, wilde bepaalde dingen bereiken en misschien dachten ze wel: ‘Wat moeten we met zo’n lastpak als Freudenthal?’¹⁷

Een heel praktisch voorbeeld van Freudenthals bijdrage aan de invulling van het streven ‘wiskunde in dienst van de maatschappij’ was zijn samenwerking met J. Sittig, werkzaam bij het Adviesbureau voor Toegepaste Statistiek en medeoprichter van de Vereniging voor Statistiek. Zij werkten samen aan het ontwikkelen van een maatsysteem voor confectiekleding in opdracht van De Bijenkorf in 1948.¹⁸ Ook was dit een voorbeeld van de veelzijdigheid van Freudenthals interesse en schijnbaar onvermoeibare inzet die hij naast zijn ‘dagelijks werk’ als hoogleraar op die gebieden liet zien.

Dat dagelijks werk bracht naast Freudenthals wiskundig werk in eerste instantie veel voornamelijk praktische problemen met zich mee. Zo was er het huisvestingsprobleem van het Mathematisch Instituut. In 1947 werd het pand in de Boothstraat voor dit doel gehuurd. Toen het uiteindelijk in 1951 betrokken werd, was het door de toename van de studentenaantallen alweer te klein, waarna in de jaren vijftig diverse uitbreidingen en dependances volgden. “Toen was het in de pauzen tussen de colleges hollen geblazen, van het ene instituut naar het andere”, herinnerde Freudenthal zich.¹⁹

Een andere zaak waarvoor Freudenthal zich inzette was de strijd om wat van de tijd die wiskundestudenten aan de natuurkundepractica besteedden terug te veroveren voor wiskunde. Hij wilde deze tijd vrij maken voor wiskundepractica, zoals hij die ook al in Amsterdam had verzorgd.²⁰ Inhoudelijk waren er met de natuurkundigen ook discussies over het onderwijs, zoals die over de plaats van lineaire algebra binnen de natuurkunde.

In 1947 kon Freudenthal een eerste assistent aanstellen. Dat werd Willem Titus van Est (1921-2002). Van Est kende Freudenthal nog uit zijn studietijd in Amsterdam, toen Van Est daar natuurkunde studeerde. Hij was Freudenthals eerste promovendus en kreeg in 1951 een vaste aanstelling in Utrecht.²¹

Maar hoe zat het nou met Freudenthals ideeën over rekendidactiek? Hoe kwam het voor zo’n drukbezet hoogleraar van een ‘Rekendidactiek’ in oorlogstijd tot ‘de Wiskunde Werkgroep van Freudenthal’?

17 Alberts e.a., red., *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen* 119.

18 Correspondentie tussen Freudenthal en J. Sittig van het Adviesbureau voor Toegepaste Statistiek, 1948: RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 2; J. Sittig en H. Freudenthal, *De juiste maat. Lichaamsafmetingen van Nederlandse vrouwen als basis van een nieuw maatsysteem voor damesconfectie* (Leiden 1951).

19 R.M. Nepveu e.a., *Universitaire flitsen: van Illustre School tot Rijksuniversiteit* (Utrecht 1986) 80; Von der Dunk e.a., red., *Tussen ivoren toren & grootbedrijf* 399.

20 Gesprek met Van der Blij, 20 mei 1999; Nepveu e.a., *Universitaire flitsen* 79-80.

21 Van Est promoveerde op 3 april 1950 cum laude op het proefschrift *A generalization of a theorem of J. Nielsen concerning hyperbolic groups*; I. Moerdijk en J.P. Murre, ‘In memoriam Willem Titus van Est’, *Nieuw archief voor wiskunde* 5/4 (2003) 281-283.

5.1 Opvoeden

5.1.1 Opvoeden thuis

Een afwachtende houding kon Freudenthal na de bevrijding niet verweten worden. Hij leek te popelen zijn pedagogisch-didactische bevindingen uit de oorlogstijd openbaar te maken.²² In eerste instantie koos hij hiervoor het vernieuwingsgezinde publiek van de Werkgemeenschap voor Opvoeding en Onderwijs (wvo), dat hij al kende via het blad *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs*. Zijn vrouw was namelijk al voor de oorlog hierop geabonneerd.²³

Zij was ook degene die zich binnen het gezin het nadrukkelijkst met opvoeding in het algemeen en de opvoeding van hun vier kinderen in het bijzonder bezighield. Het was *haar* zoektocht naar de ideale school voor de kinderen die haar interesse voor onderwijsvernieuwing opwekte. Terwijl ze in de oorlog voor haar man boeken uit de bibliotheek haalde, stuitte ze toevallig op een reeks oude jaargangen van *The New Era in Home and School*, waarin ze veel van haar eigen ideeën en opvattingen terugvond.²⁴

Geen enkele schoolsoort leek echter zaligmakend. Uiteindelijk gaat de oudste zoon naar een openbare school, de jongste drie kinderen naar een Montessori-kleuterschool, gevolgd door verschillende lagere schoolsoorten en lycea (waaronder een Montessori school, een protestants-christelijke school en de Werkplaats te Bilthoven).²⁵ Nauwlettend en kritisch werden door beide ouders de schoolresultaten van de kinderen gevolgd. Zowel Freudenthal als zijn vrouw aarzelden niet om bij tegenvallende resultaten of naar hun mening slechte onderwijsmethodes bij het schoolbestuur aan de bel te trekken.²⁶ Zij zou in 1952 de in haar ogen juiste onderwijsmethode in de ideeën van Petersen vinden.²⁷ In haar boek *Naar de school van morgen* zei ze zich in de opvoeding van haar eigen kinderen vooral te hebben laten leiden door de opvattingen van de onderwijzer-pedagoog Jan Ligthart (1859-1916).²⁸

22 Een teleurstelling op wiskundig terrein in de Tweede Wereldoorlog zou een extra, negatieve motivatie voor zijn didactische belangstelling hebben gevormd. Freudenthal zou het niet gelukt zijn een door hem gevonden belangrijke wiskundige ontdekking via-via te kunnen publiceren, een ander was hem voor. Voor deze motivatie is echter geen bewijs in zijn persoonlijk archief gevonden. Ook na de oorlog bleef Freudenthals reputatie als groot wiskundige in stand; gesprek met Mirjam Freudenthal, 24 april 1999.

23 Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 345.

24 *The New Era in Home and School* was het maandblad van de New Education Fellowship.

25 Persoonlijke correspondentie (waaronder correspondentie tussen Freudenthal en Jan Gunning, rector van ‘Het Nieuwe Lyceum’ in Bilthoven): RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 175; S.J.C. Freudenthal-Lutter, ‘Die Entwicklung der Jenaplan-bewegung in den Niederlanden’ (ongepubliceerd 1985): RANH, Papers of Susanna Freudenthal-Lutter, inv.nrs. 37, 87.

26 Correspondentie tussen Freudenthal en Jan Gunning, rector van ‘Het Nieuwe Lyceum’ in Bilthoven, 1949-1953: RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 175.

27 RANH, Susanna Freudenthal-Lutter Papers, inv.nr. 37.

28 Onderwijsvernieuwer Ligthart werd in 1885 hoofd van de ‘Openbare School voor Onvermogenen’

Freudenthals betrokkenheid bij de opvoeding van zijn kinderen uitte zich vooral in de oorlogstijd. De dagelijkse wandelingen, het ‘schooltje houden’ met zijn drie zoons en de vele notities en aantekeningen uit die tijd van zijn gesprekken met hen getuigden hiervan.²⁹ Ook in persoonlijke correspondentie uit die tijd bleek zijn betrokkenheid bij de ontwikkeling en prestaties van zijn kinderen. Af en toe noteerde hij gewicht, lengte en rapportcijfers van zijn kinderen in zijn zakagenda’s.³⁰ Veel van deze aantekeningen zou hij jaren later ter illustratie in zijn onderwijs-publicaties gebruiken. Over het verschil in opvoeding tussen Nederland en Duitsland merkte hij op:

Nederlanders vond ik indertijd, toen ik hier kwam, sympathieker dan de meeste Duitsers waar je in die tijd mee in aanraking kwam. De manier waarop hier kinderen werden opgevoed was mij liever – rustiger – dan het slaan en het geweld dat in Duitsland gebruikelijk was.³¹

Zijn aanstelling in Utrecht en het vele werk dat hij na de oorlog op zich nam, namen echter al zijn tijd in beslag. Er was nog maar weinig tijd en aandacht voor zijn kinderen, waarvan de jongste nog maar net de kleuterleeftijd bereikt had. Na vijf jaar gedwongen thuis zitten was dat voor Freudenthal een hele overgang. Aan een familievriend in Jerusalem schreef hij over deze keerzijde van zijn nieuwe aanstelling:

Aber man muß arbeiten wie ein Sklave und hat gar keine Zeit, sich um seine Familie zu kümmern. Im Kriege bin ich noch viel mit meinen Kindern spazieren gegangen, aber nun muß ich sie eigenen Wege gehen lassen.³²

5.1.2 ‘Onze taak als opvoeders nu’

In juli 1945 schreef Freudenthal naar aanleiding van de op handen zijnde wvo-zomerconferentie een brief aan J.R. Janssen, de secretaris van de Centrale Werkgroep van de wvo. Na een beschrijving van zijn studie gedurende de oorlogsjaren op het gebied van de “paedagogiek van het rekenen en de wiskunde, alsmede met de opvoeding tot het denken in ruimste zin” vervolgde hij:

in Den Haag, waar hij zijn pedagogische denkbeelden in de praktijk ontwikkelde. Ligtharts pedagogiek kenmerkte zich door het centraal stellen van het kind, het vertrouwen dat hij in kinderen stelde en de gelegenheid die hij ze wilde geven zich vrij te bewegen om te leren en eigen verantwoordelijkheid te nemen. In zijn ‘zaakonderwijs’ werd het echte leven als aanknopingspunt voor didactiek genomen; S.J.C. Freudenthal-Lutter, *Naar de school van morgen* (Alphen aan de Rijn 1971) 161; B.C. de Jong, *Jan Ligthart (1859-1916). Een schoolmeester-pedagoog uit de Schilderswijk* (Groningen 1996).

29 Dag- en aantekeningenboekjes van Freudenthal; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 275, 441, 440.

30 Zakagenda’s 1946-1949: RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 96-99.

31 Interview met Hans Freudenthal, ‘Hans Freudenthal, tussen de bergen en de zee’, in: G.H. Jansen, S. Vess, *Ballonnen en brood. Utrechtse portretten* (Utrecht 1986) 101-107, aldaar 105.

32 Freudenthal aan H. Gutfeld, 30 november 1947: RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 175.

31 juli 1945.

Aan den Secretaris van de Centrale
werkgroep van de W.V.O.
Lothariuslaan 67
Bussum

Zeer Geachte Meer J.R.Janssen,

het verheugt mij zeer, dat de w.v.o (waarvan mijn vrouw lid is) weer levenstekenen vertoont, en wel het bijzonder krachtige teken van organisatie van een conferentie. Indien ik een middel van vervoer bemachtigen kan, zal ik niet verzuimen, aan de conferentie deel te nemen. In den tijd van mijn gedwongen ambtelijke werkloosheid (ik was vroeger docent in de Wiskunde aan de A'damsche Universiteit en zal binnekort mijn functie, waarvan ik door den Bezetter ontheven was, hervatten) heb ik mij veel met opvoedingsproblemen bezig gehouden, vooral met de paedagogiek van het rekenen en de wiskunde, alsmede met de opvoeding tot het denken in de ruimste zin. Nu de omstandigheden het voor mij weer mogelijk maken, zal ik spoedig mijn onderzoekingen bekend maken.

Daar ik mij vooral aan de moderne stromingen in de Engels sprekende landen georiënteerd heb, lijkt mij Uw conferentie een geschikte plaats, om over het onderwerp "Opvoeding tot Denken" iets uitvoeriger te spreken dan in een discussie mogelijk is. Zou het misschien mogelijk zijn, een soort inleiding over dit onderwerp te houden? Zo ja, hoeveel spreektijd zoudt U voor mij uit kunnen trekken? Met het oog op de nodige voorbereiding zie ik Uw mededeling gaarne tegemoet.

Met de meeste hoogachting

Uw

Brief aan J.R. Janssen van de wvo, waarin Freudenthal voorstelt op de wvo-zomerconferentie te spreken over 'Opvoeding tot denken' (31 juli 1945).

Nu de omstandigheden het voor mij weer mogelijk maken, zal ik spoedig mijn onderzoekingen bekend maken. Daar ik mij vooral aan de moderne stromingen in de Engels sprekende landen georiënteerd heb, lijkt mij Uw conferentie een geschikte plaats om over het onderwerp "Opvoeding tot Denken" iets uitvoeriger te spreken dan in een discussie mogelijk is. Zou het misschien mogelijk zijn, een soort inleiding over dit onderwerp te houden? Zo ja, hoeveel spreektijd zoudt U voor mij uit kunnen trekken? Met het oog op de nodige voorbereiding zie ik Uw mededeling gaarne tegemoet.³³

De organisatie van de conferentie maakte graag gebruik van dit aanbod. Janssen, die tevens voorzitter was van de Wiskunde Werkgroep (ww), kon het niet nalaten Freudenthals aandacht op het bestaan van die Werkgroep te vestigen. In zijn antwoord op Freudenthals brief schreef hij:

Misschien weet U niet, dat er voor de oorlog een Wiskunde Werkgroep van de w.v.o. bestond [...] We hopen, dat deze werkgroepen binnenkort ook weer aan het werk zullen kunnen gaan en zullen dan gaarne profijt trekken van de studie, die U reeds van dit onderwerp gemaakt heeft.³⁴

Het zou nog tot januari 1947 duren voordat Freudenthal voor het eerst een bijeenkomst van de Wiskunde Werkgroep zou bijwonen.³⁵

De wvo-zomerconferentie van 1945 was getiteld ‘Onze taak als opvoeders nu’, en werd gehouden van 11 tot 14 augustus op landgoed Rhederoord in De Steeg. Ondanks de vele (reis)problemen voor de organisatie was de conferentie een succes. De deelnemers kwamen “van heinde en ver uit het land op fietsen zonder banden, met bonkaarten en zakjes aardappelen”.³⁶ Nu de oorlog voorbij was, wakkerde de roep om vernieuwing van het onderwijs weer in alle hevigheid aan. Kees Boeke, de voorzitter van de Centrale Werkgroep, lanceerde op de conferentie het plan om alle vernieuwingspogingen in Nederland te inventariseren en zo tot een gemeenschappelijk plan van actie te komen.³⁷

Freudenthal paste met zijn voordracht ‘Opvoeding tot denken’ goed binnen de in wvo-kringen populaire opvattingen als ‘opvoeden is begeleiden van het kind in de natuurlijke groei’ en ‘mensvorming en opvoeding in dienst van de vrede’. Ook in zijn streven naar verandering en vernieuwing van het onderwijs was hij binnen de wvo goed op zijn plaats.³⁸ De opvatting van de meeste binnen de wvo vertegenwoordigde vernieuwers was dat de school meer was dan een plek om kennis te vergaren. Het was een plek waar opvoedend geleerd werd, waar kinderen werden geholpen ‘te worden wat ze zijn’, zoals op de Montessori- en Dalton-scholen. Vernieuwing van de maatschappij ter voorkoming van een nieuwe oorlog begon bij een vernieuwing van het onderwijs. Het hoe en waarom van ‘vormende waarde’ en ‘leren denken’ uit Freudenthals lezing vormden in deze context dus interessante en belangwekkende aandachtspunten.

5.1.3 ‘Opvoeding tot denken’

In zijn voordracht ‘Opvoeding tot denken’ benadrukte Freudenthal voornamelijk het praktisch benaderen van het ‘leren denken’ in het algemeen.³⁹ Het verkrij-

34 J.R. Janssen aan Freudenthal, 1 augustus 1945; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 42.

35 Zakagenda’s 1946-1949; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 96-99; Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 343.

36 Freudenthal-Lutter, *Naar de school van morgen* 149.

37 Dit leidde tot instelling van de ‘Vernieuwingsraad’. Uiteindelijk liep dit initiatief stuk op het gebrek aan eenheid binnen de diverse vernieuwingsinitiatieven en (bijbehorende) levensbeschouwingen binnen Nederland. Zie ook: Freudenthal-Lutter, *Naar de school van morgen* 150; C.J.J.A. Morsch, *Met de moed van de hoop. Studies over de vernieuwing van opvoeding, onderwijs en maatschappij in Nederland in de periode tussen ±1930 en 1984* (Eindhoven 1984) 224-228.

38 J.D. Imelman, W.A.J. Meijer, *De nieuwe school gisteren en vandaag* (Amsterdam 1986); Freudenthal-Lutter, *Naar de school van morgen*; Morsch, *Met de moed van de hoop*.

39 De tekst van deze voordracht is niet gepubliceerd; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 466.

gen van het inzicht dat men iets kon onderwijzen zonder te weten wat dat iets was, zei hij vooral te danken te hebben aan het onderzoek zoals dat van de denkpsychologische school van professor Kohnstamm en aan de Amerikaanse invloeden. Hij ging hier verder niet specifiek op werk van Kohnstamm in, maar, zoals later zal blijken, ontleende veel aan diens artikelen en kon zich goed vinden in diens inzichten.

Aan de logica als wetenschap van de vormen van het leren denken had je volgens Freudenthal niet veel: het was te star, had niks met de realiteit van het denken te maken en was ongeschikt om conclusies uit het dagelijks leven te kunnen beschrijven.⁴⁰ Hiermee sloot hij zich aan bij Kohnstamm, die ook tot dergelijke conclusies kwam in zijn artikel 'De formele logica en het kinderlijk denken', dat Freudenthal voor zijn literatuurstudie in 1943 gelezen had.⁴¹ In dit artikel besprak Kohnstamm diverse intelligentieonderzoeken waaronder het onderzoek naar logisch denken bij kinderen van psycholoog Hans Paul Roloff, waarin kinderen gevraagd werd begrippen te definiëren.⁴² Het uitgangspunt bij dit onderzoek was, dat er maar één correcte wijze van definiëren was en wel die per genus proximum en differentia specifica, iets waar Kohnstamm in zijn artikel de nodige kanttekeningen bij plaatste. Freudenthal noemde dit onderzoek niet, maar refereerde er wel impliciet naar:⁴³

Elke pedagoog zal het ook af en toe proberen, en toen ik eens een van mijn jongens – hij was toen vijf – liet definiëren, wat een *ding* is, kreeg ik het antwoord 'een ding is, als je aan iets denkt en je weet niet hoe het heet', een prachtdefinitie, maar afgrijselijk onder de loep van de aan de genus proximum en differentia specifica verknochte logicus.⁴⁴

Het had geen zin, 'lege' logische vormen en schema's te onderwijzen om te leren denken. Dergelijke vormen moesten niet leeg, maar 'gevuld met de inhoud van het leven' gepresenteerd worden. Met onze meerdere kennis over het denken moesten we de leerlingen niet lastig vallen, maar we moesten het gebruiken om de leerstof volgens de moeilijkheden te splitsen, rangschikken en samen te vatten. Als voor-

40 Over logische vormen en het denken schreef Freudenthal in deze periode ook het ongepubliceerde manuscript 'Denken en logica', waarin hij tot eenzelfde soort conclusies kwam als in 'Opvoeding tot denken'; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 458.

41 Kohnstamm, *Keur uit het didactisch werk* (Groningen 1948) 91. Dit artikel stamt oorspronkelijk uit 1934 en verscheen als 'Mededeling 2' van het Nutsseminarium in *Paedagogische Studiën*.

42 Hans Paul Roloff, 'Vergleichend-psychologische Untersuchungen über kindliche Definitionsleistungen', *Beibest zur Zeitschrift für Angewandte Psychologie* 27 (1922), geciteerd in: Kohnstamm, *Keur uit het didactisch werk* 81-82.

43 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 440. In zijn aantekeningenboekje noteerde hij bij het artikel van Kohnstamm over het onderzoek van Roloff: 'Hier spookt genus proximum en differentia specifica'.

44 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 466. Deze definitie kwam van Thijs. Freudenthal noteerde dit gesprek op 18 juni 1943 in zijn notitieboekje met 'rekendidaktiek-aantekeningen'; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 440; Hans Freudenthal, 'Opvoeding tot denken' (ongepubliceerd 1945) 15 pagina's, 2.

Thijs 18 Jan 1963 Definitie "denken" -- als je weet zit en je weet niet, wat het is

Fragment uit Freudenthals 'Rekendidaktiek'-aantekeningenboekje (1943).

beeld noemde Freudenthal het onderzoek van C.W. Washburne, waaruit onder andere bleek dat 'breuken' in het rekenonderwijs op de lagere school niet thuishoorden.⁴⁵ Van groter maatschappelijk belang dan breuken en staartdelingen waren in Freudenthals ogen echter de zogenaamde redactiesommen.

Dat er aan het onderwijs in redactiesommen iets hapert, weten we, maar waar het hem precies in zit en hoe wij het kunnen verhelpen, dat zou het onderwerp moeten zijn van een zeer gedetailleerd en zeer nauwkeurig voorbereid onderzoek.⁴⁶

Tussen verschillende formuleringen van eenzelfde rekensom hoefde volgens hem geenszins een overdracht te bestaan. Amerikaans onderzoek naar transfer leerde ons volgens Freudenthal dat oefening op een bepaald gebied slechts zeer naburige gebieden ten goede kwam. Welke gebieden dit waren en hoe dit gebeurde zou onderzocht moeten worden. Freudenthal stelde voor, uit de duizenden typen redactiesommen die er bestonden, er duizend onmisbare te selecteren, deze te rangschikken naar leeftijd en te onderzoeken hoeveel er per soort nodig waren voor oefening. Deze sommen moesten dan als basis gebruikt worden om dé methode voor redactiesommen op te zetten.

Enkelen zullen verbaasd opkijken, wanneer ze horen, dat het oplossen van dergelijke sommen iets met denken te maken heeft. Toch is het zo. Met veel ervaring brengt men het ook op dit gebied tot werktuiglijkheid, tenminste zolang de vraagstukken van een vrij eenvoudig type zijn. Maar met het moeilijker en onaanschouwelijker worden van het type komt er ook bij de meest geoefenden een grens aan de werktuiglijkheid, en dan blijft er niets anders over dan te denken.⁴⁷

Freudenthal maakte hier impliciet onderscheid tussen 'werktuiglijkheid' en hetgeen hij 'denken' noemde. 'Denken' hield voor hem op zijn minst een zekere mate van

45 De Amerikaan Carleton W. Washburne (1889-1968) was leraar en onderwijsvernieuwer, bekend van de experimentele programma's die hij als hoofdinspecteur van de 'Winnetka Public Schools' (Illinois) vanaf 1919 ontwikkelde. Het onderwijs op deze scholen was individueel en gedifferentieerd van opzet met grote aandacht voor de verschillen in leercapaciteiten van de leerlingen en nadruk op zelfstandig werken. Onder Washburnes leiding werd ook een 'Department of Educational Research' opgezet, waar onder andere onderzoek werd gedaan naar de tijd die leerlingen nodig hadden om op een bepaalde leeftijd bepaalde leerstof onder de knie te krijgen; J.D. Pulliam, *History of education in America* (Columbus 1976) 160, 179; E.L. Bakker, 'The technology of instructional development', in: R.M.W. Travers e.a., ed., *Second handbook of research on teaching* (Chicago 1973) 245-285, aldaar 248; R.H. Bremner e.a., ed., *Children & youth in America. A documentary history. Volume II 1866-1932* (Cambridge 1971).

46 Freudenthal, 'Opvoeding tot denken' 4; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 466.

47 Ibid., 6.

originale actie en creativiteit van de denker in. Zodra een probleem ‘werktuiglijk’ opgelost kon worden, was er in zijn definitie geen sprake meer van ‘denken’.

Volgens Freudenthal konden de vier hoofdbewerkingen het beste routinematig geleerd worden:

Er bestaat geen reden, om de leerlingen deze bewerkingen anders dan werktuiglijk te leren, evenmin als er aanleiding bestaat om iemand eer hij een schakelaar om mag draaien, de hele theorie van de electriciteit uit te leggen. De kinderen maken zeer bepaalde fouten bij de bewerkingen (originaliteit is in deze geheel zoek), maar er is geen aanwijzing, dat deze fouten door een beredenering van de werktuiglijke behandeling voorkomen zou kunnen worden. Het is zelfs heel waarschijnlijk, dat de beredenering schade sticht, door de werktuiglijkheid tegen te werken.⁴⁸

In tegenstelling tot bij de vier hoofdbewerkingen was denken bij redactiesommen onmisbaar. Maar zolang we nog zo weinig wisten over het denken was het enige dat we konden doen: oefenen van zinnige sommen. En dan bedoelde Freudenthal zinnig in die zin dat ze van het type waren die het kind nodig had als toekomstig lid van de maatschappij.

Tot zover dus het rekendenken, dat volgens Freudenthal ondanks de maatschappelijke onmisbaarheid voor de leerling slechts een zeer bescheiden plaats binnen het denken innam en zeker niet overschat mocht worden binnen het grotere geheel van (leren) denken.

Het belangrijkste hulpmiddel bij het (onopzettelijk) aanleren van denkprestaties bij kinderen was volgens Freudenthal het lezen: een kind dat dubbel zoveel leest, leert dubbel zoveel denken. De laatste jaren, zei Freudenthal, hadden de oefeningen in grammatica een puzzelkarakter gekregen. Dit was de invloed van de door de Amerikanen ontwikkelde intelligentietests. Dit was misschien nuttig voor onderzoek, maar niet voor oefening: elk puzzeltype oefende slechts één (bovendien kunstmatige) denkvorm. Het spiet Freudenthal, dat het Nederlandse onderwijs dergelijke tests als hulpmiddel had verworpen, in plaats het nut ervan te onderzoeken (bijvoorbeeld als criterium voor toelating tot middelbaar of hoger onderwijs).

Freudenthal was voorstander van het gebruik van denkvragestukken met een tweeledig karakter: niet alleen als test maar ook als oefening in denkvormen, die de vorm hadden van ‘uit het leven geknipte verhaaltjes’ die eindigden met een vraag. Deze vraagstukken moesten appelleren aan de zelfwerkzaamheid en als zodanig een taak aanwijzen. Een voorbeeld van een dergelijk vraagstuk gaf Freudenthal hier niet. Volgens hem was een dergelijke opzet te vinden bij de Amerikaanse onderwijsfilosoof J. Dewey en bij degenen die in navolging van hem de Project Method van onderwijs en opvoeding hadden opgezet. Hierover was Freudenthal echter niet erg enthousiast:

48 Ibid., 7; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 466.

De boeken van voorstanders zijn gekenmerkt door een – soms belachelijke – naïviteit en door een vervreemding van het leven, die weinig bij hun algemene denkbeelden past. De realiteit van hun plannen is namelijk topzwaar door een overtollig totaliteitsaspect; om één enkel project heen wordt het gehele onderwijs gegroepeerd – iets dat tot hypertrophieën aan de ene en schromelijke tekorten aan de andere kant moet leiden, en dus een behoorlijke organisatie van het onderwijs tegenwerkt.⁴⁹

Een pasklaar antwoord voor het denkonderwijs kon Freudenthal zelf ook nog niet geven:

Met de uitwerking van dit programma [uit het leven gegrepen verhaaltjes die aan zelfwerkzaamheid appelleerden] zou men de eerste stappen doen in de richting naar een denkonderwijs in het raam van onze volksopvoeding. De eerste stappen – zeg ik, want wat het denkonderwijs zou moeten behelzen, zullen wij pas doende en proefondervindelijk uit alle fouten lerend, beseffen.⁵⁰

Freudenthal had wel een idee hoe de denksommen eruit zouden moeten zien: hij gaf de voorkeur aan het synthetische type, dat één krachtige inspanning van het kind vereiste, boven het analytische type, waarbij je bij wijze van spreken maar aan het juiste draadje hoefde te trekken om de oplossing te ontrafelen.⁵¹

Onderzoek naar transfertraining leerde ons, aldus Freudenthal, dat middelbaar wiskundeonderwijs slechts wiskundig vernuft scherpte. Het was dan ook niet gerechtvaardigd om vast te houden aan een programma dat van ongeschikte leerlingen wiskunde eiste. Freudenthal pleitte voor de instelling van een middelbare schoolsoort zonder wiskunde, ook niet als keuzevak. Wat iemand leerde moest zijns inziens namelijk afhangen van bekwaamheden, niet van een keuze. Nu was het zo dat er op de middelbare scholen voor werktuiglijkheid in plaats van denken gekozen werd als concessie aan de grote massa ongeschikten voor de wiskunde.

Maar het is toch niet aan [sic] de haak, dat vrijwel alle eerstejaarsstudenten wiskunde hun studie beginnen met een algehele onervarenheid in het wiskundig denken.⁵²

Doordat de denkvormen in het wiskundig denken volgens Freudenthal veel abstracter, veel meer ‘vorm’ waren dan die van het dagelijks leven, was wiskundig

49 Freudenthal, ‘Opvoeding tot denken’ 10-11; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 466.

50 Ibid., 11.

51 Als voorbeeld van het niet-analytische karakter gaf Freudenthal de volgende puzzel: *Twee arabieren zijn onderweg. Wanneer zij de oase gewaar worden, houden zij halt, om nog even te rusten. Terwijl zij lui in het zand liggen, stelt de één een weddenschap voor: 100 piasters voor wiens kameel het laatst in de oase aankomt. De ander aanvaardt de weddenschap, met als gevolg, dat geen van die twee aanstalten maakt, om op te staan en zijn kameel te beklimmen, want niemand wil 100 piasters op het spel zetten. Ze blijven liggen, ofschoon zij het vervelend vinden, en zij zouden daar misschien nog steeds liggen, als er niet een derwisj langs was gekomen, die zij om raad hebben kunnen vragen. Ze legden den derwisj het geval uit. De derwisj dacht even na, riep hun een kort zinnetje toe, en ... ineens sprongen zij op, op de kamelen en hals over kop naar de oase, – de vraag luidt: wat had de derwisj gezegd?*

Deze puzzel achtte Freudenthal te kunstmatig als denksom, maar typerend voor het synthetische type: met één doorbraak, één ingeving is de puzzel op te lossen.

52 Ibid., 13.

denken makkelijker te leren dan het meer aan het dagelijks leven gerelateerde rekenen. Op de universiteit pleitte Freudenthal voor het geven van oefeningen in werkcollegevorm, zoals hij zelf al voor de oorlog deed. Het contact tussen docent en student vormde op die manier de ideale vorm voor universitair onderwijs.

Naast het algemene denken, het rekenen en het wiskundig denken noemde Freudenthal in zijn voordracht nog het manuele denken, waar volgens hem nauwelijks iets over bekend was. Er was een groot tekort aan wat hij ‘allround-manueel-denken’ noemde: (toekomstige) ambachtslieden zonder op één specifieke ambacht gerichte opleiding. Dit tekort zou opgevuld moeten worden door bijvoorbeeld een middelbaar onderwijs met als kern handvaardigheid en manueel denken.

Freudenthal concludeerde uiteindelijk dat het probleem van de volksopvoeding dus nog steeds niet was opgelost. Ook het klassikale stelsel zou onder de loep genomen moeten worden. De praktijk die bij Freudenthals theorie hoorde, was hiervan afhankelijk, daar volgens hem een heel volk denken geleerd moest worden. Freudenthals kampervaringen in Havelte deden hem concluderen dat het droevig gesteld was met het denken van “de massa van het volk”. Ze konden de kranten niet begrijpen, onderlinge gesprekken bleven “in de sfeer van het primitieve” en er waren hele arbeidersgezinnen zonder boeken. Intelligente leerlingen bleven daar arbeiders op het land of in de industrie en dat konden we ons volgens Freudenthal niet permitteren:

Ons volk heeft in deze oorlog grote verliezen geleden. En percentagegewijs zal juist hier te lande het verlies aan intelligentie bijzonder groot zijn. Er is een tekort aan geschoolde krachten in elk vak op komst. Een noodlottige bedreiging van onze beschaving! Een noodlottige bedreiging van onze beschaving is een ongeschoolde massa, die niet de bekwaamheden bezit, om haar levensonderhoud te verdienen, en die toch haar eisen doet gelden.⁵³

Freudenthal eindigde zijn voordracht door nogmaals de aandacht te vestigen op hét middel om deze massa te scholen: het drukken en verspreiden van boeken.

Opvallend aan Freudenthals voordracht was de grote sociale betrokkenheid die eruit bleek. Het ging niet enkel over (reken)didactiek, het ging om het opvoeden van en leren denken voor heel het Nederlandse volk. Zolang er nog niet veel bekend was over het leren denken, moest de weinige kennis die er was zo goed mogelijk toegepast worden in het onderwijs, zoals door het ontwikkelen van een doordacht systeem van redactiesommen en het ontwikkelen van de juiste soort denkvragestukken. En passant wees Freudenthal de vormende waarde van het onderwijs in de wiskunde en het rekenen af. Veel meer dan het oefenen van het wiskundig denken en rekenen mocht je volgens hem van deze vakken niet verwachten.

In de loop van zijn voordracht schetste hij enkele eisen die het opvoeden van het Nederlandse volk aan het (middelbaar) onderwijs zou stellen. Zo pleitte hij voor

53 Ibid., 15.

een middelbare onderwijsvorm zonder de verplichte wiskunde. Voor mensen die niet geschikt voor wiskunde waren, was er geen reden om dit te leren. Op die manier konden de mensen die er wél geschikt voor waren (en er in een vervolgopleiding gebruik van maakten), tenminste echt wiskundig leren denken, in plaats van de op werktuiglijkheid gestoelde methode waar nu vaak op het middelbaar onderwijs op teruggegrepen werd. Er was dus in zijn gedachtegoed nog geen sprake van ‘wiskunde voor allen’ in letterlijke zin, en zeker niet koste wat kost. Wél was het leren rekenen voor iedereen noodzakelijk en was het volgens hem geen schande om bij het aanleren van de hoofdbewerkingen op werktuiglijkheid terug te grijpen.

Tot slot stelde Freudenthal zich een middelbare schoolsoort voor, waar de ontwikkeling van het manuele denken centraal stond. Dit alles was nodig, om de capaciteiten van het Nederlandse volk ten volle te benutten en bovendien de grote massa op te voeden en te leren denken. Pessimistisch was Freudenthal ten aanzien van dit doel: als dit niet zou lukken, voorzag hij een teloorgang van de Nederlandse beschaving. Simpel was zijn oplossing: lezen als hét middel om onopzettelijk te leren denken voor iedereen.

Freudenthals lezing werd naar eigen zeggen “met veel succes” ontvangen op de conferentie.⁵⁴ In *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* wijdde hij nog een stukje aan deze “heerlijke conferentie”.⁵⁵ Hierin roemde hij de geest van “roerend met elkaar eens zijn” die er onder de conferentiedeelnemers heerste, ook al waren er duidelijk twee partijen te onderscheiden (de reformisten die de klassikale school van vandaag wilden vernieuwen en de radicalen die die klassikale school juist veroordeelden). Belangrijk vond Freudenthal vooral dat er tussen beide partijen geen kloof ontstond en “dat er geen kloof komt tussen een opvoedingsstelsel voor kinderen, wier ouders om geestelijke of stoffelijke redenen in staat zijn, het pedagogisch beste voor hun kinderen uit te zoeken, en het opvoedingsstelsel voor de massa van het volk”.⁵⁶ Hij zou het een nadelige ontwikkeling vinden, wanneer de wvo zou ontaarden in een platform voor vooruitstrevenden. Hij riep de deelnemers op “de geest, die ons vier dagen lang op Rhederoord heeft beziel” niet achter te laten “bij de natte as van het kampvuur”, en niet te verloochenen in de maatschappij.⁵⁷ Te veel nadruk op de meer radicale kant van de vernieuwingsstromingen zou er inderdaad voor zorgen, dat de wvo en met name haar tijdschrift *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* in de jaren na de oorlog weinig gehoor vond bij het bredere Nederlandse onderwijzerspubliek.⁵⁸

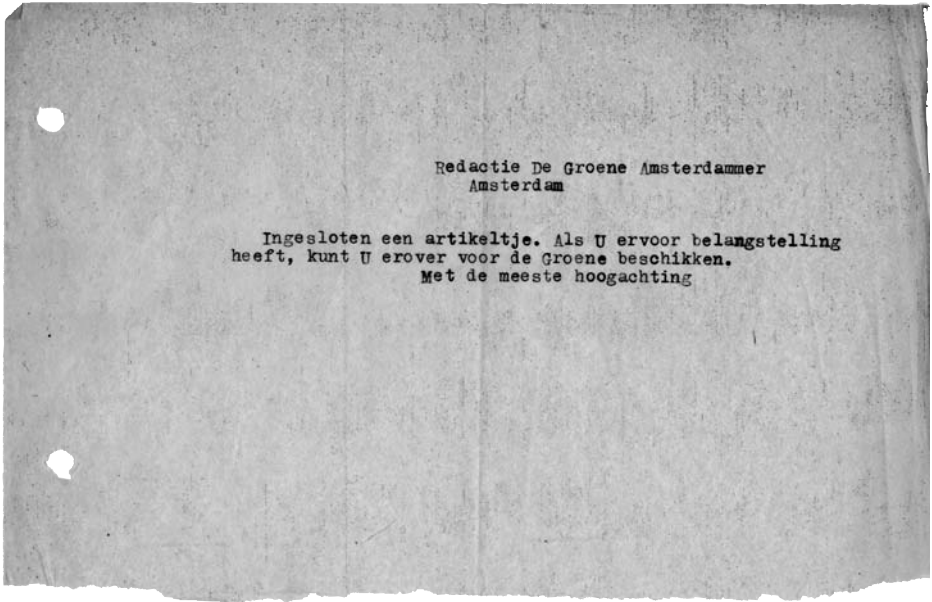
54 Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 224.

55 Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 119; Hans Freudenthal, ‘Struggle for life’ (ongepubliceerd 1945); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 468.

56 Freudenthal, ‘Struggle for life’ (ongepubliceerd 1945) 3; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 468.

57 *Ibid.*, 4.

58 Morsch, *Met de moed van de hoop* 224 e.v.



Het begeleidende briefje aan *De Groene Amsterdammer* bij Freudenthals artikel 'Rekenmachines winnen den oorlog' (1946).

5.1.4 'Opvoeden' in *De Groene Amsterdammer*

Lezen was volgens Freudenthal dus de beste manier om mensen te leren denken – "een kind dat dubbel zoveel leest, leert dubbel zoveel denken" – waarbij boeken het ultieme middel waren om de ongeschoolde massa op te voeden. Zelf droeg Freudenthal hier impliciet aan bij door bijvoorbeeld de publicatie van zijn in de oorlog geschreven romans *De Schuldenaar* en *Viersprong der grote wegen*. Nog duidelijker was het 'opvoedkundig element' te herkennen in zijn bijdragen in *De Groene Amsterdammer*.

Freudenthals studie gedurende de jaren van 'lediggang' had hem namelijk een schat aan aantekeningen, manuscripten en artikelen opgeleverd. Veel van dit werk zou de basis worden voor latere publicaties. Zo stuurde hij in februari 1946 op eigen initiatief een artikel getiteld 'Rekenmachines winnen den oorlog' naar de redactie van *De Groene Amsterdammer*.⁵⁹ De redactie schreef zeker belangstelling te hebben "voor Uw artikel over de fantastische rekenmachine".⁶⁰ Op 16 maart werd het geplaatst. In dit artikel, dat volgens Alberts het eerste artikel in de Nederlandse pers was dat het publiek over dit onderwerp inlichtte, vertelde Freudenthal over de enorme rekenmachine, die in de oorlog voor de Harvard-universiteit was ge-

⁵⁹ Correspondentie tussen Freudenthal en de redactie van *De Groene Amsterdammer* (1946); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 34.

⁶⁰ Ibid.

bouwd.⁶¹ Hij wilde niet alleen het publiek informeren over de mogelijkheden en toepassingen van deze uitvinding, maar ook waarschuwen voor de grote achterstand die Europa door de oorlog had op de Amerikaanse wetenschap:

Maar zij [de rekenmachine] lijkt een fantastisch symbool voor het Amerikaanse organisatie-talent, dat den tweeden wereldoorlog gewonnen heeft, en dat nog meer zal winnen, als Europa geen kans krijgt, om dien voorsprong in te halen.⁶²

De stijl zou kenmerkend worden voor de vele artikelen, die Freudenthal in de erop volgende jaren voor *De Groene Amsterdammer* zou schrijven. Op makkelijk leesbare toon vertelde hij zijn publiek over allerhande meer of minder aan de actualiteiten ontleende zaken, variërend van Brouwer's intuïtionisme tot het gebruik van kalmerende middelen tijdens het eindexamen.⁶³ De grote gemene deler bleef toch vaak de wiskunde, en dan met name de geschiedenis ervan. Van zijn interesse in de geschiedenis van de wiskunde gaf hij ook blijk door de keuze van het onderwerp van zijn oratie *5000 jaren internationale wetenschap*, waarin hij in vogelvlucht 5000 jaren wiskunde behandelde.⁶⁴

Niet alleen was het publiceren in *De Groene Amsterdammer* voor Freudenthal een manier om zijn literaire werk voort te zetten, hij bereikte er ook nog eens een breed publiek mee en gaf daarmee gehoor aan zijn eigen oproep: het opvoeden van de massa, door de wetenschap en actualiteiten op een toegankelijke manier openbaar te maken.

Laten we terugkeren tot de tekst van Sjadoeppoem met de rechthoekige driehoeken. U zult misschien vreemd opkijken, maar ik ga u nu een les geven in het lezen van spijkerschrift. U protesteert, maar ten onrechte. Wanneer ik klaar ben, zult u toegeven: een kind kan de was doen.⁶⁵

Zonder belerend te worden, vond hij een humoristische manier van schrijven waarmee hij de wiskunde voor de lezers wat begrijpelijker, wat minder mysterieus en minder ‘wereldvreemd’ maakte. Zo schreef hij over de in het dagelijks leven bijna absurd aandoende regels van de logica:

Uit één valse stelling kun je alles afleiden. De ware en de onware beweringen, zonder onderscheid. En bovendien nog zonder enige moeite. De wiskunde wordt dan wel heel erg gemakkelijk, en de aardigheid is er af. Daarom haten wij de tegenstrijdigheden en wij blijven zweren bij “Eikenhout is Eikenhout”.⁶⁶

61 Albers, *Jaren van berekening* 37.

62 Hans Freudenthal, ‘Rekenmachines winnen den oorlog’, *De Groene Amsterdammer* (16 maart 1946); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1405.

63 Hans Freudenthal, ‘Redeneren en doen’, *De Groene Amsterdammer* (8 maart 1947); Hans Freudenthal, ‘Examen in vergiftigde toestand’, *De Groene Amsterdammer* (8 oktober 1949); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 1407 en 1423.

64 Freudenthal, *5000 jaren internationale wetenschap* (Groningen 1946).

65 Hans Freudenthal, ‘Driehoeken en spijkerschriftcijfers’, in: Hans Freudenthal, *Van sterren tot inlegzolen* (Arnhem 1954) 119-122, aldaar 119-120; verschenen in *De Groene Amsterdammer* (8 april 1950); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1431.

66 Hans Freudenthal, ‘Eikenhout is Eikenhout’, *De Groene Amsterdammer* (13 maart 1948); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1414.

De stukjes in *De Groene* vormden ook een manier om zijn eigen kritiek en commentaar op lopende discussies te leveren en openbaar te maken. Een terugkerend onderwerp was Freudenthals visie op het Hoger Onderwijs, de lerarenopleiding en het wiskundeonderwijs. Freudenthal zou tot in de jaren zeventig in *De Groene* blijven schrijven, ruim 170 stukken en stukjes in totaal.⁶⁷

5.1.5 ‘De medewerkende taak van de opvoeder bij de mensvorming’

Vier jaar na ‘Rhederoord’ sprak Freudenthal nogmaals over opvoeding op een zomerconferentie van de wvo. Het ging hier om de zogenaamde ‘Varende Conferentie’ in 1949, een conferentie op een schip dat de deelnemers in vier dagen langs steden in Nederland en België bracht. Het centrale thema van deze conferentie was ‘Mensvorming’.

‘Mensvorming’ was een veelgehoorde kreet binnen het gedachtegoed van onderwijsvernieuwers in deze tijd. Het ging niet alleen om het realiseren van veranderingen binnen het schoolsysteem, het eigenlijke probleem was de vorming van de mens. In een aankondiging van de ‘Varende conferentie’ in *Vernieuwing* schreef Boeke:

Slechts als wij de waarde van de persoonlijkheid in zijn betrekkelijkheid erkennen zullen wij het evenwicht vinden, dat zal kunnen helpen om een afgrijselijke wereldcatastrophe te vermijden. Naar “mensvorming” moeten wij heen. Tot sommigen zou ik hierbij willen voegen: “maar die mensvorming moeten wij zien in zijn sociaal evenals in zijn individueel aspect”.⁶⁸

In een voordracht tijdens de conferentie sprak Boeke nogmaals over het belang van de vorming van de persoonlijkheid in de strijd tegen wat op dat moment als crisis werd ervaren: de tendens naar het massale. Het doel van mensvorming was het bereiken van “een natuurlijk zelfbewustzijn, een vertrouwen in eigen mogelijkheden”.⁶⁹ Was dit eenmaal bereikt, dan zou er geen “haat en wil tot machtsvorming” meer zijn volgens Boeke.

In de voordracht van de tweede spreekster van de conferentie, een zekere mejuffrouw Dol, werd een belangrijk reform-pedagogisch uitgangspunt nog eens benadrukt: de bescheiden rol die de opvoeder in het ontwikkelingsproces van het kind moest spelen. Het kind moest als uitgangspunt genomen worden, zij het onder bezielende maar zeker niet belemmerende leiding van de volwassene. De taak van de opvoeder was volgens haar “het kind te steunen door ons geloof in de spontane krachten, die in elk kind aanwezig zijn”.⁷⁰

67 Zie ook de paragrafen 5.2 en 5.3. Vanaf 1974 zou hij eenzelfde soort uitlaatklep vinden – en een nog grotere publieke bekendheid – in zijn artikelen voor *NRC/Handelsblad*; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1627-1700.

68 Kees Boeke, ‘Van onderwijsvernieuwing naar mensvorming’, *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 7 (1949) 298-299, aldaar 299.

69 ‘Verslag van de Varende Conferentie’, *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 8 (1949) 16-21, aldaar 20.

70 *Ibid.*, 20.

Freudenthal sneed in zijn voordracht, getiteld 'De medewerkende taak van de opvoeder bij de mensvorming', de vraag aan, of de opvoeder tot 'mensvorming' kon bijdragen en zo ja, hoe. De mate van 'menszijn' was volgens hem af te meten aan de mate waarin de mens hetgeen hij was tegengekomen tot een eenheid verwerkt had. 'Mensvorming' bestond dan uit het openstellen van de mens voor het assimileren van een zo rijk mogelijke verscheidenheid van hetgeen wij hem als opvoeder konden bieden en van hetgeen hij in zichzelf kon vinden. Als er al iets mensvormend was in de relatie van opvoeder tot opgevoede, dan had het dus de vorm en strekking van het onopzettelijk (en dus onopvallende):

Wat wij het krachtigste hebben geassimileerd, maakt op onze medemensen de sterkste indruk. Waarin wij het meest mens zijn, daarin werken we het ingrijpendst mensvormend. Het onbewuste is het geweldigste reservoir van ons menszijn.⁷¹

Het opzettelijke element in de opvoeding bleef natuurlijk onmisbaar, vooral in het onderwijs. Maar voor mensvorming had het niet alleen geen nut, het was ook gevaarlijk als het begin van 'mensverkrachting', zoals Freudenthal het omschreef. In deze context pleitte hij voor meer globaliteit in het onderwijs, universaliteit in het Hoger Onderwijs en tegen specialisme in welke vorm dan ook. Leren lezen deed je niet via het aan elkaar plakken van letters, een taal leren niet via de omweg van regels en woordjes.

Over het reken- of wiskundeonderwijs zei hij in deze voordracht niets. Gezien de nadruk die hij vier jaar eerder al legde op het 'leren denken door lezen' en het belang van het onopzettelijke juist daarbij, was dit logisch. In het grote geheel van 'opvoeden' kende Freudenthal ook nu slechts een bescheiden plaats toe aan het rekenonderwijs. In het uitgangspunt 'globaliteit in het onderwijs' kon wel een vooruitwijzing naar een in de jaren zestig en zeventig door Freudenthal meer expliciet geformuleerde visie op reken- en wiskundeonderwijs gezien worden: 'wiskundeonderwijs vanuit en door de realiteit'.

Freudenthal besloot zijn voordracht met een oproep tot bescheidenheid als opvoeder. Als mens moest de opvoeder beseffen dat hij nog net zo onvoltooid en in ontwikkeling was als degene die hij moest opvoeden: de volheid van menszijn die hij aan zijn leerlingen wilde geven, moest zijn eigen volheid zijn. Opzettelijk kon hij zijn eigen menszijn en mensbeeld niet op de ander overdragen, omdat deze niet het verleden van de opvoeder had. Hoe beter de eenwording van de opvoeder was voltrokken, hoe meer vanzelf en onopzettelijk hij dit kon overdragen. Freudenthal eindigde zijn voordracht als volgt:

Mensvorming? Ja. En hoe? Door af te blijven van de mens! De mens is niet, zoals primitieven de schepping zich voorstelden, geformeerd uit klei, die je met je hand kneedt. De goddelijkheid van de taak van de opvoeder is dezelfde, die Flaubert toeschrijft aan

71 Hans Freudenthal, 'De medewerkende taak van de opvoeder bij de mensvorming' (ongepubliceerd 1949) 13 pagina's, 10; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 485.

de dichter, wanneer hij zich manifesteert in de schepping van zijn verbeelding: onzichtbaar en alom tegenwoordig.⁷²

5.1.6 Opvoeding: een samenvatting

Freudenthals houding en visie op onderwijs, opvoeding en het doel ervan waren zeker niet nieuw of opzienbarend binnen wvo-kringen. Wel opvallend was dat hij geen directe connecties met het lager en middelbaar onderwijs had, maar dat zijn mening als wiskundige over algemene onderwijs- en opvoedingszaken blijkbaar wél serieus genomen en gerespecteerd werd door het toch hoofdzakelijk uit pedagogen, onderwijsfilosofen en onderwijzers bestaande wvo-publiek. Het aanzien dat zijn professoraat met zich meebracht zou hier ook wel aan bijgedragen hebben.

Op het eerste gezicht leken Freudenthals activiteiten binnen de wvo los te staan van zijn andere interesses en werkgebieden. Toch vormden ze een logisch geheel met en een aanvulling op zijn meer algemene ideeën over onderwijs, en zijn overtuiging, dat in het onderwijs dé oplossing van de maatschappelijke problemen lag. In een artikel in *De Vrije Katheder* in januari 1949 schreef hij:⁷³

Ik heb opzettelijk alleen gesproken over het lager onderwijs, dat voor 90% van ons volk het enige onderwijs is, dat ze ooit volgen. Met het meest fundamentele moet men beginnen. Schoolplicht tot 18 jaar zoals in Engeland, middelbaar onderwijs voor het overgrote deel der jeugdige bevolking, zoals in Amerika – dat zijn utopieën. Heden utopieën, morgen eisen, overmorgen werkelijkheid. Onder voorwaarde, dat men het niet langer als een schande beschouwt, culturele kwesties in hun maatschappelijke verband te zien.⁷⁴

In de volgende paragraaf zal blijken, dat met name de opvoedingscomponent van Freudenthals visie op het hoger onderwijs veel met de hier geschetste denkbeelden gemeen heeft. Vooral zijn geloof in de kracht van het onopzettelijke, de nadruk op lezen als opvoedingsmethode, het belang van universeler onderwijs, het gevaar van specialismen en de aansporingen tot het doen van meer (en vooral deugdelijk) onderzoek op het gebied van onderwijs zou Freudenthal ook gebruiken als argumenten in de discussies over de vernieuwing van het universitaire onderwijs.

⁷² Ibid., 12-13.

⁷³ *De Vrije Katheder* was in 1940 ontstaan als verzetsblad van communistische studenten aan de Amsterdamse Universiteit en fungeerde tussen 1945 en 1950 als platform voor linkse intellectuelen en artiesten. Meer over *De Vrije Katheder* in: F. van den Burg, *De Vrije Katheder 1945-1950: een platform van communisten en niet-communisten* (Amsterdam 1983).

⁷⁴ Hans Freudenthal, 'Onderwijsvernieuwing, maatschappelijk gezien', *De Vrije Katheder* 8 (1949) 6-8, aldaar 8.

5.2 Het Hoger Onderwijs

Het einde van de oorlog luidde voor het hoger onderwijs het begin van een inhaalrace in.⁷⁵ Niet alleen was er (vooral op het gebied van de natuurwetenschappen) het inhalen van de achterstand op andere landen als de Verenigde Staten, ook moest er onderwijs verzorgd worden voor de studenten die door de oorlog vertraging in hun studie hadden opgelopen. In Amsterdam waren er in 1945 volgens Freudenthal drie keer zoveel wiskundestudenten als normaal.⁷⁶

Direct na de oorlog werden door diverse groepen hoogleraren ideeën over de vernieuwing van de universiteit bekend gemaakt. Zo verscheen de Groningse brochure *De vernieuwing der universiteit*, waaraan naast minister Van der Leeuw onder andere Van der Corput had meegewerkt. Van andere universiteiten als Leiden en Utrecht kwamen vergelijkbare geluiden. Veel kritiek kwam voort uit het falen van de universiteit in het verzet tegen de bezetter. De oorzaken hiervoor werden vooral gezocht in de steeds sterker opkomende vakspecialismen en het gebrek aan een hechte academische gemeenschap van hoogleraren en studenten. De oplossing hiervoor lag volgens de brochure op cultureel terrein: invoering van filosofiecolleges, Studium Generale of ‘Wetenschap en samenleving’ als verplichte studieonderdelen zouden voor de noodzakelijke overdracht van cultuur moeten leiden. Zo kon de universiteit zowel als cultuurinstantie als ook op wetenschappelijk gebied voor zijn studenten, maar uiteindelijk ook voor de maatschappij de nodige leidersfunctie vervullen. Een ander punt van kritiek dat ook binnen de vwo veel aandacht kreeg, was de eenzijdige studentenpopulatie in klasse en sekse. Een democratischer toelatingssysteem zou er voor moeten zorgen, dat een ieder die geschikt was om te studeren, daarvoor de gelegenheid kreeg.

Een voor de wiskundeopleiding specifiek probleem was het ontstaan van nieuwe beroepsmogelijkheden voor afgestudeerden. Naast het voorheen vanzelfsprekende vooruitzicht op een betrekking als leraar kwam nu meer vraag vanuit de maatschappij naar beroepsmogelijkheden als researchwiskundige, organisatiewiskundige of wiskundig onderzoeker. Dit vroeg om herbezinning op de inhoud van de opleidingen.

Het nieuwe kabinet, met als minister van OK&W de Groningse hoogleraar Van der Leeuw, had de hervorming van de universiteit hoog op het programma staan. In het kader van ‘herstel en vernieuwing’ werd het universitaire stelsel uitgebreid onder de loep genomen. Op 11 april 1946 werd de Staatscommissie tot Reorganisatie van het Hoger Onderwijs (commissie-Reinink II) ingesteld. De hieruit voortvloeiende Wet op het Hoger Onderwijs zou overigens pas in 1960 afgekondigd worden.

75 Voor deze paragraaf zijn veel gegevens ontleend aan de volgende werken: Alberts, *Jaren van berekening*; Alberts e.a., red., *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen*; Alberts e.a., red., *Om de wiskunde*; Molenaar, *Wij kunnen het niet langer aan de politici overlaten*; J.C.C. Rupp, *Van oude en nieuwe universiteiten* (Den Haag 1997).

76 Freudenthal aan H. Hopf, 7 nov 1945; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 88.

Ook Freudenthal wilde zich in deze actuele discussie mengen: “discussie is immers een spoeling, die door veel varkens niet dun, maar vet wordt gemaakt en iedere stem, die in de discussie wordt gehoord, kan weerklank wekken, al is het dan weerklank, die tot overdenken en tegenspreken prikkelt”.⁷⁷ Hij schreef hiertoe een 73 pagina’s tellende brochure, getiteld ‘Oude en nieuwe universiteiten’, die (zoals hij zelf aangaf) vooral een directe reactie vormde op de door de Groningse groep geschreven voorstellen. Het stuk vormde wat hij later zou noemen ‘de hoofdschotel’ van zijn bijdrage aan de discussie.⁷⁸ Alvorens hij een poging deed het stuk te laten publiceren, legde Freudenthal het – begeleid door een uiterst voorzichtig geformuleerde brief – voor aan Van der Corput, één van de zes auteurs van *De vernieuwing der universiteit*.⁷⁹

Ik heb namelijk op de plannen van de Groningsche docenten ook critiek geoeffend, en al weet ik, dat wij wiskundigen wlkaar [sic] geen critiek kwalijk nemen en al heb ik het gevoel, dat ik met mijn critiek altijd binnen de perken van het meest fatsoenlijke ben gebleven, toch zou ik niets willen doen, wat in mijn nadeel zou kunnen worden geïnterpreteerd – ik zou dan ook mijn eigen plannen en de uitvoering in de weg gaan staan.⁸⁰

Van der Corput reageerde positief op Freudenthals brochure. Hij was het niet alleen eens met de kritiek die Freudenthal in zijn stuk op de Groningse brochure had, maar waardeerde vooral Freudenthals bijdrage als stimulans tot de discussie, want “ons woord is – en mag niet zijn – het laatste woord over deze materie”.⁸¹ Pogingen om tot een publicatie van zijn brochure te komen leidden tot niets, wel zou Freudenthal later veel van zijn ideeën verwerken in zijn stukjes in *De Groene Amsterdammer*.⁸²

Wat waren de hoofdpunten van Freudenthals voorstellen omtrent de universitaire hervormingen? Hoe hingen ze samen met zijn ideeën over opvoeding en (wiskunde)onderwijs? En hoe werkten ze in diezelfde ideeën door?

5.2.1 Studium Generale

Een van de hoofdpunten in Freudenthals ideeën over universitaire hervorming was het Studium Generale. In de strijd tegen de zo kwalijk bevonden specialisatie bin-

77 Hans Freudenthal, ‘Oude en nieuwe universiteiten’ (ongepubliceerd 1945) 75 pagina’s, 1; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 467.

78 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 337.

79 Dat Freudenthal in zijn begeleidende brief zo op zijn tellen paste, kwam hoogstwaarschijnlijk ook door de belangrijke rol die Van der Corput juist in deze periode speelde bij het verdelen van de leerstoelen wiskunde en de afhankelijke positie die Freudenthal daarbij had.

80 Freudenthal aan Van der Corput, 20 okt 1945; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 18.

81 Van der Corput aan Freudenthal, 24 oktober 1945; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 18.

82 Erven P. Noordhoff Uitgevers wilden Freudenthals stuk “behoudens enkele kleine opmerkingen” graag uitgeven, maar kampten met papierschaarste. Freudenthal zou zelf met het papier voor de ongeveer 500 exemplaren moeten komen, opdat het stuk nu het nog actueel was zo snel mogelijk uitgegeven kon worden; correspondentie tussen Erven P. Noordhoff Uitgevers Groningen en Freudenthal, december 1945; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 29.

nen de vakgebieden werd Studium Generale opgevoerd als een belangrijk hulpmiddel. In de brochure van de Groningse hoogleraren werd de oplossing gezien in een meer centrale rol van de moderne geesteswetenschappen als wijsbegeerte en psychologie binnen de universiteit, om zo tot een geestelijke grondslag van de universiteit te komen.

Freudenthal geloofde niet in de algemeen vormende of opvoedende kracht van verplichte Studium Generale-colleges. Hij vond dat de kritiek op de “geestelijke kluistering van de jeugd in zijn vakstudie” allereerst de docenten moest treffen. Zij hadden de taak de student te helpen bij het vinden van verbindingen tussen vakgebieden. De cultuurcritici die – vooral op het gebied van de natuurwetenschappen – waarschuwden tegen specialisatie en eenzijdig intellectualisme, vergaten dat anti-intellectualisme één van de schaarse theoretische leerstellingen van het nationaal-socialisme was en dat het intellect was, dat de oorlog had gewonnen. Intellectualisme had slechts daar tekort geschoten, waar het te weinig ontwikkeld was en het de oorlog niet had kunnen voorkomen.⁸³

Volgens Freudenthal was het tijd te onderkennen, dat de universiteit niet langer het culturele centrum, niet eens het centrum van de wetenschappelijke beschaving vormde. De kracht van het hoorcollege zou het altijd verliezen van die van het boek. In plaats van daarover te klagen, konden we volgens hem beter een meer vruchtbare manier van onderwijs zoeken.

Maar als wij in onze colleges den strijd met de boeken zullen aanbinden, zullen we verslagen zijn, nog eer die strijd begonnen is. We moeten onze mogelijkheden kennen, om onze taak te kunnen vervullen. Zijn de perken, waarbinnen wij onze ambities als leeraar [sic] en opvoeder kunnen bevredigen, te nauw? We hebben niet het recht, daarover te klagen, zoolang we niet binnen die perken ons best hebben gedaan.⁸⁴

Het uitbuiten van het persoonlijke element – het contact tussen student en docent – moest volgens Freudenthal het mondelinge onderwijs doen uitsteken boven boeken. Zeker waar het ging om Studium Generale-colleges waarschuwde hij ervoor de mogelijkheden niet te overschatten: massa-colleges, massa-tentamens en ‘blokken’ voor algemene beschaving vormden volgens Freudenthal een pedagogische enormiteit. Studium Generale moest geen gereguleerde instelling worden, maar “iets alledaags en toch plezierigs”.⁸⁵

Algemene beschaving niet *naast*, maar *door* de vakstudie was volgens Freudenthal de oplossing. En hoe? Door als docenten te laten blijken exponenten van de samenleving te zijn, en van onze algemene beschaving “den student te geven, wat we

83 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1426. Over het tekort schieten van Studium Generale als middel in de strijd tegen specialisatie schrijft Freudenthal ook in *De Groene Amsterdammer*: ‘Reorganisatie van het Hoger Onderwijs II’ van 26 november 1949, dat verscheen naar aanleiding van het Rapport van de commissie-Reinink II en waarin hij dezelfde argumenten aandroeg als hier in ‘Oude en nieuwe universiteiten’.

84 Freudenthal, ‘Oude en nieuwe universiteiten’ 24; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 467.

85 *Ibid.*, 37.



Groepsfoto van de studentenvereniging 'Mapha' (de Mathematisch-Physikalischen Arbeitsgemeinschaft) tijdens een wandeltocht. Freudenthal is de tweede van rechts, knielende (ca. 1926).

zelf bezitten".⁸⁶ Daarnaast moest de universiteit tijd en ruimte scheppen voor studenten om elkaar te ontmoeten, algemene voordrachten te volgen, naar elkaars colleges te gaan en te lezen in een grote leeszaal waar je daadwerkelijk langs de rekken met boeken kon lopen, zodat "je er ook vindt – vaak terloops –, wat je niet hebt gezocht".⁸⁷

Het was duidelijk dat Freudenthal met deze idealistische schetsen dacht aan zijn eigen jeugd, aan de vele boeken die hij over de meest uiteenlopende onderwerpen las, aan zijn studietijd, toen hij in Berlijn ook andere colleges naast zijn wiskunde-colleges volgde. Maar vooral dacht hij aan de geweldige 'vakstudie-maatschappij' die hij in Berlijn indertijd aantroef, waarbij de bindende sociale functie van de studentenvereniging de 'Mapha' (de Mathematisch-Physikalischen Arbeitsgemeinschaft) een belangrijke rol speelde.⁸⁸

⁸⁶ Ibid., 37-38.

⁸⁷ Ibid., 38. Hier kwam het thema 'opvoeden door lezen' terug, zoals Freudenthal dat ook in zijn lezing 'Opvoeding tot denken' uiteenzette.

⁸⁸ Freudenthal, *Studienerinnerungen* 4.

Ikzelf heb in mijn studietijd in zulk een vakstudie-maatschappij geleefd, werkelijk geleefd, mijn heele studie-leven doorgebracht in die universiteit en in dat instituut, waar die maatschappij huisvestte – men vergeve mij, dat ik mij zoo vaak bezin op een universiteit, die al in puin lag, jaren voordat de dynamietbommen er het laatste schepje oplegden. Het was een zeer hechte maatschappij, een wonderbaarlijke cel van geestelijke hygiene [sic] temidden van een politiek reeds door en door verpest studenten-leven. In mijn wetenschappelijke, algemeen-geestelijke en menselijke vorming heeft die maatschappij een groot aandeel gehad.⁸⁹

Zonder de student te willen opsluiten in een kunstmatige universitaire maatschappij (die in het beste geval ongeschikt was als voorbereiding op de grote maatschappij) zag Freudenthal ook een mogelijkheid tot algemene vorming van de student in de bindende maatschappelijke kracht van de vakwetenschap. Ook de docenten moesten hierin actief bijdragen. Het moest zeker niet een formele vereniging worden, maar van wat Freudenthal de heersende vakgeest noemde uitgaan:

Maar als die sfeer gezellige bijeenkomsten, excursies en fietstochten baart, dan hooren die er even goed bij. Dat is de radicaalste oplossing, en men moet af en toe de vrees, zich belachelijk te maken, overwinnen, om radicaal te zijn.⁹⁰

Dat hij hierbij dacht aan de uitstapjes, excursies en wandelingen zoals de Mapha die in de jaren twintig organiseerde lag voor de hand. Aan Freudenthal zou het niet liggen: in zijn inaugurele rede bij zijn aanstelling als hoogleraar beloofde hij zijn toekomstige studenten veel ‘Studium Generale’ in de hier door hem beschreven zin van het woord:

Er wordt thans veel gesproken over studium generale. Dit is een pakkend woord en te mooi, om te vergooien. Het is mijn overtuiging, dat studium generale noch een doorplechtige welsprekendheid gewijde zaak mag zijn noch een nieuw studievak, waarin tentamens behoren te worden afgelegd. Zo licht mogen wij het niet opvatten. Ik gevoel het aldus: studium generale niet naast, maar door de vakstudie; studium generale in onze gehele activiteit; studium generale als verbondenheid met al wat menselijk is. Daarvan zal ik blijik geven in een afzonderlijk college over de geschiedenis der wijskunde, dat ik mij voorstel te geven, maar evenzeer in elk uur, dat ik in en naast mijn colleges aan Uw opleiding besteed, en ik reken hierbij op Uw aller medewerking.⁹¹

In deze uitspraken waren al een beetje Freudenthals ideeën over ‘mensvorming’, en ‘de kracht van het onopzettelijke’ te proeven die hij een paar jaar later uiteenzette in zijn voordracht op de Varende Conferentie van de wvo.⁹² Hij wilde voor zijn studenten in Utrecht dezelfde “wonderbaarlijke cel van geestelijke hygiëne” schep-

89 Freudenthal, ‘Oude en nieuwe universiteiten’ 66; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 467.

90 Ibid., 68.

91 Freudenthal, *5000 jaren internationale wetenschap* 22.

92 Freudenthal, ‘De medewerkende taak van de opvoeder bij de mensvorming’; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 485. Ook in die voordracht noemde hij het anti-intellectualisme als één van de leerstellingen van het Nationaal-Socialisme.

pen als hijzelf gekend had in Berlijn. Kenmerkend voor die situatie was het ontbreken van een politieke of geestelijke grondslag, enkel de verbinding van studenten en docenten door het vak was volgens Freudenthal voldoende basis voor het vormen van een arbeidsgemeenschap, een ‘vakmaatschappij’. Impliciet ging hij hierbij van de idealistische stelling uit dat een dergelijke disciplinaire grondslag voor iedere student, docent en onderzoeker min of meer dezelfde was, of op zijn minst verenigbaar. En het was zo’n gemeenschap, waarvan hij een ongekeerde algemeen vormende waarde voor de student verwachtte. Méér algemene vorming en beschaving, dan van welk verplicht Studium Generale-college dan ook.

5.2.2 De lerarenopleiding

Een tweede belangrijk punt dat Freudenthal in zijn ‘Oude en nieuwe universiteiten’ aankaartte, was dat van de universitaire lerarenopleiding. Al voor de Tweede Wereldoorlog waren er pogingen gedaan de lerarenopleiding aan de universiteit te herzien.⁹³ Algemeen aanvaard was ondertussen de wens studenten explicieter op het leraarschap voor te bereiden. Een belangrijke kanttekening daarbij was voor velen dat dit niet ten koste mocht gaan van de vakwetenschappelijke opleiding van de toekomstige leraar en het bijbehorende aanzien. Een extra didactisch-pedagogisch element in de opleiding was welkom, maar mocht zeker niet ten koste van de academische vorming tot *wiskundige* gaan.

Nu na de oorlog het hoger onderwijs onder de loep werd genomen, werd ook de lerarenopleiding weer kritisch bekeken. Nieuw voor wiskundeleraren waren de cursussen van het MC, facultatief en vooral bedoeld om al werkende leraren van de nieuwste ontwikkelingen van de wiskunde op de hoogte te brengen en te houden. Van der Corput, bij wie het uitdragen van de wiskunde als cultuurgoed hoog in het vaandel stond, was de drijvende kracht achter deze cursussen.⁹⁴ Naast deze ontwikkelingen was er ook opnieuw aandacht voor het didactische element in de opleiding. In Utrecht was Minnaert één van de eersten die pleitte voor het bevorderen van didactische elementen in de lerarenopleiding van de exacte vakken.

De van oorsprong Vlaamse Marcel Minnaert was als Vlaams activist na het aflopen van de Eerste Wereldoorlog naar Nederland gekomen en werkte sinds 1918 in Utrecht bij de fysici W.H. Julius en L.S. Ornstein.⁹⁵ In 1937 werd Minnaert benoemd tot buitengewoon hoogleraar in de astronomie, vlak na de oorlog gewoon hoogleraar. Molenaar omschrijft hem als dé pionier van de didactiek van de natuurkunde in Nederland, betrokken bij onderwijsvernieuwers als Ligthart en mevrouw Ehrenfest. Eind jaren twintig werd hij al aangesteld als privaat-docent in de didac-

93 Voor de discussie over de lerarenopleiding in het interbellum, zie paragraaf 2.2.4.

94 Zie ook: Alberts, *Jaren van berekening*.

95 Molenaar, *De rok van het universum*; Molenaar, *Wij kunnen het niet langer aan de politici overlaten* 124.

तिक en methodiek van de natuurkunde. Tevens was hij al vanaf de oprichting actief betrokken bij de Wiskunde Werkgroep.

Naast hun gedeelde didactische belangstelling hadden Freudenthal en Minnaert ook hun politiek links georiënteerde, humanistische achtergrond gemeen. Beiden waren lid van de vwo en waren eind jaren veertig hartstochtelijk bepleiters van een ‘studieloon’.⁹⁶ Bovendien klikte het ook op sociaal vlak. In zijn oratie bedankte Freudenthal zijn vriend Minnaert als eerste van zijn nieuwe Utrechtse collega’s:

Wat mij gestreeld en hier naar toe gelokt heeft, is vooral de hartelijkheid van Uw taal geweest, Waarde Minnaert. Ik heb mij niet bedrogen: deze hartelijkheid is niet alleen een persoonlijke trek van Uw wezen, maar zij is de *genius loci* gebleken, aan wie ik zonder te aarzelen in Uw midden het verschuldigde tribuut zal betalen.⁹⁷

Met de komst van zijn nieuwe collega aan de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen zag Minnaert een mogelijke bondgenoot in zijn pogingen de vakdidactiek aan de faculteit nieuw leven in te blazen. Op 7 januari 1947 schreef hij in een brief aan Freudenthal:

Amice,
Al lang had ik je willen spreken over het onderwijs in de didactiek van de wiskunde, dat dringend verzorgd moet worden aan onze universiteit. Ik heb zelf jarenlang een college gegeven “didactiek der natuurkunde” en heb nog altijd een warm hart voor deze aangelegenheid. Tot hiertoe is in Utrecht niets gebeurd voor de didactiek der wiskunde, terwijl dit vak juist zo zorgvuldig behandeld moet worden bij het onderwijs. Dit kwam door de afkeer van elke didactische hervorming, welke Barrau en Wolff aan de dag legden.⁹⁸

Dat Minnaert voor deze kwestie bij Freudenthal op interesse kon rekenen, bleek al uit het feit dat Freudenthal nog geen vier dagen later voor het eerst een bijeenkomst van de Wiskunde Werkgroep zou bijwonen. Maar al vóór Minnaert hem op het ontbreken van een didactische component in de opleiding tot wiskundeleraar wees, had Freudenthal hierover een uitgesproken mening ontwikkeld. Net als over het onderwerp ‘Studium Generale’ was de kern van Freudenthals ideeën over de lerarenopleiding te vinden in zijn brochure ‘Oude en nieuwe universiteiten’.⁹⁹

Ook al vonden steeds meer wiskunde-studenten na hun doctoralexamen een plaats in het bedrijfsleven, de wis- en natuurkundige faculteit leidde nog steeds voornamelijk op voor het leraarschap. De universiteit moest zich volgens Freudenthal beter van deze taak bewust zijn en het onderwijs hieraan aanpassen. Meer theorie alleen, door het instellen van colleges over methodiek, didactiek, pedagogiek, en (vooral) psychologie van de puberteitsjaren, was niet voldoende. Belangrijker was het om de aankomend docent praktijkervaring op te laten doen. Een extra examen

96 Meer over ‘studieloon’ in paragraaf 5.2.3.

97 Freudenthal, *5000 jaren internationale wetenschap* 20-21.

98 Minnaert aan Freudenthal, 7 januari 1947; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 53.

99 Freudenthal, ‘Oude en nieuwe universiteiten’; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 467.

was dan ook niet meer nodig: zelfkritiek zou de echt ongeschikten in die fase van-zelf wel elimineren.¹⁰⁰

Ook moest de aanstaande leraar opgeleid worden voor de opvoedende taak die hij had. Een “prachtgelegenheid” om als opvoeder werkzaam te zijn was volgens Freudenthal de jeugdbeweging en de jeugdzorg. Dit soort activiteiten moest zonder stok achter de deur als iets vanzelfsprekends voor de studenten beschouwd worden. Duidelijk was, dat Freudenthal in het opleidingsbeeld dat hij hier schetste van een prototype ideale student uitging: een die zonder dwang en controle, met de gave tot zelfreflectie en -kritiek en een zekere passie voor onderwijs en kinderen in het algemeen vrijgelaten kon worden om zich tot pedagogisch verantwoord leraar te vormen.

De wiskundige stof die de aankomend leraar moest leren, moest gemotiveerd zijn door het doel dat ermee bereikt diende te worden. Dit betekende volgens Freudenthal heroriëntering op het programma van de middelbare school en het behandeling van deze stof vanuit een hoger standpunt, waarin de invloed van Klein op Freudenthals gedachtegoed doorklonk. Met dit uitgangspunt (‘lagere wiskunde van hoger standpunt uit’) sloot Freudenthal aan bij die uit het rapport van de vooroorlogse commissie-Verrijp.¹⁰¹ Echter, Freudenthal stelde niet alleen beperking van de stof tot schoolstof voor, iets waarin in het rapport van de commissie-Verrijp geen sprake was, maar bewuster en systematischer opleiden tot het wiskundig denken, waarbij een overzicht gegeven werd van hetgeen er in de moderne wiskunde omging.¹⁰²

Denkbekwaamheden konden volgens Freudenthal niet op dezelfde manier verworven worden als parate kennis, dus niet door zuiver passief ná-denken van de gegeven stof. Denken was een gericht proces. ‘Leren denken’ moest gebaseerd zijn op het plaatsen van de student voor problemen, die belangwekkend genoeg waren om tot het zoeken van een oplossing te prikkelen en gemakkelijk genoeg om niet te ontmoedigen. De hulp die de docent hierbij moest bieden bestond uit het organiseren van zulke problemen, het systematisch aanleren van oplossingsmethoden (aan voor dit doel geprepareerde zinvolle voorbeelden en niet door abstracte schema’s) en het aanzetten tot goed georganiseerde en bewust opgewekte zelfwerkzaamheid.¹⁰³ Laboratoriumbedrijvigheid en groepswork waren volgens Freudenthal de geschikste vorm voor de wiskundecolleges aan de universiteit.¹⁰⁴

Praktisch stelde Freudenthal het volgende voor: splitsing van de wiskunde-opleiding in een pedagogische en wetenschappelijk-onderzoekende variant. Natuurlijk kon de aankomende leraar ook nog deelnemen aan de vorming tot wetenschap-

¹⁰⁰ Ibid., 41-45.

¹⁰¹ Een voorbeeld hiervan gaf hij in 1948 in zijn ww-voordracht ‘De algebraïsche en analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde’, *Euclides* 24 (1948) 106-121.

¹⁰² Freudenthal, ‘Oude en nieuwe universiteiten’ 51-52; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 467.

¹⁰³ Ibid., 57-58.

¹⁰⁴ Deze methode had hij direct na de oorlog in Amsterdam en later in Utrecht ook voor zijn eigen colleges gebruikt. Hij noemde dit in veel brieven aan collega-wiskundigen als Hopf, Van der Corput en Rosenthal (1945); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 18, 66, 88.

pelijk onderzoeker, maar verplicht wilde Freudenthal dit niet stellen. Met dit voorstel ging hij lijnrecht in tegen dat van de commissie-Verrijp, waarin werd voorgesteld tot een optioneel extra examen onderwijsbevoegdheid *naast* het wiskundig doctoraalexamen.

Zoals gezegd werden Freudenthals ideeën uit ‘Oude en nieuwe universiteiten’ nooit gepubliceerd. Wel schreef hij eind 1947 een (waarschijnlijk voor Utrechts intern gebruik bedoeld) discussiestuk getiteld ‘Voorstellen tot reorganisatie van het Hoger Onderwijs in de Wiskunde’.¹⁰⁵ Hierin pleitte hij onomwonden voor de al in ‘Oude en nieuwe universiteiten’ omschreven tweedeling van de universitaire opleiding. Hij noemde hiervoor drie redenen.

Ten eerste was er de veranderde plaats van de wiskundige in de maatschappij en de daarmee samenhangende behoefte aan researchwiskundigen met een meer op de toegepaste wiskunde gerichte opleiding, en bovendien de kloof die er tussen de in het middelbaar onderwijs onderwezen wiskunde en universitaire (modernere) wiskunde bestond:

Door de op de universiteit gedoopte stof aan de stand van de wetenschap aan te passen, hebben wij de a.s. leraar genoodzaakt, overwegend dingen te leren, die hij niet nuttig kan toepassen, terwijl desondanks de opleiding geheel ontoereikend is om aan de behoeften van modern research te kunnen voldoen.¹⁰⁶

Ten tweede was er het tekort aan (bevoegde) leraren op het Middelbaar Onderwijs en het daarmee samenhangende gevaar van het inzetten van onbevoegde leraren of het opzetten van buiten-universitaire spoedcursussen voor leraren:¹⁰⁷

Ik kom dus tot de conclusie, dat het nodig is, de eisen aan de a.s. wiskundeleraar belangrijk lager te stellen (wat de wetenschappelijke vorming aangaat) en hierdoor de duur der opleiding te verkorten. Leerkrachten, die een (zij het dan verkorte) verantwoorde universitaire opleiding hebben genoten, moeten worden verkozen boven geheel onbevoegden.¹⁰⁸

Als laatste reden noemde Freudenthal de overlading van het universitaire onderwijsprogramma, waardoor de student geen tijd meer overhield om zich buiten zijn vak cultureel en voor zijn vak pedagogisch te bekwamen. Er moest in het programma gesnoeid worden om zo ruimte te maken voor pedagogische en algemeen culturele opleiding (Freudenthals ‘Studium Generale’).

105 Hans Freudenthal, ‘Voorstellen tot reorganisatie van het Hoger Onderwijs in de Wiskunde’, 4 december 1947, 4 pagina’s; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 475.

106 Ibid., 1-2.

107 Dat dit een reëel probleem was, bleek uit de gegevens zoals Wansink ze in 1950 beschreef: 22% van de lesgevende leraren wiskunde in 1950 hadden hiertoe geen (volledige) bevoegdheid: Joh.H. Wansink, ‘Mathematical teaching in Dutch secondary schools’, *Euclides* 26 (1950) 99-114, aldaar 111.

108 Freudenthal, ‘Voorstellen tot reorganisatie van het Hoger Onderwijs in de Wiskunde’ 2; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 475.

Praktisch gezien hield Freudenthals voorstel het volgende onderwijsprogramma in: de eerste twee jaar bestonden uit maximaal 24 uur onderwijs per week, te besteden aan het wetenschappelijke programma, voor de aanstaande leraar gevolgd door twee jaar lesgeven “onder toezien oog van een oudere paedagoog”. Gedurende die twee jaar volgde de student een dag in de week een cursus op de universiteit om zijn wiskundige “bekwaamheid [te] conserveren”. Tot slot volgde nog anderhalf jaar onderwijs aan de universiteit, waarbij er zowel aandacht was voor uitbreiding en verdieping van de stof van de eerste twee jaar, als ook voor de voortzetting van de culturele en pedagogische opleiding. Na de opleiding bleef de leraar op de hoogte van de nieuwste ontwikkelingen door het volgen van de vakantiecursussen.¹⁰⁹ Voor de researchvariant van het programma stelde Freudenthal na de eerste twee jaar een verzwaarde opleiding voor met veel nadruk op de toegepaste vakken. Hij noemde in dit voorstel geen stage of andere praktische voorbereiding op een eventuele betrekking in het bedrijfsleven.

Wat er precies met deze voorstellen gebeurd is, is niet duidelijk. Waarschijnlijk waren ze gebruikt als discussiestuk binnen de Utrechtse Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen. In maart 1948 voegde Freudenthal naar aanleiding van een onderhoud met Minnaert over deze kwestie nog enkele aanvullingen toe, maar verder bleef hij bij de inhoud van hetgeen hij eerder schreef.¹¹⁰

Wellicht vormde dit voorstel Freudenthals reactie op Minnaerts oproep voor aandacht voor de didactiek van de wiskunde binnen de universiteit. Zoals in zoveel zaken zag Freudenthal de oplossing in een radicale verandering van het systeem en niet in de invoering van een enkel college ‘didactiek der wiskunde’. Ook in *De Groene Amsterdammer* zette Freudenthal zijn pleidooi voor een specifiek op het onderwijs gerichte opleiding uiteen, waarbij hij oppriep vooral de vernieuwingsdrift niet te laten verslappen:

En de bedoeling van dit artikel is, vanuit het kabbelen in de commissies een nieuwe golfslag in het openbaar te doen ontketenen.¹¹¹

Eén van die commissies waarop Freudenthal hier doelde was de commissie-Reinink II. In 1949 gaf deze commissie een rapport uit. Ook in dit rapport werd een splitsing van de studie in een deel voor aanstaande leraren en een deel voor aanstaande researchwerkers voorgesteld. In de voorstellen in het rapport van sectie M (Wis- en Natuurkunde) van de commissie vond na drie jaar de splitsing plaats, na een voor beide richtingen gelijk kandidaatsexamen, waarna twee verschillende doctoralexamens volgden.¹¹²

¹⁰⁹ Freudenthal stelde voor eventueel de periodieke salarisverhogingen van het al dan niet volgen van deze cursussen af te laten hangen; Freudenthal, ‘Voorstellen tot reorganisatie van het Hoger Onderwijs in de Wiskunde’ 4; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 475.

¹¹⁰ Toevoeging aan het discussiestuk; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 475.

¹¹¹ Hans Freudenthal, ‘Tekort aan leraren. Gebreken aan de opleiding’, *De Groene Amsterdammer* (3 juli 1948); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1419.

¹¹² ‘Rapport van sectie M’, in: *Rapport van de Staatscommissie tot Reorganisatie van het Hoger Onderwijs* (’s-Gravenhage 1949) 335-353, aldaar 341-344.

Weliswaar was dit voorstel minder radicaal dan Freudenthals voorstel, het was toch nog te radicaal naar de mening van de leraren, die het voorstel dan ook verwierpen. Hun belangrijkste tegenargument was de angst voor een daling van de maatschappelijke waardering en positie van de leraar als de opleiding minder wiskunde zou bevatten dan die van de opleiding van de ‘research-wiskundige’. Freudenthal weerlegde dit argument:

Voor de vormende waarde (voor zover die er is) is niet de hoeveelheid stof beslissend, en van wetenschappelijke didactiek en paedagogiek kan evenzeer vormende invloed uitgaan. En wie de student niet de tijd laat om tijdens de studie ook wat algemene beschaving op te doen, schaadt de standing van de leraar op de meest efficiënte wijze.¹¹³

Ook op de door de Wiskunde Werkgroep georganiseerde weekendconferentie in 1948 zette Freudenthal zijn voorstel tot splitsing van het doctoraalexamen uiteen. Hij ontving daarop scherpe kritiek van de aanwezigen in de losbarstende discussie.

Wiskundeleraar Joh. H. Wansink (1894-1985) was een van die aanwezigen.¹¹⁴ Wansink had na het behalen van de akten KI en KV op basis van zijn uitstekende resultaten bij hoge uitzondering zónder HBS-diploma wiskunde gestudeerd in Utrecht en promoveerde er in 1931. Naast zijn lesgeven schreef hij schoolboeken, publiceerde geregeld in *Euclides* en zou later het didactische werk *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren* schrijven.¹¹⁵ Als lid van zowel de WW als WIMECOS nam hij in de jaren vijftig vaak de positie van bemiddelaar in.¹¹⁶

Zover was het in de discussie in 1948 echter nog niet. Wansink noemde in reactie op Freudenthal het argument dat researchwiskundigen en leraren elkaar door het volgen van verschillende opleidingen niet meer zouden verstaan. Volgens Freudenthal zouden veel studenten goede wiskundeleraren kunnen worden, mits ze minder wiskunde zouden hoeven leren op de universiteit.

H. Turkstra zei pas verder te willen spreken, als eerst maar de pedagogisch-didactische opleiding op hetzelfde niveau gebracht werd als dat van de wetenschappelijk-mathematische opleiding. Freudenthal geloofde dat dit snel genoeg zou gebeuren, als er nu maar mee begonnen werd. Vervolgens zette hij zijn plan in jaren studie uiteen, waarbij hij nu anderhalf jaar voor de praktijk eiste in plaats van de eerder genoemde twee jaar. Dit bleek voor de leraren echter een voorlopig onbespreekbaar voorstel. Tot slot van het verslag van de discussie in *Euclides* werd het standpunt van de leraren (uiteengezet door Wansink) als volgt weergegeven:

Tot slot houdt Dr Wansink een vurig pleidooi voor het standpunt van de leraren. Hij merkt op, dat alles afhangt van de sociale waardering voor het leraarsambt. Hij vraagt

113 Freudenthal, ‘Tekort aan leraren. Gebreken aan de opleiding’, *De Groene Amsterdammer* (3 juli 1948); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1419.

114 ‘Joh.H. Wansink’, in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs* 42.

115 Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Deel 1, II, III*.

116 Interview met Wansink in: Goffree, *Ik was wiskundeleraar* 90.

zich af, waarom een arts na zijn doctoraal niet bevoegd is zijn praktijk uit te oefenen, terwijl de leraar met het doctoraal examen de lesbevoegdheid krijgt. Hij stelt voor een “leraarsexamen” in te stellen bv. 1/2 jaar na het doctoraal. We willen echter niet worden gedéclassificeerd en we willen volkomen met de anderen samen werken. De autoriteiten willen ons echter de weg met de minste weerstand laten afleggen naar het leeraarsambt. Het zou zeer bedroevend zijn, aldus de Hr Wansink, als de leraren in hun verzet de steun van de Universiteit zouden missen. (Applaus).¹¹⁷

Het zou tot 1952 duren voordat het bij Koninklijk Besluit verplicht werd voor de aanstaande leraar om tenminste één jaar colleges in de pedagogiek, puberteitspsychologie en algemene didactiek te volgen. Ook het volgen van onderwijs in vakdidactiek en het hospiteren werd toen verplicht gesteld.

5.2.3 Studielooen

Niet alleen in hun belangstelling voor de vakdidactiek, maar ook in hun streven naar een eerlijker toelatingssysteem voor het hoger onderwijs vonden Minnaert en Freudenthal in elkaar gelijkgestemde geesten. Al in ‘Oude en nieuwe universiteiten’ beweerde Freudenthal dat er in de toekomst eerder meer dan minder academici nodig zullen zijn:

Onze maatschappij heeft academisch gevormden noodig, en alle sombere voorspellingen ten spijt zou ik willen beweren, dat wij (een behoorlijke herziening van zekere maatschappelijke gewoonten verondersteld) best ook het dubbele aantal afgestudeerden in onze maatschappij kunnen verdragen, zonder dat er van overproductie sprake hoefde te zijn. Uiteraard zullen niet allen, die zich aanbieden, voor een academische opleiding geschikte candidaaten zijn, maar in het geheel zal het peil van den gemiddelden student de basis moeten zijn voor de eischen, die wij aan hem mogen stellen.¹¹⁸

De ‘overproductie’ waarvan Freudenthal sprak, was een spookbeeld uit de jaren dertig. Ook na de Tweede Wereldoorlog overheerste de angst, dat Nederland op een blijvend lager welvaartspeil moest zien te overleven. Freudenthal echter achtte de maatschappelijke behoefte aan academici zo groot, dat hij ervoor pleitte de te stellen eisen binnen zekere grenzen op het aanbod af te stemmen. Vooral een groot gebrek aan ingenieurs voorzag hij. Wilde Europa op wetenschappelijk gebied mee blijven doen met de Verenigde Staten, dan moest er veel veranderen, te beginnen met de instelling van een rechtvaardiger toelatingssysteem, een ‘humane selectiemethode’.

In 1948 werd vanuit de vwo-afdeling Utrecht op initiatief van Minnaert een werkgroep opgericht die zich bezig hield met de ‘Recrutering en de opleiding van de Nederlandse academici’.¹¹⁹ Op 9 en 10 december 1949 sprak Freudenthal na-

117 Freudenthal, ‘De algebraïsche en analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde’, *Euclides* 24 (1948) 106-121, aldaar 120-121.

118 Freudenthal, ‘Oude en nieuwe universiteiten’ 26; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 467.

119 Molenaar, *Wij kunnen het niet langer aan de politici overlaten* 90-91.

mens deze werkgroep op het vwo-congres getiteld ‘De toelating tot het Hoger Onderwijs’. De aanbeveling van de Staatscommissie was toen al bekend: zoveel mogelijk zij die geschikt waren voor een academische studie de kans geven om te gaan studeren. Dit was volgens Freudenthal niet genoeg: niet ‘zoveel mogelijk’ van de geschikte kandidaten laten studeren, maar “voor Hoger Onderwijs geschikt intellect gans en al tot zijn recht laten komen”.¹²⁰

Voor het bepalen van geschiktheid moest volgens hem een goede ‘psychotechnische’ selectiemethode ontwikkeld worden. Dit was de eerste stap in de goede richting, die echter veel tijd en moeite zou kosten. Vervolgens moest er voor alle studenten eenzelfde stelsel van studieloon komen. Alleen zo ontstond er volgens Freudenthal een zo democratisch mogelijk toelatingssysteem, waarbij alle studenten dezelfde (financiële) ruimte hadden en niet langer afhankelijk van hun ouders waren. Dit had dan ook direct een positieve uitwerking op de algemene vorming en ontwikkeling van de student, wat weer paste binnen Freudenthals visie hierop in het kader van het Studium Generale. De ‘winst’ van Freudenthals voorstel was volgens hem groot:

Een rustige en, voor zover dit met menselijke middelen mogelijk is, onbezorgde studie voor iedereen; een zekere onafhankelijkheid van de student van zijn ouders als financiële machthebbers; de mogelijkheid voor iedere student, om deel te nemen aan het studentenleven (men zou dit dan zelfs verplicht kunnen stellen) en zich behalve wetenschappelijk ook cultureel te ontwikkelen; verder, het contact van studenten uit een gegoed milieu met leeftijdsgenoten uit lagere volksklassen; en meer algemeen de opheffing der klasse-tegenstellingen, die in de tegenwoordige studenten-maatschappij duidelijk merkbaar zijn.¹²¹

Ook hier benadrukte Freudenthal weer het belang dat hij hechtte aan deelname aan het studentenleven en culturele ontwikkeling zoals hij dat in ‘Oude en nieuwe universiteiten’ uiteenzette. Tegenwerpingen en bezwaren die voor een dergelijk plan bestonden, waren stuk voor stuk overkomelijk volgens Freudenthal: als de toelating van de studenten maar eerst als een echt probleem gezien werd, werden ook wel de middelen gevonden om ze op te lossen.

Met name Minnaert en Freudenthal zouden in de jaren vijftig blijven optreden als propagandisten voor het ‘Studieloon’. Ook in zijn latere publicaties in *De Groene Amsterdammer* en *Wetenschap en Samenleving* kwam Freudenthal geregeld terug op dit onderwerp. Naast zijn terugkerend pleidooi voor studieloon en ‘studeren voor allen’, bleef hij ook hameren op de ontwikkeling van betere selectiemetho-

120 Hans Freudenthal, ‘De recruterings der studenten. Het plan-studieloon der Afdeling Utrecht van het Verbond van Wetenschappelijke Onderzoekers’, 24 pagina’s, aldaar 6; ook verschenen in *De toelating tot het Hoger Onderwijs* Verslag van het congres te Amsterdam 9–10 december 1949, 51–74; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 743. Een beknopte samenvatting van deze tekst is het artikel: Hans Freudenthal, ‘De universiteit – voor wie?’, *De Groene Amsterdammer* (5 november 1949); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1425.

121 Freudenthal, ‘De recruterings der studenten’ 16; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 743.

den en bleef hij kritiek uiten op de daarmee samenhangende gebrekkige statistische onderzoeken naar intelligentie.¹²²

5.2.4 Hoger onderwijs: een bouwvallig parthenon of schoon schip?

In de drie hierboven geschetste discussies kwam Freudenthal steeds duidelijk met een eigen, uitgesproken standpunt. Wat hij na de bevrijding de “hoge golven van geestdrift voor een hervorming van ons universitair onderwijs” noemde, greep hij op alle mogelijke manieren aan om zijn eigen ideeën te verspreiden en openbaar te maken.¹²³ Kenmerkend voor al zijn opvattingen was zijn sociaal-democratisch uitgangspunt (‘onderwijs als recht voor allen’). Zijn onconventionele houding in zijn pleidooi voor het loslaten van de gevestigde tradities werd uiteraard vergemakkelijkt door zijn ‘niet-Nederlandse’ kijk op het hoger onderwijs.

Freudenthal leek overtuigd van de maakbaarheid van de maatschappij. Soms wekte hij daardoor een wat naïeve indruk: alsof de wereldproblematiek op te lossen was door het oprichten van leeszalen en het organiseren van wandeltochten. Maar Freudenthal was niet blind voor de realiteit, sterker nog, hij pleitte ervoor de wetenschap juist meer in dienst van die realiteit te stellen, ook als dit oppervlakkig gezien ten koste leek te gaan van ‘maatschappelijke waardering’. Om als natie mee te blijven tellen was er maar één maatstaf en dat waren de eisen die de maatschappij aan de alumni stelde en de beroepen die zij kozen. Als (potentieel) wetenschappelijk talent voor Nederland behouden moest blijven en de dreiging van leegloop van dat talent naar de Verenigde Staten afgewend moest worden, zat er niets anders op dan drastische hervormingen door te voeren:

Onze Europeesche geestelijke beschaving is een kostbaar goed, en uit mijn bibliotheek, die voor mij een essentieel onderdeel van die beschaving representeert, zou ik geen stuk willen missen. Maar bij alle geestdrift voor boeken en architectuur zou ik met mijn schatten niet in een bouwvallig parthenon willen zitten, waar het aan alle kanten tocht. Lang zullen wij, fijn beschaafde Europeanen, ons niet meer kunnen permitteeren, af te geven op een liefst tusschen aanhalingsteekens geplaatste Amerikaanse cultuur. Een groot deel Europeesche beschaving is aan romantische cultuurtheorieën ten gronde gegaan. Wij staan voor de keuze de werkelijkheid te aanvaarden – dat zijn de groote beschavingen, die in dien strijd overwonnen hebben – of, trotsch op een groot verleden, genoeg te nemen met een museumbestaan: heel het vasteland van Europa één groot Marken en Volendam, waar belangstellende Amerikaansche touristen zich rond laten leiden (zoools de Romeinen in het verbloeiende Athene deden), om de laatste uitloopers van een eerbiedwaardige “cultuurharmonie” beautiful te vin-

122 Hans Freudenthal, ‘Zwaardere eindexamens?’, *De Groene Amsterdammer* (23 sep 1950); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1435; Hans Freudenthal, ‘De rol der traditie in de wiskundige wetenschappen’, *De Nieuwe Stem* (1950) 574-589; Hans Freudenthal, ‘De dwang der denkgewoonten’, *Wetenschap en Samenleving* (1950) (deel I) 177-180, (1951) (deel II) 12-16.

123 Freudenthal, ‘Tekort aan leraren. Gebreken in de opleiding’, *De Groene Amsterdammer* (3 juli 1948); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1419.

den, en om ons, eer wij het gewaar worden, onze laatste ingenieurs weg te engageeren, terwijl wij er angstvallig voor waken, dat zij met hun handen van onze Rembrandts afblijven.¹²⁴

Freudenthal was niet blind voor de gebreken in het onderwijs. Hij wist als geen ander, hoe milieu- en financiële factoren nog steeds een democratisch ‘onderwijs voor allen’ in de weg stond. Ook al leken zijn ideeën en de ideeën van de groepen namens wie hij sprak soms wat utopisch en onbezonnen, hij hield wel degelijk rekening met de realiteit.

Met, naar eigen zeggen, bloedend hart had Freudenthal afscheid genomen van het idee, de problemen van het onderwijs van onderaf (in het lager onderwijs) aan te pakken. Hiervoor in de plaats kwam wat hij noemde de ‘realistische tactiek’: niet in het lager, maar juist in het hoger onderwijs met democratische hervormingen beginnen. Hij rekende voor:

Wie ons als utopisten doodverft, overwege eerst het volgende: in een smalle en goed te overziene sector van ons onderwijs kunnen we schoon schip maken en het beginsel “selectie volgens bekwaamheid” verwezenlijken, en wel met betrekkelijk kleine kosten. Binnen zeer korten tijd dragen de daar geïnvesteerde gelden rente: na 4-6 jaar wanneer de maatschappij kan profiteren van numeriek ongewoon sterke jaargangen van bijzonder begaafden. Het hoger onderwijs moet de eerste bres zijn; hier is de doorbraak het gemakkelijkst. Door beurzen te vragen voor alles en nog wat versplinteren we de krachten, en door nu reeds het middelbaar en ander voortgezet onderwijs in de plannen te betrekken, zullen we niets bereiken.¹²⁵

5.3 De Wiskunde Werkgroep

Aan veel van zijn collega’s, vrienden en kennissen stuurde Freudenthal een exemplaar van zijn oratie. Zo ook aan Janssen, de secretaris van de Centrale Werkgroep van de wvo. Janssen was leraar aan de afdeling voortgezet onderwijs van de Bussumse Montessorischool. Hij had een (lagere) akte voor onder andere wiskunde en was voorzitter van de ww. Freudenthal en Janssen hadden elkaar voor het eerst op de Rhederoord-conferentie in 1945 ontmoet.

Janssen schreef Freudenthal een brief, waarin hij bedankte voor de toegezonden oratie. Hij schreef dat hij zich met genoegen Freudenthals bijdrage aan de Rhederoord-conferentie herinnerde en hieruit de moed putte nogmaals een beroep op Freudenthals belangstelling voor de wvo te doen:

We zouden het nl. zeer op prijs stellen, wanneer U eens voor de Wiskunde Werkgroep van de w.v.o. een inleiding zoudt willen houden. Daar bespreken leerkrachten van

¹²⁴ Freudenthal, ‘Oude en nieuwe universiteiten’ 71; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 467.

¹²⁵ Freudenthal, ‘De recrutering der studenten’ 22; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 743. Minder dan een jaar ervoor schreef hij nog in *De Vrije Katheder* dat men met de vernieuwing van onderwijs bij het meest fundamentele, het lager onderwijs zal moeten beginnen.

moderne scholen de problemen van het vak, zowel didactische als vaktechnische. [...] Misschien kunt U eens uiteenzetten welke propedeuse noodzakelijk is met het oog op het volgen van universitair onderwijs, waarbij de wiskunde hoofd- of hulpvak is. Misschien heeft U een oordeel over de gebruikelijke methoden of ideeën voor didactische vernieuwing.¹²⁶

Ter afsluiting van zijn brief sprak Janssen nog de hoop uit dat er een vruchtbaar contact tussen Freudenthal en de leraren van de ww zou ontstaan:

Ik hoop, dat U het ook op prijs zult stellen in persoonlijk contact te komen met leraren die streven naar een moderne vorm van wiskunde-onderwijs, zodat de resultaten van een dergelijk contact niet al te eenzijdig zouden behoeven te zijn.¹²⁷

Freudenthal reageerde positief op de uitnodiging om te komen spreken en liet zich door de secretaris van de ww, H.J. Jacobs, direct inschrijven als lid van de werkgroep.¹²⁸ Freudenthal en Jacobs kenden elkaar al doordat Jacobs naast zijn baan als wiskundedocent op “Het Nieuwe Lyceum” te Bilthoven ook nog zijn wiskundestudie aan het afronden was in Utrecht.

Zo begon Freudenthals betrokkenheid bij de Wiskunde Werkgroep, doordat hem als autoriteit (‘professor’) op het gebied van het hoger onderwijs in de wiskunde naar zijn mening en ideeën over het wiskundeonderwijs op de middelbare school werd gevraagd. Freudenthal zou de daarop volgende jaren vrijwel elke maandelijkse bijeenkomst van de werkgroep bijwonen, hetgeen wel aangaf dat hij zeer zeker prijs stelde op “persoonlijk contact met leraren”.¹²⁹ De bijeenkomsten vonden afwisselend plaats in Amsterdam, Bussum, op de sterrenkundige afdeling de ‘Sonnenborgh’ bij Minnaert in Utrecht of bij mevrouw Ehrenfest thuis in Leiden.

Op het moment dat Freudenthal actief betrokken raakte bij de werkgroep, had hij feitelijk nog niets over wiskundeonderwijs gepubliceerd of op andere wijze openbaar gemaakt. Alleen in zijn lezing ‘Opvoeding tot denken’ had hij iets over het rekenonderwijs gezegd. Zijn interesse voor opvoeding en onderwijs vormden natuurlijk wel een goede voedingsbodem voor meer betrokkenheid bij het middelbaar wiskundeonderwijs. Dat hij vervolgens voor de sterk op vernieuwing ingestelde en weinig conservatieve kring van de ww van de wvo koos, lag gezien zijn eigen standpunten voor de hand.

5.3.1 Activiteiten van de Wiskunde Werkgroep

De situatie in het wiskundeonderwijs na de oorlog was er een van herstellen en inhalen van door de oorlogsjaren opgelopen achterstanden. Het leerplan van 1937 had nog nauwelijks de tijd gehad om in werking te treden. Doordat veel leerlingen in de oorlogstijd achterstand hadden opgelopen, was het niveau van de leerlingen

¹²⁶ Janssen aan Freudenthal, 10 dec 1946; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 42.

¹²⁷ Ibid.

¹²⁸ Jacobs aan Freudenthal, 22 dec 1946; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 42.

¹²⁹ Zakagenda's 1947-1950; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 97-100.

binnen een klas heel verschillend. Hierdoor was het voor de leraren moeilijk te bepalen welk niveau ze van de leerlingen konden eisen. Daarnaast waren er nog steeds de klachten over overlading van het programma. Wiskundeleraar H. Streefkerk schreef bijvoorbeeld in 1945 in *Euclides* over de naar zijn mening naar omvang en inhoud onuitvoerbaarheid van het leerplan-Beth.¹³⁰

Kortom, het klimaat was ernaar om de leerstof opnieuw kritisch te herzien. L.N.H. Bunt, conservator aan het Paedagogisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht, sprak zelfs voorzichtig van een gunstige uitwerking van de nawerkingen van de oorlog:

Niet alleen in materiële zin doet zich de nawerking van de oorlog gevoelen, ook het denken over vele onderwijsvraagstukken heeft zich er niet aan kunnen onttrekken; en in dit opzicht zou men dan misschien, bij wijze van uitzondering en heel voorzichtig, van een gunstige uitwerking kunnen spreken. Zoals men zich namelijk bij veel handelwijzen, die men vroeger vanzelfsprekend vond, thans afvraagt waartoe men aldus handelt en of een voldoende hoge waarde van het doel van de handeling wel vast staat, zo stelt men zich deze vragen ook op menig gebied van het onderwijs.¹³¹

Binnen de Wiskunde Werkgroep (waarvan ook Bunt lid was) werden dit soort kritische vragen aangaande het wiskundeonderwijs misschien wel het sterkst gevoeld en uitgesproken. Op de ww-bijeenkomsten werden door daartoe uitgenodigde sprekers (vaak leden van de werkgroep zelf) inleidingen gehouden over actuele problemen binnen het wiskundeonderwijs, waarna hierover gediscussieerd werd. Soms kwamen daarbij discussiepunten naar voren die voor een grondiger behandeling in een volgende bijeenkomst gereserveerd werden.¹³²

In 1948 vatten de leden het plan op, het complete wiskundeleerplan onder de loep te nemen en van uitwassen te ontdoen. Het doel was een voor HBS-B en gymnasium- β identiek wiskundeprogramma op te stellen, waarbij in plaats van de vormende waarde het praktische nut van de leerstof meer nadruk zou krijgen. Hiertoe werden voor de diverse onderwerpen van het leerplan (algebra, goniometrie, stereometrie en vlakke meetkunde, analytische meetkunde en beschrijvende meetkunde) commissies bestaande uit ww-leden opgericht. Freudenthal, Minnaert, Van Hiele (wiskundeleraar op het Kennemerlyceum te Bloemendaal en Freudenthals oud-student uit Amsterdam) en later ook Bunt vormden samen de algebra-commissie. Van Hiele vertelde hierover:

¹³⁰ H. Streefkerk, ‘Het leerplan voor de wiskunde op de H.B.S.’, *Euclides* 21 (1945) 30-39. Hij ondervindt hierin bijval van onder andere M. Eilander: M. Eilander, ‘Caveant consules’, *Euclides* 22 (1947) 212-221.

¹³¹ L.N.H. Bunt, *De leerstof van ons wiskundeonderwijs. Een onderzoek naar opvattingen en gebruiken dienaangaande* (Groningen 1949) 7. Dit boekwerk omvat de resultaten van een in oktober 1948 door Bunt namens het Paedagogisch Instituut te Utrecht gehouden enquête onder wiskundeleraars naar de overlading en wenselijkheid van de diverse onderdelen van het leerplan. Zie ook paragraaf 6.3.

¹³² Meer over de Wiskunde Werkgroep in: E. de Moor, ‘Didactische pioniers’, in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs* 193-206.

Er waren, vanuit de wiskunde-werkgroep van de wvo, verschillende commissies. Er was er een voor Algebra, waarin Minnaert en Freudenthal zaten. Men zocht een derde lid, maar niemand vond het prettig bij die twee professoren te zitten. Laat mij het maar doen, zei ik toen, ik durf wel tegen die twee op. Waarom niet, dacht ik erbij.¹³³

Zoals uit dit citaat blijkt, bleven zowel Freudenthal als Minnaert zelfs binnen de egalitaire, hiërarchieloze werksfeer die kenmerkend voor de ww-bijeenkomsten was, nog steeds twee ontzagwekkende professoren tegen wie door de andere leden opgekeken werd. Anderen herinnerden zich van deze eerste naoorlogse jaren vooral mevrouw Ehrenfest en Minnaert als de meest toonaangevende figuren binnen de werkgroep.¹³⁴ Toch vond Van Hiele achteraf het werken in de algebracommissie het leukste van alle commissies:

De algebra-commissie vond ik het leukst. Bij alles wat er aan leerstof werd genoemd, zeiden ze: dat is toch waanzin, moet je dat nu weer horen, ha, ha, ha. Ik genoot hoor, want ik was het daar grondig mee eens. Slechts bij een enkel ding merkte ik op dat het weggooien gevolgen had voor andere onderdelen van de leerstof. Als je dit wegdoet, ben je dat ook kwijt. Maar we konden goed met elkaar opschieten.¹³⁵

Het ontbrak de twee professoren duidelijk niet aan de wil om zonder scrupules schoon schip te maken. Ook uit de verslagen van de ww-bijeenkomsten bleek wel, dat Freudenthal en Minnaert in hun opvattingen over de invulling van het wiskundeonderwijs op dezelfde lijn zaten.

De diverse commissies gingen voortvarend te werk: vele vergaderingen en overleg tussen de commissies volgden. De werkzaamheden van de ww zouden uiteindelijk leiden tot een volledig herzien leerplan voor HBS-B en gymnasium- β , dat in 1952 voltooid werd.¹³⁶

Van de inhoud van de bijeenkomsten is weinig terug te vinden in de vorm van publicaties, correspondentie of aantekeningen. Wel is bekend dat de ww in die tijd een eigen circulaire moet hebben gehad. De enige mogelijkheden voor de ww voor publicatie waren het tijdschrift van de wvo (*Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs*) en *Euclides*. Hoewel de ww via *Euclides* het gewenste publiek beter bereikte dan door publicaties in *Vernieuwing*, was het zeker in deze jaren niet altijd even makkelijk ww-artikelen geplaatst te krijgen. De lerarenverenigingen bekeken de activiteiten van de werkgroep met de nodige argwaan. Zo bleken de leden van Liwengal nogal verbolgen over het feit dat de werkgroep zich met “dergelijke specifiek gymnasiale aangelegenheden als de analytische meetkunde” bezig hield.¹³⁷ Jacobs schreef in 1949 over de mogelijkheid van publicatie van de ww-plannen in *Euclides* aan Freudenthal:

133 Interview met Van Hiele in: Goffree, *Ik was wiskundeleraar* 122.

134 J.K. Timmer, ‘De wiskunde werkgroep na 1945’, *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 183 (1961) 185-186, aldaar 186.

135 Interview met Van Hiele in: Goffree, *Ik was wiskundeleraar* 122-123.

136 Over het ontstaan en de inhoud van dit leerplan: zie paragraaf 6.3.

137 Jacobs aan Freudenthal, 3 april 1949; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 42.

Plaatsing in Euclides zou bovendien moeilijkheden gaan veroorzaken, want zowel Liwenagel als WIMECOS vinden het niet goed dat de wiskunde werkgroep veel in Euclides plaatst. Uit alles blijkt dat zij een beetje bevreesd beginnen te worden over onze activiteit.¹³⁸

Voelden de lerarenverenigingen de werkgroep als een bedreiging voor hun vak? Wansink, die niet alleen betrokken was bij de ww, maar later ook bestuurslid van WIMECOS werd, karakteriseerde de door hem ervaren tegenstelling als volgt:

De opvattingen van die beide groepen stonden aanvankelijk diametraal tegenover elkaar. Achteraf noem ik ze “conservatief” voor wat WIMECOS betrof, “revolutionair” ten aanzien van de Wiskundewerkgroep. Ik heb in die strijd der meningen vrijwel steeds een tussenpositie ingenomen, wat tot gevolg had dat ik in de conservatieve hoek als te vooruitstevend, [sic] in de vooruitstrevende hoek als te conservatief werd beschouwd.¹³⁹

Toch kreeg de ww wel ruimte in *Euclides* om in 1948 het door hen georganiseerde conferentie-weekend aan te kondigen, het eerste van een lange reeks herfst-conferenties.¹⁴⁰ Het was door het organiseren van deze jaarlijkse conferentie-weekenden en de bemiddeling van leraren als Wansink dat de ww uiteindelijk meer aanzien en bekendheid onder de wiskundeleraars zou verwerven.

5.3.2 ‘De algebraïsche en analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde’

Voor *f6*– konden alle belangstellenden zich inschrijven voor de twee dagen durende conferentie in november 1948. Maar liefst 48 deelnemers, meest niet-leden van de werkgroep, kwamen op 13 en 14 november naar het Maarten-Maartens-Huis te Doorn. Onder voorzitterschap van Freudenthal werd er geluisterd naar en gediscussieerd over de door Bunt, Freudenthal en Van Hiele gehouden lezingen. Een verslag van deze lezingen, de discussies en een lijst van alle deelnemers werden in *Euclides* gepubliceerd. Onder de deelnemers waren behalve de sprekers onder meer aanwezig: mevrouw D. van Hiele-Geldof, Jacobs, Janssen, Streefkerk, Timmer, Turkstra, Vredenduin en Wansink. Mevrouw Ehrenfest was door ziekte afwezig. Speciaal als vertegenwoordiger van Liwenagel was J.E. Schrek gekomen.¹⁴¹

Ook in *Vernieuwing* verscheen een uitgebreid verslag van deze weekendconferentie. De ww was de eerste werkgroep, die gehoor gaf aan de oproep van de wvo aan haar werkgroepen, om jaarlijks een weekend te organiseren, “teneinde de problemen in ruimere kring te belichten”.¹⁴² Dit doel had de ww ruimschoots behaald:

¹³⁸ Ibid.

¹³⁹ Interview met Wansink in: Goffree, *Ik was wiskundeleraar* 90.

¹⁴⁰ ‘Wiskunde werkgroep der w.v.o.’, *Euclides* 24 (1948) 56. Dezelfde aankondiging staat ook in *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* (1948) 63.

¹⁴¹ ‘Het conferentie-weekend op het Maarten-Maartens-huis te Doorn georganiseerd door de Wiskunde Werkgroep der w.v.o.’, *Euclides* 24 (1948) 81-133.

¹⁴² ‘Weekend-conferentie uitgaande van de Wiskunde Werkgroep der wvo’, *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 7 (1948) 134-136, aldaar 134.



Groepsfoto van de deelnemers van de weekendconferentie van de Wiskunde Werkgroep (1948), met onder andere: Bunt (vooraan, links), Wansink (vooraan, derde van links), Freudenthal (vooraan, vijfde van links), J.R. Janssen (vooraan, zesde van links), Vredenduin (een na achterste rij, tweede van rechts) en mevr. Van Hiele-Geldof (tweede rij, derde van rechts).

Veel deelnemers, in totaal hadden zich 53 personen opgegeven, verzochten ons van dergelijke conferenties een traditie te maken. Het was ook buitengewoon verheugend zo'n grote belangstelling te ondervinden uit de meest uiteenlopende kringen. Alle confessionele richtingen waren vertegenwoordigd.¹⁴³

Freudenthal beschouwde in zijn lezing, getiteld 'De algebraïsche en analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde', de op de middelbare school behandelde algebra van hoger standpunt uit. Vanuit het standpunt van de hogere wiskunde gezien vormde het getalbegrip waarmee lagere schoolleerlingen op de middelbare school kwamen een nogal primitieve grondslag. Om dit in te zien moest de leerling volgens Freudenthal geleerd hebben problemen te zien en te zoeken, waar voor hem oppervlakkig gezien geen problemen leken te zijn. Ook in de geschiedenis van de wiskunde had het lang geduurd voordat men bijvoorbeeld de rekenwetten als bewijsbare stellingen beschouwde.

Het principe van volledige inductie bracht het natuurlijke getal, de rekenoperaties en de rekenwetten voort. Eigenlijk was het eenzelfde principe als hetgeen je als 'ezelsbruggetje' gebruikte bij het uitleggen van bijvoorbeeld de tafels van vermenig-

¹⁴³ Ibid., 134.

vuldiging: de volgende uitkomst werd berekend door optelling bij de vorige uitkomst. Het wezenlijke verschil tussen de methode van de wiskundige en die van het kind zat volgens Freudenthal in de meer beknopte en algemene wiskundige notatie:

U zult vragen: “Wat hebben we aan deze subtiliteiten in het onderwijs?” En u kunt deze vraag uitbreiden, door alles wat u op de universiteit als voorbereiding tot “de klas” moet leren, en bloc te verwerpen. Ik ben er van overtuigd, dat deze geesteshouding onjuist is. Ik meen, dat alle didactische problemen alleen bevredigend kunnen worden opgelost, wanneer men het meest elementaire telkens weer doordenkt vanuit hoger standpunt (waarbij ik dan toegeef, dat dit hoger standpunt niet altijd het wiskundige, maar vaak ook het pedagogisch-psychologische is).¹⁴⁴

Hier bracht Freudenthal een belangrijke nuance aan in zijn visie op het principe ‘lagere wiskunde van hoger standpunt uit’ met betrekking tot de lerarenopleiding. Dit hogere standpunt hoefde zijns inziens niet per se een *wiskundig* hogere standpunt te zijn. De tot voor kort overheersende opvatting dat wat men goed geleerd had, men ook zonder bezwaar goed zou kunnen onderwijzen, deelde Freudenthal niet: ook pedagogisch-psychologische overwegingen waren van belang bij het bepalen van een methode.

Vervolgens vertelde hij in zijn voordracht over één van zijn zoons, aan wie hij het aftrekken van negatieve getallen uit probeerde te leggen. ‘Min-min is plus’ vond hij geen goede verklaring voor een kind:

Gelukkig bleef mijn zoontje volharden en dwong mij na te denken. En toen liet ik hem een tafel opmaken, die hem aan zijn eerste jaren lagere school moest doen denken, nl:

$$5-2 = 3$$

$$5-1 = 4$$

$$5-0 = 5$$

$$5-(-1) = 6$$

$$5-(-2) = 7$$

$$5-(-3) = 8$$

Het middel was afdoende.¹⁴⁵

Als pedagoog optredend had hij hier onbewust een mathematisch bewijs voor $a-(-b)=a+b$ geconstrueerd en had hij dit bewijs vervolgens getransformeerd in de taal en de sfeer van het eerste algebraonderwijs. Hierbij had hij volgens eigen zeggen niet meer dan het strikt nodige prijsgegeven van de exactheid van de hogere wiskunde, door de volledige inductie te vervangen door een didactische. Dit was volgens Freudenthal een fundamenteel pedagogisch beginsel in de schoolwiskunde:

Het doel van elk bewijs is helderheid van inzicht in een structuur, en de verscherping van exactheids-eisen mag enkel het gevolg zijn van het doorzien van problemen, die

¹⁴⁴ Freudenthal, ‘De algebraïsche en analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde’, *Euclides* 24 (1948) 106-121, aldaar 108.

¹⁴⁵ *Ibid.*, 109.

de helderheid hebben vertroebeld. [...] We moeten nu niet de historische ontwikkeling klakkeloos in onze didactiek overnemen, maar de lijn vanuit de hogere wiskunde weer terugverlengen, om de juiste didactische methoden te vinden.¹⁴⁶

Freudenthal hechte bij het vinden van een juiste aanpak uiteindelijk dus meer waarde aan de kennis van de bijbehorende hogere wiskunde als hulpmiddel dan aan de historische ontwikkeling van die wiskunde. Uitgaan van de ontwikkeling van het vak (het zogenaamde historisch-genetische principe) kon volgens hem wel bijdragen aan het vinden van een juiste aanpak, maar hoefde daarin niet doorslaggevend te zijn.

Vervolgens liet Freudenthal in zijn voordracht aan de hand van voorbeelden uit het algebraonderwijs zien wat hij bedoelde. Zo was er het probleem van de introductie van reële getallen. Door wortelvormen te benaderen in bijvoorbeeld meetkundig verband (op de “historisch eerbiedwaardige methode, zoals reeds de Babyloniërs kenden”) kregen ze voor de leerling als getallen ‘bestaansrecht’. De primitieve voorstelling van de reële getallen als oneindige decimaalbreuken was voor de leerling voldoende om naïef mee te rekenen. De snede van Dedekind als grondslag van de reële getallen daarentegen was een te gekunstelde methode en hoorde niet thuis op de middelbare school.

Volgens Freudenthal was het rekenen met oneindige decimaalbreuken vanuit wiskundig standpunt volkomen verantwoord. Een oneindige decimale breuk was immers ook een reëel getal dat slechts bij benadering bekend was, zij het dan met elke benadering die je ooit kon eisen. Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen kon zonder bezwaar volgens de regels van de lagere school gedaan worden (mits je zeker wist dat een decimale breuk niet geheel uit nullen bestond).

Eén punt wilde Freudenthal hier, maar ook in het onderwijs, echter niet verdoezelen: ook al kon een correctie van een decimale benadering nooit meer dan twee eenheden van de laatst bewerkte plaats te boven gaan, dit betekende niet dat de voorlaatste plaats “door het vlakgom gespaard” bleef. Immers, bij een getal dat op een lange rij negens uitging, kon een kleine fout de hele decimaalbreukontwikkeling omver werpen. Doordat het getallencontinuüm niet discreet ontbonden kon worden, moesten verschillende decimaalbreuken van de vorm

$$a_0, a_1 \dots a_n 999 \dots \quad \text{en} \quad a_0, a_1 a_2 \dots (a_n + 1) 000 \dots$$

met elkaar geïdentificeerd worden. Toch vroeg Freudenthal zich af of het nodig was, het naïeve geloof van de leerlingen in (het rekenen met) decimaalbreuken aan het wankelen te brengen:

Theorieën, zoals die der reële getallen, die uitgevonden zijn, om aan een critiek het hoofd te bieden, kunnen alleen dan door een leerling goed worden begrepen, wanneer van te voren [sic] dezelfde kritische houding in hem wakker wordt geroepen, waaraan de theorie haar oorsprong dankt. Ook als de leerling hiervoor toegankelijk is, blijft de

¹⁴⁶ Ibid., 110.

vraag naar het nut ervan nog open. Dat neemt niet weg, dat men wel in het onderwijs het feit mag vermelden, dat een reëel getal twee verschillende decimaalbreuk-ontwikkelingen kan bezitten.¹⁴⁷

Er hoefde volgens Freudenthal dus niet koste wat kost aan de hogere wiskunde verantwoording afgelegd te worden in het wiskundeonderwijs. Dergelijke didactische ‘compromissen’ met betrekking tot de hogere theorie waren aanvaardbaar, als ze een pedagogische gegronde reden hadden.

Freudenthal vervolgde zijn voordracht door te stellen, dat de methoden van het middelbaar en hoger onderwijs in elkaars verlengden horen te liggen: “dit ten gerieve van de jongen, die gaat studeren, en van de doctorandus, die gaat onderwijzen”.¹⁴⁸ Hij liet vervolgens zien dat, door de op de middelbare school gebruikte taal aan die van de moderne wiskunde aan te passen, uit de hier geschetste naïeve methode op een logische manier tot de hogere wiskunde (de definitie van het reële getal als klasse van equivalente fundamenteelrijen van rationale getallen) kon worden gekomen.

Naast deze analytische visie op het getalbegrip, presenteerde hij ook een algebraïsche. De werkwijze van de schoolwiskunde was volgens Freudenthal over het algemeen formeel algebraïsch. Dat wilde zeggen, de leerling zag termen als $\sqrt{2}$ slechts als symbool waarmee je zo rekende dat zijn kwadraat twee was. Het feit dat $\sqrt{2}$ een grootte had, kon dan verwaarloosd worden. Freudenthal vermoedde zelfs, dat de vereiste routine in de aan te leren bewerkingen juist door dit kunnen-vergeten van minder formele elementen kon worden verkregen.

Of deze instelling op de middelbare school de juiste was, moest wederom vanuit hoger standpunt bepaald worden. Freudenthal liet zien dat dit naïeve, formele rekenen een goede voorbereiding was op de formele methoden zoals die er meer in de wiskunde waren (vergelijk dit geval met de formele opvatting van oplossingen van algebraïsche vergelijkingen zoals gebruikt in de theorie der lichamen) en tevens gezien vanuit een hoger standpunt van exactheid geheel verantwoord was.

Op deze formele manier zou je op de middelbare school ook reeds de complexe getallen in kunnen voeren. Hier was Freudenthal echter op tegen:

Wil de leerling er de zin van vatten, dan zou men eerst zijn naïeve vertrouwen in de onfeilbaarheid van de formele methoden grondig moeten doorzeven – met misschien als gevolg, dat hij het geloof niet alleen verliest in i maar ook nog in $\sqrt{2}$ verliest. Zonder deze kritische houding is de waarde van al die finesses op zijn minst problematisch. Waarom zou men ook in het schoolonderwijs hoger eisen van exactheid stellen, wanneer men de imaginaire getallen invoert, dan bij het invoeren der gehele getallen, der gebroken getallen, der worteluitdrukkingen en der reële getallen? ¹⁴⁹

¹⁴⁷ Ibid., 114.

¹⁴⁸ Ibid., 114.

¹⁴⁹ Ibid., 119.

Tot slot vatte Freudenthal zijn boodschap aan de wiskundeleraren nog eens krachtig samen:

Ik zeg u dit niet, om uw wetenschappelijk geweten in slaap te sussen. Ik wil het veel-
eer wakker schudden. Echter niet, om aan u te vragen, dat u naast een slordige school-
wiskunde ook nog een boven elke blaam verheven hogere wiskunde zoudt beoefenen.
Het doel van uw bekendheid met hogere wiskunde moet veeleer zijn, een vruchtbare
synthese te kunnen zoeken – vruchtbaar zowel ten bate van het onderwijs als ook ten
bate van de wetenschap.¹⁵⁰

Streefkerk opende de op Freudenthals lezing volgende discussie met de vraag, in hoeverre de leraren op deze manier op steeds modernere ontwikkelingen in de hogere wiskunde moesten teruggrijpen. Waar hield het op? Freudenthal greep deze vraag onmiddellijk aan om zijn standpunt omtrent de invulling van de lerarenopleiding aan de universiteit te kunnen verkondigen. In het gezelschap van zoveel leraren ontaardde dit in een levendige discussie over de lerarenopleiding.¹⁵¹

Freudenthals lezing vormde de ‘hogere onderwijs’-component van de drie lezingen op de weekendconferentie. Hij richtte zich in zijn benadering van het wiskundeonderwijs dan ook op de wiskunde voor die leerlingen die in het hoger onderwijs weer met wiskunde in aanraking zouden komen. Bunts lezing, getiteld ‘De keuze van de leerstof bij het onderwijs in de wiskunde’, vormde de ‘onderzoeks’-component op de conferentie. Hij benadrukte de grote lacune die er in Nederland bestond op het gebied van (het delen van) praktijkervaringen door leraren. Er was volgens hem nog te weinig bekend over ervaringen met leerstof in de klas om tot een definitieve keuze en invulling van het programma te kunnen komen. Pas als leraren ervaringen uitwisselden en publiceerden om aan de hand daarvan criteria te ontwikkelen, konden ze met de zo verworven kennis tot een doordachte invulling van het wiskundeonderwijs komen.¹⁵²

Van Hieles lezing, getiteld ‘Een poging om de richtlijnen op te stellen voor een didactiek der wiskunde’, kon tenslotte worden beschouwd als de ‘praktijk’-component van het weekend. Hij gaf in zijn betoog richtlijnen, aanwijzingen en vragen aan die bij het totstandkomen van een praktische en verantwoorde wiskundedidactiek konden helpen. Hierbij ging hij uit van het doel dat met het onderwijs beoogd werd en de manier waarop dit het beste en makkelijkste bij de leerling bereikt kon worden.¹⁵³

Uit de diverse discussies na de lezingen bleek duidelijk hoeveel meningsverschillen er onder de leraren leefden. Zo was er de haast klassieke discussie tussen voor- en tegenstanders van de axiomatische opbouw van het meetkundeonderwijs in de lagere klassen en een discussie over de kwestie in hoeverre het kwaad kon, de leerling iets tegen zijn wil te laten leren.¹⁵⁴ Ook Freudenthal, voorstander van de afschaffing van

150 Ibid., 119.

151 Voor een beschrijving van deze discussie, zie paragraaf 5.2.2

152 L.N.H. Bunt, ‘De keuze van de leerstof bij het onderwijs in de wiskunde’, *Euclides* 24 (1948) 83-105.

153 P.M. van Hiele, ‘Een poging om de richtlijnen op te stellen voor een didactiek der wiskunde’, *Euclides* 24 (1948) 122-133.

154 Ibid., 131.

de beschrijvende meetkunde op de HBS, en Wansink, fervent voorstander van handhaving van dit vak, raakten hierover nog verwickeld in een publiekelijke discussie.¹⁵⁵

Hoe divers en gemêleerd het deelnemerspubliek ook mocht zijn, de goede sfeer onder de deelnemers leed hier niet onder. Ter illustratie van die sfeer stond in het verslag van het weekend in *Vernieuwing*:

’s Avonds speelden de heren Leujes en Reckendorf een duo voor viool en altviool van Mozart. Later samen met Dr van Tol een trio van Telemann voor piano, viool en altviool. Het was een bewijs van de hechte band onder de deelnemers, dat deze heren, die elkaar nooit eerder hadden ontmoet, aan deze avond een gezellig muzikaal tintje gaven.¹⁵⁶

Met dankzeggingen voor de goede organisatie van deze “buitengewoon geslaagde conferentie” werd het weekend afgesloten.¹⁵⁷

5.3.3 ‘De wiskunde voor niet-mathematische richtingen’

In navolging van het grote succes in 1948, organiseerde de werkgroep een jaar later op 5 en 6 november wederom een weekendconferentie onder leiding van Freudenthal. Als centraal onderwerp voor de conferentie was dit keer gekozen voor ‘De wiskunde voor niet-mathematische richtingen’. Naast aankondigingen in *Vernieuwing* werd de conferentie ook in *Euclides* aangekondigd:

Dit onderwerp zal belicht worden van algemene, van paedagogische en van niet-mathematische zijde, door de heren Dr. F. van der Blij, leraar aan het Gem. Gymnasium te Breda, P.J. van Albada, leraar aan het Lyceum voor Montessori-onderwijs te Rotterdam en H.J. Struik, zenuwarts te Deventer, terwijl Prof.Dr. H. Freudenthal, evenals verleden jaar, bereid is gevonden de algemene leiding op zich te nemen.¹⁵⁸

De redactie van *Euclides* wilde dit keer echter noch de gehouden lezingen, noch een verslag van de conferentie publiceren. Slechts een korte verwijzing naar het verslag in *Vernieuwing* werd opgenomen.¹⁵⁹ Naast dit verslag werd in *Vernieuwing* alleen de voordracht van Van Albada in zijn geheel afgedrukt.¹⁶⁰

155 Freudenthal, ‘De algebraïsche en analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde’, *Euclides* 24 (1948) 106-121, aldaar 121.

156 ‘Weekend-conferentie uitgaande van de Wiskunde Werkgroep der wvo’, *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 7 (1948) 134-136, aldaar 135.

157 Ibid., 136.

158 Aankondiging in: *Euclides* 25 (1949) 36. Van der Blij zou in de jaren vijftig als vervanger van Bockwinkel naar Utrecht komen.

159 ‘Tweede conferentieweekend uitgaande van de wiskunde werkgroep der wvo’, *Euclides* 25 (1950) 172. Streefkerk, redacteur van *Euclides*, wilde in eerste instantie niet meer dat de ww in *Euclides* publiceerde. Hij kwam hier later op terug en deelde Jacobs mee, met Wijdenes over een eventueel opnemen van een kort verslag te spreken. Van Albada’s voordracht zou uiteindelijk pas drie jaar later als enige van de voordrachten in *Euclides* verschijnen: P.J. van Albada, ‘De wiskunde voor de niet-mathematische richtingen’, *Euclides* 28 (1952) 1-11. Zie ook de correspondentie tussen Freudenthal en Jacobs, 11 november 1949; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 42.

160 ‘Tweede conferentie-weekend, georganiseerd door de wiskunde werkgroep’, *Vernieuwing van Op-*

Ook deze conferentie werd een succes: 50 deelnemers kwamen naar het Maarten-Maartenshuis te Doorn. Anders dan tijdens het vorige weekend lag het accent van de lezingen en discussies minder op het wiskundeonderwijs. Zo had Van der Blij het in zijn lezing ‘Wiskunde in de cultuur’ over de samenhang en strijd van wiskunde en religie in de cosmologie. Struik behandelde in zijn lezing ‘De waarde van de wiskunde voor de niet-mathematicus’ zijn methode waarbij hij met wiskundige figuren inzichten op ander terrein duidelijk kon maken. Van Albada (1905-1997), ww-lid van het eerste uur, ging in zijn voordracht ‘De wiskunde voor niet-mathematische richtingen’ als enige in op de situatie in het onderwijs. Hij hekelde de eindexamendressuur, die aan de inhoud van de leerstof jaarlijks een nieuwe lading nutteloze puzzel-sommen toevoegde waarop de volgende eindexamenklas weer getraind moest worden. Hij pleitte er in de onderbouw voor, het accent bij de keuze van de leerstof op de behoeften van de leerling te leggen. Daarbij moest in de gaten gehouden wat voor welke leeftijd van de leerlingen psychologisch het beste was. In de bovenbouw kwam het accent dan meer op de behoeften van de maatschappij te liggen. Voor de α - of A-richting zou dit bijvoorbeeld de invoering van statistiek in het programma kunnen betekenen. Vervolgens vertelde Van Albada over zijn positieve ervaringen met wiskundeonderwijs op een Montessori-lyceum.¹⁶¹

In de discussie die op zijn lezing volgde stelde Freudenthal voor, drie categorieën leerlingen te onderscheiden: zij die eigenlijk een volledige wiskundeopleiding zouden moeten hebben, zij voor wie de wiskunde zeker praktische waarde had en voor wie de algebra het belangrijkste was en degenen die alleen wiskunde studeerden om de culturele waarde. De moeilijkheid zat in het tijdig vaststellen van de voor de leerling juiste richting.¹⁶² Een ‘wiskundeloos’ middelbaar onderwijs zoals hij dat in zijn lezing ‘Opvoeding tot denken’ nog voorstelde, noemde hij hier niet meer. De drie jaar ww-bijeenkomsten die hij nu bijgewoond had, hadden hem wellicht overtuigd van de mogelijkheid van ‘wiskunde voor allen’.

5.3.4 De wiskunde werkgroep van Freudenthal

In 1987 schreef Freudenthal zich niets meer van zijn eerste jaren bij de wiskunde werkgroep te herinneren:

Mogelijk was de eerste bijeenkomst die ik bijwoonde die op 11 januari 1947 in het Montessorilyceum in de Lairessestraat in Amsterdam (ik woonde toen nog in die stad), maar ik herinner me er niets van, evenmin als van de bijeenkomsten daarna.¹⁶³

voeding en Onderwijs 8 (1949) 174-176; P.J. van Albada, ‘De wiskunde voor niet-mathematische richtingen’, *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 8 (1949) 154-159.

¹⁶¹ P.J. van Albada, ‘De wiskunde voor niet-mathematische richtingen’, *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 8 (1949) 154-159.

¹⁶² ‘Tweede conferentie-weekend, georganiseerd door de wiskunde werkgroep’, *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 8 (1949) 174-176.

¹⁶³ Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 343.

Toch moest hij een actieve rol binnen de werkgroep hebben gespeeld. Uit de verslagen van de weekendconferenties bleek hij telkens de algemene leiding op zich te hebben genomen. Ook aarzelde hij niet om zich te mengen in de discussies: haast in elk discussie-verslag werd zijn naam genoemd. Als professor werd hij gevraagd de leerstof van ‘hoger standpunt uit’ te belichten tijdens de eerste conferentie. Dat hij ook binnen de sfeer van de ww-bijeenkomsten respect en aanzien genoot, bleek wel uit Van Hieles herinneringen aan het commissiewerk.

De combinatie van zijn enthousiaste inzet voor de goede zaak, zijn op vernieuwing ingestelde persoonlijkheid en het aanzien dat hij als wetenschapper genoot, zullen ervoor gezorgd hebben dat Freudenthal in februari 1950 de taak van Janssen als voorzitter van de ww overnam.¹⁶⁴ Deze geruisloze overdracht markeerde voor Freudenthal het begin van een periode waarin wiskundeonderwijs op de middelbare school een prominente plaats binnen Freudenthals interesses en werkzaamheden zou gaan innemen.¹⁶⁵ Het tijdperk waarin de ww bekend zou worden als ‘de Wiskunde-Werkgroep van Freudenthal’ was hiermee aangebroken.¹⁶⁶

164 Jacobs aan Freudenthal, 27 feb 1950; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 42; Wansink, ‘De Wiskunde-Werkgroep van de w.v.o.’, *Euclides* 28 (1953) 197-205, aldaar 199.

165 Vanaf 1950 werd (kritiek op) het wiskundeonderwijs ook een terugkerend onderwerp in Freudenthals artikelen in *De Groene Amsterdammer*. Voorbeelden zijn: ‘Zwaardere eindexamens?’ (23 september 1950); ‘Practische rekenkunde’ (24 oktober 1950); ‘En nu ...de wiskunde’ (2 december 1950); ‘De populariteit der wiskunde’ (datum onbekend); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 1435, 1436, 1439, 491.

166 Morsch, *Met de moed van de hoop* 222.

HOOFDSTUK 6

Van roepende aan de zijlijn naar autoriteit

Ik heb het altijd leuk gevonden om tot een gehoor te spreken; een college, een voordracht, een tafelspeech, leuke dingen. Ik kom als een acteur over, hè?

Hans Freudenthal in 'Hans Freudenthal, tussen de bergen en de zee', 1986¹

Spreken in het openbaar ging Freudenthal gemakkelijk af.² Hij moest wel een heel gegronde reden hebben, wilde hij niet op een uitnodiging ingaan om voor een vereniging of organisatie zijn mening en ideeën te verkondigen. Midden jaren vijftig zorgden deze talloze voordrachten, lezingen en bijbehorende publicaties er niet alleen voor dat Freudenthal bekend kwam te staan als een wiskundige met een meer dan gemiddelde interesse voor onderwijs- en opvoedkundige zaken, maar tevens dat hij geleidelijk aan als een zekere autoriteit op dat gebied gezien werd.

Dit ging niet van de ene op de andere dag. Het was ook niet alleen Freudenthals eigen activiteiten die dat bewerkstelligde: hij had daarbij het tij mee. Direct na de oorlog was in Nederland de geest tot vernieuwing het grootst. Begin jaren vijftig was alles weer min of meer in vertrouwde banen gekomen. Ook binnen de wiskunde was dat het geval: de oprichting van het Mathematisch Centrum was er een voorbeeld van. In het wiskundeonderwijs ging het wat behoedzamer. Vijf jaar na de bevrijding drong langzaam maar zeker ook daar het besef door, dat veranderingen onvermijdelijk waren en wonnen vernieuwende ideeën terrein. Freudenthal was hoopvol gestemd over deze vernieuwingen:

Ik heb de indruk, dat er in geen vak zoveel aan pedagogiek en didactiek wordt gedaan als in het onze. Wanneer ik b.v. zie, hoe in de werkgroep-wiskunde van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs maand aan maand soms hele zondagen over de problemen van het wiskundeonderwijs wordt gediscussieerd, door een groot aantal leden, die daar lange reizen voor over hebben, dan voel ik me elke keer gesterkt in de overtuiging, dat we de goede kant op gaan. Want het besef, dat er veel te verbeteren valt, is er, en de voorstellen dienomtrent zijn zeer concreet. De tirades over de heerlijke wiskunde, waarmee je zo prachtig het verstand kunt

- 1 Jansen, Vess, 'Hans Freudenthal, tussen de bergen en de zee', *Ballonnen en brood. Utrechtse portretten* 101-107, aldaar 106.
- 2 Bij het samenstellen van deze en volgende paragrafen zijn gegevens ontleend aan de volgende werken: Van Berkel, *Dijksterhuis*; Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans*; De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde*; Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Delen I, II, III* en de jaargangen *Euclides* 26-32 (1950-1957).

scholen, zijn verstomd, sinds de wiskunde eenvoudig een bittere noodzaak is gebleken, en juist die onderdelen van het programma, die lange tijd beschouwd werden als tuchtmiddel, om jeugdige hersenen in te plooiën, worden nu het scherpst gecritiseerd.³

De activiteiten van de ww werden nu ook door steeds meer leraren serieus genomen, iets dat alleen al bleek uit de grote opkomst van leraren en vertegenwoordigers uit het onderwijs op de jaarlijkse weekendconferenties. In de loop van de jaren vijftig publiceerden met grote regelmaat leden van de werkgroep in *Euclides* en steeds meer leden van de voorheen toch wat meer behoudende lerarenverenigingen WIMECOS en LIWENAGEL werden lid van de werkgroep. Was de ww in 1946 begonnen met slechts 20 leden, in 1953 waren dit er al 128.⁴ Zo veranderde de Wiskunde Werkgroep in de jaren vijftig van een revolutionair, en daardoor enigszins elitair, clubje tot een gerespecteerde en gewaardeerde partij in de discussie omtrent de vernieuwingen in het wiskundeonderwijs, met zelfs vanaf 1952 een eigen maandelijks mededelingenblad.

Ook de leden van de werkgroep beschouwden zichzelf niet langer als eenzame vechters voor vernieuwing. Freudenthal schreef in een verslag ‘Onderwijsvernieuwers bijeen’, over een onderwijsvernieuwersweekend dat was georganiseerd door een aantal werkgroepen van de wvo:

Met de “onderwijsvernieuwers” in het opschrift heb ik nu niet alleen de w.v.o.-leden bedoeld – het zou aanmatigend zijn, deze titel voor hen te reserveren. Overal in den lande gist het in het onderwijs. Nieuwe wegen worden gezocht, verkend en begaan. Een grote lijn begint zich af te tekenen. Vaak ontbreekt nog het contact tussen voortrekkers, die het in dezelfde richting zoeken. De Amersfoortse conferentie leek dan ook soms op een jaarbeurs voor onderwijsvernieuwing, druk bezocht door inspecteurs, vertegenwoordigers van lerarenorganisaties, rectoren, directeuren en leraren.⁵

De kroon op de vernieuwende initiatieven in de jaren vijftig vormde de totstandkoming van het nieuwe wiskundeleerplan.⁶ Ook al verliep de samenwerking tussen ww en lerarenverenigingen niet altijd even soepel, toch zou er een leerplan ontstaan waarin uiteindelijk alle partijen zich konden vinden.

In de jaren vijftig publiceerde Freudenthal met steeds grotere regelmaat over wiskundeonderwijs. Verscheen er in de jaren veertig nog maar een enkel artikel op dat gebied van zijn hand, in 1956 alleen al waren het er vijf, waarbij ook nog zijn didactisch getinte artikelen in dag- en weekbladen opgeteld zouden moeten worden. Dit aantal ging overigens niet ten koste van zijn wiskundige publicaties.

3 Hans Freudenthal, ‘En nu ... de wiskunde’, *De Groene Amsterdammer* (2 december 1950); RANH, Papers of Hans Freudenthal, inv.nr. 1439. Met die “tuchtmiddelen” had Freudenthal waarschijnlijk de logisch-deductieve opzet van de Euclidische meetkunde op het oog.

4 Wansink, ‘De Wiskunde-Werkgroep van de w.v.o.’, *Euclides* 28 (1953) 197-205, aldaar 198.

5 Hans Freudenthal, ‘Onderwijsvernieuwers bijeen’, *De Groene Amsterdammer* (24 november 1951); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1453.

6 Voor een beschrijving van de totstandkoming van dit leerplan zie paragraaf 6.3.

Freudenthal spreekt tijdens de opening van de 'Boothstraat 1c' (1958).



Dat Freudenthal door het onderwijsveld steeds meer als deskundige op het gebied van het wiskundeonderwijs beschouwd werd, bleek onder meer uit het feit dat hij in juni 1956 door de redactie van *Euclides* uitgenodigd werd om vaste medewerker te worden. Hij ging hier “met zeer veel genoegen” op in.⁷ Freudenthal hechtte veel waarde aan het goede contact dat hij juist met de lerarenverenigingen had opgebouwd. Zo sloeg hij een uitnodiging om te spreken voor de Nederlandse Onderwijzers Vereniging in dezelfde tijd af. Hij schreef liever samen te werken met de lerarenverenigingen, aangezien zij de meerderheid der leraren vertegenwoordigden.⁸ Dat ‘meerderheidsaspect’ strookte met zijn overtuiging dat het soms meer effect had als je meewerkte (ook wanneer je het niet altijd met werkwijze en ideeën eens was), dan door slechts ‘tegen’ te zijn en je afzijdig te houden. Ook zijn lidmaatschap (en in 1954 voorzitterschap) van de op te richten ‘Nederlandse Onderwijscommissie’

7 Correspondentie tussen de redactie van *Euclides* en Freudenthal, juni 1956; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 29.

8 Correspondentie tussen de Nederlandse Onderwijzers Vereniging en Freudenthal; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 56. Volgens Freudenthal zou de NOV zich tegen de lerarenverenigingen afzetten.

sie voor Wiskunde’ (NOCW) kan in dit licht gezien worden en vormt direct een goed voorbeeld van de erkenning van zijn deskundigheid.

Natuurlijk zou Freudenthal niet zijn, als hij niet ook nog geregeld tegen wat heilige huisjes zou schoppen, zich daarmee de nodige kritiek van de zijde van de leraren op de hals halend. Zo veroorzaakte hij in 1952 heel wat opschudding met zijn lezing over het mechanicaonderwijs en wist hij bij de leraren een teer punt te raken bij het uiten van zijn mening over de lerarenopleiding. Niettemin liet de eerste helft van de jaren vijftig zien hoe Freudenthal zich ontwikkelde van roepende aan de zijlijn tot een autoriteit op het gebied van het wiskundeonderwijs. Een mooie kans om zijn standpunten over dat wiskundeonderwijs eens duidelijk te formuleren, kreeg hij begin jaren vijftig in de brochure *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?*

6.1 Wiskundeonderwijs en de opvoeding van het denkvermogen

Eén van de meest bekende publicaties van de Wiskunde Werkgroep was misschien wel de eerste, een brochure getiteld *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?* Deze bevatte een discussie tussen mevrouw Ehrenfest en Freudenthal over de invloed van het meetkundeonderwijs op het denkvermogen. Mevrouw Ehrenfest en Freudenthal kenden elkaar voornamelijk van de bijeenkomsten van de Wiskunde Werkgroep, die ook geregeld bij haar thuis in Leiden gehouden werden.

Uit een veel latere brief van mevrouw Ehrenfest aan Freudenthal bleek hoe de brochure tot stand was gekomen. Mevrouw Ehrenfest had oorspronkelijk het eerste artikel geschreven, waarop Freudenthal, die het met haar beweringen niet eens was, voorstelde haar artikel, zijn reactie en hun beider verdere antwoorden in een gemeenschappelijke bundel uit te geven.⁹

Mevrouw Ehrenfest begon de discussie met een uiteenzetting, hoe het wiskundeonderwijs, en dan speciaal het meetkundeonderwijs, tot de opvoeding van het denkvermogen kon bijdragen en hoe dit onderwijs eruit zou moeten zien om dat effect te bereiken. Logisch denken was volgens haar meer dan het “foutenvrij conclusies trekken uit gegeven praemissen”, maar omvatte ook denk-kwaliteiten als kunnen abstraheren en formuleren:

De hierbij behorende denkgewoonten zijn: naar het essentiële in een gegeven situatie zoeken (abstractievermogen)[;] zich daarvan rekenschap te geven (wat niet hetzelfde is); te trachten dit scherp te formuleren; een zich aanbiedend antwoord op een vraag met het gehele complex van gegevens te confronteren en nooit de totale situatie uit het oog te verliezen (kritisch vermogen).¹⁰

9 Mevrouw Ehrenfest aan Freudenthal, 3 maart 1964; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 26.

10 T. Ehrenfest-Afanassjewa en H. Freudenthal, *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?* (Purmerend 1951) 6.

In het meeste wiskundeonderwijs werd de stof echter aangeboden als een theorie die de leerling eenvoudig moest aanvaarden, en bestonden de oefeningen voor de leerlingen uit de moeilijker stellingen en toepassingen die daaruit afgeleid moesten worden. Op deze manier oefenden de leerlingen volgens mevrouw Ehrenfest juist geen goede leer- en denkmanieren, maar het ‘niet-denken’ door domweg de voorschriften van anderen te aanvaarden.

Goede denkmanieren en werkelijk begrip werden in het wiskundeonderwijs pas aangeleerd als de leerling de gehele opbouw van de stof mocht meebelevan. Contact met de praktijk bood hierbij volgens haar gelegenheid tot het oefenen in het zelfstandige ontdekken van de essentiële elementen, wat een belangrijk onderdeel was van het logisch (leren) denken. Onder die omstandigheden bestond er zeker een kans, dat men door het wiskundeonderwijs het denkvermogen van de leerlingen kon vergroten. Voorwaarde voor een werkelijk hoog peil van het wiskundeonderwijs was volgens mevrouw Ehrenfest dan wel dat de omvang van het wiskundeprogramma op de meest radicale manier verminderd werd en dat de leerlingen in dat tempo konden werken dat ze persoonlijk nodig hadden om bij elke stap het eigen verstand te kunnen gebruiken.

Freudenthal presenteerde zichzelf in zijn antwoord aan mevrouw Ehrenfest als haar ‘opponent’, ook al waren er situaties denkbaar, waarin hij haar standpunt “even beslist zou verdedigen als ik het hier aanval”.¹¹ Er waren volgens Freudenthal weinig redenen om de formele mathematische methode als voorbeeld van de feitelijk beoefende denkkunst aan te prijzen. Andere ‘goede denkgewoonten’ als het denken in analogieën kwamen in de wiskunde volgens hem niet tot hun recht.

Men begrijpe mij goed: ik acht het niet onmogelijk, dat men, een speciaal vak beoefnende, ook opvoedt tot denken in de meer algemene zin – goed begrepen moedertaalonderwijs is hiervoor vooral aangewezen, omdat denken voor een groot gedeelte taalbeheersing is; ik sluit ook de mogelijkheid van bijdragen in denkoefening van de kant van de wiskunde geenszins uit. Maar ik vrees, dat men op drijfzand bouwt, wanneer men de uren, die het één of ander schoolvak opeist, wil rechtvaardigen met een beroep op de denkoefeningen, waaraan die tijd zou worden besteed.¹²

Ook al sloot hij het feit dat ‘leren denken door wiskundeonderwijs’ in zekere mate mogelijk was niet uit, toch moest volgens Freudenthal de allereerste – en ook alleraatst – taak van het wiskundeonderwijs het onderwijzen van *wiskunde* zijn, waarbij de technische en culturele betekenis van de wiskunde de criteria vormden. ‘Leren denken’ mocht niet als legitimering voor het wiskundeonderwijs dienen. Overigens was Freudenthal vol bewondering voor het soort (ideale) onderwijs dat mevrouw Ehrenfest voor het middelbaar onderwijs voor ogen had: een enigszins strakke, logisch doorzichtige opbouw van de meetkunde waarbij veel van de toenmalige ballast overboord gegooid kon worden.

¹¹ Ibid., 12.

¹² Ibid., 16.

In haar weerwoord op Freudenthals reactie benadrukte mevrouw Ehrenfest nogmaals waarom volgens haar alleen het wiskundeonderwijs de mogelijkheid bood goede denkmanieren te oefenen: juist door de eenvoud van de stof was het mogelijk dat de inspanning om die stof te begrijpen steeds met succes bekroond kon worden. Ze verweet Freudenthal (overigens terecht) buiten het eigenlijke thema van de discussie te treden wanneer hij het over de waarde van de wiskunde als vak op zich had, iets wat mevrouw Ehrenfest heus niet ontgaan was, maar wat zij hier verder niet aan de orde gesteld had.

Freudenthal sloot de discussie af door toe te geven dat mevrouw Ehrenfest gelijk had: inderdaad las Freudenthal “moet” in plaats van “kan” in de titel van de discussie. Maar hij deed dit volkomen gerechtvaardigd vond hij zelf. Immers:

Wat Mw. Ehrenfest doet, is een methodiek van het wiskundeonderwijs te schetsen, die wellicht tot het gestelde doel [het ontwikkelen van het algemene denkvermogen] zou leiden, indien de vraag of dit doel wel bereikbaar is, van tevoren op grond van algemenere overwegingen positief beantwoord zou zijn. Beantwoordt men die vraag ontkennend, dan vervallen Mw. Ehrenfest's argumenten.¹³

Hoe zeer hij ook mevrouw Ehrenfests praktische adviezen voor de inrichting van het wiskundeonderwijs waardeerde en hoog achtte, het doel van het wiskundeonderwijs bleef in zijn ogen de wiskunde. En de vraag – “moet het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?” – moest volgens Freudenthal inderdaad ontkennend beantwoord worden:

“Het trachten om iets te begrijpen in plaats van een oordeel of een regel op vreemd gezag te slikken” kan nergens zo goed als in de wiskunde worden beoefend – aldus Mw. Ehrenfest. Absoluut juist – tot op 't ogenblik, dat de kwestie van overdracht aan de orde komt. De wiskunde kweekt deze goede gewoonte in hoge mate aan – ten bate van de wiskunde.¹⁴

Het bestaan van de vormende waarde van de wiskunde stond of viel met het bestaan van overdracht van in de wiskunde verkregen (denk)vaardigheden. En die overdracht was volgens Freudenthal juist door de (te) eenvoudige structuur en het abstracte karakter van de wiskunde hooguit ten bate van ander *wiskundig* terrein aanwezig. Hij noemde het hier niet, maar waarschijnlijk baseerde hij deze overtuiging op resultaten van het Amerikaanse onderzoek naar transfer waarover hij al eerder sprak.¹⁵ Het argument dat de wiskunde te abstract zou zijn voor overdracht naar denken buiten de wiskunde was overigens in de jaren dertig al door Kohnstamm naar voren gebracht.¹⁶

13 Ibid., 24.

14 Ibid., 25.

15 Zie de bespreking van de voordracht ‘Opvoeding tot denken’ in paragraaf 5.1.3.

16 Ph.A. Kohnstamm, ‘De formele logica en het kinderlijke denken’, in 1934 verschenen als ‘Mededeling 2 van het Nutsseminarium’, in *Paedagogische Studiën*; Kohnstamm, *Keur uit het didactisch werk 67-92*; Ph.A. Kohnstamm, ‘Over de “vormende waarde” der leervakken’, in 1929-1930 verschenen als

Met het afwijzen van de vormende waarde vervielen alle argumenten van mevrouw Ehrenfest voor op 'leren denken' ingericht wiskundeonderwijs. Het afwegen van tegenstrijdigheden, van de vóórs en tegens van bepaalde handelingen was iets wat niet binnen de wiskunde geoefend werd, en, zo benadrukte Freudenthal ten overvloede:

Ik ben nog een keer zo uitvoerig op principiële kwesties ingegaan, om te kunnen zeggen, waaróm ik het aankweken van goede denkgewoonten door middel van de wiskunde zo secundair acht: omdat de wiskunde hiervoor het minst aangewezen terrein is.¹⁷

En hier eindigde de discussie.

Van Hiele noemde ruim 20 jaar later de brochure als een goed voorbeeld, hoe twee wetenschappers langs elkaar heen praatten doordat zij verzuimden hun begrippenveld zo te ordenen, dat de woordsymbolen die zij gebruikten dezelfde betekenis hadden.¹⁸ Inderdaad praatten beide wetenschappers langs elkaar heen. Voornamelijk was dit omdat zij niet over dezelfde stelling discussieerden, wat pas duidelijk werd in de twee laatste bijdragen van de brochure.

Het misverstand leek uiteindelijk te ontstaan door het woordje "kan" uit de titel. Mevrouw Ehrenfest betoogde: 'ja, het wiskundeonderwijs (en dan vooral het meetkundeonderwijs) *kan* tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen', en gaf vervolgens schetsmatig aan hoe dat onderwijs er volgens haar dan uit moest zien. Freudenthal ging in zijn beide antwoorden steeds aan de vraagstelling of het *kan* voorbij en beweerde in plaats daarvan 'nee, het wiskundeonderwijs *moet* niet tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen' (of het *kan* was alleen proefondervindelijk vast te stellen en was niet erg waarschijnlijk). Het doel van wiskundeonderwijs was voor hem de wiskunde:

Goed wiskundeonderwijs lijkt me op zichzelf al een zo geweldig probleem, dat ik Mw. Ehrenfest's vraag of dat onderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen kan bijdragen gevaarlijk acht, wanneer zij gesteld wordt met de bedoeling, vanuit het antwoord het onderwijs te beïnvloeden.¹⁹

Zo was er van een echte discussie uiteindelijk helemaal geen sprake. Wel hadden beiden de kans gegrepen, hun denkbeelden op de voor hen zelf meest belangwekkende onderdelen van het wiskundeonderwijs uiteen te zetten: mevrouw Ehrenfest over de invulling van het meetkundeonderwijs, Freudenthal over het doel en het nut van het wiskundeonderwijs in het algemeen. Freudenthal raakte daarbij nog een diepere laag

¹⁷ 'Mededeling 16 van het Nutsseminarium', in *Paedagogische Studiën*; Kohnstamm, *Keur uit het didactisch werk* 1-31. Kohnstamm was er overigens wel van overtuigd dat beoefening van de wiskunde en oude talen bij uitstek geschikt was om *logisch* te leren denken.

¹⁷ Ehrenfest en Freudenthal, *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?* 26.

¹⁸ P.M. van Hiele, 'Freudenthal en de didaktiek der wiskunde', *Euclides* 51 (1975) 8-10.

¹⁹ Ehrenfest en Freudenthal, *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?* 24.

in de discussie, door de vanzelfsprekendheid van het bestaan van de vormende waarde aan de orde te stellen, en – nog belangrijker – zich daarbij af te vragen, wat nou die vormende waarde van het wiskundeonderwijs daadwerkelijk inhield.

Stonden mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis c.s. in de discussie uit 1924, waarin het ging om een eventuele aanschouwelijke inleiding van het meetkundeonderwijs, als opponenten tegenover elkaar, beiden gingen wel altijd met dezelfde vanzelfsprekendheid uit van de vormende waarde van het wiskundeonderwijs. Freudenthal, die zich juist goed in mevrouw Ehrenfests invulling van het wiskundeonderwijs kon vinden, stelde deze vanzelfsprekendheid aan de kaak en plaatste zich daarmee tegenover beide andere ‘kampen’. Hij stond daarin nog het dichtst bij Van Dantzig, die ook het argument van de vormende waarde van de wiskunde afwees. Van Dantzig legde daarbij echter de nadruk op het argument van het maatschappelijk nut van de wiskunde, terwijl Freudenthal in de discussie met mevrouw Ehrenfest daar nergens over uitweidde. Wel stipte hij kort de ‘technische betekenis’ van de wiskunde als argument voor het onderwijs aan.

In de nadruk die hij in deze discussie legde op het ontbreken van een wetenschappelijke onderbouwing van de vermeende vormende waarde leek Freudenthals standpunt nog het meest op dat van Kohnstamm. Kohnstamm was in vergelijking met Freudenthal echter minder nadrukkelijk in het uiten van zijn twijfel over het bestaan van de vormende waarde waar het de wiskunde betrof. Hij hield – meer dan Freudenthal in deze discussie – altijd een zekere slag om de arm in zijn uitspraken over de vormende waarde en achtte het wiskundeonderwijs in ieder geval voor het *logisch* leren denken bij uitstek geschikt.²⁰

H. Streefkerk, wiskundeleraar en redacteur van *Euclides*, schreef een lovende recensie over de brochure in zijn tijdschrift, waarin hij zich aan de kant van Freudenthal schaarde, maar ook veel nuttigs in de teksten van mevrouw Ehrenfest vond. Hij beval de brochure dan ook van harte bij de lezers aan en hoopte, dat “vele wiskundelaren zich de luttele aanschaffingsprijs getroosten; het gaat om het belang van onze leerlingen”.²¹ In een brief aan Freudenthal, nog voor het verschijnen van deze recensie, schreef hij over de brochure:

De laatste 3 bladzijden van het boekje zijn de beste en de aardigste [dit is de slotreactie van Freudenthal]. Mevrouw Ehrenfest heeft geen idee van de koeien, uilen, schapen, ganzen en ezels die onze klassen bevolken. Het door haar bedoelde – inderdaad ideale – onderwijs kàn, bij de huidige samenstelling van de schoolbevolking en de klassen, zeker in de eerste 3 à 4 klassen niet gegeven worden. Dat zou hoogstens in klas 5 gaan, als klas 5 geen examenklas was.²²

20 De parallellen tussen de denkbeelden van Freudenthal en Kohnstamm kwamen duidelijk naar voren in Kohnstamms artikel dat hij schreef naar aanleiding van een voordracht uit 1938; ‘De verhouding der anorganische natuurwetenschappen onderling en tot de wiskunde uit didactisch oogpunt’, in: Kohnstamm, *Keur uit het didactisch werk*, aldaar 376-390.

21 H. Streefkerk, ‘Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?’, *Euclides* 27 (1951) 57-59, aldaar 59.

22 Streefkerk aan Freudenthal, 27 april 1951; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 73.

Erg verrassend was deze bijval van iemand uit de *Euclides*-lerarenhoek niet echt: Streefkerk had in 1945 in *Euclides* al een artikel geschreven over de overladenheid en onuitvoerbaarheid van het toenmalige HBS-leerplan en voerde sinds enige jaren een regelmatige correspondentie met Freudenthal over allerlei onderwerpen uit de wiskundendidactiek in het algemeen en als *Euclides*-redacteur over de inhoud van de twee korte artikeltjes over HBS-examenopgaven die Freudenthal voor *Euclides* schreef in het bijzonder.²³ Ook kenden ze elkaar van de bijeenkomsten van de Wiskunde Werkgroep.

Toch was deze recensie in *Euclides* een voorzichtig begin van weerklank en erkenning onder leraren voor Freudenthals ideeën en uitspraken. Natuurlijk klonken er nog steeds geluiden vóór het argument ‘vormende waarde’ bij de keuze van de leerstof. Zo schreef Wansink, die met zijn vaak wat gematigde houding wellicht beter de gemiddelde leraar vertegenwoordigde, in een brief aan Freudenthal over de brochure:

Ik ben het met U eens dat geen leerstof alleen terwille van de opvoeding van het denkvermogen een plaats op de roosters verdient. Daartegenover zou ik leerstof (onverschillig voor welk theoretisch vak ook) die op eigen gebied, in een zekere omgeving van de behandelde leerstof, niet tot beter denken zou voeren, van de roosters willen verwijderen.²⁴

Drie jaar later kwam Freudenthal nogmaals terug op de met mevrouw Ehrenfest gevoerde discussie. In het Duitse *Archimedes. Anregungen und Aufgaben für Lehrer, Schüler und Freunde der Mathematik* zette hij, in een reactie op het in hetzelfde tijdschrift afgedrukte artikel van mevrouw Ehrenfest, nogmaals zijn standpunt uiteen:

Mein Kriterium für guten Mathematikunterricht ist, ob er als Mathematikunterricht etwas taugt, ob sie [de leerlingen] den Kulturwert begreifen, ob die Mathematik ihnen Spaß macht.²⁵

Tot slot benadrukte hij nogmaals de misvatting dat wiskunde door zijn eenvoud een goed oefenterrein voor het denken zou vormen, want:

Denken lernt man nicht im Einklang, sondern im Widerspruch.²⁶

Om het denkvermogen te ontwikkelen was het leren afwegen van argumenten in een zee van ‘voors’ en ‘tegens’ nodig: “Widerspruch”, dat volgens Freudenthal kenmerkend was voor een democratische structuur. De wiskunde, waar alles rechttoe

23 Correspondentie tussen Streefkerk en Freudenthal, 1948-1951. In deze artikeltjes, getiteld ‘De dwarskijker’, behandelde Freudenthal kort een examenopgave en de soorten fouten die leerlingen erbij maakten; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 73; Hans Freudenthal, ‘De dwarskijker I’, *Euclides* 26 (1951) 245-251; Hans Freudenthal, ‘De dwarskijker II’, *Euclides* 28 (1952) 58-62.

24 Wansink aan Freudenthal, 29 april 1951; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 82.

25 Hans Freudenthal, ‘Erziehung des Denkvermögens’, *Archimedes* 6 (1954) 87-89, aldaar 88; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 787.

26 Ibid.

rechtaan bewijsbaar en overzichtelijk was, droeg aan de ontwikkeling van dergelijke denkmethode niets bij.

In Freudenthals opvattingen over de opvoeding van het denkvermogen, en dan met name de rol die de wiskunde daarin zou kunnen spelen, lijkt in deze jaren weinig te veranderen. Zoals al eerder in ‘Rekendidaktiek’ (1944) en ‘Opvoeding tot denken’ (1945) bleef hij vasthouden aan de overtuiging, dat juist door zijn eenvoudige, doorzichtige structuur de wiskunde geen goed onderwerp vormde voor het leren denken en dat er hoogstwaarschijnlijk dan ook geen transfer of vormende waarde van dergelijk onderwijs naar andere gebieden buiten de wiskunde te verwachten viel.²⁷ Ook zag hij om dit eventueel te bereiken nog steeds meer heil in het (moeder)taalonderwijs, mits dit inderdaad taalonderwijs was, en geen taalanalyse of vermomde taalwetenschap.²⁸

Deze laatste ‘mits’ was een toevoeging, die Freudenthal hoogstwaarschijnlijk gedaan had sinds hij via het onderwijs van zijn kinderen geregeld de praktijk van dat taalonderwijs aan den lijve ondervond. Zo schreef hij in *De Groene Amsterdammer* regelmatig over het onderwijs van zijn kinderen. In het stuk ‘Mevrouw, ze groeien ook zo hard!’ hekelde hij de neiging op school de leerstof ‘op de groei’ te kiezen. Grammatica op de lagere school onderwijzen omwille van de vreemde talen van de middelbare school was volgens Freudenthal het paard achter de wagen spannen: eerst wetenschap (de grammatica) en dan pas de taal leren, terwijl er bij kinderen op die leeftijd nog helemaal geen belangstelling of begrip voor de zin van grammatica was.²⁹ Drie weken later hekelde hij de woordjes-dril-methode die een van zijn zoons voor zijn moedertaalonderwijs moest toepassen.³⁰ Dat hij zich hiermee op glad ijs bevond, bleek wel uit de stapel reacties die *De Groene Amsterdammer* op dit artikel ontving, veelal van leraren die zich door een ‘leek’ in hun deskundigheid aangetast voelden.

Dat hij zich niet veel aantrok van dergelijke kritiek bleek uit zijn brief aan de natuurkundige R.A.J. Bosschart, waarin Freudenthal schreef over het onderwijs op de lagere school:

Ik weet niet, of men het kind op de lagere school beslist in contact moet brengen met enige wetenschap. Mocht het zo zijn, dan zou ik onder de natuurwetenschappen de biologie beslist prefereren. Maar de gekkenhuis-wetenschap van het lijdend voorwerp hoort in het lager onderwijs zeker niet thuis. Ieder [sic] psycholoog weet, dat een kind op die leeftijd niet vatbaar is voor taalanalyse [...] Het is een oude hobby van mij, en ik heb er herhaaldelijk over geschreven: dat taalwetenschap niet hetzelfde is als taal,

27 Zie ook: Hans Freudenthal, ‘Rekendidaktiek’ 101-102; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465.

28 Hans Freudenthal, ‘Opvoeding van het denkvermogen? Antwoord aan Mw. Ehrenfest’, in: Ehrenfest en Freudenthal, *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?* 12-18, aldaar 15-16.

29 Hans Freudenthal, ‘Mevrouw, ze groeien ook zo hard!’, *De Groene Amsterdammer* (4 aug 1951); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1447.

30 Hans Freudenthal, ‘Weet u wat een escalator is?’, *De Groene Amsterdammer* (25 augustus 1951); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1448.

jaartallen niet hetzelfde als geschiedwetenschap, encyclopedie-materiaal niet hetzelfde als aardrijkskunde. Maar helaas elke keer, dat ik het lijdend voorwerp of het jaartal 1296 of de rivierklei aanraak, gaan de mensen in hun heilige huisjes voor verontwaardiging door het dak. De werels [sic] zou ten gronde kunnen gaan, als hun kinderen iets verstandigers leerden dan zichzelf.³¹

Hij noemde het taalonderwijs in zijn artikelen als een onderdeel van het onderwijs dat met zo mogelijk nog grotere problemen kampte dan het wiskundeonderwijs.³² Maar hij zou zich toch vooral blijven concentreren op de problemen van het wiskundeonderwijs.

6.2 Een lijk onder de vloer: het mechanicaonderwijs

“Het laatste woord over de mechanica als leervak op de middelbare school is blijkbaar nog niet gesproken”, zo eindigde Dijksterhuis in 1930 zijn artikel in *Euclides*.³³ Hij sloot hiermee enkele jaren van discussies over het vak mechanica af, die zich tussen het wiskundige kamp en het natuurkundige kamp in de jaren twintig hadden afgespeeld. In die discussies ging het tussen de voorstanders van een logisch-deductief opgebouwde mechanica (waar het merendeel van de wiskundeleraars voor pleitte), en die van een meer op experimentele basis behandelde mechanica, die aan zou sluiten bij de methode van het natuurkundeonderwijs.³⁴ Ook toen de mechanica in 1929 weer een zelfstandig vak werd, was overeenstemming over de gewenste aanpak (empirisch of deductief?) van het mechanicaonderwijs nog lang niet bereikt.

In de erop volgende jaren was het mechanicaonderwijs nauwelijks meer onderwerp van discussie, totdat in november 1952 Freudenthal het onderwerp op zijn eigen directe manier weer oprakelde. Hij deed dit in zijn voordracht op de weekendconferentie van de Werkgroepen Wiskunde en Natuurkunde van de wvo in De Tempel te Rotterdam. Zijn aanleiding was simpel en concreet: zijn oudste zoon was op school aan de mechanica toegekomen. Freudenthal, die niet eerder met het mechanicaonderwijs in aanraking was gekomen, schrok van wat hij zag, en citeerde Dante om zijn gevoel te omschrijven:

Toen ik de levensweg had half voltooid, hervond ik me in een donker woud verdwaald.³⁵

31 Freudenthal aan R.A.J. Bosschart, 25 augustus 1955; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 12.

32 Zie bijvoorbeeld ook: Hans Freudenthal, ‘Traditie en opvoeding’, *Rekenchap* 3 (1957) 95-103, aldaar 101.

33 E.J. Dijksterhuis, ‘Opmerkingen over het onderwijs in mechanica als onderdeel der physica’, *Euclides* 7 (1930/31) 76-94, aldaar 94.

34 Zie voor de discussie over het vak mechanica in het interbellum paragraaf 2.2.3.

35 Hans Freudenthal, ‘Het mechanica-vraagstuk’, in: *Nieuwe wegen bij het onderwijs in de wiskunde en de natuurwetenschappen* (Purmerend 1952) 22-43, aldaar 22. Het citaat is afkomstig uit het dichtwerk ‘Divina Commedia’ van Dante Alighieri, 1300. Het “donkere woud” staat in dit werk symbool voor een kwellende levensfase.

Hij verweet zichzelf dat hij, als iemand die belang stelde in opvoeding en onderwijs, niet eerder bij dit vak en zijn problematiek betrokken was geweest en hij voelde zich “als iemand, die jarenlang éénzelfde kamer bewoont en ineens tot de ontdekking komt, dat onder de vloer een lijk is weggestopt”.³⁶

Zoals van Freudenthal te verwachten viel, had hij zich vervolgens op een grondige ontleding van dit ‘lijk’ gestort en vergastte hij zijn gehoor op zijn bevindingen. In een voetnoot van de gedrukte versie van deze voordracht verantwoordde hij eerst nog de gevolgde methode.

Volgens Freudenthal waren bij een dergelijk onderzoek naar een schoolvak examenvraagstukken en leerboeken de enige wetenschappelijk verantwoorde bronnen. De op die manier verkregen informatie was *statistische* informatie, en de conclusies die hij uit deze informatie trok waren dan ook *statistische* conclusies. Zo dekte Freudenthal zich bij voorbaat al in tegen eventuele critici die hem ‘generalisatie’ zouden kunnen verwijten, want hij generaliseerde net zo erg als “iemand, die uit statistisch materiaal bijvoorbeeld afleidt, dat de gemiddelde volwassene Nederlander 1.64 m lang is, en die men zou verwijten, dat hij allen, die langer of korter zijn, verwaarloost”.³⁷ Hiermee liet hij natuurlijk indirect wel blijken, de nodige kritiek op zijn conclusies te verwachten. En begrijpelijk was dat wel, want Freudenthals conclusies waren niet mals.

Zijn eerste bezwaar tegen het mechanicaonderwijs was dat het niets meer met het oorspronkelijke doel (het onderwijzen van toegepaste wiskunde) te maken had.

Met ontsteltenis leest men tegenwoordig ontboezemingen van wiskundigen, waarin de wiskunde gezuiverd wordt van de smaak, haar aangedaan door natuurkundigen en technici, die de euvele moed bezaten haar toe te passen. Het lijkt, of men in het gevlij wil komen bij de beoefenaren der geesteswetenschappen, zo spant men zich in om aan te tonen, dat ook de wiskunde een wetenschap van de geest is en niet van de verachtelijke stof.³⁸

Het ideaal in het interbellum, zoals ook verwoord in het leerplan-Beth-Dijksterhuis, was de mechanica als axiomatiche wetenschap te onderwijzen met als doel “taalanalyse en inleiding in een rationalistische natuurfilosofie en wetenschapsgeschiedenis”.³⁹ De praktijk in de vorm van leerboeken liet echter iets anders zien.

Freudenthal besprak vervolgens twee leerboeken, *Beginselen der theoretische mechanica* van Schogt (waarvan Freudenthal niet wist of het ooit in het m.o. gebruikt was) en *Mechanica voor het m.o.* van H.J.E. Beth en P.J. van Loo. Over geen van beide was hij erg te spreken. Beide boeken spiegelde de leraar en de leerling een exactheid voor die ver te zoeken was. Van de empirische achtergrond van het vak was niets overgebleven. Daarnaast vond Freudenthal vooral het boek van Beth (ondanks “de anders zo voortreffelijke productie van Beth”) moeilijk te volgen.⁴⁰

³⁶ Ibid., 22.

³⁷ Ibid., 23.

³⁸ Ibid., 26.

³⁹ Ibid., 26.

Zijn kritiek ging niet zozeer in op de gevolgde didactiek, maar meer op de onvolledigheid, slordigheid, en het moeilijke taalgebruik van de auteurs. Zijn conclusie luidde dan ook:

Ik zou beide boeken niet ‘slecht’, maar ‘zeer slecht’, noemen, indien ik de auteurs kon verwijten, dat ze verzuimd hadden, betere voorbeelden na te volgen.⁴¹

Want veel betere voorbeelden waren er niet. Andere leerboeken waren zo mogelijk nog slechter. Een van de ergste kwalen vond Freudenthal de definieerzucht die het mechanicaonderwijs aankweekte. Met tal van voorbeelden uit diverse leerboeken illustreerde hij deze ‘mechanica-stijl’:

Men kan de eenvoudigste begrippen nu eenmaal niet tot nog eenvoudigere herleiden, maar wel als het moet, tot ingewikkeldere. Van deze mogelijkheid wordt gretig gebruik gemaakt:

*Wanneer twee lichamen zich zo ten opzichte van elkaar bewegen, dat zij op een gegeven ogenblik met elkaar in aanraking komen, dan zegt men, dat zij op dat ogenblik tegen elkaar botsen.*⁴²

Freudenthal zag maar één oplossing als we de klachten over het gebrekkige uitdrukkingsvermogen van de leerlingen wilden doen verstommen en die oplossing was het afschaffen van het mechanicaonderwijs, “de perfecte leerschool van slordigheid”.⁴³ Het hele mechanicaonderwijs was nog steeds niet meer dan een verwarde theorie, waarvan het einddoel was “dwaze examenvraagstukken op te lossen, gesteld door mensen, die er geen notie van hebben, wat in 90 jaren in de verhouding tussen de wiskunde en haar toepassingen is gewijzigd”.⁴⁴

Er bestond één goed boek. Het boek van Wansink, *Mechanica voor het M.O.*, was volgens Freudenthal misschien wel het beste, dat ooit in die geest geschreven zou kunnen worden: overzichtelijk, helder, sober, beknopt, goed van stijl en didactiek, zakelijk, logisch zuiver, met overleg gekozen vraagstukken, geen examensommen, en soms ook wat contact met de fysische realiteit. Het bestaan van dit boek zou een reden kunnen zijn, de moed niet op te geven en het vak in stand te houden.

Echter: het vak zelf deugde ook van geen kant, zelfs als het op zijn best werd onderwezen. Twee stellingen poneerde en onderbouwde Freudenthal:

1. Het is onjuist, de mechanica op de H.B.S. volgens de deductieve methode te onderwijzen;
2. Het is onjuist, de omvang van het mechanica-programma te laten bepalen door de draagwijdte van de H.B.S.-wiskunde (d.w.z. van dat gedeelte der wiskunde, dat op de H.B.S. wordt en kan worden onderwezen).⁴⁵

⁴⁰ Ibid., 27.

⁴¹ Ibid., 27.

⁴² Ibid., 31.

⁴³ Ibid., 33.

⁴⁴ Ibid., 34.

⁴⁵ Ibid., 34-35.

Het eerste argument gold natuurlijk ook voor het meetkundeonderwijs. Natuurwetenschap à priori deductief opbouwen in het onderwijs was een didactisch verwerpelijke methode volgens Freudenthal. Meetkundige grootheden zoals kracht, massa, snelheid en versnelling moest de leerling al metende leren kennen en niet slechts als letters K , m en a om in een mathematische formuletaal dienst te doen.

Je mag in de mechanica (evenals in de wiskunde) alles, waar je zin in hebt, met elkaar vermenigvuldigen en er een nieuwe naam voor bedenken – zo ongeveer moet het er in de mechanica-hersens van onze H.B.S.-leerlingen uit zien.⁴⁶

Wat het tweede argument betrof: het criterium je te beperken tot die stof, die met de HBS-wiskunde nog net te doen was en waaruit sommetjes te halen was, was een verkeerd criterium. Freudenthal noemde een lange lijst met onderwerpen en vragen die de leerling miste in het toenmalige onderwijs, variërend van het hoe en waarom van de stabiliteit van een fiets tot de dynamische werking van de hefboom.⁴⁷

Laat de lijst, die ik hier heb opgemaakt, goed op u inwerken! Al deze dingen missen de H.B.S.-leerlingen. Is het niet een schrikwekkende lijst? Wat leer je op de H.B.S. in plaats van deze mooie en nuttige dingen? Uitrekenen, hoe een balletje in een verticale cirkelbuis met aansluitend hellend vlak beweegt en hoe een kegel zonder wrijving op een vlak kan staan, terwijl een staaf, opgehangen aan een katrol, met wrijving tegen die kegel leunt.

Dat is H.B.S.-mechanica! Schaf die prulwetenschap af!⁴⁸

De zo vrijgekomen uren en stof konden gemakkelijk verdeeld worden waar ze thuis hoorden: bij de natuurkunde én de wiskunde, opdat een meer natuurkundige geest van de mechanica beter tot zijn recht kan komen. Als het HBS-programma niet snel veranderde, zou de HBS als schoolsoort verdrongen worden door een minder star onderwijs, net zoals het – althans in Freudenthals optiek – het gymnasium negentig jaar geleden was vergaan: “Voorwaar een averechtse progressiviteit!”⁴⁹

Freudenthals pleidooi bleef niet lang onopgemerkt. Niet alleen verscheen het in een syllabus met de rest van de lezingen, ook werd een verslag van de bijeenkomst in *De Groene* afgedrukt.⁵⁰ Anderhalve maand na de lezing maakte G.A. Janssen, de voorzitter van WIMECOS, op de jaarvergadering de balans op van de vernieuwende geluiden en initiatieven binnen het wiskundeonderwijs in 1952.⁵¹ Naast veel waar-

46 Ibid., 39.

47 Ook Kohnstamm noemde in zijn artikel in 1938 het voorbeeld van de dynamica van het fietsen als tegenhanger van het door wiskundigen voorgestane ideaal van logisch-deductief opgebouwd mechanicaonderwijs; Ph.A. Kohnstamm, ‘De verhouding der anorganische natuurwetenschappen onderling en tot de wiskunde uit didactisch oogpunt’, in: Kohnstamm, *Keur uit het didactisch werk* 376-390, aldaar 378.

48 Freudenthal, ‘Het mechanica-vraagstuk’, *Nieuwe wegen* 42.

49 Ibid., 42.

50 Van Berkel, *Dijksterhuis* 588.

51 Deze voorzitter van WIMECOS is niet te verwarren met J.R. Janssen, de secretaris van de Centrale Werkgroep van de wvo en voorzitter van de ww in de jaren veertig.

devols (waartoe hij toch ook het “onstuimige, jeugdige enthousiasme” van de Wiskunde Werkgroep wilde rekenen) wilde hij vooral de leraren waarschuwen en oproepen tot waakzaamheid, opdat het gevaar dat “niet-mathematici zich met enige schijn van recht zouden kunnen beroepen op uitspraken van erkende mathematici om daarmee het onderwijs in de exacte vakken afbreuk te doen” geen kans kon krijgen.⁵² Naast mevrouw Ehrenfest (aan wier goede bedoelingen Janssen geenszins twijfelde) was het volgens hem vooral Freudenthal wiens mechanicaleszing tot dergelijk gevaar aanleiding gaf:

Als een spreker, die zelf verklaart, dat zijn belangstelling voor en verdieping in de desbetreffende didactische materie nog maar enige maanden oud is, het resultaat van zijn onderzoek laat culmineren in een: “Dat is H.B.S.-mechanica. Schaf die prulwetenschap af!”, zonder een constructief idee aan de hand te doen voor wat er na die afschaffing moet gebeuren, en in zijn betoog en passant veler pennevruchten o.a. van iemand van zo grote verdienste als dr. Beth Sr meent te mogen “kraken”, dan zal de spreker zich wel niet kunnen verwonderen over het feit, dat wij ten aanzien van de hechtheid van het hierbij behorend betoog argwanend worden, en ten aanzien van geest en strekking van dat betoog verontrust en verontwaardigd. We waarden uiteraard, dat van universitaire zijde voor de didactische problemen van het V.H.M.O. belangstelling aan de dag wordt gelegd, maar er zal aan enige voorwaarden moeten hebben voldaan, wil het gebodene voor ons onderwijs positieve waarde hebben. Mede op grond van wat pers en syllabus ons leerden, achten we het betoog van prof. Freudenthal [...] beneden de door ons bedoelde maat. Toch willen we hier ook gaarne verklaren, dat we zijn kennis en belangstelling node zouden missen; zijn beweringen zijn echter, naar het ons toeschijnt vaak te impulsief, de gebezigde woorden te “dik”.⁵³

Het grootste gevaar lag volgens Janssen in de ongunstige werking die de zijns inziens onvoldoende gemotiveerde beweringen van Freudenthal bij het grote publiek teweeg konden brengen.

In een brief van E.W. Beth (zoon van H.J.E. Beth) aan Freudenthal kwam Janssens commentaar – zoals uitgesproken op de WIMECOS-vergadering – ter sprake. Freudenthal schreef hierop aan Beth terug, Janssen de gedrukte tekst van zijn rede opgestuurd te hebben, opdat hij “na de kritiek te hebben geschreven, ook kan lezen, wat hij [Janssen] heeft gecritiseerd”.⁵⁴ De in *Nieuwe wegen* afgedrukte tekst was namelijk veel langer dan de door Freudenthal uitgesproken rede, waarin hij bijvoorbeeld slechts summier het boek van Beth sr noemde.

In zijn brief aan Beth jr schreef Freudenthal allang aan dergelijke kritiek gewend te zijn. Over zijn standpunt aangaande het mechanicaonderwijs legde hij Beth uit:

52 G.A. Janssen, ‘Over onze tijd met een heenwijzing naar onze taak’, *Euclides* 28 (1953) 116-122, aldaar 121.

53 *Ibid.*, 119.

54 Freudenthal aan E.W. Beth, 4 aug 1953; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 8. Overigens vergezeld Freudenthal de rede met een uiterst correct en vriendelijk briefje aan Janssen; Freudenthal aan G.A. Janssen, augustus 1953; RANH, Hans Freudenthal papers, inv.nr. 42.

Dat ik als wiskundige dit standpunt inneem, is het gevolg ervan, dat ik nogal veel met toepassingen te maken heb, en dus weet, hoe wiskunde wordt toegepast, en dat de toegepaste wiskunde van ons m.o. een caricatuur is. Ik heb opgemerkt, dat zelfs de natuurkunde en scheikunde door de zinloze vermathematisering zijn besmet.⁵⁵

Dit bemerkte hij door het grote verschil in onderwijs dat zijn twee zoons (‘A’ en ‘B’) op twee verschillende scholen kregen: de een kreeg deugdelijk, proefondervindelijk onderwijs en snapte het, de ander (volgens Freudenthal “verreweg de intelligentere van die twee”) kreeg slecht onderwijs en kwam daardoor niet verder dan “het typische geklets van iemand, die nooit met natuurwetenschappelijke redeneringen in aanraking is gekomen”:

Bij hem ontbreekt totaal het begrip ervoor, dat natuurwetenschap geen wiskunde is, dat je in de natuur- en scheikunde niet iets bewijst, maar dat je een systeem zoekt, om de verschijnselen te verklaren en te ordenen. A zal natuurkunde gaan studeren, B, die er op zichzelf vermoedelijk even geschikt voor is, beslist niet. De zinloze vermathematisering van de natuurwetenschappelijke vakken gaat mij dus zeer ter harte.⁵⁶

Een directe reactie van Janssen bleef uit. Freudenthal gaf het niet op en stuurde ruim een half jaar later een stuk ter publicatie aan de redactie van *Euclides*, waarin hij de gang van zaken nog eens uiteenzette. Het lag niet in zijn bedoeling, zo schreef Freudenthal, de argumenten waaruit de kritiek bestond (te weten zijn ondeskundigheid en de grote verdiensten van H.J.E. Beth) te ontzenuwen, aangezien deze puur persoonlijk waren. Evenmin daagde Freudenthal de voorzitter van WIMECOS uit om ook nog enkele zakelijk gefundeerde argumenten te noemen, want dat ook hier niet op gereageerd zou worden had hij ondertussen wel begrepen:

Het enige, dat mij rest, is een beroep op de leden van WIMECOS, om zichzelf de zakelijke voorlichting over mijn rede te verschaffen, die hun van de kant van hun Bestuur wordt geweigerd. Ik nodig hen uit, kennis te nemen van mijn rede.⁵⁷

Gepubliceerd werd dit artikel (getiteld ‘Pro domo’) niet, maar Freudenthal ontving wel een verlate reactie van Janssen, waarin deze bedankte voor de ontvangen rede. Maar een aanleiding om zijn eerder gegeven reactie te veranderen zag Janssen niet:

Van onkunde, in welke richting ook, bent u niet beticht. ’t Zou te dwaas zijn. Wat ik hiervoor in het midden bracht sloeg op door u zelf gesproken woorden. Waar het om gaat, naar de mening van ons bestuur, is: “zijn beweringen zijn echter, naar het ons toeschijnt, vaak te impulsief, de gebezigde woorden te “dik”.”

Bij alle waardering die we voor uw werk hebben, was dit ons bezwaar en meenden we goed te doen U daar op, langs de gebezigde weg, te wijzen.⁵⁸

55 Freudenthal aan E.W. Beth, 4 aug 1953; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 8.

56 Ibid.

57 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 508.

58 Janssen aan Freudenthal, 4 juli 1954; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 42.

Een inhoudelijke discussie over het mechanicaonderwijs ging de voorzitter dus uit de weg. Het WIMECOS-bestuur had dan ook allang zijn standpunt ingenomen: het mechanicaonderwijs moest als zelfstandig vak gehandhaafd blijven.⁵⁹ Door zijn wellicht te impulsieve taalgebruik had Freudenthal zichzelf volgens Janssen buiten spel gezet en hij diende hiervoor op de vingers getikt te worden. Maar, zo sloot Janssen zijn briefje af, “overigens hoop ook ik persoonlijk dat U Uw belangstelling en kennis aan ons onderwijs onverflauwd zult willen blijven geven”.⁶⁰

Veel leek Freudenthal zich verder niet aan te trekken van de hele gebeurtenis: hij kreeg steun en begrip uit academische hoek van Beth jr, die blijkbaar geen moeite had met Freudenthals aanval op het boek van zijn vader. Enigszins verrassend was deze steun misschien wel, daar Freudenthal en Beth op het gebied van de didactiek juist tegenovergestelde overtuigingen aanhingen, met name waar het ging om de vormende waarde van het wiskundeonderwijs.

Willem Evert Beth (1908-1964) studeerde na de HBS achtereenvolgens wiskunde, filosofie, psychologie en rechten.⁶¹ Na jarenlang wis- en natuurkundeonderwijs te hebben gegeven werd hij in 1946 in Amsterdam benoemd tot buitengewoon hoogleraar in de logica en de wijsbegeerte der exacte wetenschappen en haar geschiedenis. Voor Beth was – net als voor zijn vader – de vormende waarde van het wiskundeonderwijs een belangrijk gegeven. In 1937 nog gaf hij in een voordracht voor de ww de vorming van het verstand als een van de belangrijkste doelen van het meetkundeonderwijs.

Zolang Janssen niet inhoudelijk op de rede wilde ingaan, kon Freudenthal diens kritiek ook niet serieus nemen. Freudenthal schreef al eerder in zijn brief aan Beth de opmerking: “In elk geval bedankt voor je belangstelling, die praatjes vervelen nooit”.⁶²

Uiteindelijk was het nettoresultaat dat zowel de opvattingen van Freudenthal (en daarmee indirect die van de Wiskunde Werkgroep) toch de nodige – zij het negatieve – aandacht hadden gekregen en Janssen en de lerarenvereniging zichzelf in Freudenthals ogen belachelijk hadden gemaakt, daar zij de discussie niet wilden aangaan. Dat hij door zijn drieste woordkeuze in zijn voordracht en daarmee weinig tactische benadering van het lerarenkorps uiteindelijk een openlijke discussie in *Euclides* schier onmogelijk maakte en zichzelf daarmee in de vingers sneed, leek hem niet te deren. Freudenthals ‘gelijk’ zou uiteindelijk blijken bij de afschaffing van de mechanica als zelfstandig leervak op de HBS in 1962. De uren voor mechanica werden daarbij verdeeld tussen wiskunde en natuurkunde, zoals al in de jaren twintig overeen was gekomen tussen de commissie-Beth en -Fokker.⁶³

59 Zie ook: ‘Adres inzake het mechanica-onderwijs op de H.B.S.-B’, *Euclides* 28 (1952) 123-128; ‘Adres van Wimecos aan de minister van onderwijs, kunsten en wetenschappen inzake het mechanica onderwijs’, *Euclides* 29 (1953) 213-217.

60 Janssen aan Freudenthal, 4 juli 1954; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 42.

61 A.G.M. van Melsen, ‘Herdenking van Evert Willem Beth (7 juli 1908 – 12 april 1964)’, *Jaarboek der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen 1964-1965* (Amsterdam 1965).

62 Freudenthal aan Beth, 4 aug 1953; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 8.

63 Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Deel I* 99-100. Zie ook paragraaf 2.2.3.

6.3 Voorbereidingen voor een nieuw leerplan

Zoals beschreven in paragraaf 5.3.1 vatte de Wiskunde Werkgroep al in 1948 het plan op, een geheel nieuw wiskundeleerplan samen te stellen. Freudenthal vormde samen met Minnaert, Van Hiele en Bunt de algebra-commissie. Met veel enthousiasme werd er door de commissie flink gesnoeid in de gangbare leerstof. Het precieze aandeel van Freudenthal in dit snoeien is achteraf moeilijk vast te stellen, maar uit de herinnering van Van Hiele bleek wel dat hij weinig behoudend was.⁶⁴

Freudenthal wilde het hier eigenlijk niet bij laten. In een brief aan de werkgroep kwam hij met een werkplan voor toekomstige werkzaamheden:

Met het programma-werk kan onze werkzaamheid in die richting niet zijn afgelopen. Ik vrees zelfs, dat wij het door ons gestelde doel niet bereiken, indien wij onze eisen niet kracht bijzetten. Ik meen, dat wij dit het beste kunnen doen, door gezamenlijk als Werkgroep een Wiskunde-leergang voor M.O. en V.H.O. te schrijven.⁶⁵

Vervolgens schetste Freudenthal een werkplan voor een dergelijke onderneming en stelde hij enkele punten voor die bij het vaststellen van de algemene strekking van zo'n leergang besproken zouden kunnen worden:

1. Wiskunde-onderwijs in de twee eerste klassen geheel en al propaedeutisch, dus constructief en experimenteel, zonder bewijstechniek.
2. Verschuiving van enige wiskunde-uren naar de hogere klassen; de in de lagere klassen vrijkomende uren gebruiken, door reeds in de eerste klas met natuurkunde-, mechanica- en sterrekunde-onderwijs te beginnen. (Deze vraag eventueel bespreken in samenwerking met de werkgroep van deze vakken).⁶⁶

Jacobs, de secretaris van de werkgroep, besprak Freudenthals voorstel met de voorzitter Janssen en het echtpaar Van Hiele. De eerste wilde de bespreking van een dergelijke plan liever uitstellen tot na de discussie over het nieuwe leerplan. Van Hiele was van mening, zo schreef Jacobs, dat de werkgroep te heterogeen was om een dergelijke leergang samen te stellen:

Hoewel hij werken in de door U aangegeven richting zou toejuichen zou hij vooraf willen nagaan in hoeverre spreiding der meningen optreedt en hoeverre het mogelijk is, deze spreiding aanvaardende, tot verbetering van methoden te komen. Op deze wijze, aldus de heer en Mevr. van Hiele, kunnen we de constructieve krachten binden i.p.v. afstoten.⁶⁷

Zo verdween Freudenthals voorstel in een diepe la en concentreerde de werkgroep

64 Zie Van Hieles opmerking over het werken in de algebra-commissie zoals beschreven in paragraaf 5.3.1.

65 Correspondentie tussen Freudenthal en de ww, ongedateerd, waarschijnlijk in het voorjaar van 1949 geschreven; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 84.

66 Ibid.

67 Jacobs aan Freudenthal, 3 april 1949; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 42.

zich op het samenstellen van het nieuwe leerplan. Begin januari 1950 was het eerste concept van het algebra-programma af en had Freudenthal een algemene inleiding voor het gehele ontwerp-leerplan geschreven.⁶⁸

Toch zag Freudenthal het schrijven van een nieuw leerplan niet als de ultieme oplossing voor de problemen in het wiskundeonderwijs. In *De Groene Amsterdammer* sneed hij dit onderwerp aan. Het Nederlandse wiskundeonderwijs, dat voor zoveel mensen een struikelblok vormde, zat op een dood spoor, zo schreef hij. De stof was verouderd en liep minstens vijftig jaar achter op de levende wiskunde. De stof waar de leerlingen nu op getraind werden was waardeloos en werd elk jaar weer aangevuld met nieuwe nutteloze ballast: de examenopgaven van het jaar ervoor.

Met een verbetering van het wiskundeprogramma zijn we er nog lang niet, al zijn heel wat leraren overtuigd, dat hun onderwijs vruchtbaarder zou zijn, als de drill op examenacrobatiek verdween.⁶⁹

Een belangrijker kwestie bleef volgens Freudenthal onaangeroerd: hoe kon het, dat intelligente mensen moeite hadden met de wiskunde?

Dat uit te zoeken is een urgente taak voor paedagogen en psychologen. En zolang we hierop geen antwoord krijgen, kunnen we niets anders doen dan door blijven te borduren op een oude traditie, die eist dat een middelbare scholier wiskunde leert. Het blijft een sukkelen, zeer ten spijt van allen, die met het wiskunde-onderwijs te maken hebben.⁷⁰

Desondanks deed Freudenthal wel mee met dit ‘sukkelende’ en werkte hij vlijtig aan het ontwerpen van het leerplan. Dit paste ook wel bij zijn houding: ook wanneer hij het ergens niet helemaal mee eens was, bleef hij toch betrokken om zo het één en ander nog te kunnen sturen en in ieder geval zijn invloed te laten gelden.

In 1953 verscheen in *Vernieuwing* het artikel ‘De programma’s wiskunde voor Gymnasium B en HBS B’. Dit was een uitgebreide en een op kleine punten aangepaste versie van de inleiding die Freudenthal in 1950 als algemene inleiding voor het ontworpen leerplan had geschreven.⁷¹ Dezelfde inleiding, gevolgd door het ontwerp-leerplan, verscheen niet veel later in *Euclides*. Wansink schreef er een inleiding over het werk van de werkgroep bij. Dit was nodig had hij gemerkt, want:

Telkens weer blijkt me in gesprekken, dat er omtrent die werkgroep misverstanden bestaan, die soms hardnekkig van aard zijn. Te gemakkelijk wordt de groep soms ver-

68 Jacobs aan Freudenthal, 22 januari 1950; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 42. Zie ook de conceptversies van de inleidingen in Freudenthals aantekeningenboekjes; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 755 en 499.

69 Hans Freudenthal, ‘En nu ... de wiskunde’, *De Groene Amsterdammer* (2 december 1950); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1439.

70 Ibid.

71 ‘De programma’s wiskunde voor Gymnasium B en HBS B’, *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 11 (1953) 216-218. Zie ook de conceptversies van de inleidingen in Freudenthals aantekeningenboekjes; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 755 en 499.

eenzelvigd met één of met enkele harer leden. De invloed van enkele buiten het v.H.M.O. staande medewerkers wordt dikwijls verkeerd aangeslagen; van de ideeën die in de groep leven, wordt soms, door emotionele remmingen, niet of ternauwernood kennis genomen.⁷²

Gezien het effect dat Freudenthal met zijn uitspraken (zoals die over het mechanicaonderwijs) had, leek het voor de hand te liggen, dat Wansink het hier over Freudenthals invloed had.

Wansinks inleiding over de geschiedenis en het werk van de werkgroep werd gevolgd door de inleiding (‘Algemene Inleiding’) van Freudenthals hand bij het ontworpen wiskundeprogramma. Hierin werden de werkwijze en de uitgangspunten van de werkgroep uiteengezet. Het voornaamste punt van kritiek op het vigerende leerplan was de overwoekering van bepaalde gebieden met tweederangs leerstof. Daarnaast was een belangrijk motief voor herziening de overbelasting der leerlingen, zoals die onder andere was gebleken uit onderzoek van het Paedagogisch Instituut te Utrecht.⁷³ Freudenthals klacht zoals hij die in *De Groene Amsterdammer* formuleerde, klonk door in de volgende formulering:

We weten wel, dat op het ogenblik nog vrijwel alle gegevens ontbreken voor een wetenschappelijk-paedagogisch gefundeerd programma voor het onderwijs in de Wiskunde en we hebben dit gebrek dan ook tijdens onze besprekingen sterk gevoeld. Aan de andere kant is de behoefte aan herziening zo urgent, dat doortastende maatregelen niet mogen worden uitgesteld.⁷⁴

Het belangrijkste criterium bij het samenstellen van het leerplan was het praktisch nut van de wiskunde als hulpvak in tal van schoolvakken, studies en beroepen.

Het criterium van het praktisch nut nu heeft geleid tot gevoelige schrappingen vooral in de Algebra en tot een drastische schrapping in de thans gedoeerde trigonometrie. Deze twee gebieden zijn immers overwoekerd door leerstof, die geen enkel verband meer houdt met welke praktijk dan ook en die geheel is geabsorbeerd door een op zichzelf wenselijke, maar in feite verkeerd gerichte routine.⁷⁵

Het was voor het eerst dat in het wiskundeonderwijs zo nadrukkelijk voor het argument ‘praktisch nut’ en ‘aansluiting bij de praktijk’ boven dat van de vormende waarde werd gekozen. Aangezien dit criterium in de algemene inleiding zo expliciet werd vermeld, was er blijkbaar voldoende draagvlak – althans binnen de 128 le-

72 Wansink, ‘De Wiskunde-Werkgroep van de w.v.o.’, *Euclides* 28 (1953) 197-205.

73 Bedoeld werd het onderzoek door Bunt onder wiskundeleraren van het vHMO, waarbij de conclusie luidde dat het leerplan zoals het nu was ernstig overladen was; L.N.H. Bunt, *De leerstof van ons wiskundeonderwijs. Een onderzoek naar opvattingen en gebruiken dienaangaande* (Groningen 1949).

74 ‘Het wiskunde-programma voor het v.H.M.O. Een ontwerp van de Wiskunde-Werkgroep van de w.v.o.’, *Euclides* 28 (1953) 206-226, aldaar 208. Deze formulering komt dan ook bijna letterlijk overeen met de concept-versie van deze inleiding in een aantekeningenboekje van Freudenthal; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 755.

75 ‘Het wiskunde-programma voor het v.H.M.O.’, *Euclides* 28 (1953) 208.

den van de ww – voor dit uitgangspunt, een geheel andere situatie dan die waarin Van Dantzig een kleine dertig jaar eerder dit standpunt verkondigde.

Differentiaal-, integraal- en waarschijnlijkheidsrekening en statistiek waren op grond van datzelfde praktische nut aan de leerstof toegevoegd. Een uitzondering had de werkgroep gemaakt voor de meetkunde:

Ook zonder diep in te gaan op de vraag, in hoeverre het meetkundig-onderwijs vormende waarde (b.v. voor de ontwikkeling van het denken of van het ruimte-inzicht) bezit, hebben we, met het oog op de culturele betekenis van dit vak, gemeend, dat een scherpe breuk met de traditie niet verantwoord was. Het is de leidende bedoeling van het voorgestelde meetkundeprogramma, om de leerling inzicht te geven in een logisch opgebouwd systeem, dat zekere afgerondheid bezit; omwegen en afdwalingen worden dus zoveel mogelijk vermeden.⁷⁶

Een ander omstreden punt was de beschrijvende meetkunde, waarvoor uiteindelijk toch nog een plaatsje was ingeruimd in het HBS-programma. Groot voorstander van handhaving van de beschrijvende meetkunde was Wansink. Freudenthal was één van de tegenstanders. In zijn ogen was de beschrijvende meetkunde “een vak, geïsoleerd van alle andere onderdelen der wiskunde, van de natuurwetenschappen en de techniek”.⁷⁷ De enige reden waarom het vak volgens hem nog op de HBS werd gehandhaafd, was “omdat de stereometrie zover is uitgedijd, dat veel leerlingen geen voldoende in meetkunde meer zouden halen, indien het zeer gemakkelijke onderdeel “beschrijvende meetkunde” zou vervallen”.⁷⁸

Als laatste punt van de inleiding werd het vraagstuk van de examenopgaven genoemd. De werkgroep keurde de overbelasting van de leerlingen door het introduceren van telkens nieuwe typen examenopgaven af en pleitte voor een groter aantal enkelvoudige, eenvoudige en van elkaar onafhankelijke opgaven op het examen. Ook in dit punt klonk Freudenthals mening door. In *De Groene Amsterdammer*, maar ook in *Vernieuwing*, klaagde hij geregeld over onzinnige examenopgaven en het nutteloze ‘drillen’ van de leerlingen in technieken om elk jaar meer en ingewikkeldere typen opgaven op te leren lossen, met als gevolg dat de examens de leerstof bepaalden in plaats van andersom.⁷⁹

De werkgroep zag geen reden, waarom het wiskundeprogramma voor HBS-B en dat voor gymnasium- β van elkaar zouden moeten verschillen, maar:

⁷⁶ Ibid., 209.

⁷⁷ Freudenthal, ‘Het mechanica-vraagstuk’, *Nieuwe wegen* 24.

⁷⁸ Hans Freudenthal, ‘Examens en leerstof’, *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 10 (1952) 193-198; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 765.

⁷⁹ Hans Freudenthal, ‘Zwaardere eindexamens?’, *De Groene Amsterdammer* (23 september 1950); Hans Freudenthal, ‘Examens en leerstof’, *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 10 (1952) 193-198; Hans Freudenthal, ‘De kinderexamens’, *De Groene Amsterdammer* (16 augustus 1952); Hans Freudenthal, ‘Hoe oud is Maria?’, *De Groene Amsterdammer* (23 mei 1953); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 1435, 765, 1464, 1478.

Onze pogingen, om tot een uniform programma te geraken zijn gestrand, toen ten slotte bleek, dat de verwezenlijking ervan te ingrijpende wijzigingen in de programma's veronderstelde. We hebben derhalve getracht, de programma's enigszins naar elkaar toe te buigen, in de hoop, hierdoor de algehele gelijkschakeling op een later tijdstip voor te bereiden.⁸⁰

Op de HBS stelde de werkgroep daarom invoering van analytische meetkunde en op het gymnasium invoering van constructieve meetkunde voor.

Als het hier gepresenteerde leerplan tot verlichting van het programma zou leiden, dan zou deze vrijgekomen tijd aan methodische verbetering van het wiskundeonderwijs moeten worden besteed. Zeer zeker lag het niet in de bedoeling van de werkgroep, het aantal lessen te doen verminderen. Na deze algemene inleiding volgden de rapportages van de commissies algebra, meetkunde, analytische meetkunde, goniometrie en beschrijvende meetkunde, met een meer gedetailleerde uitwerking van de voorgestelde leerstof per onderwerp.

Een directe reactie op het voorstel van de werkgroep in *Euclides* bleef uit. Indirect was er misschien wel een reactie: op de WIMECOS-jaarvergadering op 2 januari 1954 besloot het bestuur van WIMECOS met medewerking van LIWENAGEL een commissie in te stellen die "over de gehele materie van leerstof- en eindexamenprogramma rapport zou hebben uit te brengen".⁸¹ Deze commissie bestond uit de heren Alders, Holwerda, Bunt, Vredenduin en Wansink (voorzitter), van wie de laatste drie ook actief waren geweest in vier van de vijf werkgroepcommissies (te weten de commissies algebra, meetkunde, analytische meetkunde en beschrijvende meetkunde). Nog geen jaar later presenteerde deze commissie haar programma's.

De commissie benadrukte in haar rapport, dat veel voorbereidend werk al was verricht door ondermeer de Wiskunde Werkgroep en dat de door haar hier voorgestelde programma's "niet los gezien mogen worden van het vele werk dat elders is verzet".⁸² In grote lijnen leken de twee leerplannen dan ook erg op elkaar. Ook in het WIMECOS-programma lag de nadruk op het 'snoeien' van de leerstof, het invoeren van nieuwe onderdelen als statistiek, differentiaal- en integraalrekening met het oog op het 'praktisch nut' en was het uitgangspunt 'vormende waarde' ook hier naar de achtergrond geschoven (zo stelde de commissie een empirische en intuïtieve inleiding voor het onderwijs in de vlakke meetkunde voor). Verder hekelde de commissie in haar rapport de tendens van de jaarlijks technisch steeds gecompliceerder wordende eindexamenopgaven en steunde zij het ww-standpunt op dit punt door voor de eindexamens de voorkeur te geven aan "een groter aantal enkelvoudige, eenvoudige, van elkaar onafhankelijke vraagstukken [...] boven een kleiner aantal gecompliceerde moeilijker opgaven, waarbij soms zelfs een volgend onderdeel niet kan

80 'Het wiskunde-programma voor het v.H.M.O.', *Euclides* 28 (1953) 206-226, aldaar 210.

81 'Rapport van de leerplan-commissie-1954 van WIMECOS inzake het opstellen van een ontwerp-leerplan en een ontwerp-eindexamenprogramma voor wiskunde voor de H.B.S.-B', *Euclides* 30 (1955) 149-176, aldaar 150.

82 *Ibid.*, 151.

worden gemaakt als het voorafgaande is mislukt”.⁸³ Opvallend was dat terwijl de ww in haar voorstellen de beschrijvende meetkunde nog wilde behouden (zij het gedeeltelijk en onder de naam ‘constructieve meetkunde’), de WIMECOS-commissie voorstelde dit onderdeel, drastisch gereduceerd, onder te brengen bij de stereometrie.

Dat bij de samenstelling van het voorstel de WIMECOS-commissie de samenwerking met de ww met opzet had vermeden, bleek wel uit de woorden van Wansink, de voorzitter van de WIMECOS-commissie:

De wvo, die zo doortastend voor vernieuwingen had gepleit, was buiten ons commissiewerk gehouden, omdat samenwerking er maar op grote weerstanden zou zijn gestuit. Toch heeft het me grote voldoening gegeven dat enige belangrijke ideeën van de wvo in het commissierapport ingang hebben kunnen vinden.⁸⁴

Bij sommige werkgroepleden viel dat niet goed. Zo vertelde Van Hiele over de gang van zaken:

En het [ww-voorstel] was nog maar net uitgekomen, of Wansink en Vredenduin gingen in een commissie zitten van WIMECOS en LIWENAGEL. Ze kwamen later met een eigen programma, en er werd over de Wiskunde-Werkgroep niet meer gepraat. Wel werd gesteld dat we dat ‘WIMECOS-programma’ maar moesten slikken, omdat het niet veel van het andere verschilde. Maar die link werd niet eerlijk, niet openlijk gelegd. Ik heb dat nooit erg fijn gevonden, maar goed.⁸⁵

Toch stemde de werkgroep met de voorstellen in. Nadat het programma op een buitengewone algemene vergadering van WIMECOS door de aanwezigen aangenomen was schreven Freudenthal en Jacobs namens de ww in een adres aan de minister van OK&W en de inspecteurs van het VHMO:

Zij [de ww] is verheugd over de moed van de voorbereidende Commissie en van de leden van WIMECOS, die niet teruggeschrikt zijn voor fundamentele wijzigingen van het thans vigerende programma. Van harte betuigt zij haar instemming met het ontwerp-programma van WIMECOS. Zij geeft er haar medewerking aan door een didactisch onderzoek in te stellen naar de middelen om het te verwezenlijken. Op de najaarsconferentie van de Wiskunde-werkgroep zullen fundamentele problemen van dit programma worden behandeld en detailvragen zullen op de maandelijkse bijeenkomsten ter sprake komen.⁸⁶

Door het – tot grote ergernis van Freudenthal – samenvallen van de vakantiecursussen van het Mathematisch Centrum (waar ook de bespreking van het nieuwe leerplan als onderwerp gekozen was) met het geplande weekend van de werkgroep zou de Wiskunde Werkgroep er uiteindelijk van afzien dit onderwerp te behandelen.⁸⁷

83 Ibid., 157.

84 Interview met Wansink in: Goffree, *Ik was wiskundeleraar* 93.

85 Interview met P.M. van Hiele in: *ibid.*, 123.

86 ‘Adres van de Wiskunde-werkgroep van de w.v.o. inzake het ontwerp-leerplan van WIMECOS’, *Euclides* 30 (1955) 202-203, aldaar 202-203.

87 Uiteindelijk zal dan ook slechts een derde van het gebruikelijke aantal deelnemers op de weekendcon-

Freudenthal leek het min of meer buitenspel zetten van de werkgroep door de lerarenverenigingen sportief op te vatten en gunde WIMECOS het met hun leerplan behaalde succes. Dat het ww-leerplan vergeten werd, vond hij niet erg:

Wat zou het lot zijn van dat programma, waaraan vier jaren moeite was besteed? Welnu, het is begraven, en het mag begraven blijven, al staan er lezenswaardige dingen in van betrekkelijke eeuwigheidswaarde. En dat is goed zo, want er zijn nu eenmaal zaken, die gedaan worden met het doel zichzelf overbodig te maken.⁸⁸

Het belangrijkste was voor hem dat er, ook al was het impliciet, eindelijk daadwerkelijk iets zou gebeuren met het werk en de ideeën van de werkgroep. En dat was gelukt nu WIMECOS met de voorstellen voor een nieuw programma was gekomen.

Een programma, niet minder revolutionair dan dat, waar de wiskunde-werkgroep van de “vernieuwing” trots op was. Ook vernieuwing is een relatief begrip. De vernieuwers van nu zijn gedoemd de behoudenden van straks te zijn. Vernieuwers zijn die mensen, die zich ex officio overbodig maken.⁸⁹

Punt voor punt prees Freudenthal in dit artikel de veranderingen in het programma zoals WIMECOS dat voorstelde en benadrukte nogmaals de moed van de vereniging om, ondanks de vele discussies die het voorstel had veroorzaakt, voor dit programma te kiezen. Vooral van het besluit tot (her)invoering van de statistiek, de differentiaal- en integraalrekening en de analytische meetkunde was Freudenthal zeer onder de indruk.

Men kan gemakkelijk zeggen, dat alles wat in dit programma wordt voorgesteld, dringend noodzakelijk en niet meer te vermijden is. Maar hoeveel sectoren zijn er niet van onze samenleving, waar de problemen even urgent zijn en de menselijke traagheid schier onoverwinnelijk is?⁹⁰

Een “kloek besluit”, jubelde hij verder, ingegeven door “moed en zelfvertrouwen en de ernstige wil, een flinke stap te doen naar beter wiskundeonderwijs” en brekend met een negentig jaar oude, vertrouwde traditie. Vol hoop voor de toekomst besloot hij zijn betoog. Als dit programma aanvaard werd, begon het werk om inhoud te geven

... aan een programma, dat niet, zoals veelal, vijftig jaar achter de feiten aanholt. Niet voor de school, maar voor het leven – mogen we dan zeggen en met “leven” dan niet dat van onze grootouders bedoelen, maar de wereld van vandaag.⁹¹

ferentie van de werkgroep komen opdagen; Hans Freudenthal, ‘Ons weekend’, *Mededelingenblad van de Wiskunde Werkgroep der w.v.o.* (1955); Alberts e.a., red., *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen* 119.

88 Hans Freudenthal, ‘Naar een nieuw wiskunde-onderwijs’, *De Groene Amsterdammer* (2 april 1955); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1513.

89 Ibid.

90 Ibid.

91 Ibid.

Toen ook de lerarenvereniging LIWENAGEL het programma goedgekeurd had, stond weinig de invoering ervan nog in de weg. Met enkele wijzigingen (zo vervielen door vrees voor overlading uiteindelijk toch de statistiek en de beschrijvende meetkunde) zou het nieuwe leerplan voor HBS én gymnasium met ingang van 1 september 1958 van kracht worden.⁹² Zo had Freudenthal zonder dat zijn naam, of zelfs maar die van de WW, ermee geassocieerd werd voor het eerst indirect voet aan de grond gekregen met zijn ideeën binnen het wiskundeonderwijs.

6.4 Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek: een studieboek

Nu de praktische toepasbaarheid van de te leren wiskunde op het VMO een steeds belangrijker uitgangspunt werd, kwamen ook de voor het onderwijs nieuwe vakgebieden waarschijnlijkheidsrekening en statistiek aan de orde. Onder leiding van Bunt werd begin jaren vijftig een proef met onderwijs in de statistiek voor gymnasium- α genomen, waarmee positieve resultaten waren behaald.⁹³ Nu het nut van de statistiek binnen het wiskundeonderwijs was bewezen, werd het vervolgens opgenomen in de door WIMECOS en LIWENAGEL voorgestelde leerplan-wijzigingen. Freudenthal was ook bij deze ontwikkeling betrokken. Zo werd hij in het voorwoord van het verslag van Bunts proefneming bedankt voor het lezen van het manuscript en het geven van adviezen.⁹⁴

Begin januari 1955 schreef Freudenthal een brief naar de uitgeverij Erven F. Bohn NV met het voorstel om voor de reeks 'Volksuniversiteits-Bibliotheek' een deeltje te schrijven over de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek. De redactie ging enthousiast op zijn voorstel in. Vóór het einde van hetzelfde jaar had Freudenthal de eerste versie af. In 1957 zou het boekje uiteindelijk als het 57e nummer in de reeks verschijnen, tussen *Latijnse letterkunde* van H.H. Janssen (nr 56) en *Het ontstaan van het zonnestelsel* van H.P. Berlage.⁹⁵

Het onderwerp statistiek en waarschijnlijkheidsrekening was dan ook bepaald niet nieuw voor Freudenthal. Zo had hij eind jaren veertig samen met J. Sittig aan de ontwikkeling van een maatsysteem voor confectiekleding gewerkt in opdracht van De Bijenkorf.⁹⁶ Enkele jaren later werd Freudenthal gevraagd mee te werken

92 Van het vak statistiek bleef wel iets over: 'beginselen van de statistiek' werd een keuzevak voor gymnasium- α , afgesloten met een mondeling examen; Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraars*. Deel III 270.

93 L.N.H. Bunt, *Statistiek als onderwerp voor het gymnasium A. An investigation into the possibilities of teaching descriptive and elementary mathematical statistics in secondary schools* (Groningen 1956); L.N.H. Bunt, *Statistiek als onderwerp voor het gymnasium A. Verslag van een proefneming. A Inrichting en resultaten van het onderzoek* (Groningen 1957).

94 Ibid.

95 Correspondentie tussen Erven F. Bohn en Freudenthal, 1955; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 29.

96 Correspondentie tussen Freudenthal en J. Sittig van het Adviesbureau voor Toegepaste Statistiek, 1948; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 2; J. Sittig en H. Freudenthal, *De juiste maat. Lichaamsafmetingen van Nederlandse vrouwen als basis van een nieuw maatsysteem voor damesconfectie* (Leiden 1951).

aan de statistische verwerking van de resultaten van een ‘zeep-enquête’ door de firma Dobbelman n.v.⁹⁷ In de jaren 1952-1954 vervulde Freudenthal bij diverse enquêtes een adviserende taak voor deze firma. In 1952 verleende hij zijn medewerking aan de Rechter-Commissaris van het arrondissement Utrecht bij het vaststellen van de vraag “of de bij verdachte in beslaggenomen speelautomaat een zodanige is, dat het spelen daarmee een spel is, waarbij in het algemeen de kans op winst van het toeval afhangt, alsmede of, en in welke mate die kans toeneemt met de meerdere geoefendheid of de grotere behendigheid van den speler”.⁹⁸

Wat wél nieuw was voor Freudenthal was het schrijven van een boek in deze vorm. Natuurlijk was hij gewend dictaten te schrijven voor de colleges die hij gaf aan de universiteit, maar nooit eerder schreef hij een *studieboek* voor een algemener publiek.⁹⁹

Freudenthal was er van overtuigd, dat de statistiek onontbeerlijk was geworden in de maatschappij en dat het nut zeker niet beperkt bleef tot de verzekeringbranche en kansspelen:

Maar heden ten dage zijn statistieken en kansrekeningen niet meer een specialiteit van verzekeraars. Wil men tot een besluit komen, om de hoogte van onze dijken te bepalen, dan kan men niet wachten tot theorie en praktijk ver genoeg zijn gevorderd, om mathematisch streng de hoogst mogelijke waterstand uit te rekenen, maar men moet trachten uit de beschikbare gegevens conclusies te trekken, die met een zekere – zeer kleine – kans ook foutief zouden kunnen zijn. Medici kunnen niet wachten met het toedienen van nieuwe middelen en het toepassen van nieuwe operatiemethoden, tot er geen twijfel meer bestaat over hun uitwerking, maar ze moeten kansen kunnen nemen en bij die becijfering van die kansen zich kunnen laten helpen door de kansrekenaars of statistici.¹⁰⁰

Er waren dus redenen te over voor Freudenthal een meer algemeen publiek op de hoogte te stellen van de wiskundige kant van de statistiek. Het publiek dat Freudenthal bij het schrijven van *Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek* voor ogen stond, had minimaal een B-diploma van het VHMO, maar af en toe eiste hij toch iets meer van zijn lezers:

Ik vraag de lezer daarom dezelfde clementie, als die hij beoefent, wanneer hij een roman leest: af en toe, als het moet, wat bladzijden over te slaan.¹⁰¹

97 Correspondentie tussen Freudenthal en de Chem. Afd. van Dobbelman n.v., 1952-1954; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 24.

98 Correspondentie tussen Freudenthal en de Rechter-Commissaris belast met de strafzaken in het arrondissement Utrecht, 1952; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 64.

99 Eerder hield hij al voordrachten over de (geschiedenis van de) statistiek (zoals het meer populaire ‘De opkomst der statistische denkwijze in de moderne wetenschap’ voor Maatschappij Diligentia in 1951) en schreef hij over statistiek en kansberekening in *De Groene Amsterdammer*; Hans Freudenthal, ‘De opkomst der statistische denkwijze in de moderne wetenschap’, *Natuurkundige Voordrachten* 29 (1951) 57-65; Hans Freudenthal, ‘Op het telraam van het toeval’, *De Groene Amsterdammer* (11 juli 1953); Hans Freudenthal, ‘Jagerslatijn’, *De Groene Amsterdammer* (17 juli 1954); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 757, 1481, 1502.

100 Freudenthal, ‘Jagerslatijn’, *De Groene Amsterdammer* (17 juli 1954); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1502.

101 Hans Freudenthal, *Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek* (Haarlem 1957) v.

Het boek was dus zeker niet bedoeld als lesmateriaal voor het vHMO, noch voor een universitaire cursus, maar voor de enigszins wiskundig onderlegde, geïnteresseerde ‘leek’. In de praktijk zou het voornamelijk voor wiskundeleraren geschikt blijken. Zo werd het in 1966 gebruikt bij de heroriënteringscursussen die de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde voor leraren in het wiskundeonderwijs organiseerde. In het kader van Freudenthals didactische ideeën is het interessant het boek nader te bekijken.

Freudenthals intentie met het boek was in de eerste plaats het schrijven van een verzameling korte verhalen, bijeengebrachte onderwerpen uit de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek die hem “fundamenteel en interessant” leken. Bewijzen vermeed hij niet, want:

Met het begrip waarschijnlijkheid wordt tegenwoordig op zoveel gebieden gewerkt, dat menigeen er iets voor voelt, het fijne ervan te weten te komen. Ja, maar voor de wiskundige, die het hem moet uitleggen, is het fijne juist niet het resultaat en het recept, waar men iets mee kan beginnen, maar de wijze, waarop men aan resultaten en recepten komt. De wiskundige vraagt voor elke uitspraak een bewijs, niet omdat hij zijn collega’s niet vertrouwt, maar omdat veelal het bewijs het enige middel is, om te weten te komen, wat met de uitspraak is bedoeld. De bewijzen en redeneringen worden u daarom ook in dit boekje niet bespaard. Ook de formules niet. Er zijn er trouwens niet zo bijster veel, want er wordt veel geredeneerd in dit boekje, en dat geschiedt meestal zonder formules.¹⁰²

Het boek was opgebouwd uit negen hoofdstukken, variërend in lengte van 4 tot 37 bladzijden. In hoofdstuk 1, getiteld ‘Het vaasmodel’, bouwde Freudenthal, uitgaande van een slechts intuïtief ‘kans’-begrip bij zijn lezers, via definities en praktische voorbeelden een wiskundig begrippenapparaat met bijbehorende notatie op. Achtereenvolgens introduceerde hij termen als kans, de stochastische variabele x en het vaasmodel, waarna hij de lezers bij de hand nam en de diverse regels voor het rekenen met waarschijnlijkheden afleidde.

Elke definitie of regel werd gevolgd door een reeks voorbeelden, vaak met een hoog praktijk-gehalte en de nodige humor. Zo schreef hij na de uitleg van het vaasmodel:

De kans, om bij een sprong van de Domtoren te Utrecht de nek te breken, is praktisch 100%. – Een statistiek hieromtrent is mij niet bekend, maar ik kan er een maken. Ik gooi een honderdtal mensen van de toren (natuurlijk in gedachten, want na de eerste zou ik niet veel gelegenheid meer krijgen, de proef voort te zetten) en ga na of ze hun nek breken (in gedachten). Voor elk, die de nek breekt, werp ik een zwart balletje in de vaas, voor elk die het overleeft, een wit.¹⁰³

Na de voorbeelden volgen enkele opgaven, waarvan de antwoorden in een appendix te vinden waren.

¹⁰² Ibid., v.

¹⁰³ Ibid., 5.



Freudenthal geeft zijn voordracht 'Orde en wanorde' tijdens de 'Statistische dag 1960' van de Vereniging voor Statistiek (1960).

Freudenthal sprak zijn lezer continu toe. In de tekst en de opgaven zijn om de haverklap uitspraken te vinden als “Maar pas op!”, “Reken die uit, maar doe het handig!” of “Zoek dat uit!”.¹⁰⁴ Niet alle opgaven vereisten rekenwerk of wiskundige notaties. Vooral in de eerste hoofdstukken waren het vaak ‘doordenkers’, die de lezer bewust moesten maken van het verschil tussen het intuïtieve kansbegrip en het kansbegrip in de waarschijnlijkheidsrekening. Een mooi voorbeeld was de volgende opgave aan het eind van de paragraaf over voorwaardelijke waarschijnlijkheid:

Twee personen in een trein praten met elkaar. Ze komen bij een overweg. De één zegt: “De mensen, die op deze weg zijn aangewezen, zijn niet te benijden. De spoorbomen hier zijn praktisch altijd dicht. Ik kom hier sinds jaren dagelijks twee keer met de trein voorbij en heb ze nog nooit open gezien”. Wat heeft deze anekdote met het onderwerp te maken?¹⁰⁵

Van dergelijke typen opgaven gaf Freudenthal geen ‘antwoorden’. Wel gaf hij de antwoorden van de wat moeilijkere opgaven, overigens zonder uitleg of berekening. Vaak leken de opgaven zo op de voorafgaande door Freudenthal al uitge-

¹⁰⁴ Ibid., 7, 7, 13.

¹⁰⁵ Ibid., 21.

werkte voorbeelden dat ze voor de lezer goed te doen moesten zijn, zoals in de volgende opgave uit de paragraaf over het schatten van verwachtingen:

4.8.5. In een steekproef van 5001 Nederlandse vrouwen was het gemiddelde gewicht 66,75 kg en de steekproefstrooming hierop 10,91 kg. Welke uitspraak zal ik omtrent de gemiddelde Nederlandse vrouw doen?

x is het gewicht in kg, x' is het gewicht (in kg) in de steekproef.

$$Ex' = 66,75, \quad Dx' = 10,91,$$

$$\frac{1}{\sqrt{5001}} \sum_{i=1}^{5001} x_i = 66,75.$$

Dat is dus de maatstaf, waarmee ik moet rekenen. Ik kan bijvoorbeeld de uitspraak

$$Ex \geq 66 \text{ kg}$$

doen met dezelfde zekerheid als de uitspraak

$$Ez \geq z - 0,75/0,16,$$

d.w.z. $z \leq 4,5$.

($z =$ de-Moivre-stochastiek). Met welke waarschijnlijkheid op juistheid kan ik de uitspraak $Ex \geq 66,5$ doen? Welke uitspraken kan ik met een zekerheid van 95% doen? Beantwoord dit zelf!¹⁰⁶

De meeste opgaven stonden in de eerste vier hoofdstukken, waarin respectievelijk het vaasmodel, permutaties en combinaties, verwachting en strooming en de limietwetten behandeld werden. Deze hoofdstukken waren overigens moeilijk onafhankelijk van elkaar (of als 'losse verhalen') te lezen. Alleen al door de ingevoerde notatie bouwden ze op elkaar voort en vormden ze een eenheid.

De volgende hoofdstukken ('De kunst van het gissen', 'Spel, strijd en strategie', 'Stochastische processen', 'Waarschijnlijkheid in de natuurwetenschap' en 'Filosofie der waarschijnlijkheid') beantwoordden meer aan het doel dat Freudenthal in zijn voorwoord zei te willen bereiken, namelijk het schrijven van een verhalenbundel. Elk hoofdstukje bestond voornamelijk uit uitgewerkte en door de praktijk gegeven voorbeelden, waarbij Freudenthal zijn lezer aan de hand nam om samen, al beredenerende, de bijbehorende oplossing te vinden. In die zin was het meer een boek met informatie verstreckende dan didactische lading, ook al deed Freudenthal zijn best, de lezer actief bij de les te houden.

Dat Freudenthal met zijn boek de juiste toon en opzet had gekozen, bleek wel uit de lovende recensie die erover in *Euclides* verscheen. De recensent H.W. Lensstra benadrukte, naast het nut van de statistiek in de maatschappij, vooral de goede 'reclame' die Freudenthal met dit werk voor de wiskunde als vak had gemaakt:

Zo lijkt het mij van groot belang, dat een boekje, dat naar wij hopen in de handen van vele niet-wiskundigen zal komen, duidelijk demonstreert, dat de wiskunde geen "droog" vak is, dat de wiskundige zich niet alleen met abstracte redeneringen op-

¹⁰⁶ Ibid., 86-87. Bij het samenstellen van zijn opgaven gebruikte Freudenthal geregeld cijfermateriaal uit het onderzoek *De juiste maat*.

houdt, maar dat wel degelijk ook de humor om de hoek komt kijken en dat bij wiskundige beschouwingen en redeneringen ook zeker de *aesthetica* in het geding is. Naar mijn mening is prof. Freudenthal er bij uitstek in geslaagd deze elementen naar voren te doen komen.¹⁰⁷

Het boek kwam volgens Lenstra precies op tijd voor de wiskundedocent die straks misschien op het *VHMO* statistiek zou moeten onderwijzen – hoogstwaarschijnlijk een extra motivatie voor Freudenthal voor het schrijven ervan. De recensent beval het boek dan ook van harte aan bij de lezers van *Euclides*, “te meer daar de didactische gaven van de schrijver duidelijk uit de gehele opzet blijken en tot lering kunnen strekken”.¹⁰⁸ De verkoop van *Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek* verliep voorspoedig. In de loop der jaren zal het boek in verschillende talen vertaald worden en verschillende drukken kennen.

6.5 Paedagogums, paedagoochelaars en vakwetenschappers: de lerarenopleiding

Naast de vernieuwingspogingen voor het wiskundeonderwijs door het ontwerpen van een nieuw leerplan speelde ook de discussie over de invulling van de lerarenopleiding een belangrijke rol. Ook in het interbellum liepen dergelijke discussies parallel.¹⁰⁹ In de tussentijd was er weinig veranderd. In feite waren veel van de toen al gehoorde klachten nog steeds actueel.

Freudenthal had in zijn ongepubliceerde ‘Oude en nieuwe universiteiten’ al een eerste standpunt over de universitaire lerarenopleiding geformuleerd.¹¹⁰ Naast zijn onvermoeibare inspanningen voor invoering van het studieloon in de jaren vijftig ontwikkelde ook Freudenthal een uitgesproken mening over de invulling van de nu feitelijk nog ontbrekende universitaire lerarenopleiding. De voorstellen in het rapport van de commissie-Reinink voor invoering van een “leraarsdoctoraal” (waar Freudenthal indertijd ook voorstander van was) stuitte op zo’n heftig verzet van de kant van de leraren dat ze nooit werden doorgevoerd. Op 28 augustus 1952 werd wel bij Koninklijk Besluit vastgesteld dat de doctorandus om lesbevoegdheid te krijgen ten minste een jaar lang college gevolgd moest hebben in de pedagogiek, puberteitspsychologie en algemene didactiek en tevens moest hebben gehospiteerd voor een periode van ten hoogste zes maanden. Dit was nota bene in het interbellum al door de commissie-Beth voorgesteld.

Zo was de stand van zaken toen Freudenthal een dag voor het vaststellen van dit Koninklijk Besluit in Driebergen de lezing ‘Noodzakelijkheid en mogelijkheid van een leraarsopleiding’ hield op de landdag van het ‘Genootschap van leraren aan Ne-

¹⁰⁷ H.W. Lenstra, ‘Boekbespreking. Prof. Dr. Hans Freudenthal *Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek*’, *Euclides* 32 (1957) 248–249, aldaar 249.

¹⁰⁸ Ibid.

¹⁰⁹ Zie paragrafen 2.2.2 en 2.2.4.

¹¹⁰ Zie ook paragraaf 5.2.2.

Christelijk Schoolblad

NO. 1414000 No. 10
DONNERSDAG
7 MEI 1953
No. 105

VERSCHEMT WEEKLIJKS • UITGAVE VAN DINSCH EN KRISTEN N.V., BAARN
POSTBUS 1 • CIBO 2046 • TELEFOON 2345 (3 LIJNEN) KENGETAL K 204

ONZE VACATURES

Abonnement 12 f. (a halfjaar) inclusief verzendingskosten, voor de Adm. van Christ. Vakaturens Burea. Bestel naar adreess. Verkoop van postbussen van de Adm. van Christ. Vakaturens Burea.

VAKGELEERDE OF PAEDAGOOG? I. VROEGER

Waar is de vakgeleerde of de paedagoog? Het is een vraag die men zich kan stellen bij het nadenken over de opvoeding van de jongeren. Het is een vraag die men zich kan stellen bij het nadenken over de opvoeding van de jongeren. Het is een vraag die men zich kan stellen bij het nadenken over de opvoeding van de jongeren.

De vakgeleerde is een man die zijn kennis en kunde inzet voor de opvoeding van de jongeren. Hij is een man die zijn kennis en kunde inzet voor de opvoeding van de jongeren. Hij is een man die zijn kennis en kunde inzet voor de opvoeding van de jongeren.

De paedagoog is een man die zijn kennis en kunde inzet voor de opvoeding van de jongeren. Hij is een man die zijn kennis en kunde inzet voor de opvoeding van de jongeren. Hij is een man die zijn kennis en kunde inzet voor de opvoeding van de jongeren.

De vakgeleerde is een man die zijn kennis en kunde inzet voor de opvoeding van de jongeren. Hij is een man die zijn kennis en kunde inzet voor de opvoeding van de jongeren. Hij is een man die zijn kennis en kunde inzet voor de opvoeding van de jongeren.

De paedagoog is een man die zijn kennis en kunde inzet voor de opvoeding van de jongeren. Hij is een man die zijn kennis en kunde inzet voor de opvoeding van de jongeren. Hij is een man die zijn kennis en kunde inzet voor de opvoeding van de jongeren.

Waar is de vakgeleerde of de paedagoog? Het is een vraag die men zich kan stellen bij het nadenken over de opvoeding van de jongeren. Het is een vraag die men zich kan stellen bij het nadenken over de opvoeding van de jongeren. Het is een vraag die men zich kan stellen bij het nadenken over de opvoeding van de jongeren.

De vakgeleerde is een man die zijn kennis en kunde inzet voor de opvoeding van de jongeren. Hij is een man die zijn kennis en kunde inzet voor de opvoeding van de jongeren. Hij is een man die zijn kennis en kunde inzet voor de opvoeding van de jongeren.

Wat is het geheim van succes? Het is de goede vaart. Het is de goede vaart. Het is de goede vaart.

"Goede Vaart"

De goede vaart is de sleutel tot succes. Het is de sleutel tot succes. Het is de sleutel tot succes.

LUCTOR N.V. - Boorn

Kleine kroniek

De kleine kroniek is een overzicht van de gebeurtenissen van de afgelopen tijd. Het is een overzicht van de gebeurtenissen van de afgelopen tijd. Het is een overzicht van de gebeurtenissen van de afgelopen tijd.

DER NATUREN BLOEME

De bloemen van de natuur zijn een prachtig tafereel. Ze zijn een prachtig tafereel. Ze zijn een prachtig tafereel.

De bloemen van de natuur zijn een prachtig tafereel. Ze zijn een prachtig tafereel. Ze zijn een prachtig tafereel.

De bloemen van de natuur zijn een prachtig tafereel. Ze zijn een prachtig tafereel. Ze zijn een prachtig tafereel.

Freudenthals voordracht over de lerarenopleiding verscheen uiteindelijk als 'Vakgeleerde of paedagoog?' in *Christelijk Schoolblad* (1953).

derlandse gymnasia en lycea'. Over de indruk die hij daar gemaakt moest hebben schreef hij later:

Bominslag? Knuppel in het hoenderhok? Nee – dat werd het pas in de verslagen van de grote pers. Ik denk veeleer dat ze me aanzagen voor een wildeman, een clown, een op effectbejag verzotte demagoog [...] De secretaris schreef me later mijn lezing toch maar liever niet te publiceren, omdat 'niemand van de leden erom gevraagd had'.¹¹¹

Bijna een jaar later verscheen de lezing alsnóg in drie afleveringen in het weekblad *Christelijk Schoolblad*. Onze *vacatures* onder de titel 'Vakgeleerde of paedagoog?' In dit artikel benadrukte Freudenthal de absurditeit van het bestaande systeem. De pas afgestudeerde was gerechtigd onderwijs te geven: niet in de leerstof zoals die hij op de universiteit heeft geleerd, maar in:

... hetgeen de jongeman, voor hij de Alma Mater omhelsde, heeft opgedaan, en wat vijf à zes jaar in zijn hersens heeft gesluimerd en nu ontwaakt. Hij heeft ondertussen geleerd "boven de schoolstof te staan". Op Eiffeltorenhoogte, vanwaar alles beneden bespottelijk klein lijkt, en nu gaat hij met de lift naar de begane grond, om in het vervolg op te kijken tegen de Eiffeltoren van de wetenschap. Wel, mocht hij tijd en geld hebben, om eens een entréé-kaart [sic] te kopen, dan mag hij ook weer eens een keer naar het hoogste platform reizen.¹¹²

Dergelijke misstanden waren al door bijvoorbeeld Dijksterhuis in 1926 gesignaleerd.¹¹³ Maar Freudenthal ging verder. De oorzaak lag volgens Freudenthal in de overheersende angst voor de "paedagogums en paedagoochelaars", die de vakwetenschap zouden kunnen besmetten. De universiteiten leidden niet op tot leraar en daar zat de fout: een leraar moest in de eerste plaats als leraar worden opgeleid. Toch zag Freudenthal de toekomst nog niet zo somber in:

We beschouwen het thans als vanzelfsprekend, dat een toekomstige arts voor arts wordt opgeleid, en over enkele tientallen jaren zal de opleiding voor leraar even vanzelfsprekend zijn. De hoogmoedige grapjes over paedagogums en paedagoochelaars zullen we dan even weinig begrijpen als die der 18e eeuwse artsen over de chirurgijnen en die der 19e eeuwse artsen over hun collega's-gynaekologen, die als een raar soort mannelijke vroedvrouwen met de nek worden aangezien.¹¹⁴

Vervolgens weerlegde Freudenthal de twee meest gehoorde argumenten die de pogingen om een lerarenopleiding in het universitaire programma te passen tot nu toe hadden doen stranden. Allereerst was er het argument dat verlaging van de vakwetenschappelijke eisen de maatschappelijke waardering van het beroep leraar zou schaden. Dat was onzin volgens Freudenthal, want:

¹¹¹ Freudenthal, *Schrijf dat op*, *Hans* 361-362.

¹¹² Hans Freudenthal, 'Vakgeleerde of paedagoog?', *Christelijk Schoolblad*. *Onze vacatures* (7 mei 1953, 15 mei 1953, 21 mei 1953); zie ook: RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 779, 780.

¹¹³ Dijksterhuis, 'Beschouwingen over de universitaire opleiding tot leraar in wis- en natuurkunde', *Bijvoegsel 2* (1925-1926) 81-95.

¹¹⁴ Freudenthal, 'Vakgeleerde of paedagoog?'; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 779, 780.

Een maatschappelijke waardering voor de leraar, die men meent te moeten redden, bestaat in 't geheel niet. In elk geval is de leraar de minstgewaardeerde onder alle academisch gevormden. En dat in een tijd, dat warme paedagogische belangstelling overal te bespeuren is. Daar klopt iets niet – zou ik zeggen.¹¹⁵

Volgens Freudenthal wist de meerderheid der leraren minder over wat er in de pedagogische wereld omging dan elk opvoedkundig belangstellend ouderpaar.

En nog erger: een kleine minderheid weet er net genoeg van af, om de hele wetenschappelijke paedagogiek als poespas en de paedagogisch geïnteresseerden onder de ouders als paedagogums te kwalificeren. Mogen we er ons over verbazen, dat de leeraarstand zo laag gewaardeerd wordt?¹¹⁶

Ook de slechte leerboeken (“prullen” noemde Freudenthal ze), waarvan sommigen al aan hun twintigste of dertigste druk toe waren, droegen bij aan het negatieve imago van de leraren. Zo noemde hij als voorbeeld een leerboek “van een moderne taal” dat zijn vrouw enige tijd geleden analyseerde en waar je zelfs zonder zes jaar studie moeiteloos ontelbare blunders uit kon halen.¹¹⁷

Het tweede veelgehoorde argument was de didactische waarde van de vakwetenschappelijke vorming van de aanstaande leraar aan de universiteit. Volgens Freudenthal was deze vormende waarde nihil. De steeds verdergaande specialisatie in de wetenschap maakte dat er keuzes gemaakt moesten worden. Binnen de β -studies was opleiden voor ‘all-round’-wetenschappers, ook binnen één vakgebied, niet meer mogelijk.

U ziet: van het befaamde “boven de stof te kunnen staan, dank zij de universitaire opleiding” is hier geen sprake meer; er is niets dan een technische opleiding in een zeer bepaalde richting. Ik beweer, dat ook waar dit nog niet het geval is, de Eiffeltorenhoogte van de universitaire opleiding geen uitkijkpost is, om de schoolstof te overzien. Voor wie iets van psychologie afweet, spreekt dit haast vanzelf. Transfer of training tussen verwijderde gebieden is er niet zonder meer. Wetenschappelijk kritisch besef op het ene gebied verworven is misschien voor overdracht vatbaar; maar wil dat zo zijn, dan moet die overdracht zelf worden geoefend.¹¹⁸

Hoe de lerarenopleiding er dan wel precies uit moest zien, wist Freudenthal ook niet te vertellen. Maar hij zag wel hoe een verandering teweeg gebracht moest worden. De afwachtende houding moest doorbroken worden vanuit en door de leraren zelf.

115 Ibid.

116 Ibid.

117 Naar aanleiding van de kritiek die Freudenthal en zijn vrouw in de jaren 1949-1950 op het door hun oudste zoon gebruikte boek voor Engels leverden, werd dit boek door de school vervangen; correspondentie tussen de rector van het Nieuwe Lyceum in Bilthoven, 1949-1950; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 175.

118 Freudenthal, ‘Vakgeleerde of paedagoog?’, RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 779, 780.

De universiteiten moesten, zolang ze nog geen leraren konden opleiden, belangstelling opwekken voor de didactische, pedagogische, psychologische en sociologische problemen van het leraarschap en hierover kennis doorgeven. Zo ontstond een nieuwe generatie leraren die kon bijdragen aan de ontwikkeling tot een wetenschap van het leraar-zijn en leraar-worden, door “in hun werk als leraar een uitgangspunt te zoeken voor wetenschappelijke activiteit”. Dit ‘werken aan een wetenschap van wiskundeonderwijs’ in en door de praktijk was een uitgangspunt dat in Freudenthal’s latere werk veel nadrukkelijker naar voren zou komen. Hier is de eerste voorzichtige aanzet ervan te vinden.¹¹⁹

Het ontwikkelen van een vakdidactiek – een term, die Freudenthal hier overigens nog niet expliciet gebruikte, maar wel omschreef – als wetenschap was een dringende noodzaak volgens hem:

Ik zou het normaal vinden als iedere leraar promoveerde, en wel over die problemen, die hem van het meest nabij raken: die van het leraarschap. Ze zouden voorlopig niet uitgeput raken. We weten van geen onderdeel van de schoolstof óf, wanneer en hoe het zou moeten onderwezen worden. We weten niet wat voor allen en wat voor enkelen geschikt is, we kennen van ons onderwijs geen enkele der psychologische en sociale drijfveren en consequenties, en dat nog niet alles op losse schroeven staat, vindt zijn oorzaak alleen hierin, dat al die schroeven vastgeroest zijn.¹²⁰

Freudenthal was achteraf blij dat de splitsing van de wetenschappelijke opleiding in een research- en een lerarenvariant zoals voorgesteld door de commissie-Reinink niet door was gegaan: het was in zijn ogen toch geen echte lerarenopleiding geweest en had (betere) toekomstige ontwikkelingen alleen maar voortijdig afgesneden.¹²¹

De beste oplossing zag Freudenthal nu in het verbinden van de onderwijsbevoegdheid aan slechts die doctoraalexamens waarbij een der bijvakken “paedagogiek en didactiek” was, zodat de aandacht van de aanstaande leraar naar de problemen van het leraarschap geleid werd. Daarnaast zou er een hoofdvak “paedagogiek” moeten worden ingesteld in de wis- en natuurkunde, zodat de kandidaten in staat waren zich intensiever aan opvoedkundige zaken te wijden zonder de onderwijsbevoegdheid in een wis- of natuurkundig bijvak mis te lopen. De hoofdzaak was dat de student op de hoogte gebracht werd van het bestaan van een wetenschappelijke opvoedkunde, zodat hij hiervoor belangstelling kreeg – ‘op hoop van zegen’, want als een echte voorbereiding op het leraarschap beschouwde Freudenthal het niet. Daarnaast moest de student zo vroeg mogelijk in contact worden gebracht met kin-

119 Ibid. In *Weeding and sowing* zette Freudenthal zijn gedachtegang over het ontwikkelen van een wetenschap van wiskundeonderwijs verder uiteen. Het werk van het rowo in de jaren zeventig was er min of meer een concrete invulling van.

120 Ibid.

121 Ibid. Dit zag hij eind jaren veertig nog wel als een aanvaardbaar alternatief voor de bestaande situatie: zie bijvoorbeeld: Hans Freudenthal, ‘Voorstellen tot reorganisatie van het Hoger Onderwijs in de Wiskunde’, 4 december 1947, 4 pagina’s; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 475, of de discussie in *Euclides*: Hans Freudenthal, ‘De algebraïsche en analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde’, *Euclides* 24 (1948) 106-121, aldaar 120-121.

deren in en buiten schoolverband, en wel het liefst in de vorm van pedagogische research. Zolang dit nog niet verwezenlijkt was, was een steeds verdergaande scheiding tussen vakwetenschappelijke en pedagogische functies aan scholen het gevolg.

Inmiddels kan men er zeker van zijn, dat de lerarenstand elk jaar weer een jaar achterraakt bij een maatschappij, waarin de belangstelling voor alle paedagogische problemen groeiende is.¹²²

Zo sloot Freudenthal dit artikel af.

Van de maatregelen zoals die een dag later in het Koninklijk Besluit vastgelegd werden was hij niet onder de indruk, zo hield hij zijn lezerspubliek van *De Groene Amsterdammer* voor. Toch was het een (zij het kleine) stap in de goede richting, maar nog niet op de manier zoals Freudenthal het had willen zien:

Is dit K.B. nu iets om over te juichen? Ja, voorzover eindelijk de noodzakelijkheid van een leraarsopleiding officieel is erkend.¹²³

Ook in dit artikel benadrukte hij nogmaals het gevaar van splitsing tussen vakwetenschappers en pedagogen, die volgens hem onvermijdelijk ging komen. Hij was bang dat het effect van het Koninklijk Besluit uiteindelijk slechts negatief zou blijken:

Ik vrees, dat er niet veel meer aan te doen is. Zolang er in 't geheel geen leraarsopleiding was, stonden we sterk met onze eisen, er één in te stellen. We hebben nu een noodoplossing gekregen. Aan noodoplossingen pleegt een lang en taai leven beschooren te zijn.¹²⁴

In 1955 werd bij Koninklijk Besluit de didactische scholing voor alle vakken waarvoor onderwijsbevoegdheid werd verlangd verplicht gesteld (ook voor de middelbare akten). Ook was de periode waarin gehospiteerd diende te worden vastgesteld op minimaal drie tot zes maanden. In Utrecht was het hoogleraar M.J. Langeveld op wiens gezag de eerste algemene didactiek-colleges werden gegeven.

In november van dat jaar wijdde Freudenthal op een weekendconferentie van de WW weer een voordracht aan het onderwerp.

Het verhaal wordt eentonig – zult u zeggen, en terecht. Ik heb over de leraarsopleiding herhaaldelijk geschreven en gesproken, en het zou mezelf vervelen, als ik er niet op kan rekenen dat, alle monotonie ten spijt, in de discussie toch steeds weer nieuw leven zal sprankelen [...] En zelfs zoals ik het vandaag zal formuleren, zal het ook nog niet definitief zijn. Was het anders, dan was het voor mij een veeg teken, dat ik al op het punt stond, er niets meer bij te leren.¹²⁵

122 Ibid.

123 Hans Freudenthal, 'De leraarsopleiding', *De Groene Amsterdammer* (25 oktober 1952); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1468.

124 Ibid.

125 Freudenthal, 'De leraarsopleiding', *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 109 (1956) 173-180, aldaar 173.

De functie van het onderwijs was tweeledig: kennis, bekwaamheden en normen ontwikkelen aan de ene kant, en selectie aan de andere kant. Veranderingen doorvoeren in het onderwijs was een zeer moeilijk en moeizaam proces constateerde Freudenthal. Wat een jonge leraar vooral geleerd moest hebben was kritiek op het systeem uitoefenen en nieuwe wegen kunnen wijzen, in plaats van de oude draad van zijn eigen middelbare school-ervaringen weer op te pakken.

Er zal altijd moeten worden geselecteerd – dit is buiten kijf, maar we wensen, dat dit geschiede terwille, maar niet door middel van onderwijs. De aard van de opleiding zou niet mogen worden bepaald door percentages, die aangeven, hoeveel er moeten mislukken.¹²⁶

Goede criteria bij het bepalen van de juiste leerstof ontbraken nog steeds. De belangrijkste leidraden waren traditie en het perfectionisme van de leraren, die de kinderen met zoveel mogelijk geestelijke bagage de wereld in wilden sturen.

Studieprogramma's worden bepaald door mensen, die het de jongeren kwalijk nemen, dat ze niet in drie à vier jaren dezelfde schatten van wetenschap en beschaving verzamelen, waarvoor zij [sic] er dertig à veertig nodig hadden; door mensen, die de voornaamste deugd van de opvoeder missen: het geduld. Ze zouden moeten worden ontworpen door hen, die kunnen geloven in de jeugd en in de ernstige voornemens van een mens, niet op de lauweren van een verworven bevoegdheid te gaan rusten, maar met zijn pond te blijven woekeren, ook als hij voor geen tentamen meer behoeft te blokken.¹²⁷

Freudenthal vond dat iemand die niet het vertrouwen verdiende dat hij zijn opleiding met de bul in zijn zak zou voortzetten, ook die bul niet verdiende “al heeft hij er twintig jaar voor gestudeerd”.¹²⁸ Maatschappelijke waardering moest niet worden afgewogen aan de tijd die iemand over zijn studie had gedaan.

Hij stelde daarom voor de last van de opleidingen te verlichten en kwam vervolgens met concrete voorstellen omtrent de invulling van een lerarenopleiding aan de universiteit. Voor de aankomend leraar stelde hij een korte nakandidaatsopleiding voor (na een kandidaats van 2 à 3 jaar), waarvan de tijd verdeeld zou worden tussen vakdocenten en pedagogiek- en didactiekdocenten. Daarnaast moest de leraar in staat worden gesteld zijn studie aan de universiteit na het behalen van zijn bevoegdheid voort te zetten – een ideaal, dat ook bij collega Minnaert leefde.¹²⁹

Over de doelstellingen van een dergelijke opleiding schreef Freudenthal:

Van de wiskundige opleiding eis ik:

1. dat zij de aanstaande leraar brengt tot dieper inzicht in de stof, die hij straks moet onderwijzen,

¹²⁶ Ibid., 175.

¹²⁷ Ibid., 176.

¹²⁸ Ibid., 176.

¹²⁹ Molenaar, *De rok van het universum* 414.

2. dat zij hem een idee geeft van de wijze, waarop de wiskunde in andere wetenschappen en in de techniek wordt toegepast,
3. dat zij hem in contact brengt met de verworvenheden der wiskunde, die van algemene culturele betekenis zijn,
4. dat zij hem tot een enigszins zelfstandige wetenschappelijke activiteit kan leiden.¹³⁰

Het principe dat een pedagogisch-didactische opleiding niet mocht ontbreken was onderhand algemeen aanvaard. Toch pleitte Freudenthal niet voor een uitgebreide pedagogisch-didactische opleiding en wel om de simpele reden, dat daarvoor de wetenschappelijk geschoolde didactiek-docenten nog niet bestonden waardoor er nog alle reden tot voorzichtigheid was:

Een jonge wetenschap is een onbeschermd jachtterrein, toegankelijk voor iedereen, serieuzen en fortuinzoekers, naieven en geschoolden, nuchter denkenden en fantasten [...] Mijn wetenschappelijk hart zou bloeden, wanneer mijn studenten behoorlijke wiskunde zouden moeten ruilen voor het quasi-wetenschappelijke jargon van (op hun terrein misschien verdienstelijke) pedagogen, die zich met een aantal mooi klinkende maar onbegrepen mathematische termen op dikdoenerij toeleggen – om van de volslagen charlatans maar geheel te zwijgen.¹³¹

Onder het motto “het realisme van morgen zal progressiever zijn dan dat van heden” stelde hij daarom voor, de pedagogisch-didactische opleiding zo veel mogelijk uit te breiden, maar slechts in die mate waarin zij qua niveau niet onder hoefde te doen voor de vakwetenschappelijke opleiding.

De vakdidactiek moet zich opwerken tot academisch peil, en voorzover zij het reeds bereikt heeft, moet zij het handhaven. De leraarsopleiding moet groeien, tegen de verdrukking in, niet op de weg van de minste weerstand.¹³²

Het spijtje Freudenthal zijn hier uiteengezette mening en voorstellen niet met meer feiten te kunnen staven. Maar:

Dat die er niet of nauwelijks zijn op het gebied van mijn lezing, is niet mijn schuld – als ik me dan toch op zulk een gebied begeef, moet ik de consequenties aanvaarden. De consequentie van een lezing is een discussie – op staande voet of met enig uitstel van executie.¹³³

Het voorstel voor een verkorte opleiding zoals Freudenthal dat in deze voordracht deed, had hij ook al een paar maanden eerder in een artikel in *Universiteit en Hogeschool* uiteengezet.¹³⁴ Hij verweet de universiteiten een te afwachtende houding, waarbij wetten en reglementen de verantwoordelijkheid van de universiteit afna-

130 Freudenthal, ‘De leraarsopleiding’, *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 109 (1956) 173-180, aldaar 178.

131 *Ibid.*, 179.

132 *Ibid.*, 179.

133 *Ibid.*, 180.

134 Hans Freudenthal, ‘Vrijheid en verantwoordelijkheid’, *Universiteit en Hogeschool* 2 (1956) 295-301.

men. Zo dreigde de universiteit de invloed op de lerarenopleiding te verliezen en dat was een funeste en gevaarlijke ontwikkeling in een tijd, waarin het gebrek aan leraren alleen maar groter werd.

In 1955 hield Freudenthal op een internationaal symposium in Genève een voordracht getiteld 'Relations entre l'enseignement secondaire et l'enseignement universitaire en Hollande', dat een jaar later verscheen in *L'Enseignement Mathématique*.¹³⁵ Hij benutte deze gelegenheid om alle misstanden binnen het Nederlandse middelbare onderwijs een voor een aan de kaak te stellen: de achterlijke leerplannen (die gelukkig gewijzigd werden), de slechte eindexamenopgaven en de enorme kloof die er bestond tussen de karikatuur van wiskunde die leerlingen op de middelbare school voorgeschoteld kregen en hetgeen de leerlingen tijdens hun academische studie als wiskunde leerden kennen. Ook hier noemde hij het gebrek aan een echte lerarenopleiding en de moeizame ontwikkelingen om een dergelijke opleiding te bewerkstelligen. Toch wist Freudenthal nog met een positieve noot over de Nederlandse situatie in het onderwijs te eindigen (zij het met een licht cynische ondertoon):

Ce sont là nos problèmes en Hollande. Je ne dis pas que nous n'en ayons pas d'autres, que nous ne discutons pas la meilleure méthode d'enseigner les lieux géométriques et les proportions. Au contraire, de toutes ces questions nous faisons des études aussi profondes que nos collègues d'autres pays et que l'autruche le fait du sable où elle cache sa tête. L'opposition de ceux qui, malgré l'évolution de la structure sociale, veulent conserver un système d'enseignement suranné, est opiniâtre. Tout de même, ma confiance est grande. La réforme est en marche et elle viendra, comme tout chose dans l'enseignement, trente ans trop tard.¹³⁶

Het feit dat in de didactiek praktisch alle problemen nog onopgelost waren, kon ook gebruikt worden om het imago van het beroep leraar wat op te krikken, zo beoogde Freudenthal in zijn artikel 'Traditie en opvoeding' in 1957. De reputatie van onderwijzers was geschaad door de opvatting dat het onderwijzerschap slechts afdraaien van traditionele programma's vereiste.

In onze maatschappij, waar elke nieuwe techniek met bekwame spoed in de praktijk wordt gebracht, is opvoeding en onderwijs een ouderwets beroep. Ik ben er van overtuigd dat kinderen dat aanvoelen en dat jonge mensen om deze redenen zich tot andere beroepen voelen aangetrokken. Willen we meer leraren en onderwijzers hebben – en de behoefte is er – dan is de weg, die we moeten inslaan: opvoeding en onderwijs te verheffen tot het peil van andere technieken in onze maatschappij.¹³⁷

135 Hans Freudenthal, 'Relations entre l'enseignement secondaire et l'enseignement universitaire en Hollande', *L'Enseignement Mathématique* 11 (1956) 238-249. Dit was een symposium van de ICMI, waarover meer in paragraaf 6.6. Freudenthals voordracht hield hij op 2 juli 1955.

136 *Ibid.*, 249.

137 Hans Freudenthal, 'Traditie en opvoeding', *Rekenschap* 4 (1957) 95-103, aldaar 98-99; dit artikel verscheen eerder in het Engels als 'Tradition and education', in: *The New Era in Home and School* 37 (1956) 127-132.

Het zou uiteindelijk nog enkele decennia duren voordat Freudenthal zijn hier uiteengezette idealen omtrent de lerarenopleiding en – nog belangrijker – een wetenschappelijke vakdidactiek verwezenlijkt zou zien.

6.6 Freudenthal internationaal

Het ontbreken van een serieuze lerarenopleiding was inherent aan de min of meer minachtende houding die, zeker tot ver in de jaren vijftig, onder de meeste hoogleraren wiskunde nog te bespeuren viel als het ging om vakdidactiek en wiskundeonderwijs. Wanneer een wiskundige besloot zich bezig te houden met (vak)didactiek werd dat vaak betiteld als een ‘tweede keus’-bezigheid. Onder vakgenoten werden Freudenthals toenemende activiteiten op het gebied van de didactiek dan ook gezien als ‘zonde van die man’.¹³⁸ In de loop van de jaren vijftig kwam in deze opvatting voorzichtig verandering. Erkenning van de noodzaak en het serieus nemen van de vakdidactiek als wetenschap wonnen langzaam terrein, ook internationaal.

Nu in Nederland zijn reputatie als wiskundige (die zich bovendien sterk maakte voor alle pedagogische, didactische en onderwijskundige zaken die met het vak samenhangen) was gevestigd, verscheen Freudenthal steeds vaker in die hoedanigheid als Nederlandse vertegenwoordiger op het internationale toneel. Zo ontving hij op 17 november 1953 een brief van Koksma, voorzitter van het Wiskundig Genootschap, met daarin de uitnodiging, in de nieuw op te richten ‘Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde’ plaats te nemen. Deze commissie, ingesteld door het Wiskundig Genootschap, vormde de nationale subcommissie van de ICMI en had als doel het onderwijs in de wiskunde zowel in nationaal als in internationaal verband te bestuderen. De opdracht van de commissie was:

- in Nederland belangstelling voor de wiskunde te bevorderen onder jongeren, in het bijzonder leerlingen van het Algemeen Voortgezet en Voorbereidend Wetenschappelijk Onderwijs. Het gaat hierbij niet om de wiskunde als een specialisme, maar om de betekenis die het beoefenen van de wiskunde heeft voor mens en maatschappij.
- in het buitenland contacten te leggen en onderhouden met gelijksoortige organisaties die zich bezig houden met wiskundeonderwijs en die thans verenigd zijn in de International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), die onder meer eens in de vier jaar een International Congress on Mathematical Education organiseert.¹³⁹

In 1953 werd aan alle bij de ICMI betrokken landen een dergelijk verzoek tot oprichting van nationale subcommissies voor wiskundeonderwijs gedaan.¹⁴⁰

¹³⁸ “Didactiek was tweede garnituur onder hoogleraren”, aldus prof.dr. A.W. Grootendorst; gesprek met Grootendorst, 23 april 1999.

¹³⁹ Uit artikel 1 van het reglement van de NOCW dd 25 november 1954, zoals geciteerd in: W. Kleijne, ‘NOCW vijftig jaar’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5 (2004) 308-313, aldaar 309.

¹⁴⁰ Andere benamingen voor de ICMI zijn ook wel: Internationale Mathematik-Unterrichts Kommission (IMUK) of: Commission Internationale pour l’Enseignement Mathématique (CIEM); RANH, Wiskundig Genootschap, inv.nr. 240; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1747.

E.W. Beth werd voorzitter van de NOCW en daarmee de Nederlandse vertegenwoordiger van deze commissie. Samen met Freudenthal vormden Bunt, J.C.H. Gerretsen, D.N. van der Neut, Wansink en Van Dantzig de rest van de commissie. Nog geen jaar later bedankte Beth echter als lid en werd Freudenthal op de vergadering van 25 november aangewezen als nieuwe voorzitter, een functie die hij twintig jaar vervulde.¹⁴¹ Doelend op hun beider verschil in opvattingen over wiskundeonderwijs schreef hij hierover in *Schrijf dat op, Hans*:¹⁴²

Het lijkt ironie dat ik [...] bij de Internationale Commissie voor Wiskunde Onderwijs (ICMI) als Nederlandse vertegenwoordiger E.W. Beths opvolger werd. Ironie, maar ook niet veel meer dan dat. Ik was, ook later als president, een vreemde eend in die bijt – maar dat is alweer vooruitlopen op de geschiedenis.¹⁴³

Ook al leek Freudenthal er hier haast prat op te gaan dat hij als “vreemde eend in die bijt” in de commissie een dergelijke belangrijke rol speelde, zo uitzonderlijk was de keuze voor hem als voorzitter ook weer niet. Koksma had als doel gesteld, een commissie te vormen waarvan de leden “didactici van professie” waren en zo’n ruime keuze aan dergelijke kandidaten waren er in de wiskundige wereld niet.¹⁴⁴ Freudenthal, met zijn reputatie van groot wiskundige die bovendien voor een wiskundige uitzonderlijk veel belangstelling voor didactische zaken had laten blijken, was dus een logische keus.

Van het nut van een dergelijke commissie was Freudenthal zelf niet erg overtuigd. Hij hield zich liever bezig met wat hij “de binnenkant van het onderwijs” noemde, zoals hij in de Wiskunde Werkgroep deed:

Wat doet een commissie voor het wiskunde-onderwijs? Zich met de buitenkant van het onderwijs bezighouden. En een werkgroep? Met de binnenkant. De buitenkant, dat zijn de soorten onderwijs met hun doelstellingen, programma’s, examens, bevoegdheden, alles waarvoor je de vereiste kennis met enquêtes vanuit en studies achter het bureau kunt verwerven. Heel nuttig soms, maar niet mijn cup of tea.¹⁴⁵

Als Nederlandse vertegenwoordiger van de NOCW woonde Freudenthal in 1955 het symposium in Genève bij. Zijn voordracht daar was één van de eerste keren dat hij in het buitenland over onderwijszaken praatte. Het symposium werd direct gevolgd door een vergadering van het ‘Comité Exécutif’ van de CIEM.

Op die vergadering haalde hij wat hij zelf noemde “zijn eerste succes” bij het vaststellen van het werkplan voor de voorbereiding van de sectie Onderwijs van het

141 Freudenthal werd opgevolgd door H.J.A. Duparc in 1975; Kleijne, ‘NOCW vijftig jaar’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5 (2004) 308-313, aldaar 313; NOCW-correspondentie; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1770.

142 Hierbij doelde Freudenthal specifiek op Beth jr’s uitlating in Piagets *L’Enseignement Mathématique* (1955): “Le rôle de la formation mathématique dans l’enseignement secondaire consiste presque exclusivement, me paraît-il, à familiariser les élèves avec la méthode déductive” zoals geciteerd in: Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 341.

143 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 342.

144 Kleijne, ‘NOCW vijftig jaar’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5 (2004) 308-313, aldaar 309.

145 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 346.

eerstvolgende Internationaal Mathematisch Congres in Edinburgh in 1958.¹⁴⁶ Freudenthal stelde voor een vergelijkend onderzoek naar methoden voor aanvankelijk meetkundeonderwijs als één van de drie onderwerpen op de agenda te zetten. Hier toe werd besloten.

Het was natuurlijk niet toevallig dat Freudenthal met juist dit onderwerp kwam, waaraan op de bijeenkomsten van de Wiskunde Werkgroep al enige jaren aandacht werd besteed. De andere onderwerpen waren ‘het wiskundeonderwijs voor leerlingen tot en met 15 jaar’, en ‘de wetenschappelijke basis van het wiskundeonderwijs op het middelbaar onderwijs’, typische voorbeelden van wat Freudenthal onderwerpen uit de ‘buitenkant van het onderwijs’ noemde. Zo wist Freudenthal toch nog één onderwerp uit de ‘binnenkant van het onderwijs’ op het programma te krijgen.

‘Initiation into geometry’ was ook het onderwerp van de lezing die hij namens de ICMI op het Tata Institute of Fundamental Research te Bombay hield op de ‘Mathematical Education in South Asia Conference’ in februari 1956.¹⁴⁷ Deze conferentie, mede georganiseerd door onder andere UNESCO, had als doel de problemen van het wiskundeonderwijs in Zuid-Azië te belichten. En die problemen waren enorm, zo concludeerde Freudenthal in een verslag van deze reis in *De Groene Amsterdammer*. Juist de vele organisatorische problemen in die landen maakten dat er weinig belangstelling voor de pedagogisch-didactische kant van het onderwijs was. Op dat gebied bood de conferentie dan ook weinig nuttigs volgens Freudenthal. Na twee weken Azië ging hij naar huis met

een flauw besef van de geweldige problemen, waarmee Aziatische landen worstelen. Of ik van mijn kant hun iets heb kunnen geven, moet ik betwijfelen, en wel niet uit overdreven bescheidenheid. Twee weken Azië is te weinig.¹⁴⁸

Het enige lichtpuntje tijdens zijn verblijf was een bezoek aan een van de weinige progressieve scholen daar:

Dit was de enige plaats waar ik echt kon leven in het gevoel, dat de diepere problemen van onderwijs en opvoeding overal ter wereld dezelfde zijn. Hier werd niet strijdbaar geworsteld met een verouderd systeem, maar hier was er de bewogen rust van de zoekende, die weet dat hij op de goede weg is.¹⁴⁹

Het werk voor de NOCW, en later voor de ICMI, zou eind jaren vijftig steeds meer van Freudenthals tijd opeisen. Dat zijn hart niet altijd bij dit werk lag, was duidelijk. Toch greep hij deze kans met beide handen aan en onder het motto ‘beter meewerken dan niets doen’ wist hij zo in korte tijd ook internationaal een reputatie als wiskundeonderwijskundige op te bouwen.

¹⁴⁶ Ibid., 347.

¹⁴⁷ Correspondentie tussen de New Education Fellowship en Freudenthal, 1955-1956; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 57, 1770.

¹⁴⁸ Hans Freudenthal, ‘Opvoeding tot hele mensen’, *De Groene Amsterdammer* (21 april 1956); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1525.

¹⁴⁹ Ibid.

HOOFDSTUK 7

Freudenthal en de niveautheorie van de Van Hieles

Een leerproces

Ik heb geboft. Alwaar ik tegen een muur aankeek ging ten langen leste een deur open. Een van eigen inzicht, maar meestal andermans (zoals Van Hieles niveaus).

Hans Freudenthal in *Schrijf dat op, Hans*, 1987¹

7.1 Inleiding: een bijzonder promotieonderzoek

Tientallen promovendi zijn door Freudenthal begeleid bij hun promotieonderzoek. Bij de meeste van hen betrof het onderwerpen uit de zuivere wiskunde. Op 4 juli 1957 was Pierre van Hiele (1909) de eerste die bij Freudenthal op een onderwerp uit de wiskundendidactiek promoveerde.² Zijn vrouw Dina (Dieke) van Hiele-Geldof (1911-1958) promoveerde op dezelfde dag bij Langeveld eveneens op een onderwerp uit de wiskundendidactiek. Freudenthal schreef over deze promoties indertijd:

Promoties op didactische onderwerpen zijn nog steeds uiterst zeldzaam. Wetenschappelijk onderzoek op mathematisch-didactisch terrein van een formaat, zoals thans door de Van Hiele's verricht, mag zelfs in het internationale vlak uniek heten. In hun toespraken gaven de promotoren als hun mening te kennen, dat hoe men ook over twintig of dertig jaar over de resultaten van de Van Hiele's zal oordelen, het vaststaat dat zij door hun aanpak baanbrekend werk hebben verricht; elk toekomstig mathematisch-didactisch onderzoek zal ermee rekening moeten houden als uitgangspunt en voorbeeld.³

Dit feit alleen al maakt het de moeite waard om op deze plaats aandacht aan het werk van de Van Hieles te besteden. Bovendien zijn de resultaten van beide promotieonderzoeken niet alleen van grote invloed geweest op (het onderzoek op het gebied van) de wiskundendidactiek in het algemeen, maar zeker ook op Freudenthals werk in het bijzonder. Zelf uitte Freudenthal meermalen zijn grote bewondering voor het werk van de Van Hieles:

1 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 359.

2 *Feestboek. Prof. Dr. Hans Freudenthal – 70 jaar (1975)* (uitgave van het Mathematisch Instituut en het IOWO ter ere van Freudenthals 70e verjaardag) 40.

3 Stuk in *Nieuw Utrechts Nieuwsblad* (4 juli 1957), geschreven door Freudenthal naar aanleiding van de promoties van de Van Hieles, 29 mei 1957, 3 pagina's, aldaar 1; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 37, 142.

I should like to draw the reader's special attention to the work of Mr. and Mrs. Van Hiele, not only because it is the most revolutionary attempt, but also because of the underlying pedagogical and didactical theory. In my opinion the Van Hieles' theory of thinking levels as well as their experimental work are achievements of educational research which should be recommended to all people interested in mathematical education for closer inspection.⁴

Overall waar hij zijn kans schoon zag promoveerde hij de theorie en hij integreerde haar al snel in zijn eigen ideeën. Op diverse plaatsen beschreef hij het werk van de Van Hieles als cruciaal in de ontwikkeling van zijn eigen wiskundig-didactische inzichten. Het openingscitaat, maar ook het hier volgende zijn daar mooie voorbeelden van:

Het mathematiseringsproces waar de Van Hieles zich vooral mee bezighielden, was dat van de meetkunde, preciezer gezegd: ze waren de eersten die het meetkundig leerproces als proces van mathematiseren interpreteerden (al gebruikten ze de term niet, evenmin als de term heruitvinding). Zodoende ontdekte Pierre in het onderwijs, zoals Dieke het beschreef, de niveaus waarvan ik eerder sprak. Ik pakte die ontdekking op – wellicht het belangrijkste element in mijn eigen wiskunde-onderwijskundig leerproces.⁵

Het promotieonderzoek van de Van Hieles vormden indirect een concrete uitwerking van het door Freudenthal voorgestane ideaal dat wiskundedocenten na hun afstuderen academisch onderzoek zouden moeten blijven doen, zoals hij dat in 1953 in zijn artikel ‘Vakgeleerde of paedagoog?’ verwoordde.⁶ Het lijkt dus zeer de moeite waard om antwoorden te vinden op de volgende vragen: wie waren de Van Hieles? Wat was hun theorie en waarom was deze zo bijzonder? Waarom was hun werk zo belangrijk voor Freudenthal en waaruit bestond de invloed op Freudenthals gedachtegoed?⁷

7.2 Freudenthal als promotor

Voor het echtpaar Van Hiele vormde de wiskundedidactiek een rode draad in hun leven. Zij kenden Freudenthal uit de tijd dat zij wiskunde studeerden in Amsterdam. Van Hiele zei daarover:

Tijdens mijn studie moesten we af en toe voordrachten houden. Daarin probeerde ik soms al wat didactiek naar voren te brengen, door leerlingen en hun problemen met

4 Hans Freudenthal, ‘Preface of the editor’, in: Hans Freudenthal, ed., *Report on methods of initiation into geometry* (Groningen 1958) 5-7, aldaar 6-7.

5 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 354.

6 Freudenthal, ‘Vakgeleerde of paedagoog?’, *Christelijk Schoolblad. Onze vacatures* (1953); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 779, 780. Zie ook paragraaf 6.5.

7 Bij het samenstellen van deze en volgende paragrafen zijn gegevens ontleend aan de volgende werken: P.M. van Hiele, *De problematiek van het inzicht* (Amsterdam 1957); D. van Hiele-Geldof, *De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het v.H.M.O.* (Amsterdam 1957); De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde*.

de leerstof in de beschouwingen op te nemen. Vooral Freudenthal placht dit aan te moedigen.⁸

Na hun studie gingen de Van Hieles werken als wiskundedocent. In 1940 trouwden ze. Samen schreven ze na de oorlog diverse werkboeken voor het meetkundeonderwijs, die vooral binnen de meer op vernieuwing ingestelde onderwijshoek goed ontvangen werden.⁹

Grote nadruk legden ze in hun werk op zelfwerkzaamheid en het zelf ontdekken van de meetkunde door de leerling aan de hand van concreet materiaal. Freudenthal zag in hen (naast de op dezelfde grondslag werkende Van Albada) de voortrekkers en pioniers op het gebied van het intuïtieve aanvankelijk meetkundeonderwijs.¹⁰ Ook waren de Van Hieles van het begin af aan betrokken bij de werkzaamheden van de Wiskunde Werkgroep, waar het meetkundeonderwijs geregeld besproken werd.¹¹

In grote lijnen konden Freudenthal en de Van Hieles tot dezelfde groep van onderwijsvernieuwers gerekend worden. Freudenthal schreef in 1957:

De wiskunde-boekjes, de publicaties en de dissertaties van de Van Hiele's dragen dan ook duidelijk de stempel van wat men vernieuwing van het onderwijs pleegt te noemen: kritisch te staan tegenover al hetgeen in het onderwijs door de traditie is gegeven, en zich telkens opnieuw te bezinnen niet alleen op de didactische methoden, maar evenzeer op het doel van het onderwijs als zodanig.¹²

Het schrijven van een wiskundig proefschrift over didactiek was alles behalve gangbaar in de jaren veertig. Het proefschrift van de wiskundeleraar Hendrik Mooij uit 1948 was lange tijd het enige op dit gebied. Helemaal didactisch was dit proefschrift niet eens, aangezien het nog een zuiver wiskundig aanhangsel had.¹³ Het initiatief om op een onderwerp uit de wiskundedidactiek te promoveren kwam van Van Hiele. Freudenthal stelde – zo herinnerde Van Hiele het zich – hem in eerste instantie

8 Interview met Van Hiele in: Goffree, *Ik was wiskundeleraar* 104.

9 In een boekbespreking van dit werkboek in *Vernieuwing* wordt gesproken van “een voortreffelijke methode”; ‘Boekbespreking van: Drs. P.M. van Hiele en Dra. D. van Hiele-Geldof: Werkboek der meetkunde 1e deel’, *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 7 (1948/49) 175.

10 Freudenthal schrijft: “The procedures of this group (I may fairly speak of a school of teachers) depend heavily on the use of self-made material of a different kind, cards bearing instructions, models and construction pieces, like Meccano parts but of a still more flexible structure. This movement has originated from two different sources. One is the work of P.M. van Hiele and his wife, Mrs. D. van Hiele-Geldof.” in: Hans Freudenthal, ‘Initiation into Geometry’, *The Mathematics Student* 24 (1956), 83-97, aldaar 87.

11 Zo hield mevrouw Van Hiele een inleiding op de ww-bijeenkomst van zaterdag 2 mei 1953 met als onderwerp: ‘Waar zullen we ’t zwaartepunt van het meetkunde-onderwijs in de eerste klas leggen?’, *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 103 (1953) 222.

12 Stuk in *Nieuw Utrechts Nieuwsblad* 4 juli 1957; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 37, 142.

13 H. Mooij, *Over de didactiek van de meetkunde benevens benaderingsconstructies van een hoek in gelijke delen* (Amsterdam 1948). In dit zeer bescheiden opgezette onderzoek onderzocht Mooij het effect van het gebruik van leergesprekken in de klas bij het gebruikelijke logisch-deductief ingerichte meetkundeonderwijs. Van der Corput was promotor en ook Kohnstamm was bij het onderzoek betrokken. Inhoudelijk was dit onderzoek voor dat van de Van Hieles van weinig belang. Meer over het onderzoek van Mooij in: F. Goffree, ‘Een halve eeuw onderzoek. Wiskundedidactiek in Nederland’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/3 (2002) 233-243; De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde* 286.

een wiskundig promotieonderwerp voor, waarop Van Hiele vroeg of hij niet in de didactiek zou kunnen promoveren.¹⁴

Freudenthal ging akkoord en kwam daarop met een concreet idee over de opzet van zo'n dergelijk onderzoek. In 1944 in 'Rekendidaktiek' had hij de wens uit gesproken ooit "op kollektieve schaal" lerende kinderen te kunnen observeren. Nu zag hij meer in het maken van een zeer gedetailleerde studie van één leerling, vanaf het ogenblik dat deze leerling op school kwam tot en met het eindexamen. Freudenthal leek hiermee vooruit te lopen op de rol die hij eind jaren zestig zou gaan toekennen aan het 'observeren van het leerproces' binnen didactisch onderzoek. Van Hiele zei hier jaren later over:

Van die leerling zou dan alles genoteerd moeten worden, wat hij deed, wat hij zei, hoe hij zijn proefwerken deed enz. enz. Dat kan natuurlijk nooit, dacht ik. Als je één leerling neemt is de kans groot dat je die onderweg kwijtraakt. Dus dan moet je er een stuk of zes nemen.¹⁵

Dit idee leek praktisch niet uitvoerbaar. Van Hiele liet Freudenthal als promotor daarom eerst weer schieten en begon een samenwerking met de pedagoog Langeveld.

Martinus Jan Langeveld (1905-1989) studeerde na de HBS Nederlands en geschiedenis met bijvakken filosofie en pedagogiek aan de Gemeentelijke Universiteit in Amsterdam. In 1934 promoveerde hij bij Kohnstamm in de taalkunde op het proefschrift *Taal en denken: een theoretische en didactische bijdrage tot het voortgezet onderwijs in de moedertaal, inzonderheid tot dat der grammatika*.¹⁶ Vijf jaar later werd hij op voorspraak van Kohnstamm benoemd tot hoogleraar in de pedagogiek, didactiek en ontwikkelingspsychologie in Utrecht.

Langeveld was de grondlegger van wat bekend zou worden als de Utrechtse richting in de pedagogiek en was naar eigen zeggen verantwoordelijk voor de introductie van de fenomenologie van de menswetenschappen in Utrecht. In zijn personalistische pedagogiek nam hij de antropologie van het kind en de (opvoedkundige) situatie waarin het kind zich bevond als uitgangspunt. Hij vestigde in zijn pedagogiek de aandacht op de strikt persoonlijke, unieke geaardheid van elk kind met zijn of haar belevingswereld.¹⁷ Mondigheid, autonomie, gewetensvorming en verantwoordelijkheid stonden voor hem centraal, waarmee hij aansloot bij de personalistische pedagogiek van zijn leermeester Kohnstamm.¹⁸

14 Interview met Van Hiele in: Goffree, *Ik was wiskundeleraar* 110.

15 Ibid., 110.

16 J.W. van Hulst, 'Martinus Jan Langeveld. 30 oktober 1905-15 december 1989', *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Jaarboek 1991* (Amsterdam 1991), 154-162; Frederieke Schenk, *De Utrechtse school. De geschiedenis van de Utrechtse psychologie tussen 1945 en 1965* (Utrecht 1982) 2.

17 I. Weijers, 'Mondige burgers. Een cultuurhistorische plaatsbepaling van de pedagogiek van M.J. Langeveld', *Pedagogisch Tijdschrift* 19 (1994) 189-206, aldaar 190.

18 I. van Hilvoorde, *Grenswachters van de pedagogiek. Demarcatie en disciplinevorming in de ontwikkeling van de Nederlandse academische pedagogiek (1900-1970)* (Amsterdam 2002) 87; Weijers, 'Mondige burgers', *Pedagogisch Tijdschrift* 19 (1994) 189-206.

Na de oorlog was Langeveld jarenlang dé dominerende figuur binnen de pedagogiek in Nederland. Zijn rol in het veroveren van een volwaardige plaats voor de pedagogiek als zelfstandige wetenschap (met name aan de niet-bijzondere universiteiten) was erg groot. Hij zorgde er na de oorlog voor, dat de pedagogiek in Nederland als wetenschapsgebied náást de psychologie academische erkenning kreeg.¹⁹ In zijn afscheidsrede in 1972 zei hij hierover:

Samenwerking met de meest diversen en zeker met psychologen is geen probleem, waar wij onze opvoedingswetenschappelijke identiteit niet hoeven te vervagen of te verliezen. De daartoe noodzakelijke wetenschappelijke bewustwording, de onontkoombaar nodige vorming van die identiteit van de pedagoog en andragoog moeten thans volop hun kans krijgen, wil uit samenwerking niet een identiteitsverlies resulteren. Een verlies, dat noch wetenschappelijk vruchtbaar zou zijn noch voor de betrokken kinderen, volwassenen, opvoeders, enzovoort een eerlijke dienst mogelijk zou maken.²⁰

Langeveld behoorde tot de Utrechtse School, een in de jaren 1945-1960 invloedrijke groep christelijke en humanistisch georiënteerde geleerden die een fenomenologisch georiënteerde psychologie voorstonden.²¹ Deze psychologie werd vooral gekenmerkt door een (per persoon in meer of mindere mate aanwezige) aversie tegen natuurwetenschappelijke psychologie en een grote nadruk op persoonlijke verantwoordelijkheid en persoonlijke ontplooiing. De te onderzoeken situatie werd in deze psychologie zonder vooropgezet theoretisch denkschema beschouwd. Overigens paste Langeveld de fenomenologische psychologie vooral toe in de voorbereidende fase van zijn onderzoek en liet deze alsnog volgen door empirisch onderzoek. Freudenthal was niet bij de Utrechtse School als zodanig betrokken. Zijn contact met Langeveld was hoofdzakelijk als collega.

Nadat Van Hiele contact met Langeveld had gezocht, haalde hij in december 1948 ook het contact met Freudenthal weer aan met een brief. Van Hiele schreef:

Ik heb de mogelijkheid om te gaan werken voor een promotie in de didactiek der wis-kunde nader overwogen en ik zou het zeer op prijs stellen, als ik daarbij op Uw steun mocht rekenen. Het schijnt mij nl., dat de problemen, die mij het meest liggen meer in Uw lijn liggen dan van die van Prof. Langeveld.²²

19 B. Levering, 'De betekenis van M.J. Langeveld voor de naoorlogse pedagogiek (met het accent op de periode 1945-1960)', *Pedagogisch Tijdschrift* 16 (1991) 147-160.

20 M.J. Langeveld, *Opvoedingshulp als groeiende wetenschap* (Amsterdam 1972) 15-16.

21 Andere sociale wetenschappers van de Utrechtse School waren strafjurist W. Pompe, psychiaters H.C. Rümke, P.H.A. Baan en fysioloog-psycholoog F.J.J. Buytendijk; Frederieke Schenk, *De Utrechtse school. De geschiedenis van de Utrechtse psychologie tussen 1945 en 1965* (Utrecht 1982); Schuyt en Taverne, eds., 1950. *Welvaart in zwart-wit* 384, 387, 416; Weijers, 'Mondige burgers', *Pedagogisch Tijdschrift* 19 (1994) 189-206.

22 Van Hiele aan Freudenthal, 2 december 1948; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 37.

Volgens Van Hiele was het Freudenthal die mevrouw Van Hiele aanspoorde óók te gaan promoveren.²³ Het uiteindelijke onderwerp van het onderzoek, “de problematiek van het inzicht bestudeerd in de didactische context van het meetkundeonderwijs”, was duidelijk door de dagelijkse onderwijspraktijk van het echtpaar Van Hiele ingegeven. Uiteindelijk zou Van Hiele bij Freudenthal en mevrouw Van Hiele bij Langeveld verder gaan.

Langeveld bleef wel bij de begeleiding van Van Hieles proefschrift betrokken. Zijn invloed op de totstandkoming van het werk was niet gering. Zo stelde hij onder andere de titel van het proefschrift voor. Ook leerde hij Van Hiele veel over psychologie en pedagogiek, leende hem de nodige boeken en had al direct het gehele stramien van het proefschrift voor ogen.²⁴

Dat de samenwerking tussen Freudenthal en Van Hiele niet altijd even soepel verliep bleek wel uit de herinneringen van Van Hiele uit die tijd:

Nu moet je niet denken dat Freudenthal en ik het altijd eens waren. Soms stonden we met woedende koppen tegenover elkaar. Op een keer is het gebeurd dat hij Langeveld opbelde. Die Van Hiele is zo eigenwijs, had hij toen gezegd. Later hoorde ik dat van Langeveld, die hem had geantwoord: dat kan wel waar zijn, Freudenthal, maar wat zeg je van jezelf? En van mij? ²⁵

Eén van de meningsverschillen betrof Van Hieles interpretatie van Freudenthals discussie met mevrouw Ehrenfest in *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?*²⁶ Hij stelde dat het meningsverschil tussen Freudenthal en mevrouw Ehrenfest gebaseerd was op verschillende reikwijdten van het begrip wiskunde. Freudenthal zou het kunnen substitueren centraal stellen in de wiskunde, waarna hij een beperkte draagwijdte van wiskundige denkgewoonten constateerde. Volgens Van Hiele verstond mevrouw Ehrenfest onder wiskunde daarnaast ook het denken dat aan de wiskunde vooraf gaat, hetgeen de draagwijdte van wiskundige denkgewoonten aanzienlijk groter maakte. Dit zou volgens Van Hiele hun verschil in opvatting over de vermeende vormende waarde van het wiskundeonderwijs grotendeels verklaren.

Ook maakte Freudenthal bezwaar tegen het door Van Hiele gemaakte onderscheid in typen leerlingen: het zogenaamde “algoritmentype” (meer ingesteld op het beheersen van algoritmen) en het “strukturerende type” (meer ingesteld op het structureren van het waarnemingsveld). Welk bezwaar Freudenthal hier precies tegen had, is niet meer exact te achterhalen. Uit Van Hieles verdediging van deze onderscheiding valt wel op te maken dat Freudenthal er gevaar in zag, leerlingen *bij voorbaat* in deze twee categorieën in te delen, omdat dit stigmatiserend zou werken en een leraar zich daardoor te passief op zou stellen.

23 Interview met Van Hiele in: Goffree, *Ik was wiskundeleraar* 110.

24 Ibid., 113.

25 Ibid., 110.

26 Van Hiele aan Freudenthal, 3 februari 1957 (antwoord van Freudenthal ontbreekt); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 37.

Van Hiele benadrukte, dat het hem bij de onderscheiding van de typen leerlingen enkel om het resultaat van het op een algoritmische dan wel structurerende manier ingericht wiskundeonderwijs ging en niet om een classificering van leerlingen an sich. Hij achtte het voor de door hem aangehangen fenomenologische methode noodzakelijk, een dergelijke omschrijving van typen leerlingen te geven – een uitspraak, waaruit de invloed van Langeveld op Van Hieles onderzoek bleek. Van Hiele schreef aan Freudenthal:

Op minstens vier plaatsen in de dissertatie staat aangegeven dat het hier gaat om een kweekprodukt van het onderwijs. Hiermee wordt op duidelijke wijze de leraar ervoor behoed te vervallen tot een afwachtend fatalisme. En het beschrijven van typen heeft U ook niet te verontrusten: het is immers kenmerkend voor de fenomenologische methode [sic] (die ik voor een studie als deze noodzakelijk acht), dat men zich klaarheid over een situatie verschaft door deze voor enkele speciale gevallen zeer nauwkeurig te beschrijven. Ik zou geen ander doeltreffend middel weten.²⁷

Fundamenteel waren deze meningsverschillen tussen Van Hiele en Freudenthal uiteindelijk niet. Er was dan ook niets dat Freudenthal belemmerde het werk van Van Hiele volkomen te accepteren en onbevangen te bewonderen.

De door Van Hiele beschreven niveautheorie zou internationale bekendheid krijgen, ook buiten de wiskundendidactiek. Zo haalde bijvoorbeeld de Utrechtse leerpsycholoog C.F. van Parreren (1920-1991) de theorie aan in zijn *Psychologie van het leren*, wanneer hij het inzichtelijk leren oplossen van problemen besprak.²⁸ Tot ver na de promotiedatum zijn in Freudenthals correspondentie brieven te vinden waarin hem gevraagd werd informatie over de proefschriften en de methodes van de Van Hieles te verstrekken.²⁹

7.3 ‘De problematiek van het inzicht’: de niveautheorie van Van Hiele

Waar zijn vrouw in haar proefschrift een analyse van de praktijk van het aanvankelijk meetkundeonderwijs beschreef, hield Van Hiele zich bezig met de meer theoretische kant.³⁰ Freudenthal zag de proefschriften als onlosmakelijk met elkaar verbonden:

27 Van Hiele aan Freudenthal, 3 februari 1957; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 37.

28 C.F. van Parreren, *Psychologie van het leren. Verloop en resultaten van leerprocessen* (Deventer herziene druk 1971) 239 e.v.

29 K.S. Gangadharan uit Ceylon aan Freudenthal (waarin hij informatie vraagt over de leerboeken en methodes van de Van Hieles naar aanleiding van Freudenthals voordracht in Bombay), 22 maart 1956; Secondary School of Hashomer Hatsair Mishmar Haemek-Hazorea aan Freudenthal (waarin naar meer informatie gevraagd wordt over de proefschriften van de Van Hieles), 23 mei 1957, met antwoord van Freudenthal, 29 mei 1957; John C. Moyer aan Freudenthal (waarin hij naar aanleiding van hetgeen Freudenthal in *Mathematics as an educational task* schrijft over het werk van de Van Hieles meer informatie hierover vraagt), 16 maart 1977; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 32, 37, 54.

30 Voor een overzicht van alle wiskundig-didactische proefschriften in de tweede helft van de vorige eeuw en de plaats die die van de Van Hieles daarin innamen, zie ook: F. Goffree, ‘Een halve eeuw on-

Man en vrouw beiden tot doctor gepromoveerd

Unieke samenwerking van leraarsechtpaar

(Van een ander verdraggever)

Aan de Utrechtsche universiteit had woensdag een dubbele promotie plaats. Niet na elkaar vertrieven mevrouw D. van Hiele Geldof en haar echtgenoot, de heer F. M. van Hiele, de graad van doctor in de wis- en natuurkunde. Tijdens deze weinig voorkomende gebeurtenis bleek dat wetenschap en bewijzen nauw met elkaar verbonden kunnen zijn. De dissertaties van man en vrouw hebben samengevoerd dezelfde wetenschappelijke vraagstukken tot onderwerp. Zij behandelen deze van verschillende kanten. Hij het samenstellen van de proefschriften hebben de promovendi elkaar zodanig aangeregend, dat er twee afzonderlijke dissertaties ontstonden, die in verbandingen stellig de nodige belangstelling zullen lokken. Een combinatie van vijf uitgeververmaatschappijen heeft reeds aangeboden de proefschriften te publiceren in een serie didactische werken, welke geopend zal worden met de studies van het echtpaar Hiele.

Zoals men zo vreesde stak in het bewijzen kunnen ditmaal een succes opleveren, zo hebben de heer en mevrouw Hiele elkaar in hun wetenschappelijke arbeid aangewild. Mevrouw Hiele behandelde haar dissertatie over het onderwerp "De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het v.h.o.m." op de reeds zamen met in zijn proefschrift "De problemen van het meetkundig ontwerpende denken." Dit heeft weer een verhelderende invloed op mijn werk gehad." verklarde toen de heer Hiele vanwege in zijn theoretisch wetenschappelijk bij de natuur in Biltstroom. Ze stak in zelfs de samenwerking in de wetenschappelijke arbeid van man en vrouw, dat zo onmogelijk zij van de artikelen, die door hem of haar worden geschreven, werden onderscheiden. In deze aflevering wordt als het ware de nauwe samenwerking van de wetenschappers tot uitdrukking gebracht.

't Begon in Adam

De een nog het een andere doelen, die de Van Hiele's in en hoe der jaren bij hun wetenschappelijke arbeid samen hebben gevonden. Zij leerden elkaar in Amsterdam kennen, op een verlaten instituut en werden later samen op een laboratorium in de hoofdstad, de geboortestad van de heer Van Hiele. Nadat in 1930 door hun bevestiging de gemeenschappelijke arbeid er een vierde het leven werd, zijn de Van Hiele's jarenlang als docenten aan dezelfde scholen verbonden geweest. Toen in de heer Van Hiele wetenschappelijk aan het Nieuw-Luzen in Biltstroom. Zijn vrouw geeft het aan de leerlingen van het Assendelft instituut.

De heer Van Hiele besloot zich in een gesprek met een raad verbaasd over het feit, dat van vijf vier docenten de midde twee een sterk uitdrukkelijk gevoel voor wetenschap hebben en dat 's op het na jongste doctortitel van nog maar twee behartiging bleef voor onderwerpen van wetenschappelijk aard. Hij besloot dat hiervoor het milieu van de universiteit te geven.

Psychologie

Metkwaamtig is voort dat de heer Hiele, die in zijn proefschrift over de aard van het door hem gekozen onderwerp, steeds meer naar de psychologische kant overtuigd, de wettelijke prof. Freudenthal het proefwerk heeft, terwijl mevrouw Hiele, wier proefschrift een tijd draagt die ook versta-

ten op methodisch-didactisch bereikt van een wetenschap, zoals thans door de Van Hiele's verricht, is zelfs in het internationaal vlak als uitvinderij. De tot nu toe voor wetenschap wetenschappelijke en publicaties en de dissertaties van het Biltstroomse echtpaar dragen duidelijk het stempel van de voortvorige samenwerking. Zij staan, terecht kritisch ingevonden het traditionele element in het onderwijs en leestmen zich bij hun wetenschappelijke arbeid ontwikkeld op het doel van het onderwijs.

Zij hand leestmen geven de promovenden als hun mening dat — hoe men ook over twijfel of twijfel naar over de resultaten van het werk van de Van Hiele's zal oordelen — het werk stiel dat in de bespreking werk hebben verricht.

Woensdag promoveerde in Utrecht het echtpaar Van Hiele-Geldof. Tijdens deze unieke dubbele promotie ontvingen zowel de heer als mevrouw Van Hiele de graad van doctor in de wis- en natuurkunde. Toen de presentatie kwam, zij de inhoud van hun proefschriften met een dure en hun opvoeding, theoretisch promovend prof. Freudenthal en prof. Latoerle in kennis vestigden van de stellingen en conclusies, die zij in de dissertatie verwerkten.

(Foto A.M.D.-Biltstroom)



Door Freudenthal bewaard knipsel uit *Nieuw Utrechts Nieuwsblad* over de dubbel-promotie van de Van Hiele's (1957).

Het is moeilijk te zeggen, welk van de twee proefschriften belangrijker is: het meer bespiegelende van Dr. van Hiele of het meer proefondervindelijke van zijn echtgenote. In elk geval vullen zij elkander op bijzonder fraaie wijze aan. Men mag zich erover verheugen, dat de twee doctores naast hun dagelijks werk als leraar (en Mw. van Hiele bovendien naast haar werk als huisvrouw en moeder van twee kinderen) de tijd hebben gevonden, om deze waardevolle proefschriften te schrijven.³¹

Desondanks had Van Hiele zelf het idee dat Freudenthal mevrouw Van Hieles werk het meest waardeerde:

Eigenlijk beweerde hij ook altijd dat Dieke veel beter was dan ik. En als je nu beide dissertaties ziet, na 27 jaar, dan vind ik dat haar proefschrift absoluut nu nog waardevol is. De theorie van de denkniveaus heb ik gebracht met Dieke's naam erbij, maar hij is helemaal door mij gevonden.³²

Freudenthals voorkeur voor mevrouw Van Hieles werk bleek ook uit de woorden die hij sprak op haar begrafenis. Oorspronkelijk zou er volgens Freudenthal maar één dissertatie komen, namelijk die van Van Hiele, waarbij de waarnemingen van mevrouw Van Hiele zouden worden ingesloten,

maar wat in jullie werk precies van de één was en wat van de ander, zullen we niet uit elkaar kunnen rafelen, ook waar jullie je publicaties apart hebben getekend. Laten wij zeggen, dat de helft van haar was, en dan natuurlijk de betere helft. Want zoals de mens als man én vrouw is geschapen, zo is jullie werk menselijk, juist omdat het mannelijk en vrouwelijk tegelijk is.³³

Dat Freudenthal erg enthousiast was over het werk van mevrouw Van Hiele is niet verwonderlijk.³⁴ Eindelijk was er een didactisch onderzoek dat hoofdzakelijk gebaseerd was op de praktijk van het onderwijzen. Een onderzoek, tot stand gekomen door observatie, notatie in protocollen en analyse van de praktijk in de klas van een leraar en bovenal: gepubliceerd en dus voor een ieder toegankelijk gemaakt. In Freudenthals ogen maakte deze werkwijze mevrouw Van Hieles proefschrift tot een uniek en waardevol didactisch document. Ook de door haar voorgestelde intuïtieve aanpak voor het aanvankelijk meetkundeonderwijs waar met concreet materiaal door leerlingen gewerkt werd spraken hem aan.

derzoek. Wiskundendidactiek in Nederland', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/3 (2002) 233-243 en F. Goffree, 'De opbrengst. Wiskundendidactiek in Nederland', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/3 (2002) 333-345.

31 Stuk in *Nieuw Utrechts Nieuwsblad* (4 juli 1957); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 37, 142.

32 Interview met Van Hiele in: Goffree, *Ik was wiskundeleraar* 113.

33 Uit Freudenthals rede bij de begrafenis van mevrouw Van Hiele, juli 1958; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 521.

34 Zo had hij het over haar "marvellous reports on classroom observations" en schreef hij: "She took notes while teaching; and I was astonished how many more – and more important – things she observed than I was able to do." In 1958 overleed mevrouw Van Hiele. Freudenthal sprak op haar begrafenis in zijn rede van "een lerares bij de gratie Gods"; in: Hans Freudenthal, *Revisiting mathematics education. China lectures* (Dordrecht 1991) 93; rede die Freudenthal hield bij de begrafenis van mevrouw Van Hiele, juli 1958; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 521.

Haar aanpak in de allereerste meetkundelessen van haar klas van 12-jarigen vertoonde opvallende overeenkomsten met de werkwijze die Freudenthal voor een dergelijke groep beschreef in zijn artikel 'Traditie en opvoeding'.³⁵ Waar mevrouw Van Hiele in een van haar eerste lessen bijvoorbeeld liet zien hoe ze haar leerlingen zelf een 'rechte hoek' laat construeren door het twee keer dubbel laten vouwen van een vel papier, pleitte Freudenthal in 'Traditie en opvoeding' voor iets vergelijkbaars:³⁶

Het was heilzamer geweest, het kind zelf te laten zoeken en ontdekken, hoe men rechte lijnen en rechte hoeken maakt, door papier te vouwen, en hoe men cirkels trekt met een punaise en een touwtje. Uitvindingen zijn waardevoller dan schema's en patronen.³⁷

Eén verschil was er wel tussen beide methodes: Freudenthal vond het gevaarlijk de kinderen passer, liniaal en tekendriehoek te overhandigen voordat ze zelf uitgevonden hadden, hoe een cirkel, rechte lijn of rechte hoek zonder deze hulpmiddelen te maken.³⁸ Het zou voor kinderen de "weg naar het avontuur" afsnijden door op die manier kant en klare schema's voor het oplossen van problemen te overhandigen. Mevrouw Van Hiele daarentegen liet haar leerlingen direct in de eerste les al papieren kubussen maken, waarbij ze gebruik mochten maken van de juist door Freudenthal zo gevaarlijk geachte werktuigen. Voordeel van een dergelijk begin van het meetkundeonderwijs was dat kinderen in de voor hen veel tastbaardere driedimensionale ruimte konden beginnen, een idee waar Freudenthal weer erg enthousiast over was.³⁹ Waarschijnlijk zag Freudenthal mede hierdoor geen bezwaar in een dergelijke inleiding en zag hij in de door haar beschreven lespraktijk geen nadelige gevolgen, want ook later is hij nooit meer op dit verschil in opvatting teruggekomen.

Ondanks zijn enthousiasme voor het werk van mevrouw Van Hiele zijn het de resultaten van het onderzoek van Van Hiele, en dan met name zijn zogenaamde niveautheorie, die een direct aanwijsbare, meer concrete en bovenal blijvende invloed op Freudenthals gedachtegoed hebben gehad.⁴⁰ In zijn proefschrift analyseerde Van Hiele de rol die het inzicht in het wiskundeonderwijs speelde. Hij beperkte zich daarbij tot het meetkundeonderwijs, aangezien hij geen principiële verschillen zag tussen inzicht in meetkunde en inzicht in wiskunde in het algemeen. 'Inzicht' vervulde volgens Van Hiele een sleutelrol bij de ontwikkeling van de didactiek:

35 Hans Freudenthal, 'Traditie en Opvoeding', *Rekenschap* 4 (1957) 95-103.

36 D. van Hiele-Geldof, *De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.* 16.

37 Freudenthal, 'Traditie en Opvoeding', *Rekenschap* 4 (1957) 95-103, aldaar 100.

38 *Ibid.*, 100.

39 Een uitzondering hierop maakte hij voor de (eveneens onder andere door de Van Hieles gebezigde) twee-dimensionale aanpak van het projekt 'stoeptegels', waar het concept 'passen' ('fitting') centraal stond. Zie bijvoorbeeld zijn beschrijvingen van cursussen voor het aanvankelijk meetkundeonderwijs in: Hans Freudenthal, 'Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs', *Faraday* 26 (1956) 14-18, aldaar 17-18; Hans Freudenthal, 'Initiation into Geometry', *The Mathematics Student* 24 (1956), 83-97, aldaar 91-93.

40 Aangezien de thematiek van beide proefschriften nauw met elkaar verbonden was, had Freudenthal het zelf vaak over 'het werk van de Van Hieles' in het algemeen, zonder specifiek onderscheid te maken.

In de didactiek der wiskunde blijkt de betekenis van het “inzicht” zo fundamenteel te zijn, dat door bestudering van dit begrip de structuur van die didactiek voor een groot deel ontwikkeld kan worden.⁴¹

Het was in het werk van ontwikkelingspsycholoog Jean Piaget dat Van Hiele voor het eerst de kloof tussen wel en niet begrijpen tegenkwam, een fenomeen dat hij herkende uit zijn eigen onderwijspraktijk. Piaget had veel onderzoek gedaan naar het tot stand komen van kennis bij kinderen.⁴² Volgens Piaget volgde de ontwikkeling van kinderen een logische orde, waarbij onder andere de leeftijd van het kind bepaalde of een kind al dan niet aan een bepaald nieuw inzicht toe was.

Maar waar Piaget de kloof tussen wel en niet begrijpen als leeftijdsgebonden beschouwde, meende Van Hiele dat deze wel degelijk overbrugbaar was door een leerproces.⁴³ Hierin werd hij niet alleen geïnspireerd door het werk van Piaget, maar ook door de dissertatie van Koning. Jan Koning (1907-1989) promoveerde in 1948 op het proefschrift *Enige problemen uit de didactiek der natuurwetenschappen, in het bijzonder van de scheikunde*. Hierin sprak hij over ‘niveaus’ in de leerstof en beschreef hoe en waar deze in het scheikundeonderwijs naar voren kwamen.⁴⁴ Konings onderzoek was het eerste didactische promotieonderzoek dat Langeveld begeleidde. Langeveld sprak lovend over deze aanpak van Koning in zijn *Inleiding tot de studie der paedagogische psychologie van de middelbare schoolleeftijd*.⁴⁵

Toen Van Hiele deze niveaus vervolgens ook nog eens terugzag in de resultaten van het onderzoek van zijn vrouw gaf hem dat voldoende vertrouwen om dit idee daadwerkelijk in zijn proefschrift te verwerken. Freudenthal vatte ten tijde van de promoties de kern van de niveautheorie zo samen:

De ontwikkeling van de geestelijk groeiende leerling is of dient te zijn een opeenvolging van elkaar afwisselende perioden: de leerling tracht op te klimmen tot een bepaald niveau, om na het bereiken van dit niveau zich zekere vaardigheden te verwerven, die steeds meer worden geautomatiseerd; is hier de nodige routine bereikt, dan kan de sprong naar het volgende niveau worden gewaagd. Gaat men tot automatisering over voor het hiervoor vereiste niveau is bereikt, dan worden bekwaamheden ontwikkeld, die voor geen overdracht op andere gebieden vatbaar zijn. Maar evenzeer wordt de toepassing bemoeilijkt, als te weinig routine wordt verworven.⁴⁶

41 Van Hiele, *De problematiek van het inzicht* 8.

42 Een uitgebreidere beschrijving van Piagets werk en opvattingen en (Freudenthals) kritiek hierop komen aan de orde in paragraaf 9.6.3.

43 Ook Langeveld publiceerde geregeld kritiek op Piaget. Langevelds kritiek was voornamelijk gebaseerd op Piagets – in Langevelds opinie – gebrekkige inzicht in de leefwereld van het kind; B. Levering, ‘De betekenis van M.J. Langeveld voor de naoorlogse pedagogiek (met het accent op de periode 1945-1960)’, *Pedagogisch Tijdschrift* 16 (1991) 147-160.

44 Ook in dit proefschrift speelde Freudenthal een (kleine) rol: in zijn voorwoord bedankte Koning Freudenthal voor zijn hulp bij het statistische deel van zijn proefschrift; J. Koning, *Enige problemen uit de didactiek der natuurwetenschappen in het bijzonder van de scheikunde* (Dordrecht 1948) 7, 218.

45 M.J. Langeveld, *Inleiding tot de studie der paedagogische psychologie van de middelbare schoolleeftijd* (Groningen, vijfde herziene druk 1954, eerste druk 1937) 459.

46 Stuk geschreven door Freudenthal in *Nieuw Utrechts Nieuwsblad* (4 juli 1957); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 37.

Specifiek voor het meetkundeonderwijs beschreven de Van Hieles deze niveaus als volgt. Op het zogenaamde nulde niveau werkt de leerling met meetkundige figuren die op ervaringen met concrete objecten en beelden gebaseerd zijn. Door de zo door de leerling ontdekte eigenschappen van bekende figuren gaan de figuren vervolgens voor de leerling als ‘symbolen’ fungeren, waarbij het symbool staat voor het totaal aan eigenschappen van zo’n figuur. Daarna vormen de eigenschappen die voor een bepaald figuur kenmerkend zijn ‘signalen’. Op het moment dat deze symbolen en signalen (van eigenschappen van figuren) zélf onderwerp van studie voor de leerling worden, is de leerling van het nulde niveau (globale structurering) naar het eerste niveau overgegaan. Meetkundige relaties als congruentie, evenwijdigheid en dergelijke worden dan een middel om de signalen en symbolen van het nulde niveau te ordenen.

Op het tweede niveau worden vervolgens deze relaties onderwerp van onderzoek. Daarvoor ontdekt en gebruikt de leerling ‘de relaties tussen de relaties’: hij leert dat er een ordening in de relaties aangebracht kan worden. Op het moment dat de leerling in staat is de op het tweede niveau gevonden relaties te ordenen heeft hij het derde niveau bereikt.

Concepten als ‘implicatie’ kunnen nu gebruikt worden. Op dit niveau is het in principe mogelijk een axiomatisch opgebouwde meetkunde te ontwikkelen. Op het vierde niveau tenslotte is het het logisch denken (zoals de axiomatiek op zich) dat onderwerp van studie wordt.⁴⁷

In zijn artikel van 1955 in *Paedagogische Studiën* getiteld ‘De niveau’s in het denken, welke van belang zijn bij het onderwijs in de meetkunde in de eerste klasse van het v.H.M.O.’ beschreef Van Hiele in een concreet voorbeeld hoe de niveaus in de leerstof voorkwamen:

Wanneer bijv. een leerling weet, dat in een ruit de diagonalen elkaar loodrecht door midden delen, dan kan hij na het bereiken van het eerste niveau daaruit de konklusie [sic] trekken, dat indien twee gelijke cirkels elkaar snijden, het lijnstuk dat de snijpunten verbindt en het lijnstuk dat de middelpunten verbindt elkaar loodrecht door midden delen. Het kan dan misschien nog zijn, dat hij de ruit niet direkt ziet, maar hij is in ieder geval klaar, als hij daarop opmerkzaam is geworden. De leerling daarentegen, die het niveau nog niet bereikt heeft, ziet het belang niet in van de wetenschap, dat de figuur een ruit bevat.⁴⁸

Net als Freudenthal had Van Hiele grote bewondering voor het werk van mevrouw Ehrenfest, en dan met name voor haar *Uebungensammlung* uit 1924. Vooral in het werk van mevrouw Van Hiele is de invloed hiervan direct terug te vinden. Beiden

47 Van Hiele, *De problematiek van het inzicht*; Van Hiele-Geldof, *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het v.H.M.O.*; het artikel van de Van Hieles in: Freudenthal, ed., *Report on Methods of Initiation into Geometry* 67-80.

48 Uit: P.M. van Hiele, ‘De niveau’s in het denken, welke van belang zijn bij het onderwijs in de meetkunde in de eerste klasse van het v.H.M.O.’, *Paedagogische Studiën* 32 (1955) 289-297, zoals geciteerd in: P.M. van Hiele, *De problematiek van het inzicht* 127.

beschrijven een aanschouwelijk ingericht aanvankelijk meetkundeonderwijs met op de praktijk aansluitende opgaven.

In zijn proefschrift noemde Van Hiele ook meermalen het werk van Freudenthal. Zo analyseerde hij de discussie tussen Freudenthal en mevrouw Ehrenfest over de vormende waarde van de wiskunde in *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?* en citeerde hij Freudenthal uit zijn artikel over het mechanicaonderwijs.⁴⁹ Van Hiele concludeerde dat noch mevrouw Ehrenfest, noch Freudenthal veel vertrouwen had in de vormende waarde van wiskundige algoritmen. Van Hiele had hier meer vertrouwen in, mits het onderwijs aan specifieke voorwaarden zou voldoen:

Zodra men in het wiskunde-onderwijs de moed zal hebben gevonden te breken met de gewoonte de wiskunde uit zichzelf te ontwikkelen in de vorm van een deductief logisch systeem, zodra men in de plaats daarvan de wiskunde gaat ontdekken door er van buiten af in door te dringen, zal men mogen verwachten, dat er een behoorlijke transfer zal zijn naar vrijwel alle transferkringen.⁵⁰

7.4 Freudenthal en de theorie van de Van Hieles: van ‘niveautheorie’ naar ‘guided reinvention’

Uit de diverse citaten en uit Freudenthals terugblik op zijn eigen werk in *Schrijf dat op*, Hans van 1987 komt duidelijk naar voren hoe essentieel Freudenthal het werk van de Van Hieles voor de ontwikkeling van zijn eigen gedachtegoed achtte.⁵¹ Het onderzoek van de Van Hieles voldeed dan ook exact aan de telkens weer door Freudenthal opgeworpen vraag naar deugdelijk wetenschappelijk-pedagogisch onderzoek gebaseerd op de praktijk van het wiskundeonderwijs.⁵² Natuurlijk had hij, al was het vaak slechts tussen de regels door, wel eens eerder iets van bewondering voor andermans ideeën op het gebied van de wiskundededictiek en -onderwijs laten blijken, zoals voor het werk van mevrouw Ehrenfest en dat van Van Albada op het gebied van het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Nooit eerder echter was er een theorie die Freudenthal zo totaal en openlijk omarmde, prees en vervolgens integreerde in zijn eigen gedachtegoed.

49 Van Hiele, *De problematiek van het inzicht* 91-98.

50 Ibid., 100.

51 Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 352, 359.

52 Dit is een op diverse plaatsen in lezingen en artikelen geuite wens, bijvoorbeeld in: ‘Rekendidactiek’ (ongepubliceerd 1944); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465; ‘En nu ... de wiskunde’, *De Groene Amsterdammer* (2 december 1950); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1439; ook in ‘De leeraarsopleiding’, *De Groene Amsterdammer* (25 oktober 1952); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1469; over het “verheffen van opvoeding en onderwijs tot het peil van andere technieken in onze maatschappij”, in: Hans Freudenthal, ‘Traditie en opvoeding’, *Rekenschap* 4 (1957) 95-103, aldaar 98-99; ten slotte over de urgentie van een wetenschappelijk-pedagogisch onderzoek naar wiskundeonderwijs in de inleiding bij: ‘Het wiskunde-programma voor het v.h.m.o. Een ontwerp van de Wiskunde-Werkgroep van de w.v.o.’, *Euclides* 28 (1953) 206-226, aldaar 208.

In de jaren veertig en vijftig stond Freudenthal al duidelijk voor ogen hoe het niet moest in het wiskundeonderwijs: de logische orde van de wiskunde mocht niet bepalend worden voor de psychologische en onderwijskundige. Zijn aversie tegen zuiver deductief opgebouwd (meetkunde)onderwijs, zijn enthousiasme voor een meer intuïtieve, concrete aanpak en zijn scepticisme waar het ging om het baseren van de legitimering het wiskundeonderwijs op de vermeende vormende waarde kwamen daar direct uit voort. In zijn 'Rekendidaktiek' was hij al tegen 'rekenonderwijs om te leren denken'.⁵³ In zijn lezing 'Opvoeding tot denken', en nog duidelijker in *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?*, pleitte hij voor concrete, uit het leven gegrepen denkvragestukken en wees hij de vormende waarde van reken- en wiskundeonderwijs (voor ander dan 'reken-denken') expliciet af.⁵⁴ Het prikkelen tot het zoeken van de juiste oplossing met juist gekozen vraagstukken beschreef hij onder andere in zijn lezing 'Opvoeding tot denken' en in 'Oude en nieuwe universiteiten'.⁵⁵

De vraag was, waar en hoe die psychologische en onderwijskundige orde van het wiskundeonderwijs te moeten zoeken:

Uit het onderwijs dat er slecht aan voldeed? Uit proefnemingen die ver boven mijn mogelijkheden uitstegen? Hoe kon ik mij en anderen overtuigen van wat die orde behelsde? Niet dat die vraag mij kwelde, maar zolang ik die vraag niet kon beantwoorden, bleef het bij algemeenheden. Het antwoord – een theoretisch antwoord – kwam toen de Van Hieles aan hun proefschrift werkten, dus ongeveer in 1955/56: de niveaus van de Van Hieles. [...] Wat ik van de Van Hieles leerde heb ik op mijn eigen wijze verwerkt – zo gaat dat nu eenmaal.⁵⁶

Ook in zijn publicaties was de omslag die de niveautheorie voor Freudenthal betekende goed te zien. Tot dan toe bevatten zijn artikelen weinig tot geen beschrijvingen van concrete onderwijszaken als microdidactiek of een leerproces in wiskundeonderwijs. Freudenthal beperkte zich voornamelijk tot het signaleren van wan-toestanden en het bekritisieren van wat algemeen bekend stond als de 'traditionele' (Nederlandse) onderwijsmethoden. Veel verder dan het aangeven van de richting waarin gezocht zou moeten worden naar verbeteringen en oplossingen kwam hij niet. Daarbij was hij overigens zelf de eerste om volmondig toe te geven dat hij ook niet veel meer kon doen zolang er geen resultaten van deugdelijk onderzoek voorhanden waren.

53 Freudenthal, 'Rekendidaktiek' (ongepubliceerd 1944) 101-102; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465.

54 Freudenthal, 'Opvoeding tot denken' (ongepubliceerd 1945) 15 pagina's; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 466; Ehrenfest-Afanassjewa en Freudenthal, *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?*

55 Freudenthal, 'Opvoeding tot denken' (ongepubliceerd 1945); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 466; Freudenthal, 'Oude en nieuwe universiteiten' (ongepubliceerd 1945); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 467.

56 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 352.

Zijn artikel ‘De algebraïsche en de analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde’ uit 1948 vormde hierop een uitzondering. Hierin besprak hij niet alleen een concrete aanpak van bepaalde onderwijsstof, maar ook formuleerde hij enkele algemenere eisen voor dat onderwijs. Zo pleitte hij er voor, bij de leerling een kritische houding ten aanzien van een te leren theorie te kweken, zodat de leerling de noodzaak van (het oplossen van) het probleem zou voelen. Ook vond hij dat de eisen die aan de exactheid van de te leren theorie gesteld mochten worden, aan het niveau en inzicht van de leerling aangepast zouden moeten worden.⁵⁷ Dit artikel, zijn eerste gepubliceerde artikel over wiskundendidactiek, stond wat betreft thematiek vrijwel geïsoleerd vergeleken met zijn artikelen uit de direct erop volgende jaren. Met het werk van de Van Hieles – en nog specifiek: met Van Hieles niveau-theorie – kwam daar verandering in.

Voor het eerst beschreef Freudenthal het werk van de Van Hieles in zijn twee artikelen over aanvankelijk meetkundeonderwijs die voortkwamen uit de lezing die hij over dit onderwerp hield als vertegenwoordiger van de ICMI in 1956.⁵⁸ Hier besprak hij verschillende, maar steeds op intuïtieve basis gestoelde methodes voor het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Hij baseerde zich daarbij op het werk dat op dit gebied was gedaan door diverse leraren binnen de Wiskunde Werkgroep. Hij refereerde dus nog niet aan de proefschriften, maar aan de tot dan toe verschenen onderwijsmethodes van de Van Hieles voor het meetkundeonderwijs. Veel van wat hij in deze artikelen zelf over meetkundeonderwijs schreef, gebruikte hij ook in het artikel ‘Traditie en Opvoeding’ uit 1957.⁵⁹

Op de vraag ‘waarom meetkunde onderwijzen op de middelbare school?’ had de Wiskunde Werkgroep, en daarmee Freudenthal, begin jaren vijftig nog geen antwoord.⁶⁰ In ‘Traditie en opvoeding’ stelde Freudenthal deze vraag opnieuw en antwoordde daarop zelf:

Sommigen zeggen: omdat meetkunde het verstand oefent. Anderen: omdat meetkunde de kennis is van de ruimte waarin wij leven. Of: omdat meetkunde de eerste wetenschap der mensheid is geweest. Ik zei: omdat meetkunde als logisch systeem een middel is – en wellicht het meest doeltreffende middel – om kinderen te doen voelen de macht van de menselijke geest – dat is van hun eigen geest.⁶¹

57 Hans Freudenthal, ‘De algebraïsche en de analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde’, *Euclides* 24 (1948) 106-121, aldaar 110, 114.

58 Hans Freudenthal, ‘Initiation into Geometry’, *The Mathematics Student* 24 (1956), 83-97; en de Nederlandstalige, ingekorte versie: Hans Freudenthal, ‘Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs’, *Faraday* 26 (1956) 14-18.

59 Hans Freudenthal, ‘Traditie en Opvoeding’, *Rekenschap* 4 (1957) 95-103.

60 ‘Het wiskunde-programma voor het v.h.m.o. Een ontwerp van de Wiskunde-Werkgroep van de w.v.o.’, *Euclides* 28 (1953) 206-226, aldaar 208.

61 Hans Freudenthal, ‘Traditie en Opvoeding’, *Rekenschap* 4 (1957) 95-103, aldaar 97-98. Deze zinsnede komt ook voor in ‘Het aanvankelijk meetkundeonderwijs’ (1956) en in ‘Initiation into geometry’ (1956).

Dit was geenszins een pleidooi voor het traditioneel logisch-deductief opgebouwde meetkundeonderwijs à la Dijksterhuis. Want, zo betoogde Freudenthal, om dit doel te bereiken moest het aanvankelijk meetkundeonderwijs aan een aantal specifieke voorwaarden voldoen. Allereerst moest de onderwijzer het geduld – “de grootste paedagogische deugd” – kunnen opbrengen te wachten totdat het kind zelf naar het ‘waarom’ van verschijnselen vraagt.⁶² ‘Rijpheid voor logica’ mocht geen uitgangspunt zijn, maar moest het doel worden van het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Essentieel daarbij was dat de leerling mocht experimenteren en fouten mocht maken:

Het is een oud gezegde dat men uit zijn fouten leert – in ’t Engels zegt men: by trial and error. Inderdaad, de fout is een onmisbare schakel in de didactische methode. [...] Voor de methode van “trial and error”, van gissen en missen, zijn echte problemen vereist. Een ingewikkelde breuk en een zinsontleding zijn geen echte problemen, want een echt probleem bevat meteen ook een criterium, dat vertelt of de poging om het op te lossen is gelukt. Een echt probleem is een taak om iets te maken en het is opgelost als het gevraagde ding geschapen is. In het traditionele systeem is het teken voor een fout een rode streep, dus een oordeel dat door de leraar of onderwijzer wordt opgelegd. Als echte problemen moeten worden opgelost, is “fout” synoniem met “falen”. Falen is iets ernstigers dan fouten maken in de traditionele zin, maar een falen kan leiden tot een heroriëntering en tot nieuwe pogingen, terwijl een fout geen andere betekenis heeft dan bijvoorbeeld een onregelmatigheid in een patroon, die gecorrigeerd moet worden.⁶³

Wanneer hij over de kracht van het fenomeen ‘passen’ (‘fitting’) uitweidde als onderdeel in aanvankelijk meetkundeonderwijs (iets wat ook in mevrouw Van Hieles proefschrift een belangrijke plaats had) maakte Freudenthal in beide artikelen uit 1956 enkele, achteraf gezien, opvallende opmerkingen:

De wonderen van het passen moeten het kind doen rijpen voor het meetkundig-logische systeem. Maar tevens zal het kind in dit stadium de grondstoffen moeten vergaren en de problemen die het op een telkens hoger peil zal moeten aanpakken. Het kind moet zijn eigen ontwikkeling kunnen zien en beoordelen, als iemand die in een fotoalbum bladert of die een berg beklimt en terugblijkt over de weg, die hij is gegaan.⁶⁴

In de Engelstalige versie had hij het in een vergelijkbare passage over “re-call and re-consider the treasure of old problems and re-examine the old solutions at each new stage”.⁶⁵ Hij weidde niet verder uit over dit terugblikken en de ontwikkeling van de leerling, noch maakte hij een eventuele relatie tussen beide expliciet. Toch lijkt hier al de basis gelegd voor wat hij later als ‘reflectie als niveau verhogend middel’ zou gaan herkennen en beschrijven.

62 Over ‘geduld’ als voornaamste deugd van de opvoeder schreef hij ook in: Hans Freudenthal, ‘De leeraarsopleiding’, *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 109 (1956) 173-180, aldaar 176; Hans Freudenthal, ‘Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs’, *Faraday* 26 (1956) 14-18, 16.

63 Freudenthal, ‘Traditie en Opvoeding’, *Rekenschap* 4 (1957) 95-103, aldaar 100-101.

64 Hans Freudenthal, ‘Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs’, *Faraday* 26 (1956) 14-18, aldaar 16.

65 Hans Freudenthal, ‘Initiation into Geometry’, *The Mathematics Student* 24 (1956), 83-97, aldaar 92.

De eerste keer dat Freudenthal de niveautheorie van Van Hiele als zodanig noemde was in het voorwoord van het meetkunderapport, getiteld *Report on a comparative study of methods of initiation into geometry*. Dit rapport vormde de Nederlandse bijdrage voor het gelijknamige onderdeel van het Internationaal Mathematisch Congres in Edinburgh in 1958. Freudenthal was editor van dit rapport, waarin auteurs uit het onderwijsveld hun diverse onderwijsmethoden voor aanvankelijk meetkundeonderwijs uiteenzetten. Aan geen van deze artikelen lag de zogenaamde axiomatiche methode ten grondslag.

Freudenthal kon het in zijn voorwoord niet laten, speciaal de aandacht van de lezer te vragen voor de bijdrage in het rapport van de Van Hieles. Hij noemde er hun werk niet alleen het meest revolutionair, maar ook beschreef hij zowel de niveautheorie als hun experimentele werk als unieke prestaties op het gebied van didactisch onderzoek.⁶⁶ Vanaf dit moment liet hij nauwelijks een kans voorbij gaan om in een artikel of voordracht de waarde van de proefschriften te benadrukken.⁶⁷

In zijn verslag over dit rapport in *Euclides* ging Freudenthal voor het eerst een stap verder dan ‘beschrijven’ wanneer hij de niveautheorie van de Van Hieles noemt. Hier vergeleek hij namelijk de relatie tussen de door de niveautheorie beschreven niveaus met de (logische) relatie tussen theorie en meta-theorie:

The relation between one level and the next higher one is analogous to that between a system and a meta-system. At every level the subject matter is a certain field that will be organized on this level. The devices of organizing on a certain level will form the field, and therefore the subject matter, on the subsequent higher level.⁶⁸

Zo beschreef Freudenthal de niveautheorie op een manier waarbij de directe link met de meetkunde, essentieel en nadrukkelijk aanwezig in het werk van de Van

66 Hans Freudenthal, ‘Preface of the editor’, in: Freudenthal, ed., *Report on methods of initiation into geometry* 5-7, aldaar 6-7. In 1987 zegt hij over dit rapport: “Het rapport ontleent zijn grote historische betekenis aan de bijdrage van de Van Hieles – feitelijk door mij uit hun diverse publikaties samengesteld. De bijdrage was de eerste internationaal toegankelijke uiteenzetting van hun niveautheorie ...” in: Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 347-348.

67 Hij noemde de theorie van de Van Hieles de hierop volgende jaren onder andere in de volgende teksten: Hans Freudenthal, ‘Preface of the editor’, in: Freudenthal, ed., *Report on methods of initiation into geometry* 5-7; Hans Freudenthal, ‘Report on a comparative Study of Methods of Initiation into Geometry’, *Euclides* 34 (1959) 289-306, Hans Freudenthal, ‘A Comparative Study of Methods of Initiation into Geometry’, *L’Enseignement Mathématique* 5 (1959) 119-139; Hans Freudenthal, ‘Logica als Methode en als Onderwerp’, *Euclides* 35 (1960) 241-255; Hans Freudenthal, ‘Logical analysis and critical survey’, in: Freudenthal, ed., *Report of the relations between arithmetic and algebra* (Groningen 1962) 20-41; Hans Freudenthal, ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’, *L’Enseignement Mathématique* 9 (1963) 28-44; Hans Freudenthal, ‘Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?’, *Der Mathematikunterricht* (1963) 5-29; Hans Freudenthal, ‘Logik als Gegenstand und als Methode’, *Der Mathematikunterricht* 13 (1967) 7-22; zie ook: de lezing ‘Integratie achteraf of vooraf’ uit 1961 en de lezing die Freudenthal hield voor het MC: ‘Axiomatic in het wiskunde-onderwijs bij het VhMO’ in 1962; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 536, 537.

68 Freudenthal, ‘Report on a comparative Study of Methods of Initiation into Geometry’, *Euclides* 34 (1957) 289-306, aldaar 306.

Hieles, verdwenen was. Het leek erop dat Freudenthal door deze abstrahering de niveautheorie los begon te zien van de context (het meetkundeonderwijs) waarin hij ze leerde kennen: een nieuw niveau was bereikt....

Nog duidelijker kwam dit naar voren in zijn voordracht ‘Logica als methode en als onderwerp’ van 1960.⁶⁹ Hij zette hierin zijn eisen uiteen, die hij aan de leraar met betrekking tot zijn kennis van de logica wilde stellen. Niet alleen moest de leraar boven de te onderwijzen stof staan, ook moest hij boven de *logische vorm* van die stof staan:

Men zou nog een stap verder kunnen gaan, door van de leraar ook te eisen, dat hij boven de door hem gebezigde methode van aanbidding van de stof staat en zichzelf deze methode bewust kan maken. Ook hierbij kan de logische analyse diensten bewijzen. Niet in die triviale zin, dat de methode door de logische structuur worde bepaald, maar om, naar het voorbeeld van de van Hieles, de niveau’s [sic] van inzicht te herkennen en hun onderlinge relatie, die volstrekt logisch van aard is.⁷⁰

Dus het was niet de kennis van de logische volgorde of opbouw van de te onderwijzen stof die de leraar moest gebruiken in zijn onderwijs, maar de kennis van de logische relaties tussen de niveaus die zijn leerlingen in hun leerproces tegen zouden komen – een subtiel, maar essentieel verschil.

Zo gaf Freudenthal de niveautheorie van de Van Hieles stap voor stap een eigen invulling. Los van het meetkundeonderwijs waar de theorie uit voort kwam, abstraherde hij deze tot een werkwijze van logische analyse bij het inzichtelijk maken van de (niveaus van de) leerstof. Een artikel dat op het eerste gezicht los van dit onderwerp leek te staan was ‘Trends in modern mathematics’ (1962).⁷¹

Hierin weidde hij uit over de (moderne) wiskundige denk- en werkwijze. Type-rend voor de moderne wiskundebeoefening was in zijn ogen hoe de wiskunde *zelf* onderwerp van axiomatisering was geworden:

Creative mathematical thinking has always been concerned with the organisation of a subject matter, but never before this century has mathematics itself become the subject matter of this organizing activity. The local view on organization has been superseded by a global one, known under the name of axiomatization. Though Hilbert’s axiomatics of Euclidean geometry (1899) meant the organization of one mathematical system only, it started the development of axiomatics into a tool for unifying mathematics.⁷²

69 Deze voordracht hield hij op de weekendconferentie van de ww: Freudenthal, ‘Logica als Methode en als Onderwerp’, *Euclides* 35 (1960), 241-255. Deze is identiek aan de voordracht, ‘Logik als Gegenstand und als Methode’, die hij gaf op het ICMI-seminar in Aarhus in 1960, ook verschenen als artikel: Freudenthal, ‘Logik als Gegenstand und als Methode’, *Der Mathematikunterricht* 13 (1967) 7-22.

70 Freudenthal, ‘Logica als Methode en als Onderwerp’, *Euclides* 35 (1960), 241-255, aldaar 255.

71 Hans Freudenthal, ‘Trends in Modern Mathematics’, *ICSU Review* 4 (1962) 54-61. Ook verscheen dit artikel in het Duits: ‘Tendenzen in der modernen Mathematik’, *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* 16 (1963) 301-306.

72 Freudenthal, ‘Trends in Modern Mathematics’, *ICSU Review* 4 (1962) 54-61, aldaar 55.

In de moderne wiskunde werden de wiskundige systemen die ontstaan zijn door het organiseren en ordenen van het onderwerp (de betreffende wiskundestof) zélf onderwerp van organisatie, van axiomatisatie. Tussen deze opmerking en Freudenthals interpretatie van de niveautheorie is een frappante parallel te trekken: in de wiskunde was er op die manier sprake van (door logica definieerbare) sprongen naar een hoger niveau, vergelijkbaar met de sprongen tussen de niveaus zoals die er binnen het onderwijsproces bleken te zijn.

Al deze artikelen en gedachten leken, soms bewust, soms onbewust, een voorbereiding tot de formulering waartoe Freudenthal uiteindelijk kwam in zijn artikelen ‘Logical analysis and critical survey’ uit 1962, een artikel verschenen in het door de NOCW uitgegeven *Report on the relations between arithmetic and algebra*, en het iets later verschenen artikel ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ uit 1963.⁷³ Het theoretische deel van de inhoud van beide artikelen vertoonde grote overlap (soms zelfs een letterlijke vertaling).

In deze artikelen is een cruciale stap in de ontwikkeling van Freudenthals gedachtegoed te ontwaren. Twee belangrijke pijlers van zijn gedachtegoed gebruikt hij hier namelijk voor het eerst in een publicatie. Hij introduceerde in deze artikelen niet alleen de zogenaamde ‘anti-didactische inversie’ (‘antididactical inversion’ of ‘inversion anti-didactique’), maar ook de term ‘geleide heruitvinding’ (‘geleide herontdekking’, ‘guided re-invention’ of ‘invention dirigée’). ‘Geleide heruitvinding’ komt het beste naar voren in ‘Logical analysis’.

It is believed that knowledge and ability acquired by re-invention is better understood and easier preserved than if acquired in a less active way. Whether this is true and whether re-invention has to play a part in the guided learning process, is a question which must be answered by pedagogical psychology, not by logical analysis, but I think it is a general experience among adult mathematicians that the easiest way to understand a mathematical paper, is to re-invent its results. [...] In the following I will take for granted a more universal part to be played by re-invention in the learning process. I will even suppose that this part is one of first priority. Then the logical analysis which precedes the design of a teaching method has to concern itself with the process of inventing the subject matter rather than with the subject matter itself. Unfortunately we do not know too much about mathematical invention. [...] Original invention has been unguided. *Guided* invention or rather *re-invention* may enjoy different opportunities.⁷⁴

Freudenthal hield dus een kleine slag om de arm: hij wilde het nog van eventuele onderzoeksresultaten uit de kinderpsychologie laten afhangen in hoeverre het ‘heruitvinden’ in een leerproces positief zou bijdragen aan het begrip en het beklijven van de leerstof. Hij ging er vooralsnog vanuit, dat deze bijdrage positief zou zijn.

73 Hans Freudenthal, ‘Logical analysis and critical survey’, in: Freudenthal, ed., *Report of the relations between arithmetic and algebra*; Freudenthal, ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ 28-44.

74 Freudenthal, ‘Logical analysis and critical survey’ 23-24; *cursivering van mij*.

‘Geleide herontdekking’ was in dat geval volgens hem een belangrijk principe bij het ontwerpen van een lesmethode.

In ‘Enseignement’ kwam hij in een inhoudelijk identieke passage niet verder dan het noemen van ‘invention dirigée’.⁷⁵ Dit lijkt eigenaardig, want ‘Enseignement’ was later geschreven. Aangezien hij het echter in een bespreking van aanvankelijk meetkundeonderwijs verderop in ‘Enseignement’ wél over ‘réinventer’ en ‘d’expériences réinventives’ van de leerling heeft, leek hij in deze context toch geen fundamenteel onderscheid tussen ‘uitvinden’ en ‘heruitvinden’ te maken.⁷⁶ Ook noemde hij de term ‘heruitvinden’ (‘réinvention’) meermalen bij de beschrijving van de niveautheorie.⁷⁷ Aannemelijk lijkt dus, dat Freudenthal ‘guided re-invention’ en ‘invention dirigée’ in deze twee artikelen wel degelijk met elkaar identificeerde.

De tweede nieuwe term – ‘anti-didactische inversie’ (‘inversion anti-didactique’) – dook voor het eerst op in ‘Enseignement’. Als voorbeeld van anti-didactische inversie gaf Freudenthal het opleggen van definities aan de leerlingen, nog voordat zij ervaringen in de betreffende stof hebben mogen opdoen en de noodzaak voor het formuleren van een dergelijke definitie ‘voelen’. Ook wiskundigen gaan niet zo te werk bij het creëren van wiskunde!

Mais la méthode traditionnelle, c’est de lui offrir des définitions dans un domaine où il n’a pas eu d’expériences, et même avant qu’il ne puisse saisir la raison de définitions formelles – méthode tout à fait contraire à celle que nous observons en créant des mathématiques. Nous savons bien qu’il est impossible de faire des définitions utiles dans un domaine qui n’est pas encore exploré, mais nous demandons à l’élève de commencer l’exploration où elle devrait aboutir. Cette *inversion anti-didactique* est poussée à l’extrême dans les programmes récents de géométrie axiomatique.⁷⁸

Ook aan de term ‘anti-didactische inversie’ lag een belangrijk uitgangspunt van Freudenthal ten grondslag: het mogen heruitvinden, het zelf mogen *creëren* van wiskunde door de leerling. Dat dit voor hem niet simpelweg het volgen van de historische ontwikkeling van het vak betekende, lag besloten in de meerwaarde van de toevoeging ‘geleide’ in ‘geleide heruitvinding’.

‘Geleide heruitvinding’ en ‘anti-didactische inversie’ kwamen niet uit de lucht vallen. Zoals uit de vorige artikelen bleek, kwamen beide begrippen al eerder in meer bedekte termen aan de orde. Het is wel voor het eerst dat Freudenthal ze zo expliciet benoemde en definieerde. Voorheen pleitte hij er – al dan niet expliciet – voor de onderwijskundig-psychologische orde boven de logische orde van de wiskunde te verkiezen, terwijl hij om zich heen in het onderwijs zag dat de logische werd verkozen. Nu had hij een term voor dit verschijnsel, waarin niet alleen het verschijnsel zelf krachtig gedefinieerd was, maar waaruit ook Freudenthals afkeer

75 Freudenthal, ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ 32.

76 Ibid., 39.

77 Ibid., 34.

78 Ibid., 41; *cursivering van mij*.

duidelijk bleek: iets wat als ‘anti-didactisch’ betiteld werd, kon natuurlijk onmogelijk iets goeds voor het onderwijs betekenen.

Met de beschrijving ‘geleide heruitvinding’ vatte Freudenthal de voor hem uit de niveautheorie voortgekomen consequenties bondig samen. Concreet beginnen met het wiskundeonderwijs, leerlingen de kans geven te experimenteren en onderzoeken, de stof aanbieden in een mate van exactheid die bij het niveau van de leerling op dat moment hoort, het was allemaal verpakt in de term ‘geleide heruitvinding’.

Ook de niveautheorie van de Van Hieles lag voor Freudenthal duidelijk aan deze term ten grondslag: immers, bij onderwijs gebaseerd op het principe van geleide heruitvinding vormde de analyse van het leerproces van de leerling het uitgangspunt. Dit ‘heruitvinden’ als didactisch principe was volgens Freudenthal ook al in de eerder door de Van Hieles geschreven methodes voor onderwijs te vinden:

It is not by chance that the Van Hieles seized upon this idea. To my knowledge they were the first who wrote a textbook in which the learning process is purposively initiated and kept up as a process of re-inventing.⁷⁹

De term ‘heruitvinding’ omvatte voor Freudenthal net als ‘anti-didactische inversie’ ook die andere belangrijke eigenschap van de te onderwijzen wiskunde: wiskunde moet niet met het resultaat geïdentificeerd worden, maar als activiteit worden beschouwd, geanalyseerd en onderwezen. Hier is de inspiratie van Freudenthals intuitionistische inslag te herkennen: wiskunde is een mentale creatie en dat uitgangspunt moet ook aan het onderwijs ten grondslag liggen.

The traditional approach presupposes that language or mathematics have to be taught as ready-made products. If this stand is adopted, it is quite consistent to base teaching on the logical analysis of language or mathematics, considered as funds of knowledge rather than as activities. If, however, teaching means initiating into an activity, than the teaching subjects have to be analysed as activities, not as ready-made products, before a teaching method is designed.⁸⁰

Dat een dergelijke analyse van de leerstof dan vervolgens leidde tot de toepassing van de niveautheorie was voor Freudenthal duidelijk.

Het leek erop dat hij in dit citaat de ‘traditionelen’ op een hoop gooide met de voorstanders van een logisch-deductieve aanpak. Immers, ook voor de voorstanders van een strenge benadering was de activiteit belangrijker dan de resultaten. Doordat zij zich bij de inrichting van het onderwijs echter lieten leiden door (de logische opbouw van) het wiskundige eindresultaat, en níet door het (her)uitvinden van die wiskunde, bereikten zij met logisch-deductief opgebouwd onderwijs in Freudenthals optiek geen ‘wiskunde als activiteit’, in tegendeel.

79 Dezelfde passage komt ook voor in: Freudenthal, ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ 34; Freudenthal, ‘Logical analysis and critical survey’ 27; zie ook: *ibid.*, 23, 26.

80 Freudenthal, ‘Logical analysis and critical survey’ 23.

Ook nieuw in ‘Logical analysis’ was Freudenthals beschrijving van de toepassing van de verschillende niveaus met betrekking tot een ander onderwerp dan het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Had hij ze eerder al losgemaakt van de meetkundige context door de onderlinge relatie gelijk te stellen aan die tussen theorie en metatheorie, hier ging hij nog een stap verder. Aan de hand van onderwerpen als volledige inductie en de theorie van (ir)rationale getallen beschreef hij de diverse niveaus die bij het verkrijgen van inzicht in deze materie door de leerling doorlopen zouden moeten worden.

Eveneens afwijkend aan de invalshoek van de Van Hieles was dat hij hierbij de (inhoud van de) niveaus verder generaliseerde. Freudenthal nam niet langer de door de Van Hieles vastgelegde vier stappen van ‘tastbare context’ naar ‘logica’ als onderwerp van onderzoek, maar maakte het aantal stappen onder meer afhankelijk van de desbetreffende stof. Hij gaf een concrete invulling van hoe dit zou gaan werken voor het geval van volledige inductie:

If on a certain level complete induction had been a significant activity, this activity may become a matter of conscious consideration and finally of explicit formulation on the next level. The higher level is here clearly indicated by the heavy quantification over all properties of natural numbers which occurs in the statement of complete induction.[...] Operations with integers such that multiples of a certain m are considered unessential, and operations with pairs of integers according to the equivalence relation for fractions, are unproblematic activities. On a higher level they can be promoted to subject matter and finally described by the device of abstraction through equivalence classes. On a still higher level the equivalence relation and the abstraction by equivalence classes can become subject matter.⁸¹

Nu hadden de Van Hieles er zelf ook wel aan gedacht de niveautheorie ook op andere onderwerpen uit het wiskundeonderwijs toe te passen. Al in 1957 gaven de Van Hieles in een artikel over de fenomenologie van het aanvankelijk meetkundeonderwijs in *Euclides* aan die mogelijkheid niet uit te sluiten:

De hiervoor aangeduide wijze om het meetkunde-onderwijs te beginnen heeft het voordeel, dat de leerlingen ervaren, hoe men een kennisgebied, waarvan men globale structuren bezit, door analyse voor objectieve beschouwingen toegankelijk kan maken. De hier voor de meetkunde aangegeven weg kan nl. ook voor andere kennisgebieden gebruikt worden. Of het daar ook mogelijk zal zijn het kennisveld tenslotte te matematiseren [sic], hangt van de aard van het veld af. Noodzakelijk daarvoor is immers o.a., dat de relaties niet gedenatureerd worden, wanneer zij in logische relaties worden omgezet.⁸²

81 Freudenthal, ‘Logical analysis and critical survey’ 27.

82 Dr. P.M. van Hiele en Dr. D. van Hiele-Geldof, ‘Een fenomenologische inleiding tot de meetkunde’, *Euclides* 33 (1957) 33-47, aldaar 45; N.b.: de Van Hieles gebruiken consequent “matematiseren” in plaats van “mathematiseren”.

Het feit dat Freudenthal de niveautheorie zo vrij interpreteerde, gaf aan dat hij zich de theorie ondertussen letterlijk en figuurlijk eigen had gemaakt. Waar het enkele jaren eerder nog bleef bij het aanprijzen van de inhoud van de Van Hiele-proefschriften, had Freudenthal hier de niveautheorie en alle daaruit volgende praktische en theoretische consequenties in zijn eigen gedachtegoed geïntegreerd en het daar een belangrijke, zo niet dominante plaats toebedeeld.

Daardoor kon Freudenthal zijn oude ideeën nu verder aanscherpen. Zo herhaalde hij in ‘Logical analysis’ nogmaals de eis dat de exactheid van de gebruikte taal in het wiskundeonderwijs aangepast mocht worden, zoals hij die ook al in zijn artikel van 1948 noemde. Nu kon hij echter de mate van exactheid van de door de leerling te gebruiken taal met behulp van de niveautheorie aan het niveau van de leerling koppelen:

Every level in the learning process asks for corresponding levels of rigour and formalization, but traditional teaching tends to move on one level of rigour and formalization from the start of teaching to the end. In actual teaching this means too high a level to start with and too low a one to finish. In geometry *Euclidean* rigour in the beginning prevents teaching, at the end it blocks *modern* rigour.⁸³

In het Franse equivalent stelde hij dit nog duidelijker:

... il n’y a pas d’exactitude absolue. A chaque niveau correspond une forme d’exactitude qui lui est propre. Exiger de l’élève l’exactitude d’un niveau où il ne se trouve pas, est malhonnête au nom de l’honnêteté.⁸⁴

Dat te vroeg te streng wiskundetaal gebruiken in het wiskundeonderwijs niet werkte, schreef mevrouw Van Hiele ook al in haar proefschrift.⁸⁵ De ontwikkeling van het wiskundige begrip moest dus hand in hand gaan met het ontwikkelen van de (mate van exactheid van de) formulering van dat begrip.

Een ander nieuw punt dat Freudenthal in deze artikelen aanstipte was het leren van axiomatic versus het leren axiomatiseren. Freudenthal zag hiertussen een wezenlijk verschil voor het wiskundeonderwijs:

Je nie absolument que quelque axiomatique que ce soit puisse être un des buts de l’enseignement scolaire en géométrie, mais j’admettrais bien l’axiomatisation. Il faut distinguer axiomatique et axiomatisation.⁸⁶

‘Axiomatic leren’ was voor Freudenthal een geval van antididactische inversie, maar voor het ‘leren axiomatiseren’ daarentegen – waarbij de leerling een actieve,

83 Freudenthal, ‘Logical analysis and critical survey’ 32.

84 Freudenthal, ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ 43.

85 Zij schreef: “Wanneer de wiskunde-taal te vroeg wordt gebruikt en de leraar is niet uitgegaan van de omgangstaal, dan wordt de wiskunde-taal geleerd zonder het bijbehorende wiskundige begrip”, in: Van Hiele-Geldof, *De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.* 44.

86 Freudenthal, ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ 41.

herontdekkende rol toebedeeld kreeg – zag hij een waardevolle rol in het wiskundeonderwijs. In datzelfde jaar besteedde hij een heel artikel (‘Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?’) aan de kwestie van axiomatic in het onderwijs.⁸⁷ Veel ideeën uit ‘Logical analysis’ en ‘Enseignement’ kwamen in dit artikel terug, alsmede een hele passage uit ‘Tradition and education’ van 1957.⁸⁸

Toch was er een wezenlijk verschil. Met dit nieuwe artikel had Freudenthal namelijk een heel nieuw, en in die tijd bijzonder urgent doel voor ogen: de strijd aangaan met de tendens om lukraak moderne wiskunde in het wiskundeonderwijs in te voeren.⁸⁹ Deze accentverschuiving was eigenlijk al min of meer door Freudenthal ingezet met het schrijven van ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’.

De niveautheorie als zodanig verdween in Freudenthals publicaties naar de achtergrond en hij beriep zich voornamelijk op de voor hem (al dan niet impliciet) met deze theorie samenhangende ideeën als ‘anti-didactische inversie’ en ‘geleide heruitvinding’. Hij noemde de Van Hieles en hun werk nog steeds in zijn artikelen, maar nu slechts en passant. Het werk van de Van Hieles was voor Freudenthal gepromoveerd tot basiskennis. De door hem uit dat werk afgeleide termen en ontwikkelde visie zou hij gebruiken in de strijd die hij de erop volgende jaren steeds nadrukkelijker aanging: de strijd tegen de stroming die ‘als een bandjir’ door de jaren zestig zou gaan razen, New Math.⁹⁰

7.5 Analyse van een leerproces: reflectie op reflectie

In Freudenthals boek *Revisiting mathematics education. China lectures*, dat verscheen in 1991, onderwierp hij zijn eigen ideeën over de niveautheorie, en dan met name die over de overgang tussen de verschillende niveaus in het leerproces, aan een interessante analyse.⁹¹ Door het vergelijken van verschillende beschrijvingen uit zijn eigen werk kwam hij tot de conclusie dat er tussen de artikelen ‘Logical analysis and critical survey’ en ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ een cruciaal verschil was te vinden.⁹² Cruciaal, omdat het een sprong in zijn eigen leerproces met betrekking tot inzicht in de wiskundedidactiek betrof.

In essentie was het verschil terug te brengen tot de inhoud van het volgende ci-

87 Freudenthal, ‘Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?’, *Der Mathematikunterricht* (1963) 5-29.

88 Meer over dit artikel in paragraaf 8.6.3.

89 De achtergronden van deze tendens en de rol van Freudenthal in deze ontwikkelingen komen uitgebreid aan de orde in hoofdstuk 8.

90 Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 348.

91 Freudenthal, *Revisiting mathematics education. China lectures* 96-102.

92 ‘Logical analysis’ had hij naar eigen zeggen eind jaren vijftig geschreven, ‘Enseignement’ dateerde volgens hem uit 1961.

taat uit ‘Enseignement’, dat als zodanig inderdaad niet terug te vinden was in ‘Logical analysis’:

Ce qui caractérise la hiérarchie des niveaux en général, c’est que la technique des opérations d’un certain niveau devient matière à réflexion à un niveau supérieur ...⁹³

De essentie zat in het gebruik van het woord “réflexion”. Volgens Freudenthal lag hier de bron van zijn besef van reflectie als niveau verhogende activiteit in het leerproces van de leerling. In ‘Logical analysis’ was de omschrijving die hier het dichtst bij in de buurt kwam “conscious consideration”, het bewust beschouwen van een activiteit, zoals beschreven in de volgende passage:

If on a certain level complete induction had been a significant activity, this activity may become a matter of conscious consideration and finally of explicit formulation on the next level.⁹⁴

De link met reflectie als niveauverhogende activiteit legde hij hier niet. Het verschil tussen beide visies, door hemzelf “a fundamental distinction” genoemd, omschreef Freudenthal eind jaren tachtig als volgt:⁹⁵

The second version [die uit ‘Enseignement’] adds to the first [die uit ‘Logical analysis’] the means by which operational matter on the lower level is transformed into subject matter on the higher level: *being made conscious and subjected to reflection* is the means of level-raising, which is applied to the – still intuitive (operational) – *activities* of the lower level, rather than to the subject matter.⁹⁶

Freudenthal ontdekte naar eigen zeggen pas in ‘Enseignement’ de reflectie als ‘motor’ van de wiskundige ontdekking en zag hierin op dat moment een essentieel didactisch principe voor het op het principe van heruitvinding gebaseerde onderwijs.

Helemaal correct lijkt deze conclusie niet. Het gaat te ver het artikel ‘Enseignement’ zo’n sleutelfunctie in de ontwikkeling van Freudenthals gedachtegoed te geven als hij zelf heeft gedaan. Weliswaar gebruikte hij hier voor het eerst de feitelijke term “reflectie” in deze context, echt nieuw was deze omschrijving van ‘terugblikken’ niet.

Zo noemde hij immers in ‘Logical analysis’ ook al het ‘bewust beschouwen’ van activiteiten van een lager niveau, en was er in ‘Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs’ en de Engelstalige versie hiervan uit 1956 al sprake van het overzien en beoordelen van de eigen ontwikkeling.⁹⁷ Daarnaast legde Freudenthal in ‘Enseignement’ de link tussen het terugblikken naar activiteiten op een lager niveau en het niveau-

93 Freudenthal, ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ 33.

94 Freudenthal, ‘Logical analysis and critical survey’ 27.

95 Freudenthal, *Revisiting mathematics education. China lectures* 98.

96 *Ibid.*, 99.

97 Freudenthal, ‘Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs’, *Faraday* 26 (1956) 14-18, aldaar 16; Freudenthal, ‘Initiation into Geometry’, *The Mathematics Student* 24 (1956) 83-97, aldaar 92.

verhogende effect van deze actie voor de leerling nog niet zo expliciet als hij dat eind jaren tachtig formuleerde. Wellicht heeft hij gelijk als hij zegt dat (een deel van dat) inzicht in ‘Enseignement’ al in de kiem aanwezig was. Maar een echte doorbraak was het hier nog niet. Net als zoveel van zijn sleutelbegrippen ontstond ook ‘reflectie’ veel geleidelijker en verspreid over meer verschillende publicaties dan hij in *Revisiting mathematics* wil doen geloven.

7.6 Tot slot

In de hierop volgende jaren zou het werk van de Van Hieles, en met name de niveautheorie, bekendheid krijgen in zowel binnen- als buitenland. Het zou voor veel onderzoekers en ontwikkelaars van wiskundeonderwijs een inspiratiebron vormen, vooral in de Verenigde Staten en de Sovjet-Unie.⁹⁸ Ook voor Freudenthal was de invloed die van het werk uitging nog lang niet uitgewerkt. Van ‘niveautheorie’ via ‘wiskunde als activiteit’, ‘geleide heruitvinding’ en ‘axiomatiseren’ leek het nog maar een kleine stap naar ‘lokaal mathematiseren’, een in later werk door hem geïntroduceerd didactisch begrip. Toch zou hij zich in deze verdere ontwikkeling van zijn gedachtegoed nooit meer zo direct op de theorie van de Van Hieles beroepen als hij dat in de hier beschreven jaren had gedaan. Hij beschikte begin jaren zestig door het introduceren van termen als ‘geleide heruitvinding’ en ‘anti-didactische inversie’ over een eigen gedachteapparaat. Een gedachteapparaat, om uit te diepen, om uit te bouwen, maar vooral: om uit te dragen.

98 Goffree, *Ik was wiskundeleraar* 101; John C. Moyer aan Freudenthal, 16 maart 1977, en antwoord; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 54.

Methode versus inhoud

New Math en de modernisering van het wiskundeonderwijs

Ich bin kein ausgeklügelt Buch, ich bin ein Mensch mit seinem Widerspruch.

Hans Freudenthal in *Schrijf dat op, Hans*, 1987¹

8.1 Inleiding: tijd voor modernisering

Na de totstandkoming van het leerplan-1958 midden jaren vijftig leek een periode van rust aangebroken binnen het wiskundeonderwijs.² Immers, dit leerplan was uniek doordat het gesteund werd door zowel de gevestigde orde binnen het wiskundeonderwijs – vertegenwoordigd door de leden van lerarenverenigingen WIMECOS en LIWENAGEL – als door de hoek van de als radicale vernieuwers bekend staande leden van de Wiskunde Werkgroep. Bovendien werden geluiden van pleiters voor een ‘strenger’ (logisch-deductief ingericht) wiskundeonderwijs nauwelijks meer gehoord. Een leerplan dat zo’n breed draagvlak had, moest wel tot grote tevredenheid en saamhorigheid leiden.

Het tegendeel was waar: jaren van grote onrust braken aan in de wereld van het wiskundeonderwijs, gevoed door de wens voor radicale koersverandering. Diverse oorzaken, zowel binnen als buiten Nederland, lagen hieraan ten grondslag. Het was alsof de hele wiskundeonderwijs-wereld bevangen was door de uit Amerika overgewaaid koorts: de ‘New Math’-koorts, het bondigst gekarakteriseerd door de term ‘modernisering’. Modernisering, niet zozeer van de didactiek, maar van de *inhoud* van het wiskundeonderwijs, dat de aansluiting met de in de twintigste eeuw ontstane moderne wiskunde had verloren.

Wat hield deze zogenaamde New Math-stroming nu precies in? Waar en hoe was de invloed op het Nederlandse wiskundeonderwijs merkbaar? En: hoe stond Freudenthal hiertegenover? Nu een alom gerespecteerde autoriteit op het gebied

1 Freudenthal terugkijkend op zijn beschrijving van zijn activiteiten op het gebied van het wiskundeonderwijs in de jaren tachtig. Het citaat is afkomstig van het gedicht ‘Huttens letzte Tage’ (1871) van de Zwitserse schrijver Conrad Ferdinand Meyer (1825-1898); Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 359.

2 Bij het samenstellen van deze en volgende paragrafen zijn gegevens ontleend aan de volgende werken: Boekholt en De Booy, *De geschiedenis van de school in Nederland vanaf de middeleeuwen tot aan de huidige tijd*; Saskia Grotenhuis, *Op zoek naar middelbaar onderwijs. HBS, gymnasium, MMS en lyceum in discussie tussen 1900 en 1970* (Amsterdam 1998); Dodde, *Het Nederlandse onderwijs verandert*; Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraars. Deel 1, II, III*; Brandenburg, *Modernisering van het wiskundeonderwijs*; De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde*; Euclides jrg. 32-43 (1956-1968); Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs*; Goffree, *Ik was wiskundeleraar*.

van wiskundeonderwijs en -didactiek – met zijn betrokkenheid bij de ICMI zowel in binnen- als buitenland – moest ook hij een standpunt op dit gebied innemen: voor- of tegenstander?

Dit is een vraag, die enkel achteraf zo gesteld kan worden. Vooral in de eerste jaren na de opkomst van New Math – midden jaren vijftig in de Verenigde Staten – lagen de zaken niet zo zwart-wit. Het duurde een tijd voordat New Math in de onderwijswereld van Europa binnendrong, en een nog langere tijd voordat zich consequenties voor het wiskundeonderwijs in Nederland aftekenden.

De verleiding is groot Freudenthals activiteiten op het gebied van het wiskundeonderwijs in een van de kampen ‘voor’ of ‘tegen’ te plaatsen. Maar in de eerste plaats waren deze kampen, vooral in de beginjaren van New Math, helemaal niet zo duidelijk te onderscheiden. Daarnaast, maar ook mede daardoor, waren Freudenthals activiteiten in diezelfde tijd niet gemakkelijk onder één noemer te vangen. In *Schrijf dat op*, Hans beschreef hij zichzelf als fervent tegenstander van New Math en karakteriseerde hij zijn acties als

... een dam opwerpen tegen de internationale bandjir van New Math. [...] De geïsoleerde, van de realiteit hermetisch afgesloten wiskunde van toen – denk aan mijn citaten –, daar ging ik tegenin, en des te harder naarmate de isolering, de afsluiting van de realiteit in New Math tot de top werd gedreven.³

Achteraf gezien was dit het meest aannemelijke beeld: Freudenthal als fervent tegenstander van alles waarvoor New Math stond. Dit beeld klopte ook met de stand van zaken begin jaren zeventig. Maar zeker in de jaren vijftig was Freudenthals overtuiging nog niet zo duidelijk als ‘tegenstander’ uitgekristalliseerd. Zijn activiteiten en bemoeienissen met diverse initiatieven en symposia op het gebied van (de modernisering van) het wiskundeonderwijs vertoonden op het eerste gezicht allesbehalve het beeld van de eenzame tegenstander – hij omschreef zichzelf in het wiskundeonderwijsveld als een “tamboer voor dovemansoren” – van New Math.⁴

In eerste instantie reageerde hij enthousiast en optimistisch op de plotseling alom aanwezige drang tot vernieuwing door modernisering. Al opgaand in en meewerkend met deze opkomende stroming leek hij – zoals velen – de eventuele ‘gevaren’ van New Math pas geleidelijk in te zien, te verwerken in zijn ideeën en uit te dragen in publicaties en voordrachten. Achteraf vond Freudenthal zelf ook dat hij eerder het ‘gevaar’ van New Math had moeten inzien en tegenhouden:

Gezaghebbende wiskundigen demonstreerden het voor onderwijskundigen die er zich aan vergaapten[,] al had geen van hen een flauw idee waar deze begrippen in de wiskunde toe dienden. Het was een absurde bevlieging wiskunde vanuit dit perspectief op school te onderwijzen – ik heb deze dwaze geestesgesteldheid toen niet au sérieux genomen en dat was misschien de grootste taxatiefout die ik in mijn leven heb gemaakt.⁵

3 Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 348, 360.

4 *Ibid.*, 362.

5 *Ibid.*, 349.

Niet serieus genomen? Of niet tijdig als zijnde een “dwaze geestesgesteldheid” onderkend? Toch zou hij uit het strijdgewoel van de jaren zestig komen als diegene die in Nederland een dam wist op te werpen tegen New Math. Hoe zat het nu precies?

8.2 New Math

De rode draad in de geschiedenis van het wiskundeonderwijs is in de jaren vijftig en zestig het beste te omschrijven met de term ‘modernisering’. Modernisering van het wiskundeonderwijs, of preciezer nog: modernisering van de wiskunde in het wiskundeonderwijs. Onder invloed van buitenlandse initiatieven, uitgaande van de Verenigde Staten, maar later ook van sommige andere (West)Europese landen, ging ook in Nederland steeds sterker het idee leven dat (meer) moderne wiskunde onderwezen moest gaan worden op de middelbare scholen – in eerste instantie op HBS en gymnasium. Waar kwam dat idee vandaan?

8.2.1 De kloof tussen moderne wiskunde en wiskundeonderwijs

Het idee was op zich niet nieuw. Al vanaf het eind van de negentiende eeuw hadden dergelijke geluiden geklonken. Zo had in Duitsland de door Felix Kleins ideeën geïnspireerde ‘Reform Bewegung’ als belangrijkste doelstelling het wiskundeonderwijs inhoudelijk te vernieuwen en aan te passen aan de moderne wiskunde zoals die zich de decennia daarvoor had ontwikkeld. Het centraal stellen van het functiebegrip en de invoering van differentiaal- en integraalrekening waren daarvan de belangrijkste consequenties.⁶ Freudenthal schreef hierover in 1964:

Half a century ago German educators spoke about the “doppelter Bruch”, the two-fold rupture in the education of the mathematics student who first has to forget about school mathematics when he passes from the secondary school to the university, and a few years later about university mathematics when, returning to school as a teacher, he had to tie on the thread where it was cut off a few years ago. This double rupture, though early recognized as an evil, was not bridged when it was relatively mild. It has grown sharper and sharper, and finally we have been left with no other choice than drastic overhauling mathematical education at the secondary level.⁷

Ook de New Math-beweging kwam voort uit de onvrede over de kloof tussen de wiskunde op de middelbare school en de academische wiskunde. Deze kloof werd onder meer duidelijk door het werk van Bourbaki.⁸ ‘Nicolas Bourbaki’ was geen

6 Zie ook paragraaf 2.2.2.

7 Lezing op het internationale colloquium ‘Modern curricula in secondary mathematical education’, gehouden te Utrecht, 19-23 december 1964 (ongepubliceerd); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 540.

8 Voor een terugblik op het werk van Bourbaki zie ook: A. Borel, ‘Twenty-five years with Nicolas Bourbaki, 1949-1973’, *Notices of the American Mathematical Society* 45 (1998) 373-380; M. Senegal, ‘The continuing silence of Bourbaki – an interview with Pierre Cartier’, *Mathematical Intelligencer* 20 (1998) 22-28.

persoon, maar de naam van een in 1935 door jonge wiskundigen van de Parijse École Normale Supérieure opgerichte groep.⁹ Ontevreden over de in hun ogen ouderwetse inhoud van het daar genoten onderwijs namen zij zich voor de wiskunde van de basis af opnieuw te doordenken en als logische eenheid te herformuleren. Dit resulteerde in het organiseren van ettelijke seminars en de publicatie van een in collectief geschreven reeks boeken.

De Bourbaki-groep had in principe geen directe raakpunten of bemoeienissen met het middelbare onderwijs. Wel speelde een van de leden in de groep, Jean Dieudonné (1906-1992), als voorstander van New Math een belangrijke rol bij de verspreiding ervan in Europa en met name in Frankrijk. Het indrukwekkende werk van de groep Bourbaki wekte het nodige ontzag op, ook in de wereld van de wiskundeleraren, en benadrukte daarmee nog eens de kloof tussen academische wiskunde en de wiskunde op school.¹⁰

Freudenthal zag het eind jaren tachtig als volgt:

In onze eeuw heeft de wiskunde – net als vele andere wetenschappen – een geweldige groei in breedte, diepte en hoogte te zien gegeven. Maar er was meer: een aloude neiging om de wiskunde telkens weer te reorganiseren, en dat ook weer met wiskundige middelen, verstevigde zich tot een bewust beleefde stormachtige trend. Een Franse groep – Bourbaki – gaf er gestalte aan: een systeem van de wiskunde, vanaf de meest algemene begrippen, afdalende naar de meer en meer gespecialiseerde – een lange weg die in feite nooit werd afgelegd, maar toch als systeem indrukwekkend van architectuur. Indrukwekkend, maar onvoltooid, want onder het reorganiseren groeit de wiskunde tussen je vingers door. Niettemin, qua structuur een schoonheid, die vooral die mensen fascineerde die alleen maar die structuur zagen en nauwelijks wisten waartoe die structuur diende. In de jaren vijftig was het nog maar een kleine schare die erdoor gegrepen werd: volgens dit fraaie systeem moest wiskunde op school worden onderwezen.¹¹

Ook in Nederland hadden door de jaren heen klachten over de kloof tussen de wiskunde op de universiteit en de wiskunde op de middelbare scholen geklonken. Zij leidden ook wel tot aanpassingen van het leerplan, zij het vertraagd en minder duidelijk herkenbaar als zodanig. Een voorbeeld was de decennia durende strijd om differentiaal- en integraalrekening in het leerplan op te nemen, hetgeen pas met de invoering van het leerplan van 1958 echt lukte. Het overbruggen van de kloof tussen de ‘hogere wiskunde’ van de universiteit en de schoolwiskunde speelde in deze discussie overigens niet eens de belangrijkste rol.¹² Pogingen tot invoering van nieuwe onderwerpen als statistiek strandden uiteindelijk op het laatste moment.¹³

9 Tot de oprichters behoorden de wiskundigen Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Jean A.E. Dieudonné, Charles Ehresmann, René de Possel, Szolem Mandelbrojt en André Weil.

10 Zie ook de besprekingen van het werk van Bourbaki in *Euclides* in deze jaren.

11 Freudenthal, *Schrijf dat op*, *Hans* 348-349.

12 Voor een beschrijving van deze discussie, zie de paragraaf 2.2.2.

13 Wel werd onder leiding van Bunt statistiek bij wijze van experiment als keuzevak voor gymnasium- α gegeven. Zie ook paragraaf 6.4; L.N.H. Bunt, *Statistiek als onderwerp voor het gymnasium A. An in-*

Ook Freudenthal had zich al eens over het achterlopen van de schoolwiskunde ten opzichte van de moderne wiskunde beklagd. In 1950 schreef hij in *De Groene Amsterdammer* over de verouderde schoolwiskunde die “op een dood spoor” zat en minstens vijftig jaar op de ‘levende’ wiskunde achter zou lopen.¹⁴ Maar met de leerplanwijziging van 1958 leek toch ook hij tevreden. In ieder geval bejubelde hij destijds het feit dat het leerplan-1958 nu niet langer “achter de feiten aanholt”.¹⁵

8.2.2 Modernisering van het wiskundeonderwijs in de Verenigde Staten

De New Math-beweging kwam voort uit de algemene ontevredenheid die er na de Tweede Wereldoorlog in de Verenigde Staten heerste over het wiskundeonderwijs.¹⁶ De wiskundige Morris Kline (1908-1992) zette de tekortkomingen van dat onderwijs in 1972 op een rijtje: in het algebraonderwijs zou het te veel leunen op het mechanisch aanleren van eindeloos veel rekenmethoden en -trucjes (het zogenaamde ‘drillen’).¹⁷ Het deductieve aspect van de Euclidische meetkunde kwam in het traditionele Amerikaanse high school-curriculum slecht uit de verf. Voor veel leerlingen kwam het neer op het uit het hoofd leren van bewijzen. Bovendien werden veel allang niet meer essentiële onderdelen van de wiskunde enkel uit traditionele overwegingen in het curriculum gehandhaafd, waarbij sommige ronduit foute wiskundige beweringen bevatten.

Met een dergelijk verouderd programma bereidde het wiskundeonderwijs op de middelbare school natuurlijk slecht voor op de praktische, technologische en economische rol die de wiskunde in de maatschappij speelde. Enerzijds was daar een zich steeds duidelijker aftekenende en groter wordende rol voor de *toepassing* van wiskunde. Anderzijds speelden andere, modernere onderdelen van de wiskunde

vestigation into the possibilities of teaching descriptive and elementary mathematical statistics in secondary schools (Groningen 1956); L.N.H. Bunt, *Statistiek als onderwerp voor het gymnasium A. Verslag van een proefnemning. A Inrichting en resultaten van het onderzoek* (Groningen 1957).

- 14 Hans Freudenthal, ‘En nu ...de wiskunde’, *De Groene Amsterdammer* (2 december 1950); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1439.
- 15 Zie voor een bespreking van dit leerplan en Freudenthals uitlatingen hierover ook paragraaf 6.3; Hans Freudenthal, ‘Naar een nieuw wiskunde-onderwijs’, *De Groene Amsterdammer* (2 april 1955); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1513.
- 16 Bij het samenstellen van deze paragraaf zijn gegevens ontleend aan: Morris Kline, *Why Johnny can't add: the failure of the New Math* (New York 1973); J. Kilpatrick, ‘Five lessons from the New Math era’ en R.W. Bybee, ‘The Sputnik era: why is this educational reform different from all other reforms?’, voordrachten op het symposium *Reflecting on Sputnik. Linking the past, present en future of educational reform* door het Center for Science, Mathematics, and Engineering Education, 4 oktober 1997, elektronisch beschikbaar en geraadpleegd; Organisation for European Economic Cooperation, *New thinking in school mathematics* (1961); Brandenburg, *Modernisering van het wiskundeonderwijs*; Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Deel I, II, III*; Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskunde-onderwijs*.
- 17 Morris Kline was professor aan New York University van 1938 tot 1975. Hij publiceerde onder andere over geschiedenis van de wiskunde en filosofie. In zijn artikelen en boeken over wiskundeonderwijs legde hij de nadruk op het leren toepassen van de wiskunde. Hij was een groot tegenstander van New Math; Kline, *Why Johnny can't add: the failure of the New Math* 4-8.

(zoals statistiek en logica), die nog niet tot de schoolwiskunde behoorden, een steeds belangrijker rol. Bovenal sloot het wiskundeonderwijs slecht aan op de universitaire exacte studies, doordat het inhoudelijk decennia achterliep op de stand van zaken in de wetenschap.

De oplossing, die ook didactisch een verbetering moest brengen, werd gezocht in een moderne en doorzichtige opbouw van de inhoud van het wiskundeonderwijs door de wiskunde als één logisch geheel te presenteren. Binnen die wiskunde stond het begrip structuur centraal. Verzamelingen, relaties en de nadruk op bijbehorend exact wiskundig taalgebruik waren hierbij de voornaamste speerpunten. Transformatiemeetkunde en het gebruik van vectoren moest de Euclidische schoolmeetkunde vervangen.

In die zin was het een stroming waarbij, misschien nog wel sterker dan in het traditionele onderwijs, de te onderwijzen wiskunde centraal stond. De logisch-deductieve structuur van de wiskunde was bepalend voor de opbouw van de lesstof en daarmee voor de te volgen didactiek. Hieraan lag de onuitgesproken gedachte ten grondslag dat in het wiskundeonderwijs de wiskundige structuur aan de psychologische gelijk te stellen was, of dat de psychologische in ieder geval geen belemmering vormde voor de wiskundige. Juist een van meet af aan logische opbouw zou de wiskunde voor de leerling doorzichtig houden waardoor wiskunde aan aantrekkelijkheid zou winnen, zo was de redenering. Inhoudelijk debat over de didactische aspecten van het door New Math voorgestane onderwijs speelde (met name in de beginjaren van de stroming) een ondergeschikte rol.

De oorsprong van deze aanpak was te vinden in een project uit 1951. Onder leiding van wiskundeleraar en onderwijskundige Max Beberman (1925-1971), werkzaam aan de universiteit van Illinois, was een project opgezet om tot aanbevelingen te komen voor het verhogen van het wiskundig niveau van de aankomende studenten ‘Engineering’ (later uitgebreid tot andere exacte studies). Die aanbevelingen bestonden hoofdzakelijk uit een lijst van moderne(re) onderwerpen die in meer of mindere mate voor deze toekomstige studenten aan de orde zouden moeten komen in het middelbaar wiskundeonderwijs. Uit dit project ontstond de ‘University of Illinois Committee on School Mathematics’ (UICSM), dat begin jaren vijftig experimenteerde met curricula moderne wiskunde voor de bovenbouw van de high school.

In 1955 werd door het ‘College Entrance Examination Board’ de ‘Commission on Mathematics’ opgericht, met als doel het onderzoeken van de “mathematical needs of today’s American youth”, onder voorzitterschap van professor A.W. Tucker.¹⁸ Veel van de terminologie en moderne onderwerpen uit het werk van de UICSM kwamen ook in het door deze commissie ontworpen curriculum terecht. Eveneens oorspronkelijk bedoeld voor leerlingen uit de bovenbouw die verder wilden studeren, had het grote invloed op latere curriculumontwerpen voor de onderbouw en het lager onderwijs.

¹⁸ Zoals geciteerd in: D. Klein, ‘A brief history of American K-12 mathematics education in the 20th century’, in: J. Royer, ed., *Mathematical cognition* (Greenwich 2003).

De katalysator voor de grote verspreiding van de New Math-beweging was echter de lancering van de Russische Spoetnik in 1957. De hierdoor ontstane angst voor een vermeende technologische achterstand van de Verenigde Staten op de Sovjet-Unie zetten modernisering en verbetering van het Amerikaanse onderwijs in wiskunde en andere exacte vakken hoog op de federale agenda. Om die modernisering te stimuleren kwamen aanzienlijke subsidies vrij en werden diverse fondsen en commissies opgericht. Angst en een gevoel van inferioriteit op wetenschappelijk gebied maakten dat het grote publiek deze ontwikkelingen ondersteunden.

Zo kregen de New Math-aanhangers in de Verenigde Staten aanvankelijk vrij spel. Het grootste en bekendste project voor proefnemingen met moderne leerstof was dat van Yale-professor Edward G. Begle, de 'School Mathematics Study Group' (MSG), opgezet in 1958.¹⁹ Hier werd een New Math-curriculum voor het hele lagere en middelbare schooltraject ontworpen en verspreid.

Opvallend was dat bij het ontwerpen van de leerplannen relatief veel wiskundigen en weinig leraren waren betrokken. Herscholingscursussen voor leraren op daarvoor ingestelde instituten werden daarentegen massaal bezocht. Uitgeverijen sprongen in op de ontwikkelingen door het uitbrengen van op New Math gebaseerde leerlijnen, nog voor deze in de praktijk afdoende waren uitgetest.

Toch was er wel degelijk kritiek op deze initiatieven in de Verenigde Staten. Zo werd in 1962 op initiatief van Morris Kline een protestbrief in *The Mathematics Teacher* gepubliceerd, waarin grote zorg werd uitgesproken over de uitwerking van de nieuwe programma's waarin te snel, te veel en te geïsoleerde wiskunde aan de leerlingen zou worden gepresenteerd, daarmee voorbijgaand aan juist de essentie van de wiskunde: de verbondenheid ervan met de realiteit van het dagelijks leven en de samenhang met andere vakgebieden.²⁰ Tientallen vooraanstaande Amerikaanse wiskundigen ondertekenden deze brief.

Morris Kline zou in 1972 in zijn boek *Why Johnny can't add* zijn bezwaren tegen New Math uitgebreid uiteenzetten. Hij gaf in zijn boek een vermakelijke karikatuur van op New Math gestoeld rekenonderwijs:

One parent asked his eight-year-old child, "How much is $5+3$?" The answer he received was that $5+3=3+5$ by the commutative law. Flabbergasted, he rephrased the question: "But how many apples are 5 apples and 3 apples?" The child didn't quite understand that "and" means "plus" and so he asked, "Do you mean 5 apples plus 3 apples?" The parent hastened to say yes and waited expectantly. "Oh," said the child, "it doesn't matter whether you are talking about apples, pears or books; $5+3=3+5$ in every case."²¹

In de loop van de jaren zestig zou 'New Math' met de soms tot in het absurde doorgevoerde abstractheid de sympathie van het grote publiek (en met name de ouders

19 Later zou Begle, en daarmee het hele MSG-project, naar Stanford overgaan.

20 'On the mathematics curriculum of the high school', *The Mathematics Teacher* (1962) 191-195; zie ook: Kline, *Why Johnny can't add: the failure of the New Math* 112-118.

21 Kline, *Why Johnny can't add: the failure of the New Math* 3.

van de leerlingen) langzamerhand verspelen. Onder steeds grotere druk van critici verdween de New Math-stroming begin jaren zeventig van het toneel.

Samengevat kwamen de voornaamste overwegingen bij invoering van New Math dus uit de maatschappij en de wetenschap. Meer ideologisch getinte motivatie of ‘het belang van het kind’ speelden geen rol. Ook het psychologische aspect speelde slechts een marginale en impliciete rol: er waren aanwijzingen vanuit de psychologie dat leerlingen eerder aan ‘logica’ en ‘structuur’ toe waren dan voorheen gedacht. In het werk van psychologen als Piaget en Bruner werd hiervoor steun gevonden.²² Dit motiveerde de New Math-aanhangers om eerder en nadrukkelijker in het onderwijs (wiskundige) ‘structuur’ te onderwijzen en werd de noodzaak om de nieuwe leerstof psychologisch en eventueel pedagogisch steviger te onderbouwen nauwelijks gevoeld. De belangrijkste psychologische onderbouwing was dus deze: ‘het is mogelijk om leerlingen dit te leren, en de doorzichtige logische structuur zal het wiskundeonderwijs voor de leerling makkelijker en aantrekkelijker maken’.

Voor Freudenthal was dergelijke impliciete projectie van psychologische bevindingen op de praktijk van het onderwijs een doorn in het oog. Dat bepaalde leerstof (of -structuren) *te onderwijzen* zou zijn, was in zijn optiek nauwelijks van invloed op – laat staan een doorslaggevende reden voor – de beslissing om daadwerkelijk tot onderwijzen ervan over te gaan. Sterker nog: dat iets onderwijsbaar was, was op zich al van weinig waarde, omdat met de juiste aandacht en moeite bijna alles ‘onderwijsbaar’ verklaard kon worden. Een dergelijke gedachtegang – het kan onderwezen worden, dus is er niets op tegen om het ook te doen – was volgens Freudenthal simpelweg de statistische uitkomsten van de psychologie misbruiken.²³ In de jaren zeventig zou hij zich steeds vaker uitspreken over de dubieuze rol die sommige psychologische theorieën bij de totstandkoming van wiskundeonderwijs spelen.

Twintig jaar eerder was hij zich van deze dreiging nog niet zo bewust. In zijn publicaties van eind jaren vijftig en begin jaren zestig liet hij zich nergens uit over de rol van de psychologie bij de totstandkoming van de op New Math gebaseerde ideeën, noch noemde hij Piaget of zijn werk in dit verband.²⁴ In *Schrijf dat op, Hans* kijkt hij terug op de gang van zaken bij de opkomst van New Math en de rol die de psycholoog Piaget daarbij zou hebben gespeeld:

22 Voor de rol van Piagets bevindingen in New Math, zie ook paragraaf 9.5.3.

23 Dergelijke misbruik van de psychologie kaartte hij ook al aan in zijn ‘Rekendidaktiek’ uit 1944; Freudenthal, ‘Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?’, *Der Mathematikunterricht* (1963) 5-29, aldaar 18.

24 Jean Piaget (1896-1980), was een ontwikkelingspsycholoog uit Zwitserland, wiens – vooral in de didactische hoek niet geheel onomstreden – ideeën over de ontwikkeling van het denkvermogen van kinderen van grote invloed waren op veel wiskundige didactische theorieën, vooral in de hoek van New Math. Freudenthal heeft in de jaren zeventig geregeld de interpretatie van het werk van Piaget becritiseerd. Zie ook paragrafen 9.5.3 en 9.6.3.

Het begon dus niet pas met de Spoetnik-shock. Het begon al vroeg in de jaren vijftig. Zelfs Piaget, die er niets van begreep behalve dat het woord ‘structuur’ hem aansprak, hadden ze ertoe weten over te halen. Met Piagets naam op het reclamebord meenden ze zich verzekerd van de steun van de psychologie. Wat psychologie! Wiskunde kent een logische orde en voor wie wiskunde onderwijst is de verleiding groot de psychologische, de onderwijskundige orde aan de logische op te offeren. Ik heb mijn best gedaan dit te vermijden en in mijn ‘fragment Rekendidactiek’ van 1942, zo niet al vroeger, heb ik er anderen voor willen waarschuwen. Maar wat zag ik nu gebeuren? Een ten top gedreven logische orde, een systematiek van de wiskunde als geheel – zo zou de wiskunde moeten worden onderwezen.²⁵

Desalniettemin wekten de Amerikaanse ontwikkelingen eind jaren vijftig over het algemeen groot ontzag in de West-Europese landen en leidden daar tot diverse initiatieven. De cursusdagen over moderne wiskunde voor wiskundeleraren in België en het in Groot-Brittannië door de ‘Scottish Mathematics Group’ ontwikkelde lesmateriaal (later in Nederland bekend als de zogenaamde ‘Schotse methode’) waren maar enkele voorbeelden van de ontwikkelde activiteiten en hadden wellicht nog de meest directe invloed op het Nederlandse wiskundeonderwijs.

Ook binnen de ICMI werd de modernisering van het wiskundeonderwijs op de agenda gezet. Zo sprak de Duitse wiskundige (en voorzitter van de ICMI) Heinrich Behnke (1898-1979) op het IMC-congres van 1958 in Edinburgh over de discrepantie tussen de moderne wiskunde zoals die op de universiteit werd beoefend en de wiskunde zoals die op de middelbare scholen werd onderwezen. Tot één van de onderwerpen voor het onderwijsdeel van het IMC-congres van 1962 werd ‘Modernization of mathematical teaching’ gekozen, waarvoor de NOCW het rapport *Modernization of mathematical teaching in the Netherlands* samenstelde.²⁶ Dit is maar een kleine greep uit de diverse initiatieven die er ten behoeve van een moderner wiskundeonderwijs op touw werden gezet in West-Europa.²⁷ Het startsein voor deze ontwikkelingen leek achteraf gezien gegeven op een seminar in het Franse Royaumont in 1959, waarna de New Math-stroming zich definitief over West-Europa uitbreidde.

8.3 Royaumont: een bridgeclub met onvoorziene gevolgen

Eind 1959 organiseerde de ‘Organisation for European Economic Co-operation’ (OEEC) een seminar over de modernisering van het wiskundeonderwijs.²⁸ De OEEC was in 1948 opgericht om de Amerikaanse financiële hulp voor de wederopbouw

²⁵ Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 349.

²⁶ F. Loonstra en P.G.J. Vredenduin, eds., *Modernization of mathematical teaching in the Netherlands* (Groningen 1962); W.J. Thijssen en J.H. Wansink, ‘Het internationale mathematische congres in 1958’, *Euclides* 34 (1958/1959) 225-245.

²⁷ Over het effect van de New Math-stroming in onder andere België, zie ook paragraaf 8.5.1.

²⁸ In Nederland OEEC: Organisatie voor Europese Economische Samenwerking.

van (West-)Europa te coördineren.²⁹ Eind jaren vijftig was dit doel min of meer bereikt en in 1961 werd de organisatie omgezet in de ‘Organisation for Economic Cooperation and Development’ (OECD), met in haar doelstellingen de nadruk op het bevorderen van economische groei, werkgelegenheid en welvaart van de lidstaten.³⁰

Eind jaren tachtig zag Freudenthal het hoe en waarom van dit seminar glashelder:

Dankzij de Spoetnik-shock zagen ze hun kans schoon. De schoolwiskunde was zo ver achtergebleven bij de wiskundige wetenschap dat er schoon schip moest worden gemaakt. De OESO (toen nog OEEC), de organisatie voor economische samenwerking, pakte de zaak op. Wat had de OESO met onderwijs te maken? Het was het Bureau voor wetenschappelijk en technisch personeel waaronder de vraag naar nieuw wiskundeonderwijs ressorteerde.³¹

Freudenthal had naar eigen zeggen “schoon genoeg van dit soort conferenties” en liet zich er niet naar toe delegeren.³² In *Schrijf dat op, Hans* noemde hij dit wegblijven “een kardinale fout”.³³

Royaumont was niet zo maar een conferentie, regeringen hadden er vertegenwoordigers naartoe gestuurd – een conferentie met gezag bekleed. Had ik, als ik er geweest was, de besluiten van Royaumont tegen kunnen houden? Ik had in elk geval nog harder kunnen schreeuwen dan mijn vermaarde vriend Dieudonné. Achteraf bekeken was het niet alleen een fout dat ik niet naar Royaumont ging, maar het ging dwars tegen mijn gewoonte in mij niet afzijdig te houden maar mee te werken om bij te sturen, een gewoonte die ik bijvoorbeeld later in de CMLW getrouw naleefde.³⁴

Zo’n stellige afwijzing op de uitnodiging voor het congres zoals Freudenthal in *Schrijf dat op, Hans* beschreef, was het echter niet. In eerste instantie stond hij namelijk helemaal niet zo negatief tegenover de door de OEEC geopperde plannen en deed hij flink zijn best om zijn invloed op de organisatie van het congres te doen gelden.

8.3.1 Freudenthal in ‘the group of experts’

Het begon allemaal met een brief die Freudenthal in oktober 1958 ontving van J.R. Gass, ‘Head of Division’ van het ‘Office for Scientific and Technical Personnel’ (OSTP) van de OEEC.³⁵ De OSTP was ingesteld in 1958 en had onder andere als doel het verhogen van de kwaliteit van wetenschappers en ingenieurs. In de omschrij-

29 Tot de OEEC behoorden eind jaren vijftig: België, Canada, Denemarken, Duitsland, Frankrijk, Griekenland, Groot-Brittannië, Ierland, Italië, IJsland, Luxemburg, Nederland, Noorwegen, Oostenrijk, Portugal, Turkije, de Verenigde Staten, Zweden en Zwitserland.

30 In Nederland OESO: Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling.

31 Freudenthal doelt hier met de OEEC waarschijnlijk op de OES; Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 349-350.

32 *Ibid.*, 351.

33 *Ibid.*, 350.

34 *Ibid.*, 350.

35 J.R. Gass aan Freudenthal, 20 oktober 1958; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1829.

ving van de beoogde doelen stond ook “increasing the effectiveness of sciences and mathematics teaching” vermeld.³⁶ In zijn brief aan Freudenthal gaf Gass te kennen dat de OEEC besloten had de pogingen in de diverse lidstaten tot verbeteringen van het wiskundeonderwijs op de middelbare scholen te steunen. Door de Belgische wiskundige W. Servais was Freudenthal aangewezen als zijnde “a leading pioneer in the field of mathematics teaching” en als zodanig werd van hem voor dit initiatief ondersteuning gevraagd.

Freudenthal ging hierop in door een lijst te verschaffen met alle Nederlandse initiatieven op het gebied van de verbetering van het wiskundeonderwijs. Hij noemde onder andere het werk van de ICMI, *Euclides* en de proefschriften van de Van Hieles. Vervolgens trad hij toe tot de ‘OEEC group of experts’, bestaande uit de professoren Choquet, Servais, G. Walusinski (Frankrijk), M.H. Stone (Chicago), Tucker en Howard F. Fehr (New York). Met deze laatste drie professoren was de overzeese New Math-stroming overigens goed vertegenwoordigd in de commissie.

Als ‘expert’ werd Freudenthal uitgenodigd voor de vergaderingen van de OEEC. Het voornaamste doel van de OEEC was het (financieel) ondersteunen van al bestaande activiteiten. Daarnaast werden er ook nieuwe initiatieven besproken. Zo stuurde de OEEC voor de vergadering in Parijs van 13 en 14 maart 1959 een discussiestuk aan de ‘experts’, waarin twee projecten beschreven werden. Het eerste project was het opzetten van “a survey of the ‘Current practices and trends in school mathematics’”, gevolgd door het tweede project dat zou bestaan uit een seminar over “New thinking in school mathematics and possibilities of implementation”. Het doel van het seminar werd als volgt omschreven:

The seminar is to bring together a number of key people from the OEEC countries for a fruitful exchange of views on the basis of the results of this survey. From the experience of similar activities the Secretariat hopes that this project will also influence national action and will result in the more effective channelling of new ideas from other countries to those responsible for mathematical education in the OEEC countries.³⁷

Freudenthal ging naar deze bijeenkomst en ontving een week later een brief van R.C. Kwantes van het Ministerie van OK&W. Kwantes, Nederlands lid van de ‘Governing Committee’ van de OEEC, vroeg hem namens de minister van OK&W om advies inzake de Nederlandse deelname aan een door de OEEC financieel ondersteunde cursus in Darmstadt, getiteld ‘Mathematics, programming and introduction into mechanics of electronic computing’. Per ommegaande greep Freudenthal deze kans aan om eens goed duidelijk te maken wat hij van de gang van zaken bij de OEEC vond en in het bijzonder hoe de vergadering in Parijs was verlopen:

36 Organisation for European Economic Cooperation. Office for Scientific and Technical Personnel, *New thinking in school mathematics* (1961) 4.

37 Discussiestuk voor de bijeenkomst van 13-14 april in Parijs van de ‘group of experts’, 3 pagina’s, aldaar 2-3; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1829.

Het lijkt me nuttig, U mijn algemene indruk uiteen te zetten. Deze was in hoge mate ontgoochelend. Met enige collega's heb ik me afgevraagd, waarvoor men ons eigenlijk nog naar Parijs laat komen. Immers, het Governing Committee heeft al alles besloten en wij als deskundigen behoeven alleen nog maar Ja en Amen te zeggen. [...] We waren niet in staat essentiële wijzigingen in het voor ons liggende plan aan te brengen, omdat het immers door het Governing Committee was goedgekeurd.³⁸

Inhoudelijk zag Freudenthal ook helemaal niets in de plannen van de OEEC. Immers, zo schreef hij, sinds jaar en dag werden er door de ICOMI dergelijke rapporten als die de OEEC voor ogen stond geproduceerd en nog nooit was er ook maar enige positieve invloed vanuit gegaan. Ook dit rapport zou volgens Freudenthal niets bijdragen aan de verbetering van het wiskundeonderwijs.

Ik heb ter vergadering bij herhaling de vraag gesteld, naar de doelstelling van het rapport en geen antwoord gekregen [...] Men had volstrekt de indruk, dat het alleen maar er om te doen was, een rapport te fabriceren, waarmee O.E.E.S. voor de openbaarheid kan treden, om zijn bestaansrecht te bewijzen.³⁹

Ook het plan voor het seminarium getuigde er volgens Freudenthal van dat de OEEC niet verder heeft gedacht dan in geïjkte termen:

Bijeenkomsten zoals hier bedoeld zijn er te kust en te keur. De in het wiskunde-onderwijs belangstellenden ontmoeten elkaar geregeld – een der commissie-leden sprak van de bridgeclub – we kennen elkaar en elkaars ideeën en we kunnen op die manier nog enkele tientallen jaren door blijven sukkelen. Als de O.E.E.S. er niets nieuws aan kan toevoegen, hoeft ze er niet aan te beginnen. Ik vind het jammer voor de ton, die O.E.E.S. voor het wiskunde-onderwijs uitgeeft en die bijzonder nuttig had kunnen worden besteed, en ik vind het zonde voor de tijd, die voor ons in deze dilettantische projecten gaat zitten. Ik heb ter vergadering positieve voorstellen gedaan, die algemene instemming vonden, maar ze konden niet eens echt aan de orde worden gesteld, omdat het Governing Committee nu eenmaal alles had beslist. Mr. Gass lijkt me een uitstekende figuur, maar hij is ook aan handen en voeten gebonden.⁴⁰

Vervolgens stipte Freudenthal nog even aan dat hij in deze kritiek niet alleen stond en dat dezelfde soort bezwaren ook golden voor een organisatie als UNESCO. Als voorbeeld van een dergelijk wanbeleid noemde Freudenthal het UNESCO-congres in Bombay van 1956 waar hij was geweest en waar tonnen verspeeld waren doordat er geen enkele wiskundeleraar aanwezig was geweest.⁴¹

Maar toch kwam hij ook met een positief voorstel voor een mogelijke taak van de OEEC: het opzetten van een internationaal researchinstituut voor wiskundeonderwijs. Hierbinnen zouden die enkelingen die echt wetenschappelijk werk ver-

38 Freudenthal aan R.C. Kwantes, 25 maart 1959; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1829.

39 Ibid.

40 Ibid.

41 Zie ook paragraaf 6.6.

richtten op het gebied van ‘wiskundeonderwijs-research’ duurzaam kunnen samenwerken. Had Freudenthal de wens voor gedegen wetenschappelijk-pedagogisch onderzoek voor wiskundeonderwijs eerder geuit, het is hier voor het eerst dat in dit verband rept over een research*instituut*.

Ik ben er van overtuigd, dat het wiskunde-onderwijs doeltreffend alleen maar kan worden geholpen door wetenschappelijk onderzoek, zoals wij uit onze instituten en laboratoria zijn gewend. Zodoende kunt U misschien begrijpen dat ik denk in termen van instituten en laboratoria, waar men in de administratieve sector aan enquêtes en congressen denkt.⁴²

Half april werd Freudenthal in een brief en bijbehorende stukken van H. Metzger, bestuurder van het ‘Office for Scientific and Technical Personnel’ van de OEEC in Parijs, geconfronteerd met een volledig uitgewerkt programma voor het aanstaande seminar. Drie grote secties stonden op de planning: ‘New thinking in mathematics’, ‘New mathematics in education’ en ‘New materials and teacher training’.⁴³ Het onderzoeken van de noodzaak van research op het gebied van wiskundeonderwijs werd ook als een van de sub-doelen genoemd, maar de nadruk in de beschrijving van de doelen van het seminar lag toch voornamelijk op de modernisering van de te onderwijzen stof en het daarbij aansluitende bijscholen van de leraren. Later zou blijken dat dit plan hoofdzakelijk door seminar-voorzitter Stone – in de Verenigde Staten nadrukkelijk voorstander van een New Math-curriculum – ontworpen was.⁴⁴

Uiteraard werd dit alles uitsluitend gezien in het licht van de enorme maatschappelijke behoefte aan technisch-mathematisch geschoolde arbeidskrachten: de zogenaamde ‘scientific manpower’.⁴⁵ Zo lag in het onderdeel ‘New thinking in mathematics education’ de nadruk niet op onderwijsmethoden en didactiek, maar op de algebra die als basis van al het wiskundeonderwijs zou moeten gaan dienen, en daarnaast “to bring to the fore, the relative importance of structure-concepts and -skills”, een van de meest in het oog springende kenmerken van de New Math-stroming.⁴⁶

Het beoogde publiek voor het seminar zou bestaan uit personen met de volgende kwalificaties:

- 42 Ibid. In deze uitspraak is Freudenthals kritiek op onwetenschappelijk gefundeerd (wiskundeonderwijs)onderzoek te herkennen, waarop hij later in onder andere zijn boek *Weeding and sowing*, maar ook in zijn kritieken op andermans onderzoek(-smethoden) nog geregeld zal terugkomen.
- 43 Metzger aan Freudenthal, 16 april 1959; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1829.
- 44 Brief van A.A. de Vos van Steenwijk, 23 mei 1959; *ibid.* Hierin vermeldde mevrouw De Vos van Steenwijk dat bij het samenstellen van de plannen naast professor Stone ook de mening van ‘een andere bekende professor’ gevraagd was.
- 45 Discussiestuk ‘International seminar in mathematical education’ 4 pagina’s, aldaar 2; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1829. Zie ook: M.A.J.M. Matthijsen, *De elite en de mythe. Een sociologische analyse van de strijd om onderwijsverandering* (Deventer 1982) 146 e.v.
- 46 Discussiestuk ‘International seminar in mathematical education’ 4 pagina’s, aldaar 4; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1829.

The persons invited to the Seminar wil have the following qualifications (1) is recognised nationally (2) has contributed to the literature in the field (3) is a leader in his respective area of work (4) will give time and study wholeheartedly to the work of the seminar.⁴⁷

Voorts zouden de te kiezen personen samen ook nog eens de volgende groeperingen moeten vertegenwoordigen:

(a) mathematicians (university professors) (b) applied mathematicians (in industry, economics, physical sciences, social sciences) (3) educators and ministers of education, inspectors (concerned with teacher education and the curriculum) and (d) classroom teachers of mathematics.⁴⁸

De sprekers, tot slot, zouden gekozen worden uit hen “who have done thinking, study, or publication of the topic involved” en wel zodanig dat alle landen gerepresenteerd zouden zijn.

Freudenthals bezwaren tegen deze opzet waren natuurlijk aanzienlijk. In zijn antwoord aan Metzger verweet hij de organisatie van het seminar alle al bestaande activiteiten en al gevoerde discussies op het gebied van de verbetering van het wiskundeonderwijs te negeren.

It is true that O.E.E.S. can stimulate new research but they cannot create it by stamping on the ground. Addresses to be delivered at such a seminar should be the result of long years research, and not a collection of opinions. I would propose you first to ask serious investigators what they can tell, and afterwards to settle the programme.⁴⁹

Overdreven nadruk lag er volgens Freudenthal op nieuwe onderwerpen als basis voor een nieuw curriculum.

But the actual discussion in mathematical education runs on the question, whether new topics are really a panacea. There are people who believe that new topics will be worse than the old ones if they are taught with the old methods.⁵⁰

Deze opmerking vormde de kern van Freudenthals latere kritiek op de gevolgen van ‘New Math’. Hij kwam vervolgens met het voorstel, als onderwerp voor het seminar te kiezen voor ‘Methods versus topics in new mathematical education’.⁵¹ Niet alleen kon er dan volgens hem meer eenheid in het programma bereikt worden, ook zou er zinnig gediscussieerd kunnen worden door experts met verschillende meningen over wat Freudenthal betitelde als “this fundamental point of the modern educational controversy in mathematical education”.⁵²

47 Ibid., 3.

48 Ibid.

49 Freudenthal aan Metzger, 21 april 1959; *ibid.*

50 Ibid.

51 Ibid. Hierin is de titel en strekking van zijn latere stukken al te herkennen, zoals: Freudenthal, ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’.

52 Freudenthal aan Metzger, 21 april 1959; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1829.

In het antwoord van de organisatie aan Freudenthal werd vriendelijk doch belist ‘bedankt’ voor zijn suggesties en aanwijzingen. Het enige essentiële en voor de OEEC meest haalbare doel van het seminar was volgens Gass om de activiteiten op dit gebied onder de aandacht van de regeringen te brengen. Op die manier zou de gewenste steun verworven worden voor die acties die als het zinnigst werden gezien door de meest competente personen actief op dat gebied: wiskundigen, onderwijs-bestuurders en leraren.

This is essentially the purpose of the seminar we are proposing. This is the reason why it should be rather wide-ranging. It is not intended that it should contribute particularly to the latest developments in professional discussions, but rather that it should produce the ‘bilan’.⁵³

Freudenthals voorgestelde onderwerp voor het seminar zou al doende vanzelf in de discussies aan de orde gesteld worden. Ook zou er een bijdrage komen over de stand van zaken van onderzoek op het gebied van wiskundeonderwijs. De voorgestelde bijeenkomst van de groep van experts op 25 mei 1959 werd vervolgens na de schriftelijke reacties van Freudenthal en anderen niet meer nodig geacht.

Hier nam Freudenthal geen genoegen mee. Via mevrouw De Vos van Steenwijk van de Nederlandse delegatie van de OEEC in Parijs probeerde hij nog een keer zijn bezwaren en standpunten duidelijk te maken:

Indertijd was besloten op 25 mei bijeen te komen voor de voorbereiding van het “Seminar” over wiskunde-onderwijs. Kort geleden kregen we van Mr. Gass een uitvoerig ontwerp van het programma van het “Seminar”. Dit programma was een verschrikkelijke hutspot, waar werkelijk geen verstandig woord uit op te maken was. Ik heb dit ook zeer beleefd in mijn schriftelijke critiek gezegd. Ik ontving thans een brief van Gass, waarin met zoveel woorden staat, dat de organisatie van het “Seminar” al zo ver gevorderd is, dat een bespreking van het programma op 25 mei niet nodig meer is.⁵⁴

Freudenthal voelde zich vooral als adviseur buitenspel gezet: het programma leek al vast te liggen nog voor enig advies van invloed kon zijn.

Ik heb Mr. Gass hieromtrent niet geschreven. Ik vind het vervelend, om aldoor maar in de contramane te zijn. Zodra definitief komt vast te staan dat de bemoeienissen van OEECS met het wiskunde-onderwijs niet in het serieuze vlak liggen, kan ik me altijd nog terugtrekken, maar sneu vind ik het hele zaakje toch wel.⁵⁵

De Vos van Steenwijk legde in een brief terug uit, dat een en ander aan onder andere de organisatiestructuur en tijdnood te wijten was. Desondanks wees ze er op dat juist dit congres, “ongeacht het door U gelaakte programma”, een waardevol forum zou bieden voor hetgeen door deskundigen als Freudenthal als de belangrijkste

53 Gass aan Freudenthal, 28 april 1959; *ibid.*

54 Freudenthal aan mevrouw De Vos van Steenwijk, ongedateerd, waarschijnlijk van 4 mei 1959; *ibid.*

55 *Ibid.*

problemen gezien werden, zoals dat van de onderwijsmethoden. Impliciet gaf ze hiermee aan dat Freudenthal er toch beter aan zou doen, aan het congres mee te werken om zodoende als onderwijsdeskundige gehoord te worden.⁵⁶

Ook bij Kwantes van OK&W beklagde Freudenthal zich in vergelijkbare termen over deze gang van zaken en over de “vrij vage brief” die hij van Gass had ontvangen.⁵⁷ Hij verdacht de OEEC ervan, zich niet serieus aan de zaak te willen wijden, maar slechts “iets min of meer spectaculairs te doen, waarbij het er niet op aankomt wat het is”.⁵⁸ Hij sloot af met de mededeling volkomen in het midden te willen laten of hier iets aan gedaan moest worden.

In juli van hetzelfde jaar werd Freudenthal door dr. A.J. Piekaar, hoofd van de afdeling wetenschappelijk onderwijs van het Ministerie van OK&W, gevraagd enkele personen voor te dragen, die voor deelname aan dit congres in aanmerking zouden kunnen komen, te weten: een vertegenwoordiger van het hoger onderwijs (Freudenthal noemde Bunt of zichzelf), een inspecteur van het VHMO en een vertegenwoordiger van de lerarenorganisaties (Freudenthal noemde Wansink of Vredenduin). Maar, zo liet Freudenthal niet na eraan toe te voegen,

als u deze praktijk niet wilt volgen, zou u bepaalde mensen sturen wegens hun wetenschappelijke prestaties of belangstelling op mathematisch-didactisch terrein. Maar ik weet echt niet of u hun er een plezier mee doet. Het gehele programma is op het ogenblik zo vaag en verward, dat men van niemand kan verwachten, dat hij op zo iets toehapt.⁵⁹

Mocht Piekaar voor deze laatste optie voelen, dan zouden volgens Freudenthal Van Hiele, Chr. Boormeester en W.P. Thijssen in aanmerking komen, waarvan de eerste de “enige in ons land [is], die op mathematisch-didactisch terrein origineel werk van groot formaat heeft verricht, en die ook een wereldnaam heeft”.⁶⁰ De andere twee behoorden tot die mensen “met intensieve belangstelling en een behoorlijk passief wetenschappelijk peil”. Opvallend genoeg schaarde Freudenthal zichzelf in geen van beide categorieën. Of hij deed dit wel, maar wilde hoe dan ook voorkomen dat hij alsnog naar het seminar zou worden gestuurd.⁶¹

8.3.2 Royaumont zonder Freudenthal: de lancering van New Math

Freudenthal trok zijn handen af van de organisatie en liet het seminar links liggen. Bunt, Vredenduin en Leeman gingen wel naar het seminar in Royaumont en deden verslag in *Euclides*.⁶² De meeste aandacht in dit verslag ging uit naar de redevoeering

⁵⁶ Ibid.

⁵⁷ Freudenthal aan Kwantes, 8 mei 1959; *ibid.*

⁵⁸ Ibid.

⁵⁹ Freudenthal aan A.J. Piekaar, 16 juli 1959; *ibid.*

⁶⁰ Ibid.

⁶¹ Ibid.

⁶² H.Th.M. Leeman, L.N.H. Bunt, P.G.J. Vredenduin, ‘Verslag van het seminarium “New thinking in school mathematics” van de OEEC’, *Euclides* 35 (1960) 218-229; Organisation for European Economic Cooperation, Office for Scientific and Technical Personnel, *New thinking in school mathematics* (1961).

van de Bourbakist Dieudonné over de eisen die aan een nieuw wiskundeprogramma moesten worden gesteld. Dit was de voordracht, waarin Dieudonné de fameuze woorden “Euclid must go!” (“À bas Euclide!”) uitsprak en waarin hij pleitte voor een modern axiomasysteem als basis voor het meetkundeonderwijs.⁶³ De beschrijving van Dieudonnés voordracht in *Euclides* begon niet zonder waarschuwing vooraf aan de lezers:

We waarschuwen de lezer er echter voor, dat hij met voorzichtige kritiek het betoog moet volgen. Leest men te snel, dan lijkt het geheel vaak fantastisch en verliest men de belangrijkste aanwijzingen voor verbetering, die de spreker gegeven heeft, uit het oog. De algemene mening was, als we ons niet vergissen, dat opvattingen van Dieudonné enerzijds zeer waardevol zijn, echter anderzijds met een korreltje zout genomen moeten worden.⁶⁴

Ondanks deze waarschuwing werd de ongenuanceerde, oppervlakkig geïnterpreteerde versie van Dieudonnés ‘Weg met Euclides!’ toch dé slogan voor de op handen zijnde modernisering in de jaren zestig. Freudenthal kwam hier in 1967 nog op terug in een recensie die hij schreef over Dieudonnés werk *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, waarin hij de geest van Euclides ontwaarde:

The inventor of the slogan “A bas Euclide” a follower of Euclid? It looks odd, but it does so simply because few slogans have been misunderstood as badly as this one. Partly, it was Dieudonné’s own fault. When he cried “A bas Euclide”, he actually meant “A bas ‘Euclide’ ”, (viz. the Euclid of French lycée textbooks), but in oral discussion it is a hard thing to pronounce quotation marks.⁶⁵

Aan het eind van het Royaumont Seminar van 1959 werden nog diverse resoluties aangenomen. Er was onder andere een resolutie over de noodzaak van het onderwijzen van kansrekening en statistiek op de middelbare scholen en een over de noodzaak van het ontwerpen van nieuwe leerboeken in de diverse landen. Ook was er een resolutie waarin de OEEC werd verzocht, “de regeringen op de hoogte te brengen van de belangrijkheid van dit werk en erop aan te dringen de vereiste soepelheid te betrachten met betrekking tot leerprogramma’s en examens om de uitvoering van experimenten mogelijk te maken”.⁶⁶

Ondanks deze voorzichtige formulering in de berichtgeving in *Euclides* over dit seminar hadden het Royaumont-seminar en de New Math-stroming op de Nederlandse deelnemers wel degelijk een enorme indruk gemaakt. Voor Piet Vredenduin

63 J. Dieudonné, ‘New thinking in school mathematics’, in: Organisation for European Economic Cooperation, Office for Scientific and Technical Personnel, *New thinking in school mathematics* (1961) 31-49, aldaar 35.

64 Leeman e.a., ‘Verslag van het seminarium “New thinking in school mathematics” van de OEEC’, *Euclides* 35 (1960) 218-229, aldaar 220.

65 Hans Freudenthal, ‘Algèbre linéaire et géométrie élémentaire By Jean Dieudonné’, *The American Monthly* 74 (1967) 745-748, aldaar 745.

66 Leeman e.a., ‘Verslag van het seminarium “New thinking in school mathematics” van de OEEC’, *Euclides* 35 (1960) 218-229, aldaar 228.

(1909-1996), schoolboekauteur en wiskundeleraar op een gymnasium en een van de Nederlandse afgevaardigden in Royaumont, was het een openbaring kennis te nemen van de moderne wiskunde. In 1985 vertelde hij over het bijwonen van ‘Royaumont’:

Laat ik beginnen met te vertellen dat ik een van de minst belangrijke deelnemers was. Maar, misschien daarom wel, heb ik er ontzettend veel geleerd. Ik had sinds mijn doctoraal veel aan logica gedaan en aan de grondslagen van de wiskunde, maar de wiskunde zelf had ik verwaarloosd. Ik merkte nu dat er sinds 1930 wel een heleboel veranderd was. Van structuren wist ik maar weinig en, je zult wel schrikken, hier kwam ik voor het eerst in aanraking met de set-builder voor het noteren van verzamelingen. Ik liep dus wel achter! ⁶⁷

De doorzichtigheid, helderheid van de structuur van de moderne wiskunde en de strengheid van de daarop toe te passen logica had voor veel leraren grote aantrekkingskracht, vooral in vergelijking met de door decennialange tradities bepaalde lappendeken van de inhoud van het wiskundeonderwijs in Nederland. Door publicaties over moderne wiskunde als die in *Euclides* werden leraren bewust van de kloof tussen wiskunde op school en academische wiskunde. Er ontstond een voedingsbodem voor de wens, deze te dichtten om academisch als leraar niet achter te blijven bij de wetenschap.

Ook al zou de invloed van New Math in Nederland, vooral in vergelijking met omringende landen, relatief beperkt blijken, Freudenthal nam het zichzelf achteraf wel kwalijk, de hele New Math-beweging indertijd zo onderschat te hebben. Eind jaren tachtig dacht hij wel degelijk iets te hebben kunnen doen op het Royaumont seminar om de gevolgen en invloed van New Math (Freudenthal sprak van het “verwoestende spoor wereldwijd door het wiskunde-onderwijs”) enigszins ten goede te beïnvloeden en beperken.⁶⁸ Maar wat gebeurde er nu precies in Nederland? En wat was de rol van Freudenthal daarin?

8.4 Freudenthal over moderne wiskunde en de betekenis ervan voor het wiskundeonderwijs

8.4.1 Het karakter van moderne wiskunde

‘Structuren’ en ‘relaties’ waren de kernbegrippen van de zogenaamde moderne wiskunde dat binnen het wiskundeonderwijs zoveel aandacht en populariteit genoot. De op dat moment gangbare schoolwiskunde was opgebouwd uit onderling nauwelijks met elkaar verbonden onderdelen als goniometrie, algebra en meetkunde. In de moderne wiskunde lag de nadruk, naast het verwerven en uitbreiden van kennis en technieken binnen de diverse deelgebieden van de wiskunde, steeds meer op

⁶⁷ Interview met Vredenduin in: Goffree, *Ik was wiskundeleraar* 163.

⁶⁸ Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 349-350.

het onderzoeken van de logische opbouw en samenhang van de onderdelen (de stellingen en axioma's) van zo'n deelgebied. Deze stonden in een zekere hiërarchie tot elkaar en vormden een logisch bouwwerk van relaties. Door dit bouwwerk verder te abstraheren en los te maken van de concreet wiskundige context waren op een hoger logisch niveau de zo verkregen structuren op hun beurt ook weer te analyseren – het zogenaamde axiomatiseren.

Freudenthal zag in het axiomatiseren de essentie van de moderne wiskunde. Aan de hand van een concreet voorbeeld ('het gezin Pieterse') maakte Freudenthal het principe van de axiomatische methode al eerder duidelijk in zijn voordracht voor de vakantiecursus voor leraren van het Mathematisch Centrum in 1948. Allereerst nam hij de lezer bij de hand en maakte een begin van een axiomatische opbouw van de meetkunde:

Een exacte opbouw van synthetische meetkunde draagt heden de volgende kenmerken. Men begint met de dingen en relaties op te sommen, waarvan sprake zal zijn, dus b.v. “punten”, “rechten”, “ligt op”, “gaat door”, “snijden”, “verbinden”, enz. Wil men het zuiniger doen, dan beperkt men zich tot één enkele relatie tussen punten en rechten, “incidentie” genaamd, en zegt b.v. in plaats van “twee rechten a en b snijden elkaar in punt C ”: C incideert met a en b . [...] Het is trouwens niet nodig, dat op de opsomming der fundamentele begrippen meteen definities volgen, maar in elk geval komen nu de “axioma's”. Dat zijn zekere uitspraken, waarin de ongedefiniëerde begrippen of reeds gedefiniëerde begrippen optreden. B.v. op elke rechte liggen minstens drie punten; door elk punt gaan minstens drie rechten; door elk tweetal punten gaat één rechte; elk tweetal rechten heeft één punt gemeen (aan het laatste axioma ziet u, dat het de projectieve meetkunde is, waar wij over spreken). Dergelijke axioma's worden als het ware verordend, en alleen hierin schuilt hun waarheidsgehalte.⁶⁹

Vervolgens liet hij door middel van een parallel met 'het gezin Pieterse' de essentie en de kracht van het axiomatiseren zien:

Er zijn [sic] een heel stel meetkundige axioma's nodig, om aan de ongedefiniëerde begrippen “punt”, “rechte”, “incidentie” een zin te geven. Dat zijn de spelregels, waarvan ik mij uitsluitend mag bedienen. Punt, rechte, incidentie zijn niets anders dan dingen, die aan deze spelregels voldoen (en wel bij wijze van een verordening), en het heeft absoluut geen zin, nu te vragen, wat die punten, rechten en incidentie “werkelijk” zijn. Wel mag men deze begrippen achteraf interpreteren. B.v. kunnen wij afspreken, met “punt” nu te bedoelen een “lid van het gezin Pieterse” en met “rechte” een “vacantiedag” en voor de uitspraak “het punt A ligt op de rechte a ” nu te lezen: “ A neemt op de dag a deel aan een ritje met de auto van het gezin Pieterse”. Onze axioma's van daarstraks zeggen dan, dat op elke dag minstens drie personen uitrijden, dat elk lid van het gezin op minstens drie dagen mee mag, dat ieder met ieder precies één keer op stap gaat, en dat bij telkens twee uitstapjes precies één gezinslid is te vinden,

69 Hans Freudenthal, 'De begrippen axioma en axiomatiek in de Wis- en Natuurkunde', *Simon Stevin* 39 (1955) 156-175; aldaar 164. Zie ook: Hans Freudenthal, 'Axiom und Axiomatik', *Mathematisch-physikalische Semesterberichte* 5 (1956) 4-19.

dat aan beide uitstapjes deelneemt. Hoe groot het gezin Pieterse is, hoeveel mensen in die auto gaan en hoe lang die vakantie duurt, is door deze axioma's nog niet bepaald. Maar als u nog als nieuw axioma toevoegt 'het gezin Pieterse is niet leeg, maar overigens zo klein mogelijk', dan kunt u uitrekenen, dat het uit zeven personen bestaat, dat aan elke rit drie deelnemen, en dat de vakantie zeven dagen duurt. U hebt een projectieve meetkunde gekregen, die uit zeven punten en zeven rechten bestaat, waarvan elke rechte drie punten bevat en elk punt op drie rechten ligt.⁷⁰

De mogelijkheid van dit interpreteren (feitelijk 'isomorf afbeelden') tussen twee (al dan niet wiskundige) stelsels was volgens Freudenthal de kracht van het axiomatiseren:

Door niet expliciet te zeggen, wat punten en rechten zijn, maar slechts zekere, broodnodige, eigenschappen van hen te eisen, houdt men een ruimer armslag. Men wordt in staat gesteld, dezelfde conclusies overal meteen te trekken, waar men met dingen te maken heeft, die dezelfde eigenschappen vertonen als hetgeen men van de punten en rechten heeft verondersteld. Zo gaat de ontwikkeling in de moderne wiskunde telkens weer in de richting van het axiomatiseren.⁷¹

Taal en notatie speelden in de moderne wiskunde een belangrijke rol. Juist door een welgekozen, vaak efficiënte, beknopte notatie leken de abstraherende stappen 'vanzelf' te gaan. Zo ontstonden prachtige wiskundige structuren, die makkelijk hanterbaar waren en in principe voor vele (wiskundig) concretere interpretaties te gebruiken door ze desgewenst terug te vertalen naar een specifiek geval.

Het bewust organiseren, manipuleren en aanpassen van de (wiskundige) taal, het zogenaamde formaliseren, was de nieuwste tendens in de moderne wiskunde van de voorafgaande jaren. Freudenthal zag door de opkomst van deze tendens voor (de toepassingen van) de wiskunde in de toekomst enorme mogelijkheden:

Formalization means the conscious organization of mathematical language, or more generally of language as such; and because language is more universal than mathematics, the impact of formalization is tremendous, and I am pretty sure that in a few decades formalizing will be the major activity of people who have to apply mathematics in other fields. [...] Adapting the vernacular to match the increasing complexity of mathematical structures is in my opinion the most conspicuous trend in present mathematics, not only because of its proper value for mathematics, but still more as a paradigm which shows how mathematics can be applied in chaotic working fields like human language, namely by remodelling the field rather than simply by describing it.⁷²

Op deze manier bezien leek de moderne wiskunde alleen maar doorzichtiger en

70 Hans Freudenthal, 'De begrippen axioma en axiomatiek in de Wis- en Natuurkunde' 165-166.

71 Ibid., 166. Ook in zijn voordracht 'Axiomatiek in het wiskunde-onderwijs bij het v.h.m.o.', gehouden voor de vakantiecursus van het MC in 1962 sprak Freudenthal over axiomatiseren als de essentie van de moderne wiskunde; Hans Freudenthal, 'Axiomatiek in het wiskunde-onderwijs bij het v.h.m.o.' vakantiecursus MC 1962, 4 pagina's; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 537.

72 Hans Freudenthal, 'Trends in modern mathematics', *ICSU Review* 4 (1962) 54-61, aldaar 61.

overzichtelijker geworden in vergelijking met de ‘vroegere’ wiskunde. Freudenthal schreef hierover in *De Groene Amsterdammer* begin jaren zestig:

Het is niet gemakkelijk, om aan de buitenstaander het karakter van de moderne wiskunde duidelijk te maken. Als ik hem vertel, dat in de loop der eeuwen de wiskunde steeds gemakkelijker is geworden, zal hij mij niet geloven. Toch is het een onbetwistbaar feit. De wiskunde heeft zich fantastisch uitgebreid, en is desniettemin een menselijke bezigheid gebleven, beoefend door mensen, die niet meer hersencellen hebben dan hun voorouders, door veel meer mensen, dan men ooit voor mogelijk had geacht, door mensen, die zonder Archimedes’ evenknie te zijn, ontdekkingen kunnen doen, die niet voor die van Archimedes onderdoen. De wiskundigen zelf zorgen ervoor, dat de wiskunde hun niet boven het hoofd groeit. Met de uitbreiding van de wiskunde loopt parallel een proces van vereenvoudiging. Van grotere hoogte en uit een ruimer perspectief kan men de oude stof beter organiseren.⁷³

Al met al betekenden deze ontwikkelingen binnen de wiskunde een grote omwenteling in de beoefening ervan. De kloof tussen de wijze waarop wiskunde werd gepresenteerd in het wiskundeonderwijs op de middelbare school en de wijze waarop de wiskunde door wiskundigen werd benaderd was hierdoor nog groter geworden. Het leek dan ook een logische stap vernieuwing van het wiskundeonderwijs om te buigen in de richting van deze modernste ontwikkeling binnen de wiskunde zelf en daarbij de zo geweldig nuttig en krachtig gebleken overkoepelende gereedschappen als ‘structuren’ en ‘relaties’ te gebruiken.

8.4.2 Moderne wiskunde voor het grote publiek

Freudenthal stond aanvankelijk zeker positief tegenover het streven meer moderne wiskunde in het wiskundeonderwijs in te passen. Dit paste namelijk bij zijn streven de moderne wetenschap voor een breder publiek toegankelijk te maken, iets waaraan hij in zijn artikelen en voordrachten altijd al veel aandacht besteedde. Zijn boek *Van sterren tot inlegzolen* uit 1954, een bundeling korte essays waarvan het merendeel eerder verscheen in *De Groene Amsterdammer*, was hiervan een goed voorbeeld.⁷⁴ Maar ook voor een meer vakkundig publiek sprak en schreef hij graag over de modernste ontwikkelingen in de wetenschap, zoals bleek uit zijn MC-voordracht van 1948.

Een meer populariserend werk, dat ook voor de geïnteresseerde leek goed leesbaar was, was zijn boek *Wiskunde in wetenschap en dagelijks leven*, uitgegeven door de Wereldakademie in 1967 en verschenen in diverse talen.⁷⁵ Freudenthal was

73 Hans Freudenthal, ‘Het staartje van de mammoet’, *De Groene Amsterdammer* (28 juli 1962); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1570.

74 Freudenthal, *Van sterren tot inlegzolen*.

75 Hans Freudenthal, *Wiskunde in wetenschap en dagelijks leven* (Hilversum 1967). De internationale reeks ‘Wereldakademie’ was tot standgekomen door samenwerking van zeven Europese en één Amerikaanse uitgeverij en een internationale Raad van Advies. De Wereldakademie had tot doel het uitge-

tot het schrijven van dit boek uitgenodigd door de initiatiefnemers van deze reeks.⁷⁶ Ook dit boek was opgebouwd uit verschillende essays over de rol en functie van de wiskunde, variërend van onderwerpen uit de topologie tot het nut en de werking van computers. In de inleiding schreef Freudenthal aan zijn lezers:

De wiskunde is niet alleen in de loop van haar ontwikkeling buiten haar oorspronkelijke grenzen gegroeid, maar ook zijn de grenzen tussen de verschillende gebieden der wiskunde vervaagd [...] Het is één van de bedoelingen van dit boek, dat te laten zien, en de lezer moet niet schrikken als er in één en het zelfde hoofdstuk sprake is van ver uiteenliggende dingen als een koffiemolen en werelden ver weg in het heelal. De lezer moge het mij vergeven als ik het hem af en toe te moeilijk gemaakt mocht hebben; daar staat immers tegenover, dat ik het hem nooit te makkelijk gemaakt heb.⁷⁷

Uit dergelijke publicaties bleek een zeker vertrouwen van Freudenthal in de mogelijkheid om ook de modernste wiskunde voor het grote publiek toegankelijk te maken – in ieder geval voor een publiek op HBS-niveau. Aan dit vertrouwen lag ook zijn oude overtuiging ten grondslag dat mensen niet alleen opvoedbaar zijn, maar ook opgevoed willen worden. In zijn voordracht ‘Opvoeding tot denken’ kwam dit al sterk naar voren, evenals de (zelfstandige) rol die hij leraren zou willen toebedelen waar het hun (na)scholing betrof.⁷⁸

Niet alleen zag Freudenthal de *mogelijkheid* moderne wiskunde voor het grote publiek toegankelijk te maken, uit zijn onvermoeibaar enthousiaste initiatieven in die richting bleek dat hij het ook als *wenselijk* en *noodzakelijk* zag dat dat gebeurde, al was het maar om de bestaande misvattingen over de wiskunde weg te nemen. Dit bleek bijvoorbeeld uit uitspraken zoals de volgende, waarin Freudenthal sprak over het verkeerde beeld dat het grote publiek van de wiskunde had, veroorzaakt door nalatigheid van de wiskundigen zelf:

I admit that if anybody is to blame for these misjudgements it is the mathematicians themselves, who have failed to introduce students at the secondary level of instruction to true mathematics.⁷⁹

Sterker nog, als wiskundigen niet wilden onderkennen dat ze verkeerd bezig waren, liepen ze volgens Freudenthal het gevaar de greep op het wiskundeonderwijs volledig kwijt te raken:

ven van een reeks informatieve boeken die zowel ‘vakman’ als ‘geïnteresseerde leek’ vertrouwd maakten met de modernste wetenschappelijke inzichten en die geschreven waren door auteurs van ‘wereldnaam’. Freudenthals *Wiskunde in wetenschap en dagelijks leven* werd vertaald en uitgegeven in het Engels, Duits, Zweeds, Spaans, Italiaans, Frans, Portugees, Japans en Russisch; *ibid.*, 1.

76 Uitgeverij Meulenhoff aan Freudenthal, 6 september 1963; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 42.

77 Hans Freudenthal, *Wiskunde in wetenschap en dagelijks leven* (Hilversum 1967) 9-10.

78 Freudenthal, ‘Opvoeding tot denken’ (ongepubliceerd 1945); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 466; Freudenthal ‘Oude en nieuwe universiteiten’ (ongepubliceerd 1945); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 467.

79 Freudenthal, ‘Trends in modern mathematics’, *ICSU Review* 4 (1962) 54-61, aldaar 54. Zie ook Freudenthal, ‘Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?’, *Der Mathematikunterricht* (1963) 5-29, aldaar 21.

Wenn uns die heutige Bedeutung der Mathematik in den Kopf steigt, so ist das Hochmut vor dem Fall. Der “Fall” wird sein, daß man den Mathematikern verbietet, Mathematik zu unterrichten, und diese lebenswichtige Aufgabe denen überträgt, die wissen, wie die Mathematik in die Erziehung und ins Leben paßt.⁸⁰

“True mathematics” moest worden onderwezen, maar wel zó dat het “in die Erziehung und ins Leben” paste. Zo zag Freudenthal de opdracht voor het wiskundeonderwijs.

Toch deed Freudenthal in zijn voordrachten en artikelen nauwelijks uitspraken over een concrete invulling voor het onderwijs, laat staan in de vorm van een uit moderne wiskunde opgebouwd leerplan. Vooralsnog hield hij het bij enkele wenken voor de richting waarin verbetering gezocht zou moeten worden en de op diverse plaatsen herhaalde waarschuwing, dat de introductie van nieuwe, moderne onderwerpen op zichzelf niet een verbetering van het wiskundeonderwijs zouden betekenen.⁸¹

8.4.3 De wiskundige “in der Unterhose auf der Straße”

Vernieuwing van de leerstof was dus voor Freudenthal niet per definitie verbetering. Volgens hem waren daadwerkelijke veranderingen in de didactische methoden nodig om tot verbetering van het wiskundeonderwijs te komen. Maar daarbij kon de moderne wiskunde uitstekend van pas komen. Want volgens Freudenthal was een juiste presentatie en opbouw van de schoolwiskunde die volgens het principe van de niveaetheorie van de Van Hiele, waarbij de materie van een bepaald niveau van de leerling in het leerproces onderwerp van reflectie werd op een hoger niveau. En dat was precies een van de kenmerken van het axiomatiseren. Daarnaast moest volgens Freudenthal de leerling de gelegenheid krijgen, zelf de wiskunde te (her)ontdekken, onder begeleiding van de leraar – de zogenaamde ‘Wiederentdeckung unter Führung’ of ‘guided reinvention’.

In zijn artikel ‘Logical analysis and critical survey’ uit 1962 gaf Freudenthal toe dat hard pedagogisch-psychologisch bewijs, dat deze aanpak zou moeten ondersteunen, nog niet geleverd was. In dit artikel stelde hij dat pedagogisch-psychologisch onderzoek zou moeten uitmaken of kennis die de leerling ‘herontdekkend’ had verkregen inderdaad beter begrepen werd en beter zou beklippen. Logische analyse kon hierop geen antwoord bieden.⁸²

De geleide herontdekking, die in feite dezelfde werkwijze was als die van de wiskundige die wiskunde bedreef, was nauwelijks in leerboeken te vinden. Freudenthal weet dit aan de stijl van de in de wiskunde gangbare publicaties, waar slechts uitslui-

80 Freudenthal, ‘Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?’, *Der Mathematikunterricht* (1963) 5-29, aldaar 13.

81 Freudenthal, ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ 29.

82 Freudenthal, ‘Logical analysis and critical survey’, in: Hans Freudenthal, ed., *Report of the Relations between Arithmetic and Algebra* 20-41, aldaar 23.

tend het achteraf gepolijste en van alle gedachte kronkels ontdane eindresultaat gepresenteerd werd en de weg naar dit resultaat toe weggelaten werd. Daarbij speelde volgens hem een soort valse schaamte en misplaatste angst van de schrijvers van leerboeken mee om niet wetenschappelijk, niet wiskundig genoeg over te komen – vooral in de ogen van hoogleraren. Over de wiskundige leerboekschrijvers zei hij:

Wenn er von den Überlegungen, die ihn zum Ziele führten, etwas veröffentlichte, käme er sich vor, als stände er in der Unterhose auf der Straße. Dieser objektivierenden Gewohnheit bleibt er in didaktischen Publikationen treu. Er publiziert das Resultat und schweigt über den Weg zum Resultat.⁸³

En juist om die afgelegde ‘weg naar het resultaat’ ging het. Daar lag volgens Freudenthal de sleutel tot het ontwikkelen van het soort wiskundeonderwijs waarbij het de leerling toegestaan werd op een bij zijn begripsniveau passend leerstof-niveau wiskunde te (leren) bedrijven – het uiteindelijke doel dat Freudenthal voor ogen stond.

In zijn artikel ‘De algebraïsche en de analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde’ van 1948 stipte Freudenthal al het nut van kennis van de zogenaamde hogere wiskunde voor de leraren aan, en wel om: “een vruchtbare synthese te kunnen zoeken – vruchtbaar niet alleen ten bate van het onderwijs maar ook ten bate van de wetenschap”.⁸⁴ Vijftien jaar later schreef hij weer over het nut van de kennis van ‘de hogere wiskunde’ voor de leraar. Nu had hij het echter met nadruk over het nut van de kennis van de moderne wiskunde:

Konnte man früher zufrieden sein, wenn der Lehrer den deduktiven Stufenbau der Mathematik kannte, so müssen wir heute fordern, daß er im didaktischen Gedankenexperiment den Stufenbau des Wiedererfindens erkennt und solche Gedankenexperimente am realen Experiment überprüft. Moderne Mathematik, die auch andere als deduktive Structure zeigt, kann ihm dabei helfen. Rein stofflich kann man von ihr aber nicht erwarten, daß sie die Schäden heilt, die die alte Mathematik im Unterricht angeichtet hat.⁸⁵

Deze uitspraak vatte de rol die Freudenthal voor de moderne wiskunde binnen het wiskundeonderwijs zag kernachtig samen. Kennis van de moderne wiskunde zou de leraar het benodigde inzicht in (deductieve) structuren verschaffen. Met dat in-

83 Freudenthal, ‘Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?’, *Der Mathematikunterricht* (1963) 5-29, aldaar 16.

84 Freudenthal, ‘De algebraïsche en de analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde’ 106-121.

85 Freudenthal, ‘Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?’, *Der Mathematikunterricht* (1963) 5-29, aldaar 22. Dezelfde gedachtegang volgde Freudenthal in zijn artikel ‘Logica als methode en als onderwerp’ uit 1960, ‘Logical analysis and critical survey’ uit 1962, en ook in ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement modernes des mathématiques?’ uit 1963; Freudenthal, ‘Logica als methode en als onderwerp’, *Euclides* 35 (1960) 241-255, aldaar 255; Freudenthal, ‘Logik als Gegenstand und als Methode’, *Der Mathematikunterricht* 13 (1967) 7-22; Freudenthal, ‘Logical analysis and critical survey’ 25-26; Freudenthal, ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ 30-31.

zicht was de leraar vervolgens in staat, de aan de leerling te presenteren leerstof door middel van het zogenaamde gedachte-experiment te doordenken en de door de leerling volgens het principe van ‘geleide herontdekking’ af te leggen weg te analyseren.⁸⁶ Het doel wat hem daarbij met het wiskundeonderwijs voor ogen stond, was de leerlingen wiskunde zodanig eigen te laten maken, dat ze hetgeen ze geleerd hadden – ook op problemen buiten de wiskunde – zouden kunnen *toepassen*.⁸⁷

Ich habe erfahren, daß die Mathematik mehr zu bedeuten hat, d.h. etwas für mehr Menschen als nur die, denen ein mathematisch bestimmter Schultyp angemessen ist; und diese Bedeutung kann dann sowohl praktisch wie theoretisch sein.⁸⁸

Aan de oplossing van dit probleem – het wiskundeonderwijs zo in te richten, dat (meer) leerlingen het kunnen toepassen – was nog nauwelijks aandacht besteed, “want niemand heeft het nog de moeite waard geacht, er echt over na te denken”.⁸⁹ Voor Freudenthal werd het daarentegen langzaamaan steeds duidelijker, dat hierin de kern voor een zinnige verbetering van het wiskundeonderwijs zou liggen. Een verbetering, die hoogstnodig was, want:

... eerlijkheidshalve moeten we bekennen, dat de meerderheid der leerlingen niet in staat is van de wiskunde die zij geleerd hebben, ook maar iets toe te passen – hetzij op andere schoolvakken, hetzij in beroepsopleiding of beroep.⁹⁰

8.4.4 Sprookjes en doodlopende wegen

In het gebruik van moderne wiskunde zocht Freudenthal ook het middel om de wiskunde voor een groter publiek begrijpelijker en aantrekkelijker te maken. Dit bleek uit zijn lezing op het internationale colloquium ‘Modern curricula in secondary mathematical education’, gehouden te Utrecht van 19 tot 23 december 1964. Hierin had hij het over de twee soorten wiskunde die ontstaan waren: de nobele wetenschap die gereserveerd bleef voor de geleerden en de schoolwiskunde, een zwak aftreksel hiervan vol aanpassingen, dat een compleet eigen leven was gaan leiden:

Sometimes in education we need adaptations and mother stork tales, and things would not have been so bad, if the adaptation, the stork tale had not developed its own life. Af-

86 Het belang van het gedachte-experiment kende Freudenthal met name van het werk van G. Polya; Freudenthal, ‘Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?’, *Der Mathematikunterricht* (1963) 5-29, aldaar 14-15; Freudenthal, ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ 32; Freudenthal, ‘Logica als methode en als onderwerp’ 255.

87 Freudenthal, ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ 34.

88 Freudenthal, ‘Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?’, *Der Mathematikunterricht* (1963) 5-29, aldaar 13, en ook 21.

89 Hans Freudenthal, ‘De betekenis van de wetenschappelijke basis voor de leraar’, *De wetenschappelijke basis van de leraarsopleiding, mede in verband met de ontwikkeling van de exacte wetenschappen in de twintigste eeuw. Verslag van het zestiende congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen, gehouden te Utrecht op 18 april 1966* (1966) 5-11, aldaar 9.

90 Ibid.

ter a century of separate grow [sic] our school mathematics looks like a dead end which leads nowhere, neither to higher mathematics nor to life. To be more definite, I estimate that in our Dutch secondary school mathematics two thirds of the subject matter and all of the method is an end in itself instead of a starting point as it should be.⁹¹

De oorzaak van deze afscheiding zou liggen in de overtuiging dat de wiskunde als wetenschap voor de leerlingen te abstract en te exact zou zijn. Deze vooroordelen zouden volgens Freudenthal weggenomen kunnen worden door de leerlingen de abstractheid zelf te laten (her)uitvinden en door de exactheidseisen aan te passen aan het niveau waarop de leerling zich de stof meester heeft gemaakt.

Een door Freudenthal in diverse voordrachten aangehaald voorbeeld van wat er gebeurde als die niveaus niet gerespecteerd werden, waren de anekdotes van de benzinepombediende en de loketbeambte:⁹²

De eerste [anekdote] speelt bij een P.T.T.-loket. Ik moest een buitenlands telegram opgeven. Het tarief was 17 ct. per woord, en het aantal woorden bleek na telling 23 te zijn. De man achter het loket loste het vermenigvuldigingsprobleem feilloos op. Na veiligheidshalve het sommetje nog eens na te hebben gerekend, vroeg hij mij $f_{3,91}$. Ik gaf hem vier gulden en hij gaf mij 9 ct. terug. De volgende klant was al aan de beurt toen hij mij terugriep. Hij controleerde nog eens de tekst van het telegram, en het bleek, dat hij volgens de geldende regels twee woorden als één had moeten rekenen. Toen klom hij opnieuw in de rekenkunst, vermenigvuldigde $22 \times 17 = 374$, trok af $391 - 374 = 17$ en vergoedde mij 17 ct, die ik teveel had betaald.

Het andere verhaal speelde zich bij een benzinepomp af. Ik had van mijn wagen de olie laten vernieuwen, d.w.z. ik had 6 quarters olie à 43 dollarcenten gekocht. De man bij de pomp schreef op:

$$\begin{array}{r} 0.43 \\ 0.43 \\ 0.43 \\ 0.43 \\ 0.43 \\ \hline 0.43 \\ 2.58 \end{array}$$

Freudenthals sympathie ging onbetwist uit naar de laatste man, die “lak heeft aan spitsvondige algorithmen zoals die van het vermenigvuldigen” en weliswaar een

91 Hans Freudenthal, voordracht op het internationale colloquium ‘Modern curricula in secondary mathematical education’, gehouden te Utrecht op 19-23 december 1964 (ongepubliceerd) 7 pagina’s, aldaar 1; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1831.

92 Dit voorbeeld beschreef Freudenthal in de volgende artikelen: ‘Integratie achteraf of vooraf’ (1961), ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ (1963) en ‘L’intégration après coup ou à la source’ (1969). Het voorbeeld van de loketbeambte gaf Freudenthal al eerder in zijn lezing ‘Opvoeding tot denken’ (ongepubliceerd 1945); Hans Freudenthal, ‘Integratie achteraf of vooraf’ (ongepubliceerd) 14 pagina’s, aldaar 1, voordracht voor de wvo-conferentie ‘Op zoek naar integratie’, 11 november 1961; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 536; ook in: Freudenthal, ‘L’intégration après coup ou à la source’, *Educational Studies in Mathematics* 1 (1969), 327-337, aldaar 327; Freudenthal, ‘Opvoeding tot denken’ (ongepubliceerd 1945) 29 pagina’s; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 466; Freudenthal, ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ 36.

minder geavanceerde techniek beheerste, maar deze wel op relevante manier kon toepassen in de praktijk. De loketbeambte daarentegen wist "dankzij aangeleerde algoritmen te opereren op een niveau, waarop hij zich wezenlijk niet bevindt".⁹³ Voor deze man was het rekenonderwijs (in ieder geval waar het het vermenigvuldigen betrof) uiteindelijk een 'dead end' gebleken.

Het gevaar dat de vernieuwde, moderne wiskundestof ook een 'dead end' zou worden in het onderwijs moest volgens Freudenthal ondervangen worden door het bijscholen van de leraren. Niet alleen moest de leraar kennis nemen van de moderne wiskunde, ook moest hij in staat zijn deze van hoger standpunt uit te overzien en analyseren:

He must be able to look upon the subject matter from a higher point of view. This was just a drawback of old school mathematics that it was a narrow dead end with no view from above (or at most so high a view that it could not be illuminating).⁹⁴

Freudenthal twijfelde er niet aan dat het een zeer reëel gevaar was dat het met moderne wiskunde in het leerplan ook de verkeerde kant zou opgaan. Leraren zouden kunnen vervallen in het aanleren van technieken en trucjes, zonder de leerlingen daadwerkelijk voor hen nuttige wiskunde te leren. Sterker nog, hij had hiervan al enkele tekenen gezien in de toepassing van de verzamelingenleer in het onderwijs.⁹⁵

Het gebruik van verzamelingenleer was een van de duidelijkst aanwijsbare invloeden van New Math in het reken- en wiskundeonderwijs.⁹⁶ Volgens Freudenthal werd de verzamelingenleer hierbij onterecht als zelfstandig wiskundig onderwerp gepresenteerd:

If set theory, with due problems, is taught at an early stage as a self-contained subject without being applied anyhow during many years or even at all, something is wrong. Set theory is not meaningful mathematics, but rather a linguistic feature of mathematics, and it has to be taught by the fact that meaningful things can be expressed in this language. A teacher who does not know much more about modern mathematics than he has to implement himself, will teach those subjects as an end in itself, as a dead end.⁹⁷

Op deze manier was het vervangen van de oude leerstof door moderne wiskunde natuurlijk geen verbetering. De sleutel tot het succesvol introduceren van moderne wiskunde in het wiskundeonderwijs lag daarom volgens Freudenthal in het herscholen van de leraren.

93 Freudenthal, 'Integratie achteraf of vooraf' (ongepubliceerd 1961) 14 pagina's, aldaar 1-2; voordracht voor de WVO-conferentie 'Op zoek naar integratie', 11 november 1961; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 536.

94 Hans Freudenthal, voordracht op het internationale colloquium 'Moderna curricula in secondary mathematical education', gehouden in Utrecht op 19-23 december 1964 (ongepubliceerd) 7 pagina's, aldaar 4; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1831.

95 Zie ook paragraaf 9.5.3.

96 Meer over het gebruik van verzamelingenleer in het onderwijs in de paragrafen 9.5.3 en 9.6.1.

97 Hans Freudenthal, voordracht op het internationale colloquium 'Modern curricula in secondary mathematical education', gehouden in Utrecht op 19-23 december 1964 (ongepubliceerd) 7 pagina's, aldaar 4; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1831.

8.4.5 Moderne wiskunde als dé oplossing?

Freudenthal leek een rotsvast, haast naïef vertrouwen in het effect van bijscholing van leraren te hebben. Met de juiste bijscholing op het gebied van de moderne wiskunde zou het volgens hem met het onderwijs in die wiskunde vanzelf goed komen. Na bijscholing waren de leraren capabel genoeg om zelf keuzes te maken uit de nieuwe onderwerpen en om zelf de juiste manier te bepalen waarop ze deze moesten onderwijzen. Het was niet nodig dit van bovenaf op te leggen. Juist het Nederlandse systeem waarbij (afgezien van een wettelijk vastgelegd leerplan en examen) de leraar grote vrijheid werd gelaten bij de invulling van zijn lessen, was volgens Freudenthal een waardevolle constructie, die ook bij een modern wiskundeprogramma gehandhaafd zou kunnen blijven:

In the past it were fundamentally the teachers who settled the programmes. [...] In our country textbooks for secondary schools are not being written by university professors but by teachers, and there are no officially prescribed or even approved textbooks. Nobody wants to change this situation. However, I am pretty sure at the time when the new programme will become effective, our teachers will be able to write textbooks, to choose the subject matter to be taught and the didactic method to be applied in their class rooms. In any case this is a goal worthwhile to work for.⁹⁸

Dat dit ook daadwerkelijk ging lukken, daarvan was Freudenthal niet direct volledig overtuigd. In zijn artikel ‘Het staartje van de mammoet’ in *De Groene Amsterdammer* van 28 juli 1962 hield hij nog verschillende slagen om de arm waar het ging om de positieve invloed die er van moderne wiskunde in het leerplan uit zou gaan:

Na enkele jaren is de “moderne” wiskunde net zo gedenatureerd als de traditionele en ze is bovendien in plaats van gemakkelijker een stuk moeilijker geworden. Zal dit weer het lot van de vernieuwing zijn? Of is er met moderne wiskunde iets anders te bereiken? Ja en neen. Neen, als men zich ertoe beperkt, nieuwe leerstof te introduceren, en driewerf neen, als het nieuwe leerstof is, die de leraren zelf niet uit een hoger perspectief kennen. Aan de andere kant is het een feit: men kan de ervaring, dat wiskunde denkactiviteit is en niet sommetjes oplossen, nergens beter opdoen dan in de modernste wiskunde zelfs bij een bescheiden hoeveelheid stof. En hoe vroeger de leerling deze ervaring opdoet, des te beter. Maar wil dit lukken, dan moet één voorwaarde vervuld zijn: dat de leraar zelf ervan doordrongen is, dat moderne wiskunde gemakkelijker is, en dat het erop aankomt, door wiskunde de denkactiviteit te stimuleren. De schoolwiskunde is in een vicieuze cirkel gevangen. Zal de moderne wiskunde ons helpen, hem te doorbreken? Ik hoop van wel. Maar dan niet in de vorm van nieuwe leerstof, die binnenkort even diep gedegradeerd zal zijn als de oude. Wel wanneer de kennis van moderne wiskunde leidt tot een nieuwe houding tegenover de wiskunde. Allereerst bij de leraren, dan bij de leerling, en tenslotte wellicht ook bij examinatoren.⁹⁹

⁹⁸ Ibid.

⁹⁹ Hans Freudenthal, ‘Het staartje van de mammoet’, *De Groene Amsterdammer* (28 juli 1962); RANH, Hans Freudenthal Paper, inv.nr. 1570.

Dat dit ook daadwerkelijk zou gaan lukken, daaraan twijfelde Freudenthal geen moment meer, toen hij eenmaal overtuigd was van het succes van de door de CMLW georganiseerde bijscholingscursussen voor leraren.

8.5 Modernisering van het wiskundeonderwijs in Nederland

Een ‘New Math-beweging’, zoals die in de Verenigde Staten wel vorm kreeg en vlak daarna in diverse West-Europese landen een grote rol in het wiskundeonderwijs was gaan spelen, heeft het Nederlandse wiskundeonderwijs niet echt gekend. De drang naar modernisering van het wiskundeonderwijs zoals die aan New Math ten grondslag lag, was echter wel in Nederland merkbaar aanwezig. Het wiskundeleerplan van 1958, misschien wel het eerste leerplan met een breed draagvlak in zowel conservatieve als progressieve hoek, was nog maar nauwelijks aangenomen toen de eerste oproepen voor meer en drastischere veranderingen – ‘werkelijke modernisering’ – al weer klonken. In *Euclides* schreef Gerretsen in 1958:

Wij staan thans voor de dwingende opgaf ons grondig te bezinnen op een volkomen nieuwe didactiek, waarbij men niet moet terugschrikken voor zeer progressieve veranderingen in het programma. Deze progressiviteit komt in het WIMECOS-programma nog weinig naar voren. Te veel wordt aan het bestaande vastgehouden, te weinig wordt rekening gehouden met de nieuwere ontwikkeling van de wiskunde die ook de school wat te bieden heeft. Zijn de leraren in staat een nieuw leerplan te ontwerpen, dat voldoende is afgestemd op de eisen, die de maatschappij stelt, rekening houdt met opvoedkundige idealen en voorts nauwer dan tot dusverre het geval is verband houdt met de levende wetenschap? Waarschijnlijk zal een dergelijke opgaf slechts in internationaal verband tot een goed einde kunnen worden gebracht, want de problemen zijn voor alle landen van West-Europa analoog.¹⁰⁰

Dit artikel oogstte direct bijval. In zijn ‘Didactische revue’ in hetzelfde nummer stelde Wansink zich bijvoorbeeld ten doel “te laten zien dat de roep om een nieuw leerplan in progressieve geest zich in binnen- en buitenland reeds bij herhaling doet horen”.¹⁰¹

Nu was het leerplan-1958 dan ook meer een aanpassing van de wet aan de praktijk van het onderwijs, een voorzichtige stap in de richting van minder pretentief en meer praktisch ingericht wiskundeonderwijs, dan een werkelijke modernisering van dat onderwijs. Dit maakte het direct ook zo algemeen aanvaardbaar. De voorzitter van WIMECOS formuleerde het in 1961 als volgt:

Het programma van 1958 streefde geen modernisering na maar consolidering en uniformisering. Consolidering: voorkomen werd dat onderwerpen als differentiaal- en

¹⁰⁰ J.C.H. Gerretsen, ‘Doelstelling van het wiskundeonderwijs’, *Euclides* 34 (1958) 90-94, aldaar 93-94.

¹⁰¹ J.H. Wansink, ‘Didactische revue’, *Euclides* 34 (1958) 165-175, aldaar 165.

integraalrekening die reeds sinds 1921 op het gymnasium en sinds 1937 op de HBS op het programma stonden in de onderwijspraktijk een dode letter zouden kunnen blijven; uniformisering: de programma's voor de B-leerlingen van HBS en gymnasium werden gelijk getrokken. [...] Maar door de algemeen aanvaarde herziening, tot stand gekomen in de vijftiger jaren, wordt de weg geëffend voor een effectieve modernisering in de zestiger jaren. Een modernisering, waardoor Nederland internationaal gezien niet te ver bij andere landen zal behoeven achter te blijven.¹⁰²

Toch was het frappant dat een leerplan, door Freudenthal in 1955 nog euforisch omschreven als een “kloek” besluit, ingegeven door “moed en zelfvertrouwen en de ernstige wil, een flinke stap te doen naar beter wiskundeonderwijs” en brekend met een “90 jaar oude, vertrouwde traditie” al zo snel verouderd gevonden werd.¹⁰³

8.5.1 Initiatieven in binnen- en buitenland

De druk vanuit het buitenland en de daarmee aangewakkerde vrees om met het Nederlandse wiskundeonderwijs achter te blijven, werden steeds groter. Dit effect werd nog eens versterkt doordat internationale samenwerking op het gebied van de wiskundedidactiek en -onderwijs een grotere rol ging spelen door onder andere het werk van organisaties als de ICMI, UNESCO en de OEEC.¹⁰⁴ De sluimerende ontevredenheid over de omvang en inhoud van het Nederlandse wiskundeonderwijs en het gebrek aan doortastendheid bij de leerplan-herzieningen van zowel 1939 als 1958 kwam door deze internationale ontwikkelingen weer naar boven. *Euclides* stond in deze jaren dan ook vol met artikelen over buitenlandse moderniseringsinitiatieven en bijbehorende leerplannen en experimenten.

In België bijvoorbeeld was de modernisering van het wiskundeonderwijs in volle gang. Het echtpaar professor George Papy en docente Frédérique Papy waren naast Servais de prominente figuren binnen de Belgische moderniseringsbeweging van het wiskundeonderwijs. Alle drie waren ze grote voorstanders van modernisering van het wiskundeonderwijs in de richting van ‘New Math’ en als zodanig actief binnen de OEEC.

Ook de ‘Commission Internationale pour L’Etude et l’Amélioration de l’Enseignement des Mathématiques’ (CIEAEM), waarin Papy actief was, had in België veel invloed.¹⁰⁵ Deze internationale groep was in 1950 opgericht door onder andere de Bourbakist Dieudonné, Caleb Gattegno, Piaget, Papy en E.W. Beth. Freuden-

102 ‘Uit de openingstoespraak van de voorzitter van WIMECOS tot de algemene vergadering van 28 december 1961’, *Euclides* 37 (1962) 264-267, aldaar 266.

103 Hans Freudenthal, ‘Naar een nieuw wiskundeonderwijs’, *De Groene Amsterdammer* (2 april 1955); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1513.

104 Zo was er naast het Royaumont Seminar in 1959 nog een internationaal colloquium in Aarhus in 1960 met aansluitend een bijeenkomst van deskundigen in Joegoslavië, waren er de jaarlijkse Belgische congressen voor leraren in Arlon en waren er diverse cursussen voor leraren in Brussel en Amsterdam; F. Loonstra en P.G.J. Vredenduin, ed., *Modernization of mathematical teaching in the Netherlands* (Groningen 1962) 5.

105 Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Deel II* 405, *Deel III* 20.

thal zou officieel ook tot de oprichters van de CIEAEM behoren, maar zou zich daar naar eigen zeggen nooit van bewust zijn geweest en zich tot in de jaren zeventig van de groep afzijdig hebben gehouden.¹⁰⁶ Op de Nederlandse situatie had de CIEAEM aanvankelijk dan ook weinig invloed.¹⁰⁷

Naar aanleiding van een CIEAEM-congres in 1958 werd door een groep Belgische deelnemers een leerplan ‘moderne wiskunde’ opgesteld, waarmee na (vrijwel directe) toezegging van de minister van onderwijs Van Hemelrijck geëxperimenteerd werd.¹⁰⁸ Papy was voortrekker van deze experimenten, die zouden duren tot de landelijke invoering van een leerplan ‘moderne wiskunde’ in 1968.¹⁰⁹ De experimenten besloegen wiskundeleerplannen voor de kleuterschool (Venn-diagrammen en eenvoudige topologische structuren) tot aan de eindexamenklassen. Ze behelsden geheel vernieuwde leerstof, waarin plaats kwam voor verzamelingen, relaties en vectorrekening voor de onderbouw (12 tot 15 jaar) en lineaire algebra, analyse, statistiek en waarschijnlijkheidsrekening voor de bovenbouw.

In Nederland werd de modernisering van het Belgische wiskundeonderwijs met belangstelling gevolgd, maar niet direct als zodanig *nagevolgd* voor het Nederlandse wiskundeonderwijs. Krooshof typeerde de Belgische moderniseringsplannen in 1966 als “nieuwbouw”, terwijl hij voor het Nederlandse wiskundeonderwijs slechts “verbouw” voorstelde.¹¹⁰ Ook Vredenduin was huiverig voor de extreme herzieningen die met name Papy voorstond.¹¹¹ Maar tegelijkertijd was hij ook erg onder de indruk van de Belgische inspanningen. Vooral de daar opgezette experimenten met moderne wiskunde op scholen wakkerden in Nederland het gevoel aan, ‘achter’ te lopen. In 1959 richtte Papy in Brussel het ‘Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique’ (‘Belgisch Centrum voor Methodiek van de Wiskunde’) op, waar onder andere elk jaar een cursus voor wiskundeleraren over moderne wiskundeonderwerpen werd gehouden.¹¹² In 1984 vertelde Vredenduin over het bijspijkeren van zijn kennis van moderne wiskunde eind jaren vijftig:

Verder heb ik veel geleerd in België. Daar waren ze ons voor. Papy hield elk jaar een cursus van een week over moderne onderwerpen in Arlon. Die waren uitstekend.¹¹³

¹⁰⁶ Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 137. In een brief aan Howson schreef Freudenthal zowel Gattegno als Papy niet te mogen en zich pas actief met de CIEAEM te zijn gaan bemoeien toen de Poolse Anna Zofia Krygowska (1904-1988) voorzitter werd; Freudenthal aan Howson, 19 juli 1983; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 38.

¹⁰⁷ Wel zou Beths samenwerking met Piaget door de werkzaamheden in deze groep ontstaan zijn.

¹⁰⁸ R. Holvoet, ‘Over de opbouw van de methode Papy’, in: Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Deel II* 405-449, aldaar 445.

¹⁰⁹ G. Noël, ‘Pourquoi, pour qui enseigner les mathématiques? Une mise en perspective historique de l’évolution des programmes, au xxe siècle, en Belgique’, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 34 (2002) 110-119.

¹¹⁰ G. Krooshof, ‘Moderniseren – nieuwbouw of verbouw?’, *Euclides* 42 (1966) 193-203, aldaar 194.

¹¹¹ P.G.J. Vredenduin, ‘Het experiment Papy’, *Euclides* 42 (1966) 167-182, aldaar 171.

¹¹² Vanaf 1968 had het Centre ook een eigen periodiek: *NICO: Revue Périodique du Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique*.

¹¹³ Interview met Vredenduin in: Goffree, *Ik was wiskundeleraar* 163.

Ook besprak Vredenduin in *Euclides* regelmatig vol bewondering nieuw uitgekomen delen van Papy's *Mathématique moderne*.¹¹⁴

Naast beschrijvingen van buitenlandse New Math-initiatieven werden in *Euclides* in deze tijd ook veel artikelen over onderwerpen uit de moderne wiskunde opgenomen. De veel minder vaak voorkomende (micro)didactische artikelen raakten hierdoor op de achtergrond. Inhoudelijke modernisering van het wiskundeonderwijs werd een doel op zichzelf.

De ICMI, en daardoor ook de NOCW, hielden zich ook al spoedig bezig met het vraagstuk van de modernisering van het wiskundeonderwijs. In een NOCW-rapport over modernisering van het wiskundeonderwijs in Nederland uit 1962 schreven Loonstra en Vredenduin ter inleiding:

The teaching of mathematics at the secondary level has become oldfashioned in many countries, the Netherlands not excluded. One may even say that it has not accounted for the progress of mathematics in the last two centuries. The rapid development of society and science in the last few decades and, as a consequence of this, the tremendously increased need for mathematically skilled people, compels us to look for the drawback [sic] in our education and to remedy them if we can.¹¹⁵

Op internationaal niveau werkten in ICMI-verband wiskundigen (onder wie ook Freudenthal) al sinds 1955 aan de totstandkoming van de diverse delen van het werk *Grundzüge der Mathematik*, bedoeld als handboek voor wiskundigen en met name voor wiskundeleraren.¹¹⁶

Ook de Wiskunde Werkgroep onttrok zich niet aan deze tendens van modernisering. Nog steeds organiseerde de ww in het najaar met succes de jaarlijkse weekendconferenties, waarvan de teksten van de gehouden voordrachten in *Euclides* afgedrukt werden. Zo was het onderwerp van de weekendconferentie in 1959 'Vernieuwing van het wiskundeonderwijs door nieuwe programma's en door nieuwe didactische methoden'.¹¹⁷ Met de totstandkoming van het leerplan van 1958 leek de vernieuwende rol van de Wiskunde Werkgroep echter langzamerhand uitgespeeld.

De meest prikkelende, vernieuwende impulsen kwamen van buiten Nederland. Het tot in de jaren vijftig nog duidelijk aanwezige strijdtoneel met een scheiding tussen de conservatieve hoek (vertegenwoordigd door de lerarenverenigingen WIMCOS en LIWENAGEL) en de progressieve hoek (vertegenwoordigd door de wvo en ww) vervaagde. Zo werd in 1962 *Euclides* officieel orgaan van de ww en gingen de

114 P.G.J. Vredenduin, 'Een opzienbarend boek', *Euclides* 39 (1963/64) 237-247; *Euclides* 42 (1966/67) 90-94, 161-166. Papy's *Mathématique moderne* zou uiteindelijk 6 delen beslaan.

115 F. Loonstra en P.G.J. Vredenduin, eds., *Modernization of mathematical teaching in the Netherlands* (Groningen 1962) 5.

116 Freudenthal werkte mee aan de delen II 'Geometrie', III 'Analysis' en IV 'Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik'; H. Behnke, ed., *Grundzüge der Mathematik für Lehrer an Gymnasien sowie für Mathematiker in Industrie und Wirtschaft* I-V (Göttingen 1958-1966); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1747.

117 Mededeling in *Euclides*; *Euclides* 35 (1959) 112. Freudenthal hield op deze conferentie de voordracht 'Logica als onderwerp en als methode', *Euclides* 35 (1959) 241-255.

werkzaamheden van de ww min of meer op in de grote stroom van vernieuwende initiatieven in die tijd.

8.5.2 Freudenthal: van ww naar ‘meewerken om bij te sturen’

Ook al was Freudenthal, met uitzondering van 1960 toen hij vanwege zijn ‘sabbatical year’ in de Verenigde Staten verbleef, steeds voorzitter van de conferentie-weekenden van de ww, toch was zijn betrokkenheid bij de werkgroep tanende. Nu zijn kinderen eind jaren vijftig de schoolgaande leeftijd grotendeels ontgroeid waren, verdwenen Freudenthals directe stimuli op dat gebied. Alleen Mirjam, de jongste, ging eind jaren vijftig nog naar de middelbare school (het Amersfoorts Lyceum).

Mevrouw Freudenthals activiteiten op onderwijskundig gebied – en met name die, die voortvloeiden uit de activiteiten van de wvo – namen in deze tijd aanzienlijk toe. Vanaf 1950 was zij secretaris van de Centrale Werkgroep van de wvo en lid van de ‘International Council’ van de New Education Fellowship. Zij had als zodanig een belangrijke rol in het onderhouden van de internationale contacten tussen beide groepen.¹¹⁸ Ook was zij vanaf 1956 redactielid van het wvo-tijdschrift *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs*, waarin zij zelf met grote regelmaat publiceerde.

De meeste energie stak ze echter in het werk dat de in 1959 opgerichte ‘Werkgroep Jenaplan’ met zich meebracht en het schrijven van publicaties op dat gebied.¹¹⁹ Zij was degene die het Jenaplanonderwijs in Nederland introduceerde.¹²⁰ In 1969 werd door de toegenomen belangstelling voor het concept van de Jenaplanscholen de ‘Stichting Jenaplan’ opgericht, met bijbehorend tijdschrift *Pedomorfose: een internationaal oriënterend tijdschrift voor en over scholen die op pedagogische en didactische gronden, flexibele, verticale en horizontale groeperingen nastreven*.¹²¹ Mevrouw Freudenthal was secretaris van de stichting en redactrice van *Pedomorfose*.¹²²

Ondanks de overeenkomsten en gezamenlijke oorsprong van hun beider interesse- en vakgebieden werkten Freudenthal en zijn vrouw hoofdzakelijk *naast* elkaar aan onderwijs. Een enkele keer publiceerde Freudenthal in *Pedomorfose*,

118 Morsch, *Met de moed van de hoop* 222-258.

119 S.J.C. Freudenthal-Lutter, *De Jenaplanschool. Een leef- en werkgemeenschap* (Utrecht 1970), 5. Langenveld schreef het voorwoord.

120 M. van Essen en J.D. Imelman, *Historische pedagogiek. Verlichting, romantiek en ontwikkelingen in Nederland na 1800* (Baarn 1999) 112.

121 In 1975 waren er in Nederland ongeveer 120 scholen, die volgens Jenaplanonderwijs ingericht waren. Het meest in het oog springende kenmerk van deze scholen was het ontbreken van de geijkte klassenindeling. In plaats daarvan waren er de ‘stamgroepen’ (de zogenaamde verticale indeling), waardoor ‘zittenblijven’ niet meer aan de orde was. Verder stond er het ontwikkelen van gemeenschapszin, het ‘opvoeden tot kritisch denken’ en aandacht voor het kind als individu hoog in het vaandel.

122 In Assen bevindt zich tegenwoordig de landelijke Jenaplanbibliotheek, de ‘Suus Freudenthal-Lutterbibliotheek’, hoofdzakelijk opgebouwd door mevrouw Freudenthal door haar werk als secretaris van *Pedomorfose*.

maar hij liet zich publiekelijk niet uit over het Jenaplanonderwijs. Mevrouw Freudenthal zou zich eind jaren zestig wel even met rekenonderwijs bezighouden. Zij was, samen met J.J. de Jongh, een oud-student van Freudenthal en vanaf 1960 wiskundehoogleraar in Nijmegen, eind jaren zestig betrokken bij het project *Denken en Rekenen*. Dit initiatief van uitgeverij Malmberg had (in navolging van internationale tendensen) de modernisering van het rekenonderwijs tot doel.¹²³ Freudenthal bemoeide zich inhoudelijk echter niet met dit initiatief.¹²⁴ Het lijkt erop, dat waar Freudenthal de wvo en ww eind jaren vijftig min of meer was ontgroeid, mevrouw Freudenthal er juist steeds hechter mee ver-groeide.

Voor Freudenthal waren er begin jaren zestig naast de onderwijskundige zaken ook andere die een belangrijk deel van zijn aandacht opeisten. Allereerst was er het verblijf met zijn vrouw en zijn dochter in New Haven, Yale University in het collegejaar 1960-1961. Aan dit verblijf ging al vanaf oktober 1959 veel correspondentie vooraf. Freudenthal correspondeerde in eerste instantie met verschillende Amerikaanse universiteiten, waarbij hij telkens als belangrijke eis aan het verblijf stelde dat er een goede school voor Mirjam in de buurt moest zijn.¹²⁵ Ook mevrouw Freudenthal benutte het jaar in de Verenigde Staten goed door het bezoeken van scholen en instituten die voor haar werk belangrijk waren.

Freudenthal had er een geweldige tijd. Hij gaf – op eigen verzoek – colleges ‘Liegroepen’ en ‘foundations of geometry’ en toerde langs diverse universiteiten om er lezingen te geven. Veel van die lezingen gingen over zijn dan juist verschenen *Lincos. Design of a language for cosmic intercourse. Part 1*.¹²⁶

In dit boek beschreef Freudenthal een uit signalen opgebouwde en op logica gebaseerde ‘taal’ Lincos (*Lingua Cosmica*), waarmee communicatie met buitenaardse intelligentie mogelijk zou moeten zijn. Vanuit het standpunt dat elementaire wiskunde “het universeelste dat er in het heelal is” zou zijn, werd in Freudenthals programma voor buitenaardse communicatie begonnen met het gecodeerd overbrengen van de natuurlijke getallen. Daarna volgden voorbeelden van basis-rekentech-nieken, waaraan de taal door de ontvanger geleerd zou kunnen worden.¹²⁷ Het was – ondanks het erg tot de verbeelding sprekende doel van de taal – een behoorlijk logisch-theoretische verhandeling. Het boek verscheen in de reeks ‘Studies in logic and the foundations of mathematics’ (waarvan Brouwer, E.W. Beth en A. Heyting

123 Zie ook paragraaf 9.5.3.

124 Uit mondelinge overlevering blijkt dat Freudenthal aanvankelijk als adviseur voor deze reeks was gevraagd, maar dit naar De Jongh zou hebben doorgespeeld; De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde* 503.

125 Een uitnodiging voor Berkeley liep op niets uit, doordat er geen geld beschikbaar was. Wel gaf hij hier voorafgaand aan zijn verblijf in New Haven een ‘summercourse’; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 392.

126 Freudenthal, *Lincos. Design of a language for cosmic intercourse. Part 1* (Amsterdam 1960).

127 ‘H. Freudenthal’, *Vrij Nederland* (1976) 232-247, 244. Freudenthal zegt hierover: “Wij kunnen de natuur, het heelal, met behulp van wiskunde verklaren. Dus als er andere mensen zijn die ook natuurwetenschappen ontwikkeld hebben dan moeten die ook wiskunde kennen, het kan eigenlijk niet anders”.



Van Unnik draagt het rectoraat van de Utrechtse Universiteit over aan Freudenthal (1963).

de redactie vormden) en de kunsttaal was een populair onderwerp voor voordrachten en recensies.¹²⁸

Het echtpaar Freudenthal sloot het overzeese verblijf af met een rondreis door de Verenigde Staten van zeven weken. Bij terugkomst in Nederland schreef Freudenthal zijn collega's in New Haven een brief, waarin hij aangaf hoe zeer hij alles miste en hoe moeilijk het hem viel in Nederland opnieuw te acclimatiseren. Ook al werd hij tijdens zijn afwezigheid door zijn secretaresse, mevrouw Breughel, en door Van der Blij op de hoogte gehouden van het reilen en zeilen van het Mathematisch Instituut, praktisch gezien was hij toch een heel jaar 'afwezig'.¹²⁹

Twee jaar later was Freudenthal weer een collegejaar lang min of meer afwezig. Op 16 september 1963 namelijk droeg W.C. van Unnik, hoogleraar theologie, het rectoraat van de Utrechtse Universiteit aan hem over. Deze taak zou Freudenthal een jaar lang volledig in beslag nemen.¹³⁰ Vooral de in de pers breed uitgemeten studentenzaken als de 'studentenstop' door het docententekort en de ontgroening

¹²⁸ Vredenduin besprak *Lincos* in *Euclides* 36 (1961) 252-254. Freudenthal gaf tijdens zijn verblijf in de Verenigde Staten onder andere voordrachten over *Lincos* op Brown University (Rhode Island) en Brandeis University (Massachusetts).

¹²⁹ Documenten uit de 'Yale'-periode; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 316, 392, 393, 1884.

¹³⁰ Documenten betreffende Freudenthals rectoraat; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 394.

(waarvan Freudenthal overigens tegenstander was) hielden hem dat jaar bezig. Op 21 september 1964 droeg hij rectoraat over aan professor L.J. Hijmans van den Bergh.

Behalve het sabbatical en het rectoraat was er een nog belangrijker oorzaak voor Freudenthals afnemende interesse voor de ww. Het leek de bewuste keuze van hem *zelf* om zijn energie in andere onderwijscommissies te steken, zoals nationaal in de NOCW en internationaal in de ICMI. ‘Meewerken om bij te sturen’ was Freudenthals motto als het ging om dergelijk commissiewerk, ook als hij zich aanvankelijk niet helemaal in de doelstellingen kon vinden. In dat licht gezien had de ww hem weinig meer te bieden. Het echte spel werd allang in andere, zoals in door de regering ingestelde commissies gespeeld en Freudenthals reputatie zorgde er haast automatisch voor, dat hij daar volop bij betrokken werd.

8.5.3 De Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde

Eén van die commissies was de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) die in juni 1961 was ingesteld door de toenmalige staatssecretaris van OK&W, G.C. Stubenrouch. Als doelstelling had deze commissie “de modernisering van het wiskunde-onderwijs bij het voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs in studie te nemen”.¹³¹ Zij kwam veelal in Utrecht bijeen. De opdracht was tweeledig: het verkleinen van de kloof tussen schoolwiskunde en wetenschappelijke wiskunde én het vergroten van de maatschappelijke relevantie van die schoolwiskunde. De commissie had in de eerste plaats voornamelijk een adviserende functie over alle aspecten van modernisering van het wiskundeonderwijs: van eventuele problemen met de keuze van de moderne onderwerpen, de daaraan verbonden consequenties voor het leerplan en eindexamens tot het bijscholen van leraren.

Het was in Nederland voor het eerst, dat een dergelijk initiatief tot herziening van het wiskundeleerplan niet zozeer vanuit het veld, maar vanuit de overheid tot stand kwam. Een trend, die ook al bij het tot stand komen van het OEEC-seminar in Royaumont te bespeuren viel. Dit hing onder meer samen met een toenemende bemoeienis van de Nederlandse overheid met de inrichting en modernisering van het onderwijs eind jaren vijftig en daarmee samenhangende wetgeving op dat gebied.¹³² Ook kwam er voor onderwijszaken in de jaren zestig aanzienlijk meer overheids-geld vrij. De enorme toename van leerlingen (meer leerlingen, bovendien uit een breder spectrum van sociale klassen) maakte dit noodzakelijk.¹³³ Er was een steeds grotere behoefte aan opleiding en scholing van de gehele (beroeps)bevolking. Een schaalvergroting van het middelbaar onderwijs met een zekere mate van verzakelijking van de onderwijsvernieuwingen was het gevolg. De instelling van de CMLW paste in deze tendens.

¹³¹ ‘Commissie modernisering leerplan wiskunde’, *Euclides* 37 (1961) 144-151, aldaar 144.

¹³² Dodde, *Het Nederlandse onderwijs verandert* 139, 167 e.v.

¹³³ Grotenhuis, *Op zoek naar middelbaar onderwijs* 157 e.v.

De Commissie, met hoogleraar wiskunde H.T.M. Leeman als voorzitter, bestond voornamelijk uit professoren en slechts enkele wiskundeleraren. Naast Freudenthal werden onder andere Van der Blij, de Utrechtse docent didactiek Bunt en A.F. Monna (1905-1995) tot lid benoemd. Monna was destijds zowel wiskundige als plaatsvervangend chef op de afdeling vHMO van het ministerie van OK&W en bovendien één van de initiatiefnemers van de oprichting van de CMLW.¹³⁴ De voornaamste resultaten van het werk van de CMLW waren tweeledig: allereerst waren er de heroriënteringscursussen voor wiskundeleraren en ten tweede was er de ontwikkeling van een nieuw leerplan.

Vooraf over het succes van het eerste resultaat was Freudenthal ronduit te spreken. Toch had hij bij aanvang van zijn taak als CMLW-lid de nodige twijfel, zo bleek uit het beeld dat hij schetste eind jaren tachtig:

Mijn eerste reactie op de CMLW-plannen was negatief (25 augustus 1961). Toch heb ik – voor zover men het me toestond – loyaal meegewerkt. Trouwens, ik had niets anders kunnen doen – de tijd was nog niet rijp voor mijn denkbeelden. Ik was nog steeds het enfant terrible. Ik mocht er wel voor spek en bonen meedoen.¹³⁵

De ‘negatieve reactie’ waar Freudenthal over sprak, was niet terug te vinden in een brief van 25 augustus, maar wel in een brief aan Monna van 23 augustus 1961. Freudenthal was het in die brief niet eens met de nadruk die er in de opdracht van de CMLW lag op modernisering van het leerplan:

Ik heb diverse malen, naar bekend zal zijn, betoogd, dat ik de modernisering van het leerplan zoals deze op het ogenblik door velen wordt gepropageerd, geen urgent probleem acht, en wel niet omdat ik aan moderne wiskunde een hekel zou hebben, maar omdat in de diverse voorstellen de introductie van moderne leerstof als principieel doel wordt gezien. Dientegenover zie ik als eerste en enige urgentie een verbetering van het wiskunde-onderwijs.¹³⁶

In Freudenthals opinie was het gevaar van verslechtering door modernisering niet denkbeeldig wanneer de nieuwe leerstof met “evenveel of groter gemak kan worden gedenuatureerd als de oude en wanneer de leraren niet geacht kunnen worden, de nieuwe leerstof voldoende te beheersen”.¹³⁷ Niet zozeer het praktische nut van de leerstof moest bij de keuze doorslaggevend zijn, maar de leerstof op de middelbare school hoorde fundamenteel te zijn, “hetgeen niet wegneemt, dat toepassingen van de leerstof op praktisch nut gericht kunnen zijn”.¹³⁸ Hij wilde dat de commissie

¹³⁴ De wiskundige A.F. Monna was sinds 1961 werkzaam aan de Universiteit van Utrecht. In 1965 werd hij hoogleraar in de zuivere wiskunde. Van 1963 tot 1974 was hij ook lid van de NOCW; Kleijne, ‘NOCW vijftig jaar’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5 (2004) 308-313, aldaar 313; Adriaan Monna en Marius van der Put, ‘Ambtenaar en wiskundige’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5 (2004) 136-146, aldaar 141, 144.

¹³⁵ Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 350-351.

¹³⁶ Freudenthal aan Monna, 23 augustus 1961; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1723.

¹³⁷ Ibid.

¹³⁸ Ibid.

sie een alternatief leerplan zou ontwerpen voor zowel onder- als bovenbouw, en dit naast het vigerende leerplan aan zou bieden gedurende een bepaalde tijd, waarna op een geschikt ogenblik de oude programma's pas ingetrokken zouden worden.

In de vergadering in oktober 1961 herhaalde Freudenthal deze punten. Hij pleitte ervoor, in de onderbouw te beginnen met de eerste wijzigingen. Dit pleidooi resulteerde erin dat er, naast enkele commissies voor modernisering van het leerplan voor de bovenbouw, inderdaad een commissie voor herziening van de onderbouw geïnstalleerd werd, waarvan hij zelf de leiding kreeg. Ook zat hij in de commissie inzake 'herscholing voor leraren'.

Naar buiten toe bleven de bevindingen en uitkomsten van de CMLW in eerste instantie geheim. In 1962 deed de voorzitter van WIMECOS, B. Groeneveld, een impliciete oproep aan de commissie, vooral vaart te maken met haar werkzaamheden, en niet te veel tijd te verspillen aan overkomelijke problemen als 'didactiek' – een typerende houding in deze tijd vol vernieuwingsdrang:

Wel zal het, volgens de voorzitter Prof. Leeman, lange tijd duren voor de commissie met haar werk gereed is. De zeer dringende noodzaak van de modernisering – we zijn toch al zover achter t.o.v. het buitenland – maakt het noodzakelijk, dat er in vlotter tempo wordt gewerkt. Over de doceerbaarheid van nieuwe onderwerpen behoeft de commissie zich niet al te veel zorgen te maken. Dikwijls lijken de onderwerpen didactisch veel moeilijker dan ze blijken te zijn, omdat juist de didactiek zich meestal weet aan te passen.¹³⁹

Zelfs de ww – waar juist voor de modernisering van de *didactiek* de meeste aandacht was – begon in modernisering van de leerstof een doel op zich te zien. Zo ontstond in 1964 binnen de ww het plan, door het instellen van diverse commissies te onderzoeken op welke wijze moderne wiskundige methoden in het leerplan een plaats konden krijgen. Aanpassing van het gangbare programma stond voorop en niet – zoals de CMLW wel tot doel had – een volledige vernieuwing van dat programma.¹⁴⁰ Een oproep aan de lezers van *Euclides* om hun medewerking te verlenen werd door Freudenthal als voorzitter van de ww ondertekend. Een half jaar later werd de oproep herhaald.¹⁴¹ Het initiatief kwam echter maar moeizaam van de grond en had weinig invloed op de verdere gang van zaken.

Voor Freudenthal, die nu bij zowel de leerplan-activiteiten van de ww als de CMLW betrokken was, maakte dit weinig uit. Het is de vraag, in hoeverre hij nog in een dergelijk initiatief van de ww geloofde. Wellicht zag hij in die tijd langzamerhand ook wel in dat de tijd van dergelijke kleinschalige werkgroepjes voorbij was.

139 'Uit de openingstoespraak van de voorzitter van WIMECOS tot de algemene vergadering van 28 december 1962', *Euclides* 38 (1963) 251-253, aldaar 252.

140 Mededeling van de ww, *Euclides* 39 (1964) 119.

141 Mededeling van de ww, *Euclides* 40 (1964) 95.

8.5.4 De bijscholing van leraren

Pas in 1965 verscheen een eerste officiële mededeling van de CMLW in *Euclides*.¹⁴² Wel was de commissie eerder naar buiten getreden door de organisatie van de cursussen moderne wiskunde voor leraren sinds 1963. Bij aanvang van deze cursussen was er binnen de CMLW de nodige scepsis ten aanzien van het resultaat van dergelijke cursussen. Eind jaren zestig zei Freudenthal hierover:

Geen onzer had verwacht, dat de overgrote meerderheid der deelnemers de denk- en werkmethoden der moderne wiskunde en haar begripsstructuren zó intens zou assimileren als in feite is geschied. Wiskunde van welk soort dan ook is blijkbaar een solide basis voor andere soorten wiskunde, hoe sterk de onderlinge verschillen ook mogen zijn.¹⁴³

De aanpak, een combinatie van hoorcolleges en werkgroepen (de manier waarop Freudenthal in Utrecht ook zijn colleges opzette), bleek dus onverwacht goed te werken. De cursisten – bijna de helft van alle werkzame leraren wiskunde aan HBS en gymnasia, een alle verwachtingen overtreffende opkomst – werd hierin niet een kant en klaar op de leerling over te dragen portie moderne wiskunde geleerd. Daarentegen werd geprobeerd hun de geest van de moderne wiskunde bij te brengen, zodat zij bij een modern wiskundeleerplan de noodzakelijke achterliggende gedachten en theorie zouden begrijpen en in staat zouden zijn zelf een goed onderbouwde aanpak te ontwikkelen.

In een voordracht op het internationale colloquium ‘Modern curricula in secondary mathematical education’ van 1964 sprak Freudenthal over het onverwachte succes van deze cursussen:

The success was overwhelming, above any expectance. Our sceptical prejudice was put to deadly shame. [...] The main thing: the vast majority of the attendants were able to assimilate the taught matter, a fact that was proved by their ability to solve the set problems. Still more, all things happened in a climate of sweeping enthusiasm. [...] Attempts are made to transform this refreshing work into a standing institution.¹⁴⁴

Omdat duidelijk werd, dat heroriëntering van de leraren een blijvend verschijnsel zou zijn, werd in 1964 door de CMLW een aanvraag bij de staatssecretaris ingediend voor een professioneel instituut.¹⁴⁵

142 A.F. Monna, ‘Bericht over de werkzaamheden van de commissie modernisering leerplan wiskunde’, *Euclides* 41 (1965) 104-107.

143 Freudenthal, ‘De betekenis van de wetenschappelijke basis voor de leraar’, *De wetenschappelijke basis van de leraarsopleiding, mede in verband met de ontwikkeling van de exacte wetenschappen in de twintigste eeuw. Verslag van het zestiende congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen, gehouden te Utrecht op 18 april 1966* (1966) 5-11, aldaar 8.

144 Freudenthals lezing op het internationale colloquium ‘Modern curricula in secondary mathematical education’, gehouden te Utrecht, 19-23 december 1964 (ongepubliceerd); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 540.

145 Deze aanvraag werd uiteindelijk in 1968 afgewezen met een verwijzing naar de op handen zijnde plannen voor landelijke organisatie voor leerplanontwikkeling, waarin de CMLW zou moeten opgaan. Zie

Het grote succes van de CMLW-cursussen kwam volgens Freudenthal door de actieve deelname van de cursisten aan het programma in de werkgroepen:

Listening courses on new subjects like modern mathematics are a source of frustration rather than of diffusion of knowledge. The listener mainly learns that modern mathematics is a good thing for professors or perhaps for geniuses, but inaccessible for simple teachers. It has been a revelation for many people that modern mathematics is a beautiful thing, that it is something you can do yourself and you can learn by doing – the only thing you need is to get the opportunity to do it.¹⁴⁶

Freudenthal was ervan overtuigd dat het na de successen van de cursussen mee zou vallen met de gevolgen van modernisering van het wiskundeonderwijs. Nu ze goed voorbereid waren op die modernisering zouden de leraren weloverwogen hun lessen kunnen vormgeven. De eventuele schadelijke invloed van de te veel op de inhoud in plaats van op de vorm gerichte leerboeken zou daardoor beperkt blijven. In *The New Era* schreef hij in datzelfde jaar:

Mathematics has to be taught not by textbooks, but by teachers. Modern textbooks in the hands of teachers who do not know or have not understood modern mathematics, are not a dangerous weapon, they are simply useless. The first thing we have to do is [...] to retrain teachers so that they are able to judge modern mathematics and to choose among its formal aspects those which might improve teaching methods.¹⁴⁷

En dit was volgens hem uitstekend gelukt door de herscholingscursussen van de CMLW.

8.5.5 Een nieuw leerplan

De tweede grote taak van de CMLW, het ontwikkelen van een nieuw leerplan, kreeg in 1963 een extra impuls door de reorganisatie-plannen in het onderwijs. In navolging van zijn voorganger F.J.T. Rutten, stond ook minister van Onderwijs J.M.L.T. Cals een reorganisatie van het middelbaar onderwijs voor.¹⁴⁸ Op 26 februari 1963 werd de Wet tot regeling van het voortgezet onderwijs, in de wandelgangen de ‘Mammoetwet’ genoemd, gepubliceerd in het Staatsblad. Om ruimte te geven aan een overgangsregeling werd de datum van invoering op 1 augustus 1968 gesteld. Dit gaf de mogelijkheid om met de nieuwe onderwijsvormen te experimenteren.

De wet, die het hele voortgezet onderwijs regelde, had als belangrijkste doel de verti-

ook paragraaf 9.3.1: E. Wijdeveld, H. Verhage, G. Schoemaker, ‘Van CMLW tot Freudenthal Instituut’, in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs* 355-374, aldaar 359 e.v.

¹⁴⁶ Freudenthals lezing op het internationale colloquium ‘Modern curricula in secondary mathematical education’, gehouden te Utrecht, 19-23 december 1964 (ongepubliceerd); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 540.

¹⁴⁷ Hans Freudenthal, ‘New mathematics’, *The New Era in Home and School* 45 (1964) 189-191 + 188, aldaar 191, 188.

¹⁴⁸ Minister Rutten had in 1951 al een voorstel voor reorganisatie van het voortgezet onderwijs gedaan, het zogenaamde ‘Plan-Rutten’; Grotenhuis, *Op zoek naar middelbaar onderwijs* 155.

cale en horizontale doorstroommogelijkheden tussen de diverse schoolsoorten te vergroten. De HBS werd deels opgenomen in het vwo, dat gymnasium, atheneum en lyceum omvatte en deels voortgezet als HAVO (hoger algemeen vormend onderwijs). De (M)ULO en MMS verdwenen, MAVO (middelbaar algemeen vormend onderwijs) ontstond.

Ook nieuw was de algemene invoering van brugklassen en gedifferentieerde eindexamens door de keuzepakketten. Een belangrijk uitgangspunt bij al deze veranderingen was het bevorderen van de externe democratisering: voorwaarden scheppen, waarbij de individuele ontwikkelingsmogelijkheden van elke leerling optimaal benut werden en waarbij meer leerlingen meer kansen op deelname aan hogere vormen van onderwijs zouden krijgen.

Praktisch had deze ontwikkeling voor de CMLW het gevolg dat in 1966 op aandringen van de minister besloten werd met nog meer spoed tot nieuwe leerplannen (en wel voor alle vormen van onderwijs zoals in de Mammoetwet genoemd) te komen, opdat de leerplannen tegelijkertijd met de Mammoetwet in 1968 in zouden kunnen gaan. Dat dit tot grote onrust aan het lerarenfront leidde, bleek wel uit de woorden van de voorzitter van WIMECOS:

In het achter ons liggende verenigingsjaar constateren we duidelijk een gevoel van gespannenheid, veroorzaakt door de onzekerheid, waarin ons gehele onderwijs en in het bijzonder ons wiskundeonderwijs verkeert.¹⁴⁹

Ook werd in 1966 de heroriëntering van de MULO- en LBO-leraren aan het takenpakket van de CMLW toegevoegd. Achteraf gaf Freudenthal toe dat de CMLW de modernisering van de leerplannen onderschatte:

We faalden toen omdat we meenden dat we naast het verrichten van ons gewone werk ook nog het onderwijs konden vernieuwen.¹⁵⁰

Veel tijd voor experimenten met de nieuw in te voeren leerstof was er namelijk niet. In een artikel in 1963 schetste Freudenthal de lachwekkende gang van zaken bij de experimenten op dit gebied in Nederland. Hij constateerde dat bij dergelijke experimenten de te onderzoeken vraag van tevoren niet expliciet gesteld werd, maar dat er achteraf, na investering van veel extra tijd en met medewerking van speciaal uitgezochte docenten en klassen, geconstateerd werd dat het doorwerken van de stof gelukt was en daarmee het experiment geslaagd. Dergelijke praktijken gaven volgens Freudenthal al aan dat

man [...] absolut nicht darauf vorbereitet [ist], ein großes Objekt, wie es ein ganzes neues Programm ist, zu prüfen. Man verfällt dann leicht in eine Experimentiertechnik, die keine ist.¹⁵¹

149 ‘Openingstoespraak van de voorzitter van WIMECOS, Dr.Ir. B. Groeneveld op de algemene vergadering van 28 december 1966’, *Euclides* 42 (1967) 184-187, aldaar 185.

150 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 351.

151 Freudenthal, ‘Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?’, *Der Mathematikunterricht* (1963) 5-29, aldaar 19.

Desalniettemin diende de CMLW op 28 oktober 1966 een interimrapport met ruwe opzet van het nieuwe leerplan in bij de staatssecretaris van Onderwijs, Kunst en Wetenschappen. Als motivering van de voorgestelde plannen noemde de commissie onder meer traditionele factoren, het overdragen van bruikbare kennis en de maatschappelijke betekenis van de wiskunde door de vele toepassingen op diverse gebieden. Daarnaast had de commissie bij de invulling van de programma's natuurlijk ook rekening te houden met de nieuwe vormen van het middelbaar onderwijs na de Mammoetwet, zoals de brugklas en de mogelijkheden tot overstappen tussen de diverse schooltypen. Maar het belangrijkste de commissie toch wel "voor alle schooltypen een vanuit vervolgonderwijs en maatschappelijk belang gemotiveerd programma op te stellen".¹⁵²

De meest in het oog springende 'moderne' elementen in dit voorstel waren het gebruik van termen als vector, verzameling, relatie, afbeelding, transformatie en functie, de invoering van waarschijnlijkheidsrekening en statistiek en de algebraïsche behandeling van de meetkunde. Aandacht voor een logisch-deductief systeem bleef beperkt tot de bovenbouw.¹⁵³ 'Matige verbouw', zo typeerde Krooshof de voorstellen van de CMLW, maar De Bruyn was scherper in zijn kritiek en beschuldigde de CMLW ervan, het leerplan nauwelijks afgestemd te hebben op de behoeften van de maatschappij.¹⁵⁴ Freudenthal reageerde hierop in een artikel waarin hij zijn overtuiging omtrent toepasbaarheid uiteenzette. Zijns inziens bestond er namelijk geen programma, dat toepasbaarheid kon garanderen.

Toegepaste wiskunde is de minst toepasbare, omdat zij de grootste deugd van de wiskunde, de flexibiliteit, mist. Als het onze bedoeling is, de leerling met een wiskunde vertrouwd te maken, die hij kan toepassen, dan moeten we ons niet op de programma's blind staren. [...] Nieuwe programma's zijn geen wondermiddel. Er de nadruk op leggen kan betekenen dat men afleidt van waar het bij het onderwijzen van toepasbare wiskunde op aankomt.¹⁵⁵

Waar het dan precies op aankwam, was volgens hem het aankweken van een goede houding tegenover de wiskunde. Zo schreef hij in *De Groene Amsterdamer* in 1962 over de functie van de (moderne) wiskunde op school het volgende:

Voor vraagstukken, die men volgens schema kan oplossen, hebben we geen mensen nodig. Die kunnen we gerust aan machines toevertrouwen. Het is het kenmerk van echte wiskunde, dat elk probleem nieuwe, originele denk arbeid vereist. Dit zou dan de voornaamste ervaring zijn die de leerling op school omtrent de wiskunde opdoet. [...] Moderne wiskunde is eenvoudiger, en moderne schoolwiskunde hoort in eerste instantie eenvoudiger te zijn dan de oude. Maar in de wiskunde impliceert grotere

152 A.F. Monna, 'Bericht van de commissie modernisering leerplan wiskunde', *Euclides* 42 (1966) 129-134, aldaar 131.

153 Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, *Toelichting op het leerplan wiskunde* (1968).

154 N.G. de Bruyn, 'Modernisering leerplan wiskunde', *Euclides* 43 (1968) 260-261.

155 Hans Freudenthal, 'Modernisering leerplan wiskunde. Antwoord aan Prof. dr. N.G. de Bruyn', *Euclides* 43 (1968) 321-322, aldaar 322.

eenvoudigheid ook een grotere mate van originele denkarbeid. Aan een rekenmachine, die geen denk-initiatief vertoont, moeten we alles haarfijn uitleggen. Haar wiskunde is onnoemelijk omslachtig. Eenvoudige wiskunde vereist denk-initiatief, en moderne wiskunde zou een geschikt middel zijn, om dit initiatief aan te wakkeren.¹⁵⁶

Aangezien Freudenthal deel uitmaakte van de CMLW en hij nergens een kritische noot bij het ontwerp-1968 publiceerde, leek hij het nieuwe leerplan goed genoeg te vinden voor wat hem voor ogen stond. Maar al gauw bleek hoe hij de gevolgen van de invoering van dit leerplan had onderschat, of op zijn minst te optimistisch had ingeschat. In *Schrijf dat op*, Hans schreef hij:

Maar laat ik eerlijk zijn: wij – ik inclus – werden overrompeld. Met de feitelijke invoering van de Mammoetwet moesten de nieuwe leerplannen wiskunde op tafel liggen. Auteursgroepen die in het buitenland hun licht hadden opgestoken, waren ons te vlug af geweest. Voor de leerplannen er kwamen waren ze al geïnterpreteerd. Een beetje New Math, niet veel, maar toch té veel en in elk geval gespeend van elke relatie met de realiteit, van elk inzicht in de dienende taak van de wiskunde.¹⁵⁷

Eén van die auteursgroepen die anticipeerden op de op handen zijnde leerplanwijzigingen was die van de leergang *Moderne wiskunde*, uitgegeven door Wolters Noordhoff. De auteurs (onder wie Krooshof en Jacobs) hadden zich bij het schrijven van die methode gebaseerd op de zogenaamde ‘Schotse Methode’ van de Scottish Mathematics Group, in Schotland uitgegeven onder de titel *Modern mathematics for schools*.¹⁵⁸ Het initiatief kwam voort uit een in 1965 door de drie Pedagogische Centra ingestelde werkgroep.¹⁵⁹ Deze werkgroep bestudeerde het wiskundeonderwijs voor de toekomstige HAVO. Over de keuze en totstandkoming van het leerboek schreef Krooshof in *Euclides*:

Een leerboek schrijven, vroeger dikwijls het werk van één of twee man, kan in de huidige situatie niet anders meer zijn dan het werk van een team. Bovendien kan men nieuwe leerstof pas invoeren na een toetsen in de klas. Aan beide voorwaarden voldoet de Schotse methode. Een team van vier inspecteurs en 17 docenten schreef de boeken. Deze werden in een uitgave, bekostigd door het Schotse departement van onderwijs (zou zo iets in Nederland mogelijk zijn?), op 7000 leerlingen getoetst. De Nederlandse bewerking zal op ongeveer 2700 leerlingen getoetst worden.¹⁶⁰

In *Moderne wiskunde* werden moderne en traditionele stof “op een nieuwe manier, o.a. met behulp van de taal van de verzamelingenleer en van de logica benaderd”.¹⁶¹

156 Hans Freudenthal, ‘Het staartje van de mammoet’, *De Groene Amsterdammer* (28 juli 1962); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1570.

157 Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 350.

158 G. Krooshof, ‘Moderniseren – nieuwbouw of verbouw?’, *Euclides* 42 (1966) 193-203, aldaar 196.

159 Te weten: het Katholiek Pedagogisch Bureau, het Christelijk Pedagogisch Studiecentrum en het Onderwijskundig Studiecentrum; Brandenburg, ‘De modernisering van het wiskundeonderwijs’, in: Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Deel III* 15-49, aldaar 27.

160 G. Krooshof, ‘Moderniseren – nieuwbouw of verbouw?’, *Euclides* 42 (1966) 193-203, 196.

161 Ibid.

Ook was er aandacht voor “het verwijzen naar en gebruik maken van verschijnselen uit het leven buiten de school”. De methode, waarin ook didactische vernieuwingen als zelfwerkzaamheid geïntroduceerd werden, zou een groot succes worden.¹⁶²

Overrompeld door ‘moderne’ leermethoden voelde Freudenthal zich dus achteraf. Maar wellicht was het vertrouwen dat hij had in de bijscholingscursussen voor de leraren als voldoende ‘afweer’ tegen onzinnige moderniseringspogingen – zoals door in het eerdere citaat aangeduide auteursgroepen – toch ook te optimistisch en lichtzinnig geweest. Krooshof verweet in een artikel in *Euclides* de CMLW zelf door middel van de bijscholingscursussen impliciet te hebben meegewerkt aan het ontbreken van interesse voor de modernisering van de didactiek:

Kijken we naar de didactiek, dan moeten we zeggen, dat we met de modernisering van het wiskunde-onderwijs nog maar aan het begin staan. Men kan zich afvragen, hoe het komt, dat zo weinig docenten echte belangstelling hebben voor de didactiek, terwijl toch hun dagelijks werk hen telkens met didactische vragen confronteert. Er zijn daarvoor m.i. twee redenen. De eerste is, dat de meeste wiskundedocenten zich beschouwen als vakdocent met de klemtoon op vak. Ook in deze tijd wordt dat ongewild in de hand gewerkt door de Commissie Modernisering Leerplan, die wel cursussen heeft uitgeschreven in de nieuwere onderdelen van het vak, maar daarnaast geen cursussen heeft georganiseerd ter vernieuwing van de didactiek.¹⁶³

Dat Freudenthal dit indertijd niet zo scherp zag, kwam in de eerste plaats door zijn enthousiasme over het effect en de positieve uitwerking van de cursussen moderne wiskunde. Maar belangrijker nog was dat hij de weg naar een betere vakdidactiek ook niet zag in het geven van ‘didactiek-cursussen’. Integendeel, volgens hem lag de sleutel tot verbetering van de didactiek in de kennis van de aard van de moderne wiskunde, als persoonlijk handvat voor de leraar om zijn lesstof te overzien, te analyseren en de leerlingen op voor hen passende wijze wiskunde te leren bedrijven.

Maar al gauw na de invoering van het nieuwe leerplan was er ook bij Freudenthal weinig meer over van zijn jubelende enthousiasme en grote vertrouwen in het effect van de bijscholingscursussen – hoe geslaagd ook. Dat ‘het wel los zou lopen’, mits de leraren maar op een correcte manier van de moderne wiskunde op de hoogte gebracht waren, leek een te simpele redenering. In *Schrijf dat op, Hans* schreef hij achteraf:

Had het anders gekund? Misschien wel, als we enkele jaren respijt hadden gehad. De spoed van toen heeft ons vijftien tot twintig jaar gekost. Het nieuwe bleek praktisch van begin af aan mis.¹⁶⁴

162 W. Kleijne, ‘Leerboeken, hun uitgevers en auteurs’, in: F. Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskunde-onderwijs 149-161*, aldaar 159-160.

163 G. Krooshof, ‘Moderniseren – nieuwbouw of verbouw?’, *Euclides* 42 (1966) 193-203, aldaar 200.

164 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 351.

8.6 Meetkundeonderwijs

Eén van de onderwerpen die op de middelbare school onder invloed van New Math ingrijpend zou veranderen, was de meetkunde. Nu was sinds het leerplan-1958 het idee van meetkundeonderwijs met een van begin af aan een streng axiomatische opbouw al verlaten en was er voorzichtig ruimte gemaakt voor een meer op de ervaring van het kind voortbouwende meetkunde met intuïtieve inleiding. Toch was ook deze inleiding er nog steeds op gericht om zo snel mogelijk op de deductieve methode over te kunnen gaan. De waarde van het meetkundeonderwijs werd nog voornamelijk gezien in de kennismaking van de leerling met de logica van het traditionele deductieve systeem.¹⁶⁵

De grootste verandering die de invoering van New Math voor het meetkundeonderwijs zou betekenen, was de nadruk die op de transformatiemeetkunde kwam te liggen. Hierbij speelden vectoren en coördinaten een grote rol en kwam het algebraïsche element in de meetkunde nadrukkelijker naar voren. Meetkunde zou daarvoor binnen het wiskundeonderwijs niet langer een geïsoleerd onderdeel vormen, maar vanuit de algemenere structuur van de afbeeldingen behandeld worden.

Ook in Nederland werd er in het kader van de moderniseringsplannen in deze richting gedacht. In het ‘Interimrapport van de commissie modernisering leerplan wiskunde’, dat in 1966 in *Euclides* verscheen, werd als belangrijkste doel van het meetkundeonderwijs in de brugklas genoemd “in eerste instantie de leerlingen kennis te doen maken met meetkundige figuren, zowel in het vlak als in de ruimte, en voorts hen voor zover mogelijk vertrouwd te maken met de betekenis en de aard van het bewijs”.¹⁶⁶ In het door de CMLW voorgestelde leerplan-1968 werd het traditionele leren axiomatiseren aan de hand van de Euclidische meetkunde losgelaten ten gunste van de transformatiemeetkunde. In de toelichting bij dit leerplan stond hierover:

Hoewel in Royaumont niet iedereen zo ver ging als prof. Dieudonné, die de kern van zijn betoog samenvatte in de slagzin: “Weg met Euclides”, was men het er toch over eens dat het meetkundeonderwijs een radicale wijziging zou moeten ondergaan. Tot nu toe nam de driehoek met de congruentiegevallen een centrale plaats in. Dit bood de mogelijkheid spoedig tot deductief redeneren te komen. Het verkrijgen van enig inzicht in de deductieve opbouw van een theorie is voor de leerlingen van het voortgezet onderwijs belangrijk. Algemeen wordt echter ingezien, dat aan de traditionele behandeling van de planimetrie zoveel nadelen kleven, dat deze voor dit doel niet gehandhaafd kan blijven. Tegenover een statische behandeling in de geest van Euclides, geeft het gebruik van transformaties aan de behandeling een dynamisch aspect, dat veel leerlingen intuïtief zal aanspreken.¹⁶⁷

¹⁶⁵ Voor de geschiedenis van het aanvankelijk meetkundeonderwijs, de strijd erover en stromingen die daarin een rol speelden zie: De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde*.

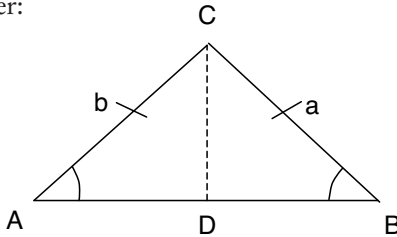
¹⁶⁶ ‘Interimrapport van de commissie modernisering leerplan wiskunde’, *Euclides* 42 (1966) 129-134, aldaar 130.

¹⁶⁷ Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, *Toelichting op het leerplan wiskunde* (1968) 8.

Een voorbeeld van het verschil in de benadering van de leerstof is te zien in de behandeling van de stelling:

In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.

In *Met passer en liniaal* van Bijpost en Timmer uit 1957 (een leerboek vlakke meetkunde voor de ULO) werd deze stelling op de klassieke manier bewezen met behulp van congruentiegevallen.¹⁶⁸ Eerder in het boek werd de stelling geponeerd dat twee driehoeken congruent zijn, als de zijden van een driehoek gelijk zijn aan die van de andere driehoek. Vervolgens werd bewezen, dat de zwaartelijn uit de top van een gelijkbenige driehoek deze verdeelt in twee congruente driehoeken, en wel op de volgende manier:



In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.

Gegeven: $\triangle ABC$; $a = b$; $AD = BD$.

Te bewijzen: $\triangle ACD \cong \triangle BCD$.

Bewijs: Uit het gegeven volgt: $AC = BC$. Wegens de constructie van D geldt $AD = BD$. Vanzelf spreekt: $CD = DC$. Dan volgt met behulp van het congruentiegeval direct $\triangle ACD \cong \triangle BCD$. Met de gevolgtrekking $\angle A = \angle B$ was de stelling vervolgens bewezen.¹⁶⁹

In het al eerder genoemde *Moderne wiskunde. Deel 1 voor de brugklas* komt de stelling over de gelijke basishoeken in een gelijkbenige driehoek aan de orde in een hoofdstuk 'Driehoeken'.¹⁷⁰ Opvallend (en karakteristiek voor deze modernere methodes) is dat de methode de meetkunde niet in een apart deel behandelt, maar afgewisseld met rekenen en algebra in een en hetzelfde boek. Ook is de geijkte 'gegeven-te-bewijzen-bewijs'-constructie verlaten en werd de leerlingen aan de hand van opdrachten de aannemelijkheid van bovenstaande stelling getoond. Hiervoor werd niet langer congruentie, maar spiegeling gebruikt: de leerling pakte de driehoek als het ware op, draaide deze om (hetgeen neerkwam op het spiegelen van de driehoek in de bissectrice van de tophoek) en concludeerde dat de driehoek op het origineel 'paste' (en daarmee gelijke hoeken had).¹⁷¹

¹⁶⁸ M. Bijpost, J.K. Timmer, *Met passer en liniaal 1. Eenvoudig leerboek der vlakke meetkunde* (Zutphen 1957) 52, 76.

¹⁶⁹ Ook andere methoden zoals *Inleiding in de meetkunde* van Brandenburg en Schrier uit 1961 volgden deze aanpak; W.J. Brandenburg, L. Schrier, *Inleiding in de meetkunde 1* (Groningen 1961) 100.

¹⁷⁰ H.J. Jacobs e.a., *Moderne wiskunde voor voortgezet onderwijs. Deel 1 voor de brugklas* (Groningen 1972) 126-130.

¹⁷¹ Overigens kwam deze aanpak van de stelling ook vóór 1968 al in de wat vooruitstrevender schoolboeken voor, zie bijvoorbeeld: D.N. van der Neut, A. Holwerda, *Meetkunde. Met de beginselen der goniometrie. Eerste deel* (Groningen 1959) 28; P. Wijdenes, *Planimetrie. Eenvoudig schoolboek voor het eerste onderwijs in de vlakke meetkunde* (Groningen 1931), tweede druk 1933, 22-23.

Enkele ook al in het traditionele meetkundeonderwijs te herkennen doelstellingen van het meetkundeonderwijs zouden in het nieuwe leerplan voor de meetkunde overigens nog steeds moeten gelden:

- a. het verkrijgen van inzicht in de betekenis van een mathematisch bewijs
- b. het afleiden van resultaten, die voor hen die later wiskunde moeten toepassen, van nut kunnen zijn¹⁷²

In aanvulling hierop wilde de CMLW de leerling inzicht laten krijgen in de structuur van het platte vlak en van de ruimte, iets wat in de traditionele behandeling van de meetkunde nauwelijks uit de verf kwam. Dus zowel het verwerven van meer kennis van de praktische, tastbare kant van de meetkunde als het verkrijgen van inzicht in meer algemeen wiskundige fenomenen, zoals ‘het bewijs’ (hoewel in de praktijk slechts voorbehouden aan de hogere klassen), stonden op het verlanglijstje van de CMLW.

8.6.1 Freudenthal en meetkundeonderwijs

Freudenthals eerste uitspraken over het meetkundeonderwijs dateerden van begin jaren vijftig, toen hiervoor binnen de Wiskunde Werkgroep veel aandacht was. Hij refereerde naar dit vroege werk in ‘Initiation into geometry’, de voordracht die hij hield op de conferentie voor wiskundeonderwijs te Bombay in 1956.¹⁷³ Naar aanleiding van het ontwerpen van een nieuw leerplan voor het VMO begin jaren vijftig was er binnen de Wiskunde Werkgroep geregeld discussie over de motivering van de keuze van de leerstof. Het veelgebruikte argument van de vormende waarde verloor het daarbij voor de ww-leden van het ‘nuttigheids’-criterium, maar voor de meeste leerstof van het wiskundeonderwijs zou hierdoor relatief weinig ingrijpends veranderen.

Voor de meetkunde lag dit anders. Juist in de meetkunde zou veel veranderen als het argument van de vormende waarde losgelaten zou worden. Freudenthal schetste in zijn voordracht van 1956 hoe een dergelijk meetkundeonderwijs eruit zou gaan zien en blikte hij terug op de ww-discussies begin jaren vijftig:

Een pragmatisch meetkunde-programma zou beperkt kunnen blijven tot een zeer kleine groep stellingen (b.v. Pythagoras), enkele evidente eigenschappen van gelijkvormige figuren, en een stel formules voor omtrekken, oppervlakken en inhouden. We zouden kunnen afstand doen van het logische systeem, dat ons meetkunde-onderwijs dankzij de Euclidische traditie kenmerkt. Toch dachten we er nooit aan deze conclusie te trekken en meetkunde als onderwijsvak af te schaffen. Afkerig van formele argumenten, slaagden we er toen niet in, de wortels van ons geloof in het meetkunde-onderwijs bloot te leggen. Ik denk, dat we het heden met meer succes zouden kunnen doen.¹⁷⁴

172 Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, *Toelichting op het leerplan wiskunde* (1968) 19.

173 Deze voordracht is zowel in het Engels als (in ietwat aangepaste versie) in het Nederlands gepubliceerd; Freudenthal, ‘Initiation into Geometry’, *The Mathematics Student* 24 (1956) 83-97; Freudenthal, ‘Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs’, *Faraday* 26 (1956) 14-18, aldaar 14-15.

174 Freudenthal, ‘Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs’, *Faraday* 26 (1956) 14-18, aldaar 14-15.

Binnen de ww was er dus de overtuiging, dat ondanks de niet hard te maken ‘nuttigheid’ van het logische systeem van de Euclidische meetkunde, deze toch haar waarde had binnen het wiskundeonderwijs. Maar waar zat deze waarde in?

Freudenthal had al regelmatig betoogd, dat hij weinig heil zag in het kale argument ‘vormende waarde’ waar het het rechtvaardigen van leerstof betrof, met name met betrekking tot het meetkundeonderwijs.¹⁷⁵ Toch was ook hij er in 1956 wel degelijk van overtuigd dat meetkundeonderwijs meer zou kunnen bieden dan praktische kennis alleen. Die meerwaarde van de meetkunde lag volgens hem in het samenkomen van de voor de leerling waarneembare werkelijkheid en de kracht van het wiskundige systeem, door de overlapping van wiskunde met natuurwetenschap die de meetkunde in zich heeft:

Meetkunde is de wetenschap van de ruimte, waarin we leven, en het is een wonderbaarlijk feit, dat we met gesloten ogen, door ons vernuft alleen, eigenschappen van deze ruimte kunnen voorspellen. En dit wonderbaarlijke feit moet voor hen, die meetkunde leren, een wonderbaarlijke gewaarwording kunnen worden. Ik denk, dat we heden zouden kunnen zeggen: meetkunde, als logisch systeem, is een middel – en wellicht het meest doeltreffende middel – om kinderen te doen voelen de macht van de menselijke geest – dat is van hun eigen geest.¹⁷⁶

Het gangbare meetkundeonderwijs echter, dat van begin af aan uitging van het logisch-deductieve systeem, deed volgens Freudenthal het tegenovergestelde: het overtuigde kinderen eerder van hun eigen geestelijke minderwaardigheid.

Het doel van het inleidende meetkundeonderwijs op de middelbare school was volgens hem het bereiken van “rijpheid voor het logische systeem”. Of deze ‘rijpheid’ overigens voor alle leerlingen te bereiken viel, was een tweede vraag. Het bereiken van deze rijpheid had volgens Freudenthal niets met de leeftijd van het kind te maken, maar was betrouwbaar te testen aan de hand van de volgende punten:

... ten eerste, het kind moet het feit van de samenhang der meetkundige waarheden zelf hebben ontdekt, ten tweede moet het hebben begrepen, dat deze samenhang iets dwingend is en ten derde moet het door dit besef in die mate zijn gegrepen, dat het er naar verlangt, om de weg van het logische systeem te bewandelen.¹⁷⁷

In zijn hier geschetste stappenplan was de invloed van de niveautheorie van Van Hiele goed terug te vinden. Ook vertoont het grote overeenkomst met de door Freudenthal geformuleerde doelstellingen van het CMLW-onderbouw-experiment meetkunde.¹⁷⁸

175 Het meest sprekende voorbeeld is wel zijn bijdrage in de discussie met Ehrenfest; Ehrenfest-Afanasjewa en Freudenthal, *Kan het wiskunde-onderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?*

176 Eenzelfde passage schreef Freudenthal ook in ‘Traditie en opvoeding’ en in ‘Tradition and education’; Freudenthal, ‘Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs’, *Faraday* 26 (1956) 14-18, aldaar 15; Freudenthal, ‘Traditie en opvoeding’, *Rekenschap* (3) (1957) 95-103; Freudenthal, ‘Tradition and education’, *The New Era in Home and School* 37 (1956) 127-132.

177 Freudenthal, ‘Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs’, *Faraday* 26 (1956) 14-18, aldaar 15.

Dat Freudenthal de rol van de meetkunde in het wiskundeonderwijs van groot belang achtte, bleek wel uit de volgende uitspraak. Hierin benadrukte hij de essentiële rol die het inleidende meetkundeonderwijs vervulde bij het opleiden van ‘wiskundigen’, een rol die verder reikte dan een voorbereiding voor het (axiomatische) meetkundeonderwijs alleen:

There is an ever increasing need for people who can put into practice mathematics with insight. It is a fact that good mathematical masters have always tried not only to develop algorithmic abilities, but also intellectual insight. How this can be done, becomes a more and more urgent problem. Initiation into geometry is the first opportunity to confront the pupils with true mathematics. In many cases it will also be the crossroads on which it is decided whether a pupil will like or dislike mathematics.¹⁷⁹

8.6.2 Freudenthal over het aanvankelijk meetkundeonderwijs: passen en meten

In zijn artikelen en voordrachten over meetkunde uit de jaren vijftig en zestig schreef Freudenthal voornamelijk over het belang van een goed doordachte inleiding voor het meetkundeonderwijs in de eerste klassen van het vHMO. Dit kwam vooral naar voren wanneer hij over de niveautheorie van Van Hiele schreef, die immers in het werk van mevrouw Van Hiele over het aanvankelijk meetkundeonderwijs een praktische invulling had gekregen. Dat Freudenthal niets tegen het leren van axiomatiek op de middelbare school had, raakte in zijn publicaties over het inleidende meetkundeonderwijs (en het belang van een praktisch, intuïtief karakter daarvan) enigszins op de achtergrond. Maar zoals reeds gebleken, had Freudenthal in zijn voordracht uit 1956 wel degelijk het logische systeem als essentieel onderdeel van het meetkundeonderwijs voor ogen en was het voornamelijk de gangbare weg er naar toe waarop hij kritiek uitte.¹⁸⁰

Die kritiek kwam vooral naar voren in zijn enthousiaste beschrijvingen van de minder gangbare initiatieven op dat gebied. Als groot voorstander van een intuïtieve methode als inleiding voor het meetkundeonderwijs was Freudenthal (naast het werk van de Van Hieles) erg enthousiast over Tatiana Ehrenfests *Uebungensammlung* – zij het met de kanttekening dat deze nog nooit in de praktijk beproefd was –, maar ook over Emma Castelnuovo’s meetkundecursus *Geometria intuitiva*, waarin net als in die van mevrouw Ehrenfest aansluiting gezocht werd bij de belevingswereld van het kind.¹⁸¹

178 E. Wijdeveld, ‘Omzien in verwondering. Ontstaan, werkwijze en effecten van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde en het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (1960-1970)’, *Euclides* 78 (2003) 218-225, aldaar 223. Zie ook de afgedrukte versie van de gelijknamige HKRWO-voordracht, 25 mei 2002.

179 Freudenthal, ‘Preface of the editor,’ in: Hans Freudenthal, ed., *Report on methods of initiation into geometry* 5.

180 Freudenthal, ‘Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs’, *Faraday* 26 (1956) 14-18, aldaar 15.

181 In ‘Initiation into Geometry’ noemde hij daarnaast ook het werk van Bos en Lepoeter, en het werk van Van Albada; Freudenthal, ‘Initiation into Geometry’, *The Mathematics Student* 24 (1956) 83-97; E. Castelnuovo, *Geometria intuitiva* (Firenze 1948, tweede herziene druk 1952); Freudenthal, ‘Het aan-

In een inleidende meetkundecursus hechtte Freudenthal de meeste waarde aan het bij de leerling opwekken van nieuwsgierigheid voor een tot de verbeelding sprekend probleem. Dit zou de leerling de drang geven, het probleem op te willen lossen. Dit was volgens Freudenthal het makkelijkst te bereiken door niet in het vlak, maar in de drie-dimensionale ruimte te beginnen. Dat was minder abstract en zou de leerling ook een betere kans geven zijn intuïtie en inlevingsvermogen te gebruiken. Werken in de ruimte gaf de leerling letterlijk de mogelijkheid meetkunde te ‘belevén’, door te passen en te construeren. Over de voordelen van dit startpunt schreef hij naar aanleiding van de werkboeken van de Van Hieles:

It has been established by experience that nobody who has started geometry with space, will meet any serious obstacles, when passing to stereometry in the systematic course. [...] The notions of area and volume have been introduced neither by abstract reasoning nor by bluntly appointing that the area is to be length-times-width, and the volume length-times-width-times-height, but by fitting a number of things into one thing – the only psychologically justified manner to introduce them.¹⁸²

De enige intuïtieve manier om in het *vlak* met meetkunde te beginnen was volgens Freudenthal door het zogenaamde betegelen van een oppervlak: hoe en waarom bedekken welke vormen (tegels) een oppervlak?¹⁸³ Ook deze invalshoek had het ‘passen en meten’ in zich, wat kinderen volgens hem erg zou aanspreken. Juist voor deze leeftijd was “de motorische ondervinding van het ‘passen’ met zijn sterke motorische apprehensie en motorische geheugen psychologisch belangrijk”.¹⁸⁴

De grootste pedagogische deugd was volgens Freudenthal geduld te hebben: het geduld om het moment af te wachten waarop het kind zélf naar het waarom van het passen vraagt om de overstap naar het logische systeem te kunnen maken.

De wonderen van het passen moeten het kind doen rijpen voor het meetkundig-logische systeem. Maar tevens zal het kind in dit stadium de grondstoffen moeten vergaren en de problemen die het op een telkens hoger peil zal moeten aanpakken. Het kind moet zijn eigen ontwikkeling kunnen zien en beoordelen, als iemand die in een fotoalbum bladert of die een berg beklimt en terugblijkt over de weg, die hij is gegaan.¹⁸⁵

De taak van de inleidende methode lag dan in de stimulering en ontwikkeling van deze ‘rijping’ – het begeleiden van het leerproces.

vankelijk meetkunde-onderwijs’, *Faraday* 26 (1956) 14-18, aldaar 15-18.

182 Freudenthal, ‘Initiation into geometry’, *The Mathematics Student* 24 (1956) 83-97, aldaar 91-92.

183 *Ibid.*, 87-93. Een goed voorbeeld van het werken met het concept ‘betegelen’ in het inleidende meetkunde-onderwijs was te vinden in het werk van de Van Hieles, die het oorspronkelijk van Van Albada afkomstige idee uitwerkten.

184 Freudenthal, ‘Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs’, *Faraday* 26 (1956) 14-18, aldaar 16.

8.6.3 Axiomatiseren in plaats van axiomatic – maar niet in de meetkunde

In 1956 was voor Freudenthal het ervaren van de leerling van ‘de macht van de eigen geest’ een voldoende reden voor het handhaven van het leren van axiomatic in het meetkundeonderwijs. Met de komst van New Math echter werd hij gestimuleerd het onderwerp ‘leren axiomatiseren’ opnieuw onder de loep te nemen en kristalliseerden zijn ideeën hierover zich scherper uit. Leek hij in zijn voordracht van 1956 voor vanzelfsprekend aan te nemen dat kinderen in het meetkundeonderwijs uiteindelijk met het logische systeem van de Euclidische meetkunde kennismaakten – zij het na een goed doordachte intuïtieve inleiding –, zes jaar later zag hij dit als alles behalve vanzelfsprekend.

Dat axiomatic onlosmakelijk verbonden was met vooral de moderne wiskunde en dat het daarom op een of andere manier een plaats in het wiskundeonderwijs verdiende, stond voor Freudenthal (nog steeds) vast. En daarmee bedoelde hij niet het aanbieden van een “klaargemaakt axiomastelsel [...], waarop dan deductief wordt verder gebouwd”, maar het (leren) *axiomatiseren*.¹⁸⁶ Van het leren axiomatiseren ging volgens hem wél een zekere mate van vormende waarde uit. Juist met alle aandacht voor (de axiomatic in) de moderne wiskunde was volgens hem meer aandacht voor die vormende waarde van het axiomatiseren noodzakelijk. Over de gangbare houding waar het het leren axiomatiseren in het onderwijs betrof, schreef hij spottend:

Es ist bedauerlich, daß in der Mannigfaltigkeit der Publikationen über Axiomatik auf der Schule der bildende Wert des Axiomatisierens nicht einmal erwähnt wird. Es scheint mir das ein Mangel an Vertrauen in die Mathematik und in die Persönlichkeitsstruktur des Heranwachsenden: Mathematik als Aktivität bleibe dem erwachsenen Mathematiker reserviert, dem Manne, der alle Werkzeuge kennt und weiß, wie er sich ihrer zu bedienen hat. Das Axiomatisieren überlasse man den Meistern. Die Schüler haben Axiomatik zu lernen; der Meister weiß, welche ihnen angemessen ist.¹⁸⁷

Langzamerhand liet Freudenthal het idee van leren axiomatiseren in de meetkunde los, ook al zag hij nog steeds enkele voor de hand liggende redenen om dit toch te handhaven. Een reden die vóór het leren van axiomatic in de meetkunde zou kunnen pleiten, was dat juist in de meetkunde de binding van het logische stelsel met de tastbare ervaring of voorstelling voor de leerling erg sterk en dus moeilijk los te laten was. Daardoor zou het juist een extra goede oefening kunnen zijn.¹⁸⁸ Maar een dringend argument voor het handhaven van axiomatic in de meetkunde vond Freudenthal dit niet. Over de andere voordelen voor axiomatic in het meetkundeonderwijs schreef hij:

¹⁸⁵ Ibid., 16.

¹⁸⁶ Hans Freudenthal, ‘Axiomatic in het wiskunde-onderwijs bij het VMO’, voordracht op de vakantie-cursus van het MC, 1962 (ongepubliceerd) 4 pagina’s, aldaar 2; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 537.

¹⁸⁷ Freudenthal, ‘Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?’, *Der Mathematikunterricht* (1963) 5-29, aldaar 26.

De meetkunde is een bijzonder geschikt gebied, om in het mathematisch ordenen van een premathematische stof (ruimtelijke ervaringen) in te leiden; ook voor het telkens weer ordenen op een hoger niveau van de mathematische ervaringen, die op een lager niveau zijn opgedaan (opstellen van definities, herkennen van logische samenhangen) is de meetkunde een vruchtbaar veld.¹⁸⁹

Maar dit was uiteindelijk voor hem niet voldoende voor het handhaven van axiomatic als onderdeel van het meetkundeonderwijs. Freudenthal wees het leren axiomatiseren in de meetkunde af, omdat er volgens hem geen voor het onderwijs geschikte moderne axiomatic voor handen was:

Axiomatiseren is echter moeilijker dan dit “lokaal ordenen”. Het is een “globaal ordenen”, dat ruim overzicht over het te axiomatiseren gebied veronderstelt. Meetkundige axiomatic op school is alleen dan mogelijk, wanneer de leerling in het heruitvindende lokale ordenen dit overzicht heeft verkregen. Bovendien moet het beoogde axiomatic systeem zo eenvoudig zijn, dat geleide heruitvinding van het systeem denkbaar is. De van diverse kanten voorgestelde axiomaticen voor de meetkunde zijn zo gecompliceerd, dat slechts een geofend wiskundige de zin van de diverse axioma's kan vatten. De vraag ‘Axiomatic van de meetkunde in het v.H.M.O.?’ moet derhalve om praktisch redenen met “neen” worden beantwoord.¹⁹⁰

Dit sloot volgens Freudenthal het invoeren van axiomaticen op andere gebieden in het onderwijs (zoals maat en algebraïsche structuren) niet uit, zolang bij het zoeken naar een alternatief de stelregel “de leerling lere niet een axiomatic, maar het axiomatiseren” maar in het oog gehouden werd.¹⁹¹

Dat axiomatic op zich geen goede richtlijn was bij het invullen van wiskundeonderwijs betoogde Freudenthal in zijn artikel ‘Bemerkungen zur axiomatichen Methode im Unterricht’.¹⁹² De spelregels van de opbouw van het onderwijs moesten volgens Freudenthal namelijk ook door de leerling aan te voelen zijn. Het argument dat axiomatic voor ‘absolute eerlijkheid’ zou staan ging ook niet op volgens hem: ook in de axiomatic was de mate van striktheid en formalisering altijd een kwestie van afspraken.¹⁹³ Dit erkennen was juist voor het wiskundeonderwijs – en met name het meetkundeonderwijs – van groot belang:

188 Ibid.

189 Hans Freudenthal, ‘Axiomatic in het wiskunde-onderwijs bij het vHMO’ voordracht op de vakantiecursus van het MC, 1962 (ongepubliceerd) 4 pagina's, aldaar 3; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 537.

190 Ibid.

191 Ibid., 4.

192 Hans Freudenthal, ‘Bemerkungen zur axiomatichen Methoden im Unterricht’, *Der Mathematikunterricht* (Stuttgart 1966) 61-65. Dit is een samenvatting van de discussie volgend op Freudenthals voordracht ‘Was ist axiomatic ...’ die hij hield op het ICM1-Seminar in Aarhus in 1960.

193 Hij kreeg met dit standpunt bijval van Streefkerk die in 1964 naar Freudenthals uitspraken over axiomatic in het onderwijs verwees; H. Streefkerk, ‘Problemen rondom de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs’, in: *Stemmen uit de praktijk. Vernieuwing van het wiskundeonderwijs. Inleidingen en verslagen van de conferentie wiskunde, georganiseerd door de afdeling v.H.M.O. van het Christelijk Paedagogisch*

Much harm has been done in mathematics education by people who have not noticed that there are no absolute standards of rigour and formalization in mathematics, and who reject any standard lower than their own as bogus and any higher one as high-brow. Every level in the learning process asks for corresponding levels of rigour and formalization, but traditional teaching tends to move on one level of rigour and formalization from the start of teaching to the end. In actual teaching this means too high a level to start with and too low a one to finish. In geometry *Euclidean* rigour in the beginning prevents teaching, at the end it blocks *modern* rigour. An early formalization of the language operated on in geometry prevents the urgent formalization of the operating language which is still on a shamefully low level all over the world where geometry is taught.¹⁹⁴

Zolang het niveau waarop de leerling zich bevond (en de daarbij horende mate van exactheid) maar als uitgangspunt genomen zou worden, had Freudenthal dan ook niets tegen de invoering van moderne meetkunde in het wiskundeonderwijs; zelfs niet als deze meetkunde op het begrip ‘groep’ gegrond zou zijn, iets wat nota bene helemaal in de New Math-trend paste:

Das besagt [...] nicht, daß ich moderne Geometrie für die Schule in den Schornstein schreibe. Ganz im Gegenteil. Geometrie, und dann vom Anfang bis zum Ende vom Gruppenbegriff durchsetzt, gehört auf die Schule, und ich bin davon überzeugt, daß man mehr und bessere Geometrie unterrichten kann, wenn man seinem eignen Gewissen für mathematische Strenge folgt, als wenn man sich seine Gewissensbiße vom stirnrunzelnden Axiomatiker vorschreiben läßt.¹⁹⁵

8.6.4 Moderne meetkunde in het onderwijs volgens Freudenthal

Meetkunde waarin van begin tot eind met het wiskundige begrip groep gewerkt werd – zo zag Freudenthal een gemoderniseerd meetkundeonderwijs. Wel natuurlijk met de kanttekening, dat de mate van exactheid en de bijbehorende taal zou passen bij het niveau waarop de leerling zich bevond. Hij pleitte dus eigenlijk voor een meetkunde die globaal gesproken op Kleins *Erlanger Programm* gebaseerd was, iets dat ook voor het nieuwe leerplan min of meer gold.

Op het eerste gezicht weken Freudenthals denkbbeelden dus helemaal niet zo ver af van de toenmalige moderniseringstendensen. In de plannen voor het leerplan-1968 werden weliswaar spiegeling, translatie en rotatie als uitgangspunt genomen, maar ook hier stond Freudenthal niet negatief tegenover. Wel zag hij voor het gebruik van translaties in het meetkundeonderwijs alleen maar een mogelijkheid als er van het twee-dimensionale rooster uitgegaan werd: “the most (perhaps the only)

Studiecentrum (werkgroep wiskunde) op 6 en 7 maart 1964 (Den Haag 1964) 7-19, aldaar 18.

¹⁹⁴ Freudenthal, ‘Logical analysis and critical survey’ 32. In iets andere bewoording roerde hij dit onderwerp ook aan in zijn lezing op het internationale colloquium ‘Modern curricula in secondary mathematical education’, gehouden van 19-23 december 1964 te Utrecht.

¹⁹⁵ Freudenthal, ‘Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?’, *Der Mathematikunter-*

natural *infinite* figure”, zoals dat dan ook in het leerplan-1968 voorgesteld werd.¹⁹⁶ Het liefst zou hij overigens zien dat ‘symmetrie’ en dus spiegeling als uitgangspunt genomen zouden worden:

Symmetries are more interesting than translations and rotations. To a young child congruent figures are the same. It will not hit upon the idea that something has happened if a figure is carried to another place. To an unsophisticated mind movement is not a transformation. In this regard rotation is somewhat better than translation. If a cube is translated, nothing has happened; if it is turned and put upon an edge or a corner, something has been changed. But mirror reflection gives the strongest feeling of an important event. Symmetry as a transformation is more attractive, more abundant, and more problematic than translation and rotation.¹⁹⁷

Freudenthals uitspraken weken pas af van de gangbare opvattingen wanneer het ging om de houding ten opzichte van de leerstof en het daarmee samenhangende uiteindelijke doel van het (meetkunde)onderwijs. Al jaren was Freudenthal fel gekant tegen het opleggen van de axiomatic van de Euclidische meetkunde aan leerlingen. Nu Euclidische meetkunde met de komst van New Math uit het leerplan leek te verdwijnen, was hij er bedacht op dat deze niet klakkeloos door een andere – modernere – axiomatic vervangen zou worden. Dit zou in zijn ogen namelijk geen enkele verbetering garanderen en finaal voorbijgaan aan wat hij als enige leidraad bij de invulling van het wiskundeonderwijs zag: wiskunde leren bedrijven. Dit hield volgens hem voor de leerling in: leren organiseren, en uiteindelijk ook leren axiomatiseren. De vanzelfsprekendheid waarmee de axiomatic tot nu toe enkel in de meetkunde aan de orde kwam, was volgens hem ongegrond. Wat telde, was niet het in concrete kennis te meten resultaat – zoals bijvoorbeeld kennis van de Euclidische meetkunde –, maar de manier waarop wiskunde door de leerling geleerd was.

Freudenthals houding in de discussie omtrent de modernisering van het meetkundeonderwijs leek af en toe tegenstrijdig. Dit kwam enerzijds door de omslag die hij doormaakte in zijn houding ten opzichte van de axiomatic in de meetkunde. Zag hij in 1956 hiervoor nog een plaats in het meetkundeonderwijs, in 1962 zag hij axiomatic en axiomatiseren liever in een ander onderdeel van de wiskunde onderwezen worden.

Anderszijds werd de – in dit geval schijnbare – tegenstrijdigheid in zijn houding vooral veroorzaakt wanneer hij de ene keer een weinig afwijkende houding leek aan te nemen – zoals wanneer hij zich uitsprak vóór moderne meetkunde in het onderwijs en voor het onderwijzen van (een) axiomatic in het algemeen –, en een volgende keer van leer trok tegen de in New Math (hoofdzakelijk in het buitenland) voorgestelde moderne axiomaticen in het meetkundeonderwijs. Deze tegenstrij-

richt (1963) 5-29, aldaar 28.

¹⁹⁶ Freudenthal, ‘Report on a comparative study of methods of initiation into geometry’, *Euclides* 34 (1957) 289-306, aldaar 299.

¹⁹⁷ *Ibid.* Goede voorbeelden van hoe dit te realiseren waren volgens Freudenthal te vinden in het werk van

digheid verdween echter met de nuancering die hij altijd bij dergelijke uitspraken aanbracht: niet de staat van de wiskunde als wetenschap, maar hetgeen het beste paste bij het te bereiken onderwijsdoel was voor hem van doorslaggevend belang. Moderne meetkunde was daarbij prima in te passen in het onderwijs, maar dan wel zo, dat ze paste bij het niveau van de leerling – waar het de belevingswereld, het leer-niveau en de strengheid betrof – en zo, dat ze het uiteindelijke doel – het leren bedrijven van wiskunde – zou dienen.

8.7 Logica

Een bijna onvermijdelijk onderwerp uit het wiskundeonderwijs in deze tijd was logica. Onvermijdelijk, omdat de moderne wiskunde nu eenmaal verweven was met de opbouw vanuit het begrip ‘verzamelingen’ en de daarbij horende logica. Voor Freudenthal kwam daar nog bij dat door zijn bijzondere belangstelling voor het meetkundeonderwijs het traditioneel daarbij horende logische stelsel geregeld in zijn voordrachten en publicaties aan de orde kwam.

Ook was zijn enthousiasme voor de niveautheorie van de Van Hieles voor hem meermalen een reden om aandacht te besteden aan logica in het VHMO – zij het in die context niet voor de leerling, maar als didactische hulp voor de leraar. Vanuit dit laatste oogpunt moet het verschijnen van zijn boek *Exacte logica* van 1961 gezien worden.¹⁹⁸ Dit werk – dat in dezelfde reeks als zijn boek *Waarschijnlijkheid en Statistiek* bij de Volksuniversiteitsbibliotheek verscheen – schreef Freudenthal op eigen initiatief en zou eind jaren zestig door de CMLW aan de cursisten van de herscholingscursussen voorgeschreven worden.

8.7.1 Exacte logica

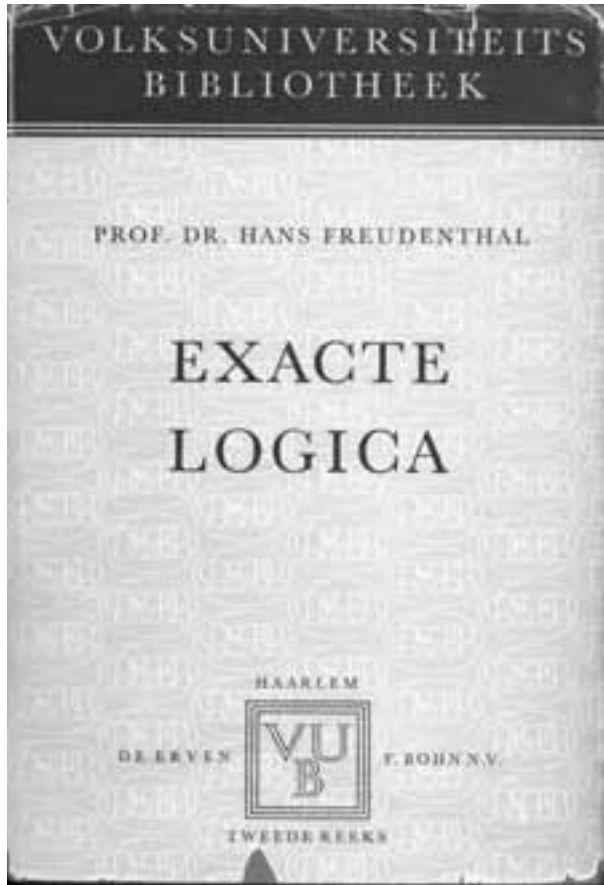
In zijn voorwoord noemde Freudenthal zijn beweegredenen voor het schrijven van dit boek. Allereerst waren er de nieuwste ontwikkelingen binnen de wiskunde die de “aloude formele logica tot een exacte wetenschap” hebben “herschapen”. Vooral in de logisch-linguïstische hoek van het taalonderzoek zag Freudenthal een belangrijke rol weggelegd voor de mathematische methode. Daarnaast was er het verouderde wiskundeonderwijs van het VHMO:

Hetgeen het meest verouderd is in onze VHMO-wiskunde, is niet het wàt, maar het hòè, de formalisering en de verwoording. Ons wiskunde-onderwijs heeft behoefte aan exacte logica, niet als nieuw onderwijsvak, maar als achtergrond, en wie in dit onderwijs werkzaam is, moet in staat zijn, die achtergrond te verkennen – niet alleen terwille van de wiskunde, maar evenzeer terwille van de didactiek van het vak. Bij didactisch onderzoek, juist in ons land, is gebleken, dat de logische structuur van het leerproces

Van Albada en dat van de Van Hieles.

¹⁹⁸ Correspondentie Freudenthal met Erven F. Bohn NV; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 29;

Omslag van Freudenthals
Exacte logica (1961).



beheerst wordt door de voor de logica en linguïstiek fundamentele relatie van systeem en meta-systeem.¹⁹⁹

Het was duidelijk dat Freudenthal met “didactisch onderzoek, juist in ons land” naar het werk van de Van Hieles verwees, zoals hij ook in een vergelijkbare context naar dit werk zou verwijzen in diverse latere artikelen wanneer hij het over het nut van de logica voor het onderwijs had.²⁰⁰

Net als zijn eerdere boek *Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek* was ook *Exacte logica* in eerste instantie bedoeld voor de (bijscholende) wiskundeleraar. De toon en opzet waren vergelijkbaar met het statistieboek: op verhalende toon werd de lezer via ‘Verzamelingen en afbeeldingen’, ‘Proposities’, ‘Subject-predicaat’ en ‘Formele logica’ door de theorie geleid. Het boek sloot af met een hoofdstuk over

Hans Freudenthal, *Exacte logica* (Haarlem 1961).

¹⁹⁹ Freudenthal, *Exacte logica* V.

²⁰⁰ Freudenthal, ‘Logica als methode en als onderwerp’, *Euclides* 35 (1960) 241-255, aldaar 255; Freudenthal, ‘Logik als Gegenstand und als Methode’, *Der Mathematikunterricht* 13 (1967) 7-22; Freudenthal, ‘Logical analysis and critical survey’ 20-41, aldaar 25-26; Freudenthal, ‘Enseignement des mathémati-

‘Taal en meta-taal’, dat Freudenthal naar eigen zeggen in tegenstelling tot de andere hoofdstukken algemeen had gehouden en “met de Franse slag” had geschreven.²⁰¹ Alle hoofdstukken waren doorspekt met vraagstukken, waarvan achterin alle antwoorden gegeven werden. Ook gaf Freudenthal geregeld, zij het zeer beknopt, wat geschiedkundige achtergronden van de besproken theorieën.

In het hoofdstuk ‘Formele logica’ kreeg de lezer een korte maar duidelijke inleiding in de axiomatische methode en werd deze methode vervolgens toegepast op het rekenen met proposities, om uiteindelijk tot de axiomatic van de subject-predicaat-taal te komen. Het hoofdstuk eindigde met de aankondiging van de onvolledigheidsstelling van Gödel. Met een schets van het bewijs van die stelling sloot Freudenthal het hoofdstuk ‘Taal en meta-taal’ af.

Ook al was het boek beknopt, veelomvattend en op sommige punten best lastig, de toonzetting en het tempo waren voor een wiskundig geschoolde redelijk te volgen. Bij de introductie van de opbouw van een axiomatisch stelsel had Freudenthal zijn eigen stelregel – “de leerling moet de noodzaak van het ordenen voelen en leren axiomatiseren” – duidelijk niet van toepassing geacht voor zijn (waarschijnlijk al wiskundig genoeg geachte) lezerspubliek: alles werd voorgedaan en de lezer werd aan de hand langs de diverse stadia van het betoog meegetroond.

Toch had Freudenthal het gevoel de lezer wel tegemoet te zijn gekomen door naast de onmisbare mathematische context van de exacte logica ook veel voorbeelden uit de omgangstaal te gebruiken, die volgens hem “tot nu toe in dit soort boeken niet of nauwelijks te vinden” waren.²⁰² Een voorbeeld van het gebruik van de omgangstaal waren de volgende opgaven aan de hand waarvan de lezer het gebruik van logische symbolen (met name de kwantoren \wedge en \vee) kon oefenen:

Maak gebruik van de afkortingen

$Z(x,t)$: ik zie het ding x op het tijdstip t ,

$P(x,t)$: ik pak het ding x op het tijdstip t ,

$t' < t$: het tijdstip t' is eerder dan het tijdstip t

en schrijf symbolisch neer:

22. Ik zie altijd iets.

23. Soms zie ik niets.

[...]

39. Als ik eens een keer een ding gelijktijdig heb gezien en gepakt, dan doe ik het later na elkaar of in het geheel niet.²⁰³

Veel meer dan het puzzelement hielden deze oefeningen ‘in de omgangstaal’ niet in. De ook aanwezige andere, meer op algebra en op analyse gerichte voorbeelden van het gebruik van logica, droegen voor de lezer waarschijnlijk meer bij aan de ontwikkeling van begrip en toepasbare kennis.

ques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ 28-44, aldaar 30-31.

²⁰¹ Freudenthal, *Exacte logica* VI.

²⁰² *Ibid.*, VI.

8.7.2 De toepassing van moderne logica in het onderwijs

Aan het gebruik van logica in het onderwijs ging Freudenthal, afgezien van de opmerkingen in het voorwoord, in zijn boek *Exacte logica* volledig voorbij. In een voordracht uit diezelfde tijd besteedde hij hieraan wel aandacht.²⁰⁴ Hierin liet hij zien, hoe logica alleen in het meetkundeonderwijs expliciet aan de orde kwam en in de algebra – hoewel daar net zo goed aanwezig – een ondergeschoven onderwerp bleef:

Hoe moeten we deze band tussen meetkunde en logica verklaren? Blijkbaar als uitvloeisel van de mening, dat het in de meetkunde niet, maar in de algebra wel zonder logica gaat. In de algebra wordt de leerling van een goed werkend systeem van regels voorzien, om gegeven uitdrukkingen te vervormen met als doel een precies te voorspellen resultaat. In de meetkunde beschikken we niet over een even betrouwbaar systeem van schema's. Het is wel kenmerkend, dat voetangels in de algebra (denkt u maar aan het vermenigvuldigen van vergelijkingen met 0 en van ongelijkheden met negatieve getallen) niet uit de weg worden geruimd door een logische analyse, maar dat zij door nieuwe regels plegen te worden geblokkeerd.²⁰⁵

Dit op 'schema's' gebaseerde algebraonderwijs werkte volgens Freudenthal door tot in de notatie:

Het woord 'algebra' zou in de schoolpraktijk kunnen worden vertaald als "aanwijzingen voor het invullen van schema's – laten we het nog iets krasser zeggen – van voorgedrukte formulieren". De voorgedrukte tekst staat in het geheugen van de leerling gegrift, die zich ertoe beperkt, neer te schrijven, wat bij het invullen tussen de gedrukte tekst in komt te staan. [...] Ik bewonder dan ook elk jaar bij het nazien van het schriftelijk eindexamenwerk de scherpzinnige leraar, die weet, welk voorgedrukt formulier de leerling net aan het invullen was. Want dat is de vloek der algebra: dat er verschillende soorten voorgedrukte formulieren bestaan, en dat de verstandhouding eronder lijdt, als de een meent, dat het over kinderbijslag ging, terwijl de ander aan een girobiljet dacht.²⁰⁶

Hiervoor was volgens Freudenthal maar één remedie: de leerling laten opschrijven wat hij precies bedoelde. En daarvoor zou dan het meest voor de hand liggende middel gebruikt moeten worden: de logische symboliek. "Met de grootste klem" pleitte hij vervolgens voor de systematische toepassing hiervan op school. Ook het gebruik van de kwantoren \wedge en \vee moest daarbij aangeleerd worden.²⁰⁷ Ter illustratie gaf Freudenthal vervolgens de al eerder beschreven voorbeelden in de trant van 'als ik iets zie, pak ik het meteen', om direct te vervolgen:²⁰⁸

203 Ibid., 56-57.

204 Voordracht voor de weekendconferentie van de Wiskunde Werkgroep van de wvo, november 1959, in 1961 verschenen in *Euclides*; Freudenthal, 'Logica als methode en als onderwerp', *Euclides* 35 (1960) 241-255.

205 Ibid., 244.

206 Ibid., 249.

207 \wedge en \vee worden tegenwoordig vaak geschreven als respectievelijk \forall ('voor alle') en \exists ('er bestaat een').

Misschien zult u zeggen: wat hebben deze uitgekookte voorbeelden met ons wiskundeonderwijs te maken? Ik zal u het antwoord niet schuldig blijven. Stapelingen van kwantoren “er is” en “alle” zijn de schrik van de jongelui, die de schoolbanken voor de collegebanken verwisselen. [...] Hoe komt het, dat de schoolwiskunde zulke stapelingen van kwantoren kan vermijden? Deze vraag stelde ik me enkele jaren. Het antwoord heeft mij buitengewoon verrast. Wat bleek? Dat ook de schoolwiskunde zulke gevaarlijke kwantoren-torens kent, en nog wel in de algebra, die logisch simpeler heet te zijn dan de meetkunde.²⁰⁹

Dat de aankomende studenten toch zo’n moeite met de kwantoren hadden, had volgens Freudenthal te maken met de manier waarop de kwantoren in het algebraonderwijs gebruikt werden. Als voorbeeld van dergelijk gebruik van kwantoren in het wiskundeonderwijs gaf Freudenthal de volgende opgave:

a. Aan welke voorwaarden moeten a en b voldoen, als

$$-x^2 + ax + a + b$$

voor elke waarde van x negatief is?

b. Aan welke voorwaarde moet b voldoen, opdat er waarden van a zullen zijn die aan de gevonden voorwaarde voldoen?

Symbolisch:

$$?_b \vee_a \wedge_x (-x^2 + ax + a + b < 0).$$

[...] De gevaarlijke kwantoren in deze voorbeelden zijn leeuwen zonder tanden. Van de kwantor \wedge_x in $\wedge_x (-x^2 + ax + a + b < 0)$ zijn de tanden getrokken met behulp van de discriminant. De leerling weet machinaal dat bovenstaande uitdrukking gelijkwaardig is met $a^2 + 4(a+b) < 0$, en hiermee is het vraagstuk gereduceerd tot

$$?_b \vee_a (a^2 + 4(a+b) < 0).$$

Maar de volgende kwantor, \vee_a , is al even seniel. De discriminant reduceert het probleem tot

$$?_b (16 - 16b > 0),$$

en nu heeft de kandidaat de eerste kans om te stranden, want na het trainen op kwadratische en gebroken ongelijkheden kun je er zeker van zijn, dat hij niet weet, wat hij met een lineaire ongelijkheid moet doen.²¹⁰

Het verschil met het universitair wiskundeonderwijs was, dat de “kwantorentorens” in de wiskundeopgaven op het VMO door de leerling direct geëlimineerd konden worden door het gebruik van kant en klare algoritmen. Op die manier was de oefenwaarde van het leren gebruiken van kwantoren natuurlijk nihil. De niet-algorithmische kwantoren – diegene die in de definities verstopt zaten – bleven buiten het gezichtsveld van de leerling.

Dit oefenen met enkel algorithmische kwantoren hield volgens Freudenthal het gevaar van “trainen op logische schijndiepte” in en blokkeerde het begrip voor echte kwantoren. Dit gevaar was niet alleen aanwezig voor de leerling, maar ook voor

208 Freudenthal, ‘Logica als methode en als onderwerp’ 251.

209 Ibid., 252.

210 Ibid., 252-253. Freudenthal haalde zijn voorbeeld uit de verzameling ‘250 opgaven’, die in *Euclides* 32

de leraar, “en dat is misschien erger, want bij een jeugdige leerling staan de kansen beter, om zich aan die blokkade te ontworstelen”.

Naast het correct leren gebruiken van kwantoren, had Freudenthal ook uitgesproken ideeën over de te gebruiken (functie)notatie. Traditionele schrijfwijzen zoals $f(x)$, $y=f(x)$ of $F(x,y)=0$ bleken volgens hem in de moderne wiskunde niet te voldoen. Problemen ontstonden zodra er sprake was van een verzameling A van functies en het tot die verzameling behoren van een bepaalde functie aangegeven moest worden. Om dit eenduidig en correct te kunnen weergeven stelde Freudenthal naar aanleiding van een discussie over functienotaties in *Euclides* de volgende functienotatie voor, hier voor de functie op het interval $(3,4)$:

$$Y_{3 < x < 4} (x^2 - 3x + 2)$$

Maar ook hier hield Freudenthal een slag om de arm als het ging om een eventuele invoering ervan op school:

Tenslotte, hoort deze of een dergelijke functie-notatie op de school thuis? Het antwoord is ja, indien de behoefte eraan zich voordoet. Of dit het geval is, zal van het programma en van zijn uitwerking afhangen.²¹¹

Wederom is hier Freudenthals standpunt ten aanzien van vernieuwingen te herkennen: invoering van moderne elementen had voor hem alleen waarde wanneer deze in dienst van het onderwijs stonden, nooit als vernieuwing op zich. Daarnaast ging het er niet om de concrete hoeveelheid wiskunde die de leerling op school geleerd had, maar ging het erom dát hetgeen hij geleerd had ook daadwerkelijk *wiskunde* was en niet slechts een verzameling domweg aangeleerde en daardoor nutteloze trucjes. Hij verwoordde zijn standpunt in het artikel ‘Logica als methode en als onderwerp’ als volgt:

Ik heb tijdens deze lezing ervoor gepleit, dat symbolisch logische methoden door de leerling – ik zeg niet zoveel mogelijk, maar zoveel noodzakelijk – worden toegepast. Dit betekent uiteraard niet, dat de logica als leerstof haar intrede in de schoolwiskunde doet. Ik sta over het algemeen sceptisch tegenover nieuwe onderwerpen, en in ’t bijzonder lijkt mij logica als leerstof op zijn minst prematuur. Bij het woord “methode” in de titel van deze lezing heb ik echter niet zozeer de leerling voor ogen gehad, die zich bij het neerschrijven van zijn werk van logische symbolen bedient, maar veel eerder de leraar die met modern logische methoden de leerstof en zijn vorm benadert en zijn eigen methodiek analyseert.²¹²

En dan is Freudenthal weer terug bij zijn stokpaardje: moderne wiskunde, en dan in dit geval de logica, was in de eerste plaats nuttig als hulpmiddel voor de leraar bij het analyseren van de leerstof en het bijbehorende leerproces, om zo te komen tot een goed doordachte didactiek en methodiek. Dus niet alleen moest de leraar boven de te onderwijzen stof staan, maar ook boven de logische vorm van die stof:

(1956) gepubliceerd waren ter ondersteuning van het leerplan-1958.

211 Hans Freudenthal, ‘Functies en functie-notaties’, *Euclides* 41 (1966) 299-304, aldaar 304.

Men zou nog een stap verder kunnen gaan, door van de leraar ook te eisen, dat hij boven de door hem gebezigde methode van aanbidding van de stof staat en zichzelf deze methode bewust kan maken. Ook hierbij kan de logische analyse diensten bewijzen. Niet in die triviale zin, dat de methode door de logische structuur worden [sic] bepaald, maar om, naar het voorbeeld van de van Hiele's, de niveau's [sic] van inzicht te herkennen en hun onderlinge relatie, die volstrekt logisch van aard is.²¹³

En daarmee legde hij wederom de parallel tussen het reflecteren vanaf een hoger (begrips)niveau op een lager (begrips)niveau en in de moderne wiskunde een zo prominente plaats innemende logica van theorie en meta-theorie.

8.8 Freudenthal en New Math: conclusie

8.8.1 Een eenzame tegenstander van New Math?

Hoe New Math zou gaan uitwerken, en welke, gewenste maar ook ongewenste, consequenties het voor de uitwerking van het wiskundeleerplan uiteindelijk met zich mee zou brengen, was in de periode 1957-1966 nog voor niemand te overzien. Het is dan ook weinig zinvol om al in deze periode van kampen 'voor' en 'tegen' deze stroming te spreken. In de eerste jaren leek de New Math-vernieuwingstendenzen in Nederland niet veel meer dan de zoveelste poging tot herziening van een weerbarstig en hoofdzakelijk door traditie bepaald leerplan.

Deze keer was de inzet echter hoger: er moest een leerplan ontworpen worden dat niet alleen vernieuwend was, maar ook voldeed aan de nieuwe onderwijsstructuur onder de Mammoetwet. Aangezien dit niet slechts een aanpassing van het bestaande leerplan betekende (zoals bij de leerplanherziening van 1958), maar een werkelijk drastische verandering, maakte dit het makkelijker relatief veel van het oude leerplan los te laten. Zo verdween de Euclidische meetkunde en daarmee het leren van de bijbehorende logisch-deductieve opbouw. Een intuïtieve inleiding in de meetkunde – decennia lang een discussiepunt – werd nu gemeengoed. Tegelijkertijd bood de leerplanherziening ruimte voor de invoering van nieuwe, moderne wiskunde(taal) in het wiskundeonderwijs.

Freudenthal schilderde zichzelf in zijn *Schrijf dat op, Hans* herhaaldelijk met gepaste trots af als de eenzame tegenstander van New Math: een indertijd door niemand serieus genomen, “enfant terrible”. In het voorgaande komt toch een genuanceerder beeld naar voren. Zijn echt felle kritiek op New Math-initiatieven gold voornamelijk *buitenlandse* tendensen. Van een Bourbakiaanse opbouw van de schoolwiskunde zoals die bijvoorbeeld in België tot stand kwam, was in Nederland nooit sprake.

²¹² Hans Freudenthal, ‘Logica als methode en als onderwerp’ 255.

²¹³ *Ibid.*, 255. Eenzelfde gedachtegang volgde Freudenthal in zijn artikel ‘Logical analysis and critical survey’ uit 1962 en ook in ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement modernes des mathématiques?’ uit 1963; Freudenthal, ‘Logical analysis and critical survey’ 25-26; Freudenthal, ‘En-

Wat er in Nederland wél van de grond kwam, gebeurde met steun en medewerking van Freudenthal. Het duidelijkst kwam dit naar voren in zijn enthousiasme over het werk binnen de CMLW. Eind jaren zestig had Freudenthal nog alle hoop dat het door de CMLW ontworpen leerplan goed uit zou pakken. In een interview in *HP Magazine* zei hij:

De leraren zijn hier de eerste jaren verschrikkelijk aan het schrikken gemaakt met alle nieuwe begrippen die zouden worden ingevoerd. [...] Maar het nieuwe leerplan is in feite maar een zeer gematigde vernieuwing. Voor leraren die de cursussen hebben gevolgd, is het niet zo'n probleem. Ze moeten het met vallen en opstaan leren, maar ik heb de indruk, dat het betrekkelijk goed gaat.²¹⁴

Toch schreef Freudenthal midden jaren tachtig over de uitwerking van het nieuwe leerplan:

Het nieuwe bleek praktisch van begin af aan mis. Heel duidelijk was dat in de bovenbouw, maar je mocht het niet hardop zeggen om de lerarengemeenschap niet node-loos ongerust te maken. Wat aan de bovenbouw schortte, is nu, drie lustra later, ten dele gerepareerd.²¹⁵

Met de zinsnede “praktisch van begin af aan” zal hij waarschijnlijk begin jaren zeventig bedoeld hebben, toen het pas echt duidelijk werd, hoe het leerplan en de nieuwe onderwijsstructuur onder de Mammoetwet in de praktijk uitwerkte. Eind jaren zestig was Freudenthals optimisme ten aanzien van een positieve uitwerking van het nieuwe leerplan in ieder geval nog volop aanwezig.

Ook het beeld van de *eenzame* tegenstander, die door niemand (nog) serieus genomen werd, ging in deze periode voor Freudenthal niet op. Hij speelde wel degelijk een rol in eigenlijk alle commissies en instellingen die iets binnen de op handen zijnde vernieuwingen in te brengen hadden: de NOCW, de CMLW en ook op internationaal niveau in de ICMI. Ook in *Euclides* was hij als lid van de redactie (sinds 1956) met zijn publicaties nauwelijks “een vreemde eend in de bijt” te noemen.²¹⁶ En waar Freudenthal in de jaren vijftig nog als boegbeeld van de Wiskunde Werkgroep fungeerde, was er van zijn betrokkenheid en identificatie met de steeds verder op de achtergrond figurerende ‘vernieuwers’ in de jaren zestig nauwelijks meer iets te merken.

Wat was er aan de hand? Waarom liet Freudenthal zich schijnbaar met de grote stroom meevoeren? Ging dit ten koste van zijn idealen? Was hij niet alert genoeg? Of was het een kwestie van ‘met alle winden’ – en dan vooral de invloedrijkste – meewaaien?

seignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ 30-31.

214 Freudenthal in het interview: Bert Vuysje, ‘De wiskundeles verandert: $3+2=1$ ’, *HP Magazine* (24 december 1969 – 6 januari 1970); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1847.

215 Freudenthal, *Schrijf dat op*, *Hans* 351.

216 Freudenthals publicaties in de periode 1956-1966 in *Euclides*: Freudenthal, ‘Report on a comparative study of methods of initiation into geometry’, *Euclides* 34 (1957) 289-306; Freudenthal, ‘Logica als methode en als onderwerp’, *Euclides* 35 (1960) 241-255; Freudenthal, ‘Functies en functie-notaties’, *Euclides* 41 (1966) 299-304; Freudenthal, ‘Moderniserend Leerplan Wiskunde. Antwoord aan Prof. De



Freudenthal poseert (nu nog met pijp!) voor de foto­graaf van de krant *Het Centrum* (1963).

8.8.2 Meewerken om bij te sturen

Inderdaad leek Freudenthal bewust te kiezen voor *die* partijen, die ook daadwerkelijk iets in te brengen hadden op het gebied van de aankomende vernieuwingen. Zo verklaarde hij ook zelf zijn actieve rol in bijvoorbeeld de NOCW en ICMI. Enerzijds was dit een tactische zet, alle kansen aan te grijpen zich in die commissies te bewegen waar ook daadwerkelijk invloed uitgeoefend kon worden op de gang van zaken. Dit paste dan ook in zijn motto liever mee te werken – ook wanneer hij het niet altijd met werkwijze en ideeën eens was – om onderweg bij te kunnen sturen, dan slechts ‘tegen’ te zijn en zich afzijdig te houden, of actief te blijven in een groep wiens rol uitgespeeld was.

Anderzijds ging deze omwenteling in zijn belangstelling voor een deel ook onbewust: door zijn verblijf in de Verenigde Staten en zijn rectoraat was hij gedwongen meer afstand te nemen, ook van bijvoorbeeld de Wiskunde Werkgroep. Hierdoor kwamen ook meer van zijn andere werkzaamheden naar voren, zoals naast zijn zuiver wiskundig werk het schrijven van zijn boek *Lincos*. Daar kwam nog bij dat Freudenthal bijna alle uitnodigingen aannam die op zijn pad kwamen, vooral wanneer deze het wiskundeonderwijs betroffen. Aan die (vele!) uitnodigingen lag natuurlijk de status ten grondslag, die hij in de loop der jaren als ‘wiskundeonderwijs-man’ had verkregen. De uitnodiging voor deelname aan een commissie als de CMLW vloeyde daar logischerwijs uit voort. Een buitenbeentje, zoals hij zichzelf in *Schrijf dat op*, Hans presenteerde, was hij zeker niet meer.

Maar om hem naar aanleiding van zijn acties in het veld als voorstander van New Math te bestempelen gaat weer te ver, nog afgezien van het eerder geconstateerde feit

dat een dergelijke conclusie voor deze periode niet aan de orde was. Leek hij soms (bijvoorbeeld met zijn ideeën voor het meetkundeonderwijs) een voorstander van New Math-ideeën, hij voegde altijd de voor hem typerende en essentiële nuance toe, waarbij het leren *bedrijven* van wiskunde boven het leren van wiskunde an sich stond.

Bovenal moet gezegd dat Freudenthal in geen enkele commissie waarin hij actief was, zich een laissez-faire-houding permitteerde waar het ging om het bereiken en verkondigen van zijn eigen idealen. In welk gezelschap hij zich ook bevond, hij probeerde zijn eigen visie en ideeën op tafel – en belangrijker nog: op de agenda – te krijgen. Onvermoeibaar bleef hij hameren op wat met recht zijn stokpaardje uit die tijd genoemd kan worden: methode boven inhoud. Het moderniseren van de onderwijs*methode* was essentiëler dan het moderniseren van de *inhoud* van het onderwijs.

8.8.3 Kennis als wapen in de strijd voor beter wiskundeonderwijs

Lange tijd – zeker tot begin jaren zeventig – zag Freudenthal de bijscholing van de leraren als noodzakelijk voor het bereiken van verbetering van de onderwijsmethoden. Maar dit was in zijn ogen niet alleen een noodzakelijke, maar ook een voldoende voorwaarde. Afgezien van zijn voorstel in 1959 voor het opzetten van een internationaal onderzoeksinstituut voor de ontwikkeling van (wiskunde)didactiek liet hij in de jaren erna zelden blijken naast de bijscholingscursussen ook andere maatregelen noodzakelijk te achten.²¹⁷ Het was ook pas eind jaren zestig dat er binnen de CMLW enkele – overigens weinig concrete – ideeën ontstonden over het opzetten van een didactiekcursus als aanvulling op de bijscholingscursussen, hetgeen bleek uit een brief van Freudenthal (als voorzitter van de ICMI) aan een vertegenwoordiger van UNESCO over de bijscholing van leraren in het voortgezet onderwijs:

Le 6ème cours vient d'être achevé. A partir du 7ème on traitera des sujets de méthodique et de didactique au lieu de matière mathématique, mais on n'a pas encore trouvé la méthode de réaliser cette idée.²¹⁸

Een sprekend voorbeeld van Freudenthals enthousiasme over het enorme succes van de bijscholingscursussen in Nederland waren zijn lovende woorden hierover in diezelfde brief een alinea eerder:

Je tiens à souligner que dans les Pays Bas nous avons des expériences de cinq années avec des cours très intensifs de recyclage où ont participé chaque fois la majorité des professeurs de lycée. Les résultats des cours (conférences + exercices) étaient stupéfiants. 90% des participants pouvaient résoudre les problèmes posés dans les exercices. La plupart ont déclaré que leur enseignement a gagné beaucoup de profondeur par la connaissance de matière supérieure acquise pendant les cours.²¹⁹

Bruyn', *Euclides* 43 (1968) 321-322.

²¹⁷ Freudenthal aan R.C. Kwantes, 25 maart 1959; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1829.

²¹⁸ Freudenthal aan Albert Legrand, Institut de l'Unesco pour l'Education, 9 februari 1968; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 365.

Impliciet sprak Freudenthal met deze positieve houding ten aanzien van het effect van deze cursussen de verwachting uit, dat een leraar met voldoende kennis van de hogere en modernere wiskunde – en daarnaast de nodige kennis van de logische analyse van het leerproces – zelf de bijbehorende didactiek en methodiek zou moeten kunnen ontwikkelen. Dit was een standpunt, dat ook goed paste bij zijn vertrouwen in de kracht van het ‘hogere standpunt’ voor de leraar, zoals hij dat al sinds de jaren veertig verkondigde.²²⁰

Dit klonk misschien lichtelijk naïef, maar was op zich niet zo’n vreemde opvatting in die tijd. Ook Brandenburg bijvoorbeeld hield er in zijn proefschrift over de modernisering van het wiskundeonderwijs de mening op na dat bijscholen van de leraren genoeg was om het nieuwe leerplan tot een succes te maken.²²¹ En ook binnen de CMLW was dit de gangbare opvatting, en gezien de opzet en uitwerking van de georganiseerde bijscholingscursussen werd deze alom aanvaard.

Vakdidactiek als wetenschappelijke discipline aan de universiteiten was begin jaren zestig voorzichtig groeiende in Nederland. Naast didactische proefschriften, als dat van Mooij (1948), de Van Hiele (1957) en Brandenburg (1968), werd er onderzoek naar wiskundeonderwijs en –didactiek gedaan door vakdidactici aan universitaire Pedagogische Instituten, vaak in het kader van de lerarenopleiding. Zo waren er bijvoorbeeld de onderzoeken van Bunt in Utrecht en de onderzoeksonderzoeken (onder begeleiding) van psycholoog-wiskundige A.D. de Groot in Amsterdam.²²² Het eerste deel van Wansinks *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren* verscheen in 1966. Het kwam voort uit zijn ervaringen bij het onderwijzen van wiskundendidactiek aan akte-studenten en was het eerste Nederlandstalige wiskundendidactische overzicht voor wiskundeleraren.

Leraar worden ging in de jaren zestig nog steeds op twee manieren: via het behalen van MO-akten of langs academische weg.²²³ De pedagogisch-didactische scholing van aanstaande leraren was na het opnemen van bepalingen hierover in de wet in de

219 Ibid.

220 Zie bijvoorbeeld – naast vergelijkbare geluiden in zijn ongepubliceerde artikel ‘Oude en nieuwe universiteiten’ – het artikel: Freudenthal, ‘De algebraïsche en de analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde’ 106-121.

221 Willem Jan Brandenburg (1921) studeerde wis- en natuurkunde in Amsterdam en werd vervolgens wiskundeleraar. Na een studie pedagogiek in Groningen (afgerond in 1958) promoveerde hij vervolgens in 1968 bij prof. J.C.H. Gerretsen en prof. L. van Gelder op een wiskundig-didactisch proefschrift, waarin hij de problematiek beschreef die ontstond na de modernisering van de schoolwiskunde van 1967. Vanaf 1963 werkte hij als wetenschappelijk hoofdmedewerker bij de afdeling Lerarenopleiding van het Pedagogisch Instituut in Groningen; Brandenburg, *Modernisering van het wiskunde-onderwijs*.

222 Adriaan D. de Groot (1914) studeerde wiskunde en psychologie. In 1946 promoveerde hij op het proefschrift getiteld *Het denken van de schaker. Een experimenteel-psychologische studie*. Na enige jaren wiskundeleraar te zijn geweest, was hij vanaf 1950 hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam, waar hij zich toelegde op psychologisch-onderwijskundig onderzoek. Een van zijn meest geciteerde publicaties was *Vijven en zessen. Cijfers en beslissingen: het selectieproces in ons onderwijs*. Eind jaren vijftig vond onder zijn supervisie een vergelijkend onderzoek naar methoden voor aanvankelijk meetkundeonderwijs (Euclidische meetkunde versus transformatiemeetkunde) plaats; A.D. de Groot, *Vijven en zessen. Cijfers en beslissingen: het selectieproces in ons onderwijs* (Groningen 1966); F. Goffree, ‘Een halve eeuw onderzoek. Wiskundendidactiek in Nederland’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/3 (2002) 233-243.

223 Zie ook: J. Vos en K. van der Linden, *Waarvan akte. Geschiedenis van de M.O.-opleidingen 1912-1987* (Assen 2004); Klaske Blom, ‘Van de acten van bekwaamheid. De middelbaar-onderwijs akten K1 en

periode 1952-1961 geregeld.²²⁴ In de jaren zestig werd met de aanstaande Mammoetwet ook de lerarenopleiding weer onder de loop genomen. Bij de wet op het voortgezet onderwijs van 1963 werd onderscheid gemaakt in bevoegdheden van eerste (voor lesgeven op het vwo en de bovenbouw HAVO), tweede (voor brugklas vwo en klas 2 en 3 van het HAVO) en derde graad (voor lesgeven op het MAVO), dat op veel tegenstand van de leraren stuitte. Door de instelling van de Commissie Opleiding Leraren (COL, onder leiding van raadsadviseur van de minister, J.B. Drewes) in 1964 werd een aanvang genomen met het opzetten van een beroepsopleiding voor leraren. Hoe deze vorm zou moeten krijgen, was nog lange tijd onderwerp van discussie. De aloude tegenstelling pedagogisch-didactische vorming versus vakwetenschappelijke vorming was, naast de vraag in hoeverre een opleidingsinstituut aan universiteiten gelinkt zou moeten worden, hierbij het belangrijkste discussiepunt.²²⁵

In *Euclides* was van een dergelijke discussie over de lerarenopleiding weinig te merken. De gemoederen van de wiskundeleraren werden voornamelijk bezig gehouden door de aanstaande leerplanvernieuwing en bijbehorende bijscholingscursussen moderne wiskunde. Ook aan het Mathematisch Instituut in Utrecht werden cursussen voor leraren gegeven door Van der Blij en Freudenthal, waaronder de cursus 'Achtergronden van de schoolwiskunde'.²²⁶

Freudenthals enthousiasme voor bijscholingscursussen was ook te verklaren vanuit zijn al jaren eerder verkondigde standpunt dat een studie met het behalen van een bul niet 'af' is, maar een student – en dus ook een (toekomstige) leraar – een leven lang zou moeten blijven leren.²²⁷ Dat Freudenthal van een leraar naast de kennis van de moderne wiskunde ook nog het kunnen analyseren van het leerproces verwachtte, was daarbij een elders weinig gehoorde 'extra' eis, typerend voor zijn ideeën.

Freudenthal greep de opkomende moderniseringstendens met beide handen aan om in ieder geval een kans te hebben enkele van zijn idealen – zoals de bijscholing voor leraren en het grondig herzien van doel en inhoud van het wiskundeonderwijs op het VMBO – verwezenlijkt te zien. Twee grote vergissingen maakte hij naar eigen zeggen al doende: het laten lopen van mogelijkheid in Royaumont aanwezig te zijn bij wat de lancering van New Math zou blijken, en vervolgens het niet au sérieux nemen van die nieuwe tendens. Of en in hoeverre Freudenthal in Royaumont iets had kunnen beïnvloeden valt te betwijfelen. Zijn onderschatting van de invloed van New Math op het onderwijs in Nederland was daarentegen duidelijk aanwijsbaar in zijn overschatten van de uitwerking van de bijscholingscursussen. Het lukte weliswaar door de cursussen een grote groep leraren met succes in de moderne wiskunde in te wijden en enthousiast te maken. Freudenthal zag echter een belangrijke schakel in het onderwijs over het hoofd, die ook pas in de loop der jaren duidelijk zou worden: de

Kv nader bekeken' (ongepubliceerd 1998).

224 Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Deel I* 26-28. In 1952 voor de universitair gevormde leraren, 1958 voor de akten-bezitters en in 1961 voor de ingenieur-leraar. Zie ook paragraaf 6.5.

225 Vos en Van der Linden, *Waarvan akte. Geschiedenis van de m.o.-opleidingen 1912-1987* 116.

226 Ook gaf Freudenthal de cursus 'Geschiedenis van de wiskunde'; 'Berichten Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit Boothstraat 1C, 6 en 17, Utrecht', *Euclides* 41 (1965) 52.

invloed die de leerboeken uiteindelijk zouden hebben op het onderwijs. De leerboeken moesten weliswaar het leerplan volgen, maar de auteursgroepen waren vrij in de invulling. De CMLW en haar bijscholingscursussen hadden daarop geen invloed.

8.8.4 Freudenthal over het doel van het wiskundeonderwijs

Dat Freudenthal zich moeilijk in een eventueel kamp voor of tegen New Math liet plaatsen, had tenslotte nog het meest te maken met het gegeven dat hij zich met de ideeën in zijn artikelen en voordrachten veelal boven die discussie plaatste. Het ging hem nooit om het wel of niet – en zo ja, wat – invoeren van moderne wiskunde *an sich*:

Krachtige pogingen worden in het werk gesteld, om de *inhoud* van het programma te vernieuwen. Ik sta er enigszins sceptisch tegenover. Ik meen, dat men de mathematische methode aan elk mathematiseerbaar materiaal kan leren.²²⁸

Het had volgens Freudenthal weinig zin over de concrete inhoud van een leerplan te praten, als niet het beoogde doel van het wiskundeonderwijs voorop zou staan. En het leren bedrijven van wiskunde was het doel dat hij voor ogen had – de enige manier om wiskunde te leren die ‘nuttig’ en toepasbaar zou blijken voor de leerling. Dit doel stelde hij boven de door traditie ingegeven leerstof, zoals bijvoorbeeld in het meetkundeonderwijs de Euclidische meetkunde, maar ook boven het belang van de invoering van eventuele moderne axiomatieken: de leerstof was van ondergeschikt belang aan het hogere doel.

Over dit doel van het onderwijs schreef hij aan Monna bij aanvang van de werkzaamheden van de CMLW in 1961:

Ik zie geen noodzaak, om wiskundige stof af te wentelen van universiteit en hogeschool naar het vHMO. Evenmin zie ik enige noodzaak, om leerstof met het oog op praktisch nut te kiezen. De leerstof hoort in het vHMO fundamenteel te zijn, hetgeen niet wegneemt, dat toepassingen van de leerstof met het oog op praktisch nut gericht kunnen zijn. Een voorbeeld: een behoorlijk begrip van evenredigheid zal praktisch meer nut opleveren dan enige met directe blik op de praktijk gekozen leerstof.²²⁹

‘Kennismaken met de wiskundige methode, door wiskunde die de leerlingen met inzicht kunnen toepassen’, zo zou Freudenthals standpunt in deze periode samengevat kunnen worden. Als de wiskunde op school moderne wiskunde zou zijn, was dat een mooie bijkomstigheid. Concrete voorstellen van leerstof deed Freudenthal daarbij niet.

Geleidelijk aan zou hij er echter achter komen dat zijn doel minder gemakkelijk te bereiken was dan hij oorspronkelijk dacht: met zijn mening verkondigen in lezingen en artikelen en het geven van cursussen alleen kwam hij er niet. Deze constatering vormde voor hem de basis voor meer doortastende actie.

²²⁷ Zie ook Freudenthal over de lerarenopleiding in paragraaf 6.5.

²²⁸ Freudenthal, *Exacte logica* v.

229 Freudenthal aan Monna, 23 augustus 1961; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1723.

Freudenthal ziet het zo

Stel je voor wat ik een kwart eeuw geleden over zo'n gerontocraat zou hebben gezegd! Nee, geen gerontocraat – ik ben wel ambitieus maar nooit heerszuchtig geweest. Haantje de voorste, maar dan een die even gauw op de vlucht sloeg. Vooral voor gerontocraten.

Hans Freudenthal in *Schrijf dat op, Hans*, 1987¹

9.1 Inleiding: veranderingen van het strijdtoneel

In 1970 werd Freudenthal 65 jaar oud. In het hoofdstuk 'Kwalen van de ouderdom' uit zijn boek *Schrijf dat op, Hans* vertelde hij hoe hij tegen die tijd bewust zijn lopende activiteiten afbouwde en diverse voorzitterschappen opzegde. Toch lukte het hem niet een lege agenda te creëren: wat hij aan de ene kant aan activiteiten schrapte, kwam er aan de andere kant bij. "Andere, naar verhouding zwaardere verplichtingen", zo omschreef hij ze.²

Veel van deze andere activiteiten waren een direct gevolg van de (cultuur)veranderingen op het gebied van het wiskundeonderwijs in deze jaren. Veranderingen, waarvan Freudenthal zich niet afzijdig kon en wilde houden.

In 1968 was in Nederland het nieuwe wiskundeleerplan ingevoerd en was de Mammoetwet van kracht gegaan. Welke invloed dit zou hebben op het wiskundeonderwijs was toen nog niet duidelijk. Ook al waren de veranderingen in het leerplan niet zo radicaal 'New Math' als in sommige andere landen, het gevaar dat de invoering van moderne wiskunde de aandacht voor modernisering van de onderwijsmethoden zou overheersen was nog steeds reëel. Het bestrijden van dit gevaar bleef dan ook een geregeld terugkerend onderwerp in Freudenthals artikelen en voordrachten.³ Hij schreef zelf over de noodzaak ervan:

1 Freudenthal over zichzelf en zijn activiteiten op het gebied van het wiskundeonderwijs in de jaren zeventig en tachtig; Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 329.

2 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 328.

3 Over het verschil tussen het onderwijzen van moderne wiskunde en het moderniseren van het wiskundeonderwijs schreef hij onder andere in de volgende artikelen: Hans Freudenthal, 'Why to teach mathematics so as to be useful', *Educational Studies in Mathematics* 1-2 (1968) 3-8; Freudenthal, 'Modernisering Leerplan Wiskunde. Antwoord aan Prof. de Bruyn', *Euclides* 43 (1968) 321-322; Freudenthal, 'Les tendances nouvelles de l'enseignement mathématique', *Revue de l'Enseignement Supérieur* 46-47 (1969) 23-29; Freudenthal, 'Introduction', *NEW TRENDS in Mathematics Teaching* 11 (1970); Hans Freudenthal, 'Die neuen Tendenzen im Mathematik-Unterricht', *Neue Sammlung* 11 (1971), 146-153; Hans Freudenthal, 'De Middenschool', *Rekenschap* 20 (1973) 157-165.

Reform continues, and it is too soon to evaluate the results. This is a period of transition and uncertainty. Without exaggerating the importance of some less acceptable tendencies, they nevertheless must be pointed out in order to be complete and perhaps to warn those who might otherwise be victimized by them.⁴

Maar over het algemeen was eind jaren zestig dit onderwerp niet meer zo vaak aan de orde als enkele jaren eerder. Parallel met de veranderingen in het maatschappelijk klimaat in de jaren zestig (waarin gelegenheid tot zelfontplooiing en bevestiging van de eigen identiteit belangrijk werden) zette ook een (voorzichtige) cultuuromslag binnen het wiskundeonderwijs in. Hierbij kwam, zij het aanvankelijk nog zeer mondjesmaat, steeds meer aandacht voor de didactiek van de wiskunde en daarmee de leerling. De tijd waarin hoofdzakelijk de wiskunde *an sich* als uitgangspunt voor de invulling en uitvoering van het wiskundeonderwijs genomen werd, leek voorbij.

Door deze toenemende aandacht voor de didactiek groeide ook de erkenning voor het belang van ervaringen uit de praktijk van het klaslokaal. In *Euclides* is deze kentering goed waar te nemen aan de hand van de onderwerpen die in de artikelen aan bod kwamen. De praktijk van het wiskunde onderwijzen nam in verhouding tot (de hogere) wiskunde sec een steeds grotere plaats in.⁵ In 1969 werd dit door de redactie zelfs expliciet genoemd in haar voornemen voor het tijdschrift:

Toen de redactie aan de uitgever verzocht *Euclides* een nieuw jasje aan te trekken, was dat niet alleen met het doel dit tijdschrift een meer eigentijds uiterlijk te geven. Het vernieuwde omslag moet ook een symbool zijn voor een verandering van de inhoud. Al dikwijls werd er van verschillende zijden opgemerkt, dat *Euclides* maar weinig waar maakte van de ondertitel op het omslag: Tijdschrift van de didactiek van de wiskunde. Veel van de artikelen waren van vaktechnische aard, interessant, maar niet in de eerste plaats gericht op de didactiek. De redactie wil ernstig proberen daarin verandering te brengen. [...] Het spreekt vanzelf dat de redactie zijn doel slechts kan bereiken in samenwerking met de lezers. Vragen, suggesties, artikelen, lesverslagen, enz. zijn daarom niet alleen van harte welkom, ze zijn een noodzakelijke voorwaarde om van *Euclides* een tijdschrift voor de didactiek van de wiskunde te kunnen maken.⁶

Met de groeiende erkenning voor het belang van praktijkervaringen, zou ook ‘het kijken op de millimeter’ binnen het wiskundeonderwijs meer aandacht krijgen. In eerste instantie gebeurde dit in *Euclides* nog naast de aandacht die er traditiegetrouw was voor de zuiver wiskundige onderwerpen, maar in de jaren zeventig kwam de microdidactiek meer aan bod. Het ‘kijken naar het kind’ won daardoor terrein als hulpmiddel bij het leren (wiskunde) onderwijzen.

Niet alleen was er meer ruimte voor praktijkervaringen door de toegenomen aandacht voor didactiek, omgekeerd werkte dit ook: onderwijspraktijkervaringen

4 Freudenthal, ‘Recent tendencies in the teaching of mathematics’, in: W.E. Lamon, ed., *Learning and the nature of mathematics* (Chicago 1972) 11-18, aldaar 13-14; identiek aan: Freudenthal, ‘Les tendances nouvelles de l’enseignement mathématique’, *Revue de l’enseignement supérieur* 46-47 (1969) 23-29.

5 *Euclides. Maandblad voor de Didactiek van de Wiskunde* 43-50 (1967-1975).

6 G. Krooshof, ‘Euclides. Tijdschrift voor de didactiek van de wiskunde’, *Euclides* 45 (1969) 1.



Groepsfoto van de deelnemers van het colloquium ‘How to teach mathematics so as to be useful’ in Utrecht (1967), met onder andere: Pollak (links achteraan), Wansink (met hand op revers), Monna (rechts van Wansink), Freudenthal (middenvoor met vlinderstrik), Servais (achter Freudenthal), Van der Blij (derde rij, vierde van rechts met gestreepte das), Behnke (tweede rij, links naast Van der Blij) en mevrouw Krygovska (uiterst rechts).

hadden weer hun invloed op de ontwikkeling van de didactiek en de invulling van les en leerplan. Ook kwam er met de invoering van de Mammoetwet meer aandacht voor de wiskunde op andere schoolsoorten dan die van het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs. Zelfs kleuter- en basisschool kwamen aan bod – iets wat tot dan toe ongekend was.

Naast en door deze tendens groeide de wiskundedidactiek als vakdidactiek. Deze ontwikkeling was ook af te leiden uit het groeiende aantal (internationale) congressen en bijeenkomsten met als thema wiskundeonderwijs. Zo was er op initiatief van Freudenthal onder andere het ICM_I-colloquium met als thema ‘How to teach mathematics so as to be useful’, gehouden in Utrecht van 21 tot 25 augustus 1967. Het was een vervolg op het eerder in Utrecht gehouden colloquium ‘Modern curricula in secondary mathematical education’ van 19 tot 23 december 1964. ‘How to teach mathematics so as to be useful’ was het eerste internationale colloquium, waarin voor een internationaal forum de discussie tussen de verschillende opvattingen omtrent de rol van het nut van de wiskunde centraal stond. Het eerste ICM_I-congres – ‘Premier Congrès International de l’Enseignement Mathématique’ – werd ook voorgezeten door Freudenthal. Dit ICM_I-congres (ICME) vond plaats in

Lyon van 24 tot 31 augustus 1969 en kreeg in 1972 in Exeter een vervolg. Het zou daarna elke vier jaar herhaald worden. Daarnaast waren er didactiekbijeenkomsten met fysici zoals die in 1967 in Lausanne, die een voorloper was van het ICMJ-colloquium van later dat jaar. Freudenthal was op de meeste van dergelijke congressen aanwezig. Het ‘Congress on the Integration of Science Teaching’ in 1968 in Varna was in Freudenthals herinnering een van de beste congressen die hij ooit meemaakte: “I think because of its scientifically mixed public – a typical non-nonsense [sic] conference”.⁷

In Nederland zou de oprichting van het IOWO een belangrijke factor in deze ontwikkelingen blijken.⁸ Als instituut was het uniek in zijn soort in Nederland en daarmee een teken van het toenemende belang van vakdidactiek – in ieder geval binnen het vak wiskunde. In het nieuwe didactische klimaat was er blijkbaar ruimte voor een dergelijk initiatief. De oprichting ging organisatorisch bepaald niet van een leien dakje. Het had niet veel gescheeld of de wiskundendidactiek had net als andere vakken moeten wachten op een overkoepelend leerplan-instituut.

Het IOWO was niet alleen een voortvloeisel uit die nieuwe belangstelling voor de wiskundendidactiek, het was er tegelijkertijd een wezenlijk onderdeel van. Bovendien was het een instrument om die nieuwe aandacht te voeden, de vakdidactiek te doen groeien en vorm te geven. De invloed van het daar ontwikkelde wiskundeonderwijs zou ongekend blijken.⁹ Ook – en juist – binnen de werkwijze van het IOWO werd ‘het kijken naar het kind’ het motto.

Waar stond Freudenthal in dit alles? Hoewel bijna pensioengerechtigd, stond hij allesbehalve aan de zijlijn. Naast een met de jaren steeds groter wordende stroom van artikelen en voordrachten over wiskundeonderwijs van zijn hand verscheen in 1973 Freudenthals boek *Mathematics as an educational task*, zowel in het Engels als (tweedelig) in het Duits.¹⁰ Hierin waren bijna al zijn eerder geschreven artikelen in één lijvig boekwerk van bijna 700 pagina’s samengebracht. Het zou niet zozeer als een integraal te lezen boek (ook al was het wel zo opgezet), maar eerder als een belangrijk en indrukwekkend naslagwerk voor wiskundendidactici gaan fungeren. Inhoudelijk voegde het weinig opzienbarend vernieuwende inzichten toe aan Freudenthals al in artikelen en voordrachten uitgedragen gedachtegoed, maar als teken van zijn nu bijna algehele toewijding aan het wiskundeonderwijs en de wiskundendidactiek was het van groot belang.¹¹

7 Freudenthal aan Howson, 1983; RANH, Freudenthal Papers, inv.nr. 1771, 38.

8 Over (de oprichting van) het IOWO, zie paragraaf 9.3.

9 Voor een kijkje in de ‘IOWO-keuken’ zie bijvoorbeeld ook: De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde*; Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs*.

10 Freudenthal, *Mathematics as an educational task* (Dordrecht 1973); Freudenthal, *Mathematik als pädagogische Aufgabe I, II* (Stuttgart 1973).

11 Er waren enkele onderwerpen die (in vergelijking met Freudenthals artikelen) in *Mathematics as an educational task* extra nadruk kregen, zoals de aandacht die hij besteedde aan de geschiedenis van de wiskunde en de appendix die hij wijdde aan kritiek op Piaget. Zie ook paragraaf 9.6.3. In een bespreking van Van Streuns proefschrift *Heuristisch wiskunde-onderwijs* uit 1989 schreef Freudenthal over

Naast deze publicaties was hij ook in het veld actief en overal bij betrokken: van activiteiten op het organisatorische vlak, bijvoorbeeld het oprichten van een internationaal tijdschrift voor wiskundededictiek, tot het observeren van de praktijk in het klaslokaal.¹² Als hoogleraar-directeur van het IOWO profileerde hij zich in Nederland als dé wiskundededicticus. Maar ook internationaal speelde hij een voraanstaande rol binnen de wiskundededictiek. Tegelijkertijd bleef Freudenthal zijn eigen gedachtegoed ontwikkelen, aanscherpen en uitbreiden.

Het ligt voor de hand deze ontwikkeling toe te schrijven aan de invloed van bovenstaande tendensen – en met name aan de invloed van het IOWO-werk. Of was Freudenthal juist de voorloper en katalysator van de nieuwe ontwikkelingen in de wiskundededictiek? Wat was zijn rol in de ontwikkelingen van het IOWO en welke rol speelde het IOWO in de zijne? Hoe ontwikkelde zich zijn gedachtegoed? Hoe profileerde Freudenthal zich in deze jaren in het nationale en internationale veld?

9.2 Educational Studies in Mathematics

Binnen alle nieuwe activiteiten die Freudenthal eind jaren zestig ontplooidde en de onvermoeibare inzet die hij daarbij tentoonspreidde, nam die van de oprichting van het tijdschrift *Educational Studies in Mathematics* een bijzondere plaats in. Er waren namelijk weinig ondernemingen waarbij hij zo duidelijk in zijn eentje de kar trok en initiatief nam. Anders dan bij de totstandkoming van het IOWO het geval zou zijn, was de rol van Freudenthal bij de oprichting van dit tijdschrift niet alleen explicieter, maar ook veel meer een soloactie.

9.2.1 Met frisse tegenzin: de oprichting

De aanleiding tot oprichting was duidelijk. Op het ‘Colloquium on modern curricula in secondary education’, in december 1964 in Utrecht, werd een resolutie aangenomen waarin besloten werd tot de oprichting van een internationaal tijdschrift over wiskundeonderwijs.¹³ In Freudenthals herinnering was het Monna die als secretaris van het colloquium met deze suggestie kwam.¹⁴ Vier maanden later deed Freudenthal een eerste informele poging om tot de vorming van een ‘editorial board’ te komen. Hij stuurde een brief aan een door hem zelf gemaakte selectie uit

zijn eigen *Mathematics as an educational task*: “[*Mathematics as an educational task*] is nauwelijks meer dan een bundeling van artikelen die vanaf het midden van de jaren 50 tot de late 60 zijn verschenen en dus ná 1973 geen verplichte lectuur meer zijn.” Hans Freudenthal, ‘Boekbesprekingen’, *Nederlands tijdschrift voor opvoeding, vorming en onderwijs* 5 (1989) 302-304, aldaar 302.

12 Over het oprichten van het internationale tijdschrift voor wiskundededictiek, zie paragraaf 9.2.

13 Dit colloquium werd georganiseerd in opdracht van ICMJ; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1831.

14 Freudenthal aan Howson, 1983; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 38.

de deelnemerslijst van het colloquium.¹⁵ Allen reageerden positief. Beberman was de enige die aangaf het te druk te hebben om zitting te nemen in de redactie.

Om onduidelijke redenen liet Freudenthal het hierbij. Pas in 1967 deed hij opnieuw moeite om de resolutie uit te voeren. Aanleiding hiervoor was dat hij had vernomen dat de Amerikaanse wiskundige Peter Hilton ook met het idee rondliep een dergelijk tijdschrift op te zetten. Freudenthal stelde voor de krachten te bundelen. Hilton ging hier enthousiast op in, hoewel hij Freudenthals voorstel om samen hoofdredacteur te worden afsloeg.¹⁶ Samen stelden zij een nieuwe lijst met potentiële redactieleden samen.¹⁷ Het belangrijkste criterium daarbij was uit zoveel mogelijk verschillende landen een vertegenwoordiger te benaderen die binnen dat land een vooraanstaande positie binnen het wiskundeonderwijs vervulde. Freudenthal stak echter ook persoonlijke voorkeuren niet onder stoelen of banken:

I did not insert Papy; he is an impossible man to work with; in any case from Belgium Servais is much better, and he is a professeur de lycée.¹⁸

Over de naam van het tijdschrift werden de heren het snel eens. 'Mathematics Education' en dergelijke vond Freudenthal te nietszeggend, bovendien wist hij bijna zeker dat er al periodieken met een dergelijke naam in een taal bestonden.¹⁹ Hilton stelde 'Educational Studies in Mathematics' voor.²⁰

In zijn brief van 1 november 1967 schreef Hilton over de plannen die er zouden zijn voor de oprichting van nog twee tijdschriften over wiskundeonderwijs. 'The Chicago Center for International Mathematical Education Information' zou hier-

- 15 Deze brief ging op 13 april 1965 uit naar de volgende personen: prof. M. Beberman (Verenigde Staten), E. Castelnuovo (Italië), L. Félix (Frankrijk), dr. A.Z. Krygovska (Polen), prof. W. Servais (België), prof. P. Suppes (Verenigde Staten), prof. B. Thwaites (Groot-Brittannië) en prof. A. Wittenberg (Canada); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1785.
- 16 Freudenthal aan Hilton, 10 oktober 1976; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1786.
- 17 Correspondentie tussen Hilton en Freudenthal, oktober-december 1967; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1786. Op Freudenthals suggestie werden toegevoegd: dr. A. Engel (Duitsland), prof. A.M. Gleason (Verenigde Staten), prof. h.b. Griffiths (Groot-Brittannië), C. Hope (Groot-Brittannië), dr. H.O. Pollak (Verenigde Staten), prof. A. Revuz (Frankrijk), prof. S. Sobolev (Sovjet-Unie), prof. dr. H.G. Steiner (West-Duitsland) en prof. I.M. Yaglom (Sovjet-Unie). Hilton stelde de volgende personen voor: dr. D.K. Abbiw-Jackson (Ghana), prof. E.G. Begle (Verenigde Staten), prof. G. Choquet (Frankrijk), prof. E.B. Dynkin (Sovjet-Unie) en prof. W.T. Martin (Verenigde Staten).
- 18 Freudenthal aan Hilton, 20 oktober 1967; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1786. In een discussie op een conferentie van Belgische onderwijzers in 1961 was Freudenthal zodanig door Papy beleedigd dat hij hiervoor door de organisatie achteraf in een brief verontschuldiging aangeboden kreeg. Papy zou volgens Freudenthal geroepen hebben: "Even Professor Freudenthal [volgens Freudenthal "– with the undertone of that gaga –"] confesses to teach linear algebra". Freudenthal had zo'n hekel aan Papy, dat hij pas na Papy's aftreden als CIEAEM-voorzitter in 1970 de CIEAEM-bijeenkomsten ging bijwonen. Later zou dit nog enigszins bijtrekken. Dat Freudenthals relatie met Servais – ondanks enorme meningsverschillen aangaande wiskundeonderwijs – aanzienlijk beter was bleek wel uit zijn uitspraak in diezelfde brief aan Howson: "Never in my life, with people I met, was friendship and profound disagreement more closely knitted than in my relation with Servais"; Freudenthal aan Howson, 1983; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 38.
- 19 Freudenthal aan Hilton, 20 okt 1967; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1786.
- 20 Hilton aan Freudenthal, 1 november 1967; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1786.

voor niet alleen hele concrete ideeën hebben, maar ook het plan om Freudenthal voor het editorial board van een van de twee te vragen.²¹ Freudenthal zag hierin geen probleem. Volgens hem was er zeker ruimte voor drie of meer periodieken. Was hij echter eerder van deze plannen op de hoogte geweest, had hij waarschijnlijk niet de organisatie van een nieuw tijdschrift op zich genomen:

Nevertheless I must say if I had known about the Chicago projects, I would not have started. I did it because no other seemed to do [sic]. It is with reluctance that at my age I take new charges on my shoulders. However, now I cannot withdraw.²²

Freudenthal zag op zich geen bezwaar in overleg met het Centrum in Chicago, maar wilde er geen tijd mee verdoen. Er was juist nu een belangrijke aanleiding om werk van een tijdschrift over wiskundendidactiek te maken. In de manuscripten van het colloquium in Utrecht ‘How to teach mathematics so as to be useful’ van eerder dat jaar had hij een naar eigen zeggen “excellent collection of studies”, die hij graag integraal gepubliceerd zag. Hij wilde hier niet te lang mee wachten:

not to be the first on the market (this would be ridiculous), but because I have good manuscripts and can show people that good manuscripts can be published.²³

Dit gebeurde dan ook. Uitgegeven door Reidel Publishing Company verschenen alle voordrachten van het colloquium, inclusief de paneldiscussie, in het eerste nummer van *Educational Studies in Mathematics (ESM)*.²⁴ Freudenthal ontving veel felicitatiebrieven naar aanleiding van het verschijnen van zijn tijdschrift. De enige openlijke kritiek was die op de relatief hoge prijs van het tijdschrift.²⁵ In *Euclides* werd de komst van *ESM* beschreven als een zeer welkome en noodzakelijke aanvulling op het toenmalige tijdschriftenaanbod, want:

In de huidige periode van snelle evolutie op het gebied van modernisering van het wiskundeonderwijs in alle landen ter wereld is er aan zo’n tijdschrift stellig behoefte.²⁶

Dat Freudenthal editor van het tijdschrift was, was volgens de recensent niet verbazingwekkend gezien zijn internationale activiteiten. Door het internationale karakter vormde *ESM* ook geen directe bedreiging voor *Euclides*. Anders lag dat in het geval van *l’Enseignement Mathématique*, het officiële tijdschrift van de ICMI. In oktober 1968 sprak Freudenthal met Cartan over de positie van beide tijdschrif-

21 Het zou hier gaan om een ‘Journal of International Mathematical Education’, het andere tijdschrift was ‘Mathematical Education Abstracts’; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1786.

22 Brief aan Hilton, 9 november 1967; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1786.

23 Ibid.

24 *Educational Studies in Mathematics* 1 (1968) 1-243. De ‘panel discussion’ was een letterlijke weergave van de discussie over het doel van het wiskundeonderwijs van het panel bestaande uit Behnke, Hammersley, Krygovska, Pollak, Revuz, Servais en Sobolev, onder leiding van Freudenthal.

25 Correspondentie met D. Reidel Publishing Company, de uitgever van *Educational Studies in Mathematics*, recensie in: *The New Era. The World Education Fellowship Journal* 51 (1970), recensie in: *Euclides* 45 (1969); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1789, 1790.

26 Boekbespreking door Joh.H. Wansink, *Euclides* 45 (1969) 38-39, aldaar 38.

ten, waaruit de concurrentie ter sprake kwam die vanuit ICMI wel degelijk gevoeld werd.

Henri Cartan was lid van de Bourbaki-groep en stond ook de introductie van moderne wiskunde in het onderwijs voor. Freudenthal was lange tijd goed bevriend met Cartan, tot een heftig meningsverschil naar aanleiding van Freudenthals lezing ‘Enseignement des mathématique modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ in 1961. Freudenthal schreef hierover:

In Bologna [...] I seriously clashed with H. Cartan, who had been my friend for many years. These people could not understand that a mathematician of my rank did not hail Bourbaki at school but saw deep problems in such silly things as word problems in arithmetic, though he could not yet be excused by senility.²⁷

Ook in de jaren erna zouden Cartan, als prominente figuur binnen de IMU, en Freudenthal, als ICMI-lid, regelmatig lijnrecht tegenoverelkaar komen te staan. Aan deze animositeit lag achteraf gezien ook nog het volgende incident ten grondslag volgens Freudenthal:

At some opportunity I might unintentionally have insulted Cartan. On 5 September 1966 I asked him an explanation about a proof he had given (or sketched) of a so-called Weil Statement (on invariants of Lie groups). I should have known, though I can swear I didn't, that everybody knew the proof was wrong. Cartan never answered that letter. And that was that.²⁸

Freudenthal schreef achteraf over het gesprek met Cartan over *ESM*:

He complained about *ESM*, which he feared would be a deadly competitor to *L'Enseignement Mathématique*. In order to prove the excellence of the latter, he showed me an issue with, indeed, excellent survey papers by excellent mathematicians, though none about education. If I had shown him an issue of *ESM*, he would probably only have noticed the minor importance of the authors in mathematics. He was unable to grasp the difference.²⁹

Deze anekdote toont duidelijk aan op welke manier *ESM* een unieke functie vervulde.

9.2.2 Freudenthal als bewaker van het niveau

Het streven van het tijdschrift was het publiceren van “high level material on mathematical education of more than national interest”.³⁰ Anders dan bijvoorbeeld het nieuwe voornemen van *Euclides* om een (meer laagdrempelig) tijdschrift voor wiskundeonderwijs te zijn, was de inzet bij *ESM* hoger. Het doel was een forum te vor-

27 Freudenthal aan Howson, 1983; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 38.

28 Ibid.

29 Ibid.

30 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1790.

men voor publicatie en uitwisseling van *onderzoek* op het gebied van wiskundeonderwijs. Bovendien moesten de bijdragen van internationale waarde zijn.

In zijn openingstoespraak van het colloquium ‘How to teach mathematics so as to be useful’ benadrukte Freudenthal het belang van uitwisseling van ervaringen op internationaal niveau met een reeks retorisch bedoelde vragen:

Is the variety of national educational philosophies really a drawback to international talks on mathematical education or should I say that there is no better opportunity to test them than to have them bump against each other? Are not we too often and too readily inclined, when reading or hearing about the educational experiences in another country, under another educational system, to sigh: it is just a pity, but this does not apply to our situation? I would say whenever this happens, then something is wrong either in the one system or in the other, or, most likely, in both.³¹

Deze openingstoespraak werd min of meer als een redactioneel statement afgedrukt als eerste artikel in *ESM*.

Het internationale karakter kwam in het eerste nummer redelijk uit de verf met vooral Amerikaanse en West-Europese bijdragen.³² Freudenthal nam in zijn eentje de verantwoordelijkheid voor het niveau van de artikelen op zich. Vaak nodigde hij collega's uit iets voor *ESM* te schrijven, soms naar aanleiding van iets dat hij eerder van ze las, soms naar aanleiding van een voordracht.³³ Ook kreeg hij geregeld spontaan artikelen ter publicatie aangeboden. Veel artikelen probeerde hij nog te laten herschrijven, nog vaker wees hij ze af als ze niet aan zijn standaard en criteria voldeden. In zijn afwijzingen gebruikte hij vaak de volgende passage:

Almost every day the editor receives papers on mathematical subjects which show no or only weak relations to education. Such papers cannot be considered for publication. In particular, “educational” is not meant to include all elementary mathematics, nor are subjects from the history of mathematics to be considered as educational as such. Likewise mathematical studies in education (such as discussing mathematical techniques of processing educational data) are no subject of *Educational Studies in Mathematics*.³⁴

Wanneer een artikel gebaseerd was op experimenten eiste Freudenthal vóór eventuele publicatie inzage in het volledige materiaal. Volgens eigen zeggen was dit noodzakelijk en effectief gebleken. Het leek erop dat Freudenthal in zijn functie als editor een ‘one-man-show’ met *ESM* opvoerde. Toch deed hij zijn best niet alleen

31 Freudenthal, ‘Why to teach mathematics so as to be useful’, *Educational Studies in Mathematics* 1 (1968) 3-8, aldaar 4.

32 Met name Frankrijk en de Verenigde Staten waren goed vertegenwoordigd. Een uitzondering was een Poolse bijdrage van mevrouw Krygovska. In latere nummers verschenen ook steeds vaker Russische artikelen; *Educational Studies in Mathematics* 1 (1968).

33 Freudenthal schreef met een dergelijk verzoek onder andere aan Van Hiele (14 augustus 1968), Van Albada (15 augustus 1968), Revuz (29 oktober 1968), Van Dormolen (11 november 1968) en Vredenduin (11 november 1968); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 1790 – 1794.

34 *ESM*-correspondentie; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1790.

zijn eigen mening als maatstaf te nemen. Aan Schoenfeld, van wie Freudenthal een artikel had afgewezen, schreef hij:

Finally, what matters is not writing a paper “mere consisting with my taste”. A large number of papers published in *ESM* were not my taste at all. I had a lot of papers published which I did not like. There are other tastes than mine and I try to respect them. It is the same as in mathematics itself. There are subjects and methods I never liked but I would not daresay they are bad mathematics. Education is different. There is certainly no unanimity about what is heuristics, problem solving, good teaching, and so on, but I am convinced that in principle you are closer to my interpretation than you show in “Heuristics Do make a difference”, which I consider a mistake.³⁵

Ondanks zijn altijd kritische houding was Freudenthal nooit tevreden over het niveau van de artikelen in *ESM*. In 1977 schreef hij in een brief aan Pollak:

I can tell you that the majority of the papers submitted never reach the point to be announced in the periodical circulars. Most of the papers are nonsense or hoax. Some people think that bad mathematics can be published as education. (Even good mathematics is not yet education.) The greatest danger is the so-called empirical work, processed with statistical nonsense methods. Even, in spite of my criticism the level of *ESM* is still far below what I would like it to be.³⁶

Volgens Freudenthal accepteerden andere onderwijsbladen een op de tien artikelen. Freudenthal accepteerde – meestal na intensief herschrijven – ongeveer een op de drie artikelen. Hij had graag meer geweigerd om het niveau nog verder op te krikken, maar het grote gebrek aan aanbod maakte dat onmogelijk.

In 1977 ging Freudenthal actief op zoek naar een opvolger voor de positie van hoofdredacteur “like a father who looks for somebody I can trust, if I am not able to care for the journal”.³⁷ Als eerste vroeg hij Pollak, volgens Freudenthal het enige redactielid dat zich oprecht geïnteresseerd had getoond.³⁸ In een brief zette hij de vereisten voor die positie uiteen:

As long as I can, I will work for *ESM* but I feel I have to look for a successor who will and can do this work. I wonder whether you feel you can or know somebody who could. The first demand is criticism. At this point I believe, I can trust you. The second is some universality with respect to mathematical education (from k[indergarten] to college), which is more difficult, the third some acquaintance with general education and its jargon. It is difficult to combine this.³⁹

35 Freudenthal aan Alan Schoenfeld, 22 augustus 1978; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1806.

36 Freudenthal aan Pollak, 1 april 1977; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1807.

37 Freudenthal aan Fletcher, 5 november 1977; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1807.

38 Pollak had volgens Freudenthal als enige redactielid bijna alle manuscripten op zijn gebied opgevraagd ter goedkeuring; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1807.

39 Freudenthal aan Pollak, 1 april 1977; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1807.

Toen Pollak tot twee keer toe niet antwoordde, nam Freudenthal aan dat hij zichzelf niet capabel genoeg achtte. Enkele maanden later vroeg hij Fletcher, die weigerde.⁴⁰ Uiteindelijk kwam Freudenthal bij Alan J. Bishop uit, Brits wiskundeonderwijskundige in Cambridge, die accepteerde.⁴¹ Freudenthal gaf hem nog de volgende wijze woorden mee:

The third: do not trust the members of the Board. Except one they have never been active. [...] I will support him [the new Chief] as long as I can, even without mentioning my name on the cover, say as a secret referee.⁴²

Helemaal loslaten wilde Freudenthal *ESM* dus niet. Het tijdschrift was en bleef op een bepaalde manier een beetje zijn ‘kindje’, waar hij zich verantwoordelijk voor bleef voelen. Met het – in zijn ogen, en vaker dan hem lief was – gebrekkige materiaal voor handen zette hij zich altijd tot het uiterste in om ervan te maken wat er van te maken viel. Het tijdschrift zou (met name in de jaren zeventig) behoorlijk aanzien genieten. Artikelen van belangrijke en bekende (wiskunde)didactici als Begle, Z.P. Dienes, F. en G. Papy, Revuz, Servais, Stone en Behnke vulden de pagina’s.⁴³

Ondanks zijn sterke persoonlijke binding wist Freudenthal de afstand te bewaren om een neutraal tijdschrift neer te zetten. Ook al was de band natuurlijk sterk en geregeld aanwezig in de vorm van publicaties, *ESM* verwerd bijvoorbeeld nooit tot een verkapt *IOWO*-promotiemiddel. Zoals op zoveel vlakken in Freudenthals professionele leven gold ook hier: liever een tijdschrift publiceren dat niet altijd helemaal aan zijn voorkeur en niveau-eisen voldeed, dan zonder tijdschrift – en invloed – langs de zijlijn staan.

9.3 Het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs

9.3.1 Van CMLW naar *IOWO*

Ook binnen het werk van de CMLW hield Freudenthal zijn credo ‘meedoen om bij te sturen’ altijd hoog. Na het grote succes van de cursussen moderne wiskunde voor leraren was het al in 1964 duidelijk dat het werk van de CMLW het beste door een eigen instituut uitgevoerd zou kunnen worden. In 1967 werd wiskundeleraar en kweekschool docent Edu Wijdeveld als eerste wetenschappelijk medewerker van de CMLW aangesteld, al gauw gevolgd door anderen, onder wie wiskundeleraar Adri Treffers in 1969.⁴⁴ De belangrijkste argumenten voor het aanvragen van een instituut waren toen vooral het belang van permanente leerplanontwikkeling, heroriën-

40 Freudenthal aan Fletcher, 5 november 1977; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1807.

41 Bishop zou in 1991 de ‘preface’ voor Freudenthals postuum gepubliceerde boek schrijven; Freudenthal, *Revisiting mathematics education. China lectures.*

42 Freudenthal aan Bishop, 25 november 1977; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1807.

43 *Educational Studies in Mathematics* 1-6 (1968-1975).

44 E. Wijdeveld, ‘Omzien in verwondering’, *Euclides* (2003) 218-225.

tering en begeleiding van leraren, maar ook de vestiging van een documentatie- en informatiecentrum voor wiskundeonderwijs. Een eerste aanvraag voor een eigen instituut bij het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen werd (pas in 1968!) afgewezen met een verwijzing naar de op handen zijnde plannen voor landelijke organisatie voor leerplanontwikkeling. Hierin zou de CMLW te zijner tijd moeten opgaan.⁴⁵

Na de invoering van het nieuwe leerplan in 1968 werd de noodzaak van institutionalisering nog duidelijker gevoeld. Al snel bleek namelijk dat de heroriënteringscursussen voor leraren geen afdoende voorbereiding voor de praktijk van het klaslokaal vormden. In de jaren erna werden door de leraren steeds nadrukkelijker didactische handvatten voor de behandeling van de nieuwe stof gemist. Met ingang van het cursusjaar 1968-1969 werd er in de bijscholingscursussen naast de wetenschappelijk wiskundige voordrachten ook in groepsverband over didactische vraagstukken gediscussieerd, maar ook dit bleek niet afdoende.⁴⁶

Het werk dat verricht moest worden om de taak die de CMLW op zich had genomen – de modernisering van het totale wiskundeonderwijs – daadwerkelijk succesvol te maken, begon de CMLW langzamerhand boven het hoofd te groeien. Dit was helemaal het geval toen op 30 mei 1968 deze taken ook nog eens uitgebreid werden met de ontwikkeling van wiskunde in het basisonderwijs (WISKOBAS) en het technisch onderwijs.⁴⁷

By 1970 the activity of our Commission, carried forth by a small number of fulltime and a few hundreds of part time collaborators and an administrative office, had developed into a chaotic many millions business.⁴⁸

De noodzaak van een instituut om de hiervoor aangestelde medewerkers en voorzieningen onderdak te geven werd steeds urgenter. Als tussenoplossing van het Ministerie werden de medewerkers van de CMLW in dienst van de Pedagogische Centra aangesteld, en vervolgens bij CMLW gedetacheerd.⁴⁹ De CMLW nam hier geen genoegen mee. Overigens gingen andere moderniseringscommissies (zoals de Commissie Modernisering Moderne Talen en de Commissie Modernisering Klassieke Talen) wel met deze constructie akkoord.⁵⁰

De in Utrecht gezetelde CMLW had op dat moment naast een dagelijks bestuur maar liefst elf subcommissies. Ook werd de noodzaak van een hoogleraar-directeur

45 De Commissie Organisatie Leerplan Ontwikkeling (COLO) werd een jaar later ingesteld.

46 CMLW-map, 1968-1969; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 418, 1725.

47 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1725; Wijdeveld e.a., ‘Van CMLW tot Freudenthal Instituut’, in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs* 355-374, aldaar 359.

48 Freudenthal in de lezing ‘The Institute on Developing mathematical Education (IOWO) in the Netherlands’, Argentinië 1972; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 571.

49 De drie landelijke Pedagogische Centra zijn het APS (Algemeen Pedagogisch Studiecentrum), CPS (Centraal Pedagogisch Studiecentrum) en het KPC (Katholiek Pedagogisch Centrum). Zij ondersteunen het onderwijs, adviseren scholen en overheid en organiseren cursussen, conferenties en studiedagen.

50 Notulen plenaire vergadering van de CMLW, 6 juni 1969; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1725.

gevoeld, zo bleek uit de notulen van de vergadering van het dagelijks bestuur in september 1969:

Na enige discussie is men het erover eens, dat het “bedrijf”, zoals dat binnen de CMLW is uitgegroeid, gecoördineerd zou moeten worden door een directeur op het niveau van een hoogleraar (in een vrijwel volledige dagbetrokking). Het lijkt echter vrijwel uitgesloten op dit moment een dergelijke figuur aan te trekken.⁵¹

In diezelfde maand werd Freudenthal officieel door de staatssecretaris J.H. Grosheide van het Ministerie van O&W tot voorzitter van de CMLW benoemd.

Wanneer de gelegenheid zich voordeed, hamerde Freudenthal ook persoonlijk op het belang van institutionalisering van de CMLW. Zo kaartte hij een maand later het belang van de oprichting van een instituut voor heroriëntering van wiskunde-docenten aan op een persbijeenkomst in de Uithof in Utrecht over de activiteiten van de CMLW:

Toch staan we voor problemen. We vragen ons af hoe lang we nog zo door kunnen gaan, met massacursussen een paar keer per jaar, met telkens een beroep doen op honderden die er naast hun gewone werk aan medewerken. We hebben enkele jaren geleden een plan ontworpen voor een instituut voor de heroriëntering van wiskunde-leerkrachten, dat continu het hele jaar doordraait en waar kleine groepen leraren elk een week heroriënteringsonderwijs ontvangen en dat tevens een centrum voor onderwijskundige informatie zou zijn. Zoiets bestaat op grote schaal in Denemarken en in Hongarije en op kleinere schaal in Westduitsland. Er is tot nu toe bij ons nog niets van gekomen, maar we geven de moed niet op. Het is een dringende noodzaak en zal komen omdat het er moet komen.⁵²

In december 1969 stelden Monna, Wijdeveld en Freudenthal een ontwerp op voor een instituut voor wiskundeonderwijs. Naast de hierboven door Freudenthal genoemde herscholing, was het vooral het project WISKOBAS dat – door een brede opzet van het in 1968 ontworpen 10-jaren plan – zonder instituut en geld om mensen in dienst te nemen als onuitvoerbaar vast dreigde te lopen.⁵³

In eerste instantie was de weerstand van het Ministerie te wijten aan de angst ook dergelijke verzoeken van andere vakgebieden te moeten inwilligen. Later zag men de voorbeeldfunctie van de activiteiten op het gebied van het wiskundeonderwijs wel in, maar wachtte men liever op de instelling van een overkoepelende organisatie voor alle vakken. Freudenthal schreef hierover:

51 Notulen vergadering 10 september 1969; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 418, 1725.

52 Freudenthal op een persconferentie van de CMLW, 22 oktober 1969. In een persconferentie van 12 november 1975 noemde hij ook de leerplanontwikkelaars in Engeland en Italië als voorbeelden van ontwikkelaars van wiskundeonderwijs “vanuit en vlakbij de realiteit”; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 603, 1725.

53 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 603, 1725.

Dem Schnecken tempo jener gründlichen Plänenschmiede konnten wir uns aber nicht anpassen; wir waren ja viel weiter als die anderen Fächer. Mitte 1970 kam es zu einem Bruch met dem Ministerium, der schon lange gedroht hatte.⁵⁴

Het probleem rond WISKOBAS was volgens de minister voornamelijk een financiële: de salarissen waren te hoog. Inwilliging van de eis tot institutionalisering zou “de salarisverhoudingen tussen medewerkers van pedagogische centra, wetenschappelijke medewerkers van de universiteiten enz. volledig verstoren”.⁵⁵ In 1970 had de CMLW inmiddels een budget van vierenhalf miljoen.⁵⁶

Na lang touwtrekken met het Ministerie werd in januari 1971 door staatssecretaris Grosheide uiteindelijk het gewenste instituut ingesteld: het Instituut voor Ontwikkeling van Wiskundeonderwijs (IOWO), als zelfstandige afdeling voor wiskundeonderwijs aan de Rijksuniversiteit Utrecht.⁵⁷ Freudenthal werd hoogleraar-directeur, Wijdeveld was algemeen directeur. Het IOWO kreeg een formatie van 37 mensen (waaronder 21 wetenschappelijk medewerkers).⁵⁸ Het IOWO had toen vijf afdelingen, te weten: AVO, HBO & informatica, LBO, lagere school en speciale onderwerpen.⁵⁹

9.3.2 Freudenthal en het IOWO

Het IOWO wordt tot op de dag van vandaag sterk geassocieerd met de persoon Freudenthal.⁶⁰ Officieel was de instelling van het IOWO de inwilliging van de vraag van de CMLW naar een instituut, oorspronkelijk voornamelijk bedoeld voor de coördinatie en uitvoering van de heroriënteringscursussen. Bij het afscheid van Freudenthal als directeur van het IOWO refereerde staatssecretaris Grosheide als volgt aan het instituut:

Als vervolg op het voortreffelijke werk dat de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde heeft verricht, is het instituut onder leiding van Prof. Freudenthal in belangrijke mate verantwoordelijk voor dit succes. Dat een hoogleraar van zijn formaat en standing zich aan dit werk heeft willen wijden heeft denk ik in belangrijke mate tot

54 Freudenthal, ‘Strategie der Unterrichtsenerueung in der Mathematik’, *Beiträge zum Mathematikunterricht* (1972) 41-45, aldaar 42.

55 Correspondentie CMLW, 18 september 1970; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1726.

56 Ter vergelijking: bij aanvang in 1961 bedroeg de begroting vijf ton; Wijdeveld e.a., ‘Van CMLW tot Freudenthal Instituut’, in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs 355-374*, aldaar 359.

57 Een uitgebreidere beschrijving van de totstandkoming van het IOWO is te vinden in: Wijdeveld e.a., ‘Van CMLW tot Freudenthal Instituut’, in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs 355-374*.

58 R.A. de Jong, *Wiskobas in Methoden* (Utrecht 1986) 11.

59 Wijdeveld hanteert een andere indeling, waarbij drie inhoudelijke afdelingen onderscheiden worden: WISKOBAS, WISKIVON (voor VWO, HAVO, MAVO, LBO, MBO, HBO en speciale onderwerpen) en de afdeling algemene kadervorming en leerplanontwikkeling; Wijdeveld e.a., ‘Van CMLW tot Freudenthal Instituut’, in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs 355-374*, aldaar 360; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 571.

60 Deze associatie werd natuurlijk versterkt doordat het instituut – na opheffing in 1981 – via de Utrechtse universitaire vakgroep ‘Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijscomputercentrum’ (ow&oc) in 1991 over ging in het ‘Freudenthal Instituut’.

Freudenthal op het IOWO
(1975).



de goede resultaten bijgedragen. Het lijkt mij meer dan billijk bij het afscheid van Prof. Freudenthal dit nog eens uitdrukkelijk te vermelden.⁶¹

Als instituut van de CMLW met hoogleraar Freudenthal als ‘de man achter het instituut’, zo werd het IOWO gezien. Toch is het te zwart-wit om te stellen dat het nadrukkelijk *Freudenthals* instituut was. Freudenthal had zich waar hij maar kon uitgesproken en ingezet voor de instelling van een instituut, maar een meer concrete eerste invulling van dat instituut kwam niet direct van zijn hand.

Volgens een Voorstel-discussienota voor het project ‘Modernisering wiskundeonderwijs in de basisschool’ van de CMLW ontstond WISKOBAS – zij het op persoonlijk initiatief van een drietal mensen medio 1967 – officieel als werkgroep-initiatief van de CMLW “om de mogelijkheden te onderzoeken een project in het leven te roepen tot modernisering van het basiswiskundeonderwijs in Nederland”.⁶² Freudenthal schreef hierover in 1972:

61 Mr.J.H. Grosheide ter gelegenheid van het afscheid van Freudenthal als directeur van het IOWO op 14 augustus 1976; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 420.

62 Voorstel discussienota; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1738.

1968 zog eine Gruppe junge, der Kommission mehr oder weniger verbunderener Mathematikpädagogen den Grundschulunterricht ins Blickfeld.⁶³

Deze commissie van initiatiefnemers bestond uit Brandenburg, Wijdeveld en F. Goffree, leraar wiskunde- en rekendidactiek aan de Rijkskweekschool te Hengelo, waarbij zich in maart ook nog wiskundeleraar B. van der Krogt voegde.⁶⁴ De nota van deze commissie werd door het IOWO overgenomen en in 1968 werd WISKOBAS – nu ook uitgebreid met Treffers – officieel een subcommissie van de CMLW.

Het was de werkwijze zoals die binnen en door het WISKOBAS-project gebruikt werd die kenmerkend zou worden voor het IOWO. In het IOWO-jaarverslag van 1971/1972 stond er over het effect van die werkwijze het volgende geschreven:

... het ziet er naar uit dat het IOWO bezig is een brug te slaan tussen het abstracte nivo [sic] van de leerplantheorie en het concrete [sic] nivo van de onderwijspraktijk. Enerzijds de fundamentele doordenking van onze eigen doelstelling, annex leerplantheorie, anderzijds de konkretisering van een ontwerp-onderzoek en -overdrachtsmodel, wijzen duidelijk in die richting.⁶⁵

Waar bestond die werkwijze uit? Het basisprincipe was om de onderwijsdoelen en leerplannen niet bij voorbaat vanuit het instituut vast te leggen. In nauwe samenwerking met het veld werd doelbewust een traject doorlopen waarbij een continue wisselwerking in stand werd gehouden met alle betrokkenen van het basisonderwijs: leerlingen van het basisonderwijs, hun onderwijzers en leerlingen en leraren van de Pedagogische Academies.

Es ist, wenigstens auf kurze Sicht, eine Strategie enger Verknüpfung von Lehrstoffentwicklung und Fortbildung, und zwar gleichzeitig auf allen Niveaus: des Schülers, Grundschullehrers und derjenigen, die die Grundschullehrer ausbilden, fortbilden und begleiten sollen. Um auszuloten, was an Erneuerung möglich sei, und wie es zu geschehen habe, ist das unserer Meinung nach unumgänglich.⁶⁶

Dat het hierbij eerder ging om de achterliggende filosofie en de werkwijze bij de totstandkoming van wiskundeonderwijs, -didactiek en -leerplannen, en niet zozeer om de concrete invulling ervan, benadrukte Freudenthal in een lezing in 1975:

Een schoolwerkplan, zoals WISKOBAS het nu verstaat, moet vrij gedetailleerd ingevuld zijn, ingevuld met voorbeelden kwa [sic] *leerstof én methode* [sic]. Gedetailleerd ingevuld – ja, maar niet om gedetailleerd te worden nagevolgd. De details van de invulling dienen niet om de gebruiker aan banden te leggen, maar om hem iets van de geest te laten proeven die de samenstellers bezielde. Het goede voorbeeld wordt ontkracht als

63 Freudenthal, ‘Strategie der Unterrichtserneuerung in der Mathematik’, *Beiträge zum Mathematikunterricht* (1972) 41-45, aldaar 42.

64 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1738.

65 Jaarverslag IOWO 1971/1972; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 418.

66 Freudenthal, ‘Strategie der Unterrichtserneuerung in der Mathematik’, *Beiträge zum Mathematikunterricht* (1972) 41-45, aldaar 44; RANH, Freudenthal Papers, inv.nr. 575. Een vergelijkbare tekst gebruikte hij onder meer in zijn voordracht: ‘Leerplanontwikkeling in de wiskunde’ van 21 september 1973.

het slaafs wordt nagebootst; in de geschiedenis van onderwijsvernieuwing is dat[:] telkens uit een ruim hart vrijheid van interpretatie toestaan; sterker, deze vrijheid moet in het goede voorbeeld zijn ingebouwd.⁶⁷

Zeldzaam waren Freudenthals uitlatingen over de te volgen koers of werkwijze van het IOWO. Eén van de weinige keren dat Freudenthal dit toch deed, was in het volgende handgeschreven briefje. Dit stukje was waarschijnlijk een reactie op een stuk van de IOWO-medewerker G. Schoemaker, directeur van de IOWO-werkgroep WISKIVON (wiskunde in voortgezet onderwijs), en slechts voor intern gebruik bedoeld:

Wat hier gewoon is wordt ten onrechte als algemeen bekend ondersteld. Na tegenwoordige toestand en opdracht allereerst uiteenzetten:

Principes van te creëren onderwijs

- wiskunde vanuit en binnen de realiteit, derhalve in
- context
- eigen activiteit van de leerling, anders dan naïep- en invuloefeningen, wél:
- mathematiseren, derhalve
- rijke context en
- reflexie, vergemakkelijkt door
- interactief onderwijs, met nadruk op interactie van leerlingen, derhalve
- werken in kleine groepen
- homogeen – heterogeen? voor- en nadelen

Dit is maar een losse aanwijzing.

Ontwikkelingsproces

Pas daarna behandelen

- nadruk op ontwikkelingsonderzoek
- [...] feedback ontwikkeling onderwijs door
- reflexie⁶⁸

Deze tekst was niet meer dan het op schrift stellen van wat binnen het IOWO al expliciet gemaakt was, en niet een door Freudenthal persoonlijk verzonden actieplan. Dit was dan ook tekenend voor de sfeer en werkwijze binnen het IOWO. Geen van bovenaf opgelegd stappenplan, maar een zich al doende uittekenende ontwikkelingsstrategie, zoals dat in die jaren vaker ging.

De ontwerpen die met deze ‘democratische’ leerplanontwikkelingsprocedure ontstonden, hadden een traject doorlopen dat begon met de heroriëntering van de onderwijzers met stukjes leerstof. Het heroriënteringsmateriaal dat hieruit ontstond werd weer op grotere schaal aan onderwijzers én hun leerlingen beproefd – de zogenaamde veldverkenning. Deze verkenningsfase werd door WISKOBAS pas in 1975 afgesloten met de presentatie van een ontwerp leerplan, waarin visie, didactische

67 Freudenthal, ‘Stenen voor brood’ of ‘door een rijstebrijberg naar luilekkerland’, in: *Wiskobasbulletin* 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1371.

68 Handgeschreven briefje door Freudenthal aan de IOWO-stafleden, ongedateerd; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 404.



Tekst van Freudenthal over
de werkwijze binnen
WISKOBAS en WISKIVON (jaren
zeventig).

aanpak en materiaal werd gepresenteerd als eerste stap op weg naar een nieuw rekenonderwijs.

Freudenthal kon zich uitstekend in deze 'democratische' werkwijze vinden. Met zijn weinig behoudende instelling paste hij in het algemeen dan ook goed in de democratiserende tendensen zoals die eind jaren zestig (ook binnen de universiteit) opgeld deden.⁶⁹ Daarnaast had hij grote bewondering en respect voor wat de (jonge!) praktijkmensen van de WISKOBAS-werkgroep durfden aan te pakken.⁷⁰

Niet alleen de totstandkoming van de projecten en de werkwijze binnen het IOWO pasten in Freudenthals straatje, ook inhoudelijk kon hij zich er goed in vinden. In een voordracht in 1973 over leerplanontwikkeling in de wiskunde verwoordde hij het als volgt:

In de afdeling WISKOBAS is een aanzet tot een integrale benadering wat betreft kleuteren basisonderwijs. [...] Onder Moderne Wiskunde verstaat men hier niet, zoals veelal in 't buitenland, zogenaamd moderne onderwerpen zoals verzamelingenleer en pro-

69 Vergelijk ook zijn houding ten aanzien van de studentenrevolutie, zoals beschreven in paragraaf 3.5.

70 Mondelinge mededeling van A. Treffers, 22 april 1999.

positiologica, waarvan zin en bedoeling nooit duidelijk zijn, maar het inzichtelijk werkzaam zijn en het bewust mathematisch structureren van de realiteit.⁷¹

Het uitgangspunt waarbij zo veel mogelijk de nodige tijd en ruimte werd genomen voor leerplanvernieuwing verschilde natuurlijk hemelsbreed met die van bijvoorbeeld een commissie als de CMLW – nog geen acht jaar eerder – toen in enkele luttele jaren een compleet leerplan voor heel het middelbare onderwijs ontworpen en gepresenteerd werd. Freudenthal zei hierover in 1974:

Tegenover een reglementerende leerplanontwikkeling van achter het bureau hebben we voor de democratische participatie van het veld gekozen. In alle bescheidenheid mag ik zeggen dat dit instituut internationaal een reputatie geniet om trots op te zijn.⁷²

Ook de vergelijking van het IOWO met de Freudenthal ooit zo dierbare Wiskunde Werkgroep ging wat hem betrof mank. In een brief aan Van Hiele schreef hij over een door Van Hiele gesteunde poging midden jaren zeventig om de werkgroep nieuw leven in te blazen:

Wat ik ook in de Werkgroep heb geleerd (in mijn boek heb ik ervan getuigd) de Werkgroep was voor mij een gepasseerd stadium – ik deed niet meer één keer per maand aan wiskunde didactiek, maar dagelijks. In het begin van het IOWO hebben we nog een wekelijks colloquium op 't IOWO met buitenstaanders geprobeerd, maar dat was geen succes.⁷³

In al zijn voordrachten en artikelen sprak Freudenthal wanneer hij het over het werk en de werkwijze van het IOWO had altijd over 'wij'. Hij was ontzettend trots op wat het IOWO deed en bereikte, en stond vierkant achter het instituut en zijn mensen. Toch moest hij – zeker in de beginfase van het instituut – geregeld met verschillende en ogenschijnlijk tegenstrijdige petten op opereren.

Sinds 1971 was Freudenthal namelijk ook actief als vertegenwoordiger van de CMLW in de Commissie Organisatie Leerplan Ontwikkeling (COLO), een beweging feitelijk geheel tegengesteld aan de vakspecifieke van de CMLW en het IOWO. De COLO was eind jaren zestig door het Ministerie ingesteld met als doel tot een overkoepelende organisatie te komen waarbinnen complete – dus voor alle vakken – leerplannen ontwikkeld konden worden. In 1975 werd het werk van de COLO afgerond met de instelling van de Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO), waarna de CMLW verwerd tot een adviescommissie van de SLO. Hoe het IOWO hierin zou moeten passen, was toen nog niet duidelijk.⁷⁴

Door de ministeriële ondersteuning leek het pad COLO-SLO van begin af aan het kansrijkst en het IOWO aanvankelijk niet veel meer dan een afdwaling van de wis-

71 Voordracht van Freudenthal voor Amicitia Naturae Interpres op 21 september 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 575.

72 Voordracht gehouden ter gelegenheid van het bezoek van de minister van Onderwijs, J. van Kemenade, aan het IOWO, 27 november 1974; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 589.

73 Freudenthal aan Van Hiele, 4 juni 1987; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 37.

74 Correspondentie CMLW-IOWO, 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1731.

kundigen van het door de minister gekozen pad. Blijkbaar zag Freudenthal er geen tegenstrijdigheid in om ‘op twee paarden te wedden’. Het was al heel snel duidelijk dat het IOWO en zijn mensen zijn hart hadden gestolen.⁷⁵ Natuurlijk had hij ook kritiek, die hij evengoed uitsprak. Maar fundamenteel was deze niet en zijn bewondering en enthousiasme voerden altijd de boventoon.⁷⁶

Dat enthousiasme betrof niet alleen de inhoud van het IOWO-werk, maar – misschien wel juist – de sfeer en werkwijze op het instituut. Freudenthal bloeide op binnen het uit voornamelijk jonge mensen bestaande IOWO-team, waarbinnen hij functioneerde als volwaardig teamlid: openstaand voor nieuwe ideeën en inzichten, kritisch, maar zelf ook kritiek verwachende. IOWO-medewerker Treffers karakteriseerde Freudenthals aanwezigheid en invloed op WISKOBAS als volgt:

... his personableness, his intriguing off-hand remarks, his elaborations on seemingly futile observations of learning processes, his passion, his ability to use simple examples to show that mathematics is everywhere, his attention for both ‘simple’ and ‘complex’ forms of mathematics, his respect for practitioners of teaching, his admiration for a point well argued, his style of writing, his undisguised disapproval of developers and researchers who do not do justice to mathematics nor to the child, do no justice to mathematics as a human activity, to ‘mathematics as an educational task’...⁷⁷

Freudenthal was altijd aanwezig op de wekelijkse vergaderingen van zowel WISKOBAS als WISKIVON hoewel, of misschien juist omdat, hij daarbinnen geen vastgelegde functie vervulde. Freudenthals rol binnen deze teams en het IOWO in het algemeen is moeilijk te definiëren. Ontegenzeglijk drukte hij zijn stempel op de groep, maar op het hoe en waar is moeilijk precies de vinger te leggen. Hij verbond zijn grote naam en reputatie aan een actueel initiatief dat al functioneerde, leverde met zijn kennis en kijk inspiratie en gaf het geheel een gigantische versnelling. Daarbij stond voorop, dat hij alle moeite deed de teamgeest van het IOWO zo min mogelijk te verstoren.⁷⁸ Zijn door anderen vaak ervaren ongenaakbaarheid – grotendeels door sociale onhandigheid – viel binnen de bijna hiërarchieloze sfeer van het IOWO grotendeels weg. Van der Blij kenmerkte die sfeer treffend met de uitspraak “je moest er haast een muziekinstrument kunnen bespelen”, een heel andere sfeer dan bijvoorbeeld die op het Mathematisch Instituut. Bovenal leek Freudenthal door het

75 Deze paragraaf is grotendeels gebaseerd op gesprekken met Van der Blij, Treffers en Grootendorst, voorjaar 1999.

76 Een voorbeeld van die kritiek is die op de sprookjeswereld waarin de WISKOBAS-projectjes gegoten werden, zie ook paragraaf 9.5.4; Freudenthal op een WISKOBAS-conferentie in 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 412.

77 A. Treffers, ‘Wiskobas and Freudenthal – realistic mathematics education’, in: L. Streefland, ed., *The legacy of Hans Freudenthal* (Dordrecht 1993) 89-108, aldaar 106.

78 In zijn boek *Van vormleer naar realistische wiskunde* bespreekt De Moor de resultaten van een enquête onder ex-WISKOBAS-medewerkers, toegespitst op het werk voor meetkundeonderwijs. Over de beleving van de invloed van Freudenthal op het WISKOBAS-werk concludeerde hij dat deze per persoon sterk verschilde. Freudenthals bijdragen waren in de herinnering van de meeste medewerkers vooral van microdidactische aard; De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde* 497.

1000 zijn gedachtegoed razendsnel verder te ontwikkelen en uit te bouwen. Hij vond er een uitlaatklep voor zijn bijna vergeten (en in de jaren vijftig en zestig nauwelijks aan bod gekomen) interesse: het observeren van kinderen, het kijken naar leerprocessen en het delen van die ervaringen met anderen om te verwerken in onderwijs.

9.4 Wereldverkennen van de straatstenen tot de maan

9.4.1 Observeren als vader in ‘Rekendidaktiek’

In zijn ‘Rekendidaktiek’ van 1944 stipte Freudenthal al het belang van het observeren aan. In de context van het ontwikkelen van leermethoden voor het rekenonderwijs ging het hem om de kracht van de kleine, alledaagse gebeurtenissen als bron voor wetenschappelijk onderzoek:

[...] onder de onderwijzers zijn er misschien toch sommigen, die zonder theoretisch opzet, geheel zakelijk, in een dagboekachtig relaas stukje bij beetje achter elkaar kunnen aantekenen, hoe er feitelijk les wordt gegeven – schijnbare onbenuiligheden zouden voor iemand, die zulk een relaas wetenschappelijk gaat ontleden, misschien meer verrassen en te denken geven dan een diep aangelegd theoretisch onderzoek.⁷⁹

In de oorlogsjaren maakte Freudenthal dergelijke dagboekachtige aantekeningen van observaties van zijn kinderen. Veel was dit niet, van de 352 bladzijden aantekeningen waren er 8 aan observaties van zijn kinderen gewijd.⁸⁰ Hij schreef in zijn manuscript van 1944 over het observeren van kinderen:

Er is veel verlokkelijks in het individueel observeren en experimenteren op psychologisch terrein. [...] Zelfs de slechtste onder deze publicaties mag men, zonder voorbarig te zijn, niet overbodig noemen, maar toch mag men de waarde van dergelijk onderzoek niet overschatten. Want het zo vergaarde materiaal bezit bij al zijn goede eigenschappen, die niemand zou willen loochenen, de slechte zijde, dat het immers uitgesproken individueel materiaal is. Aan het individuele karakter verdankt [sic] dit materiaal echter ook zijn aantrekkelijkheid – de levensgeschiedenis van een kind van 0-6 jaar te lezen is zelfs, wanneer de verslaggever zou trachten, alle bekoorlijkheid te elimineren, aantrekkelijker werk dan het bestuderen van een catalogus van cijfers, percentages, gemiddelden, correlatie-coëfficiënten en wat er meer is aan statistische hulpmiddelen in de moderne psychologie.⁸¹

79 Freudenthal, ‘Rekendidaktiek’ (ongepubliceerd 1944) 54-55; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465.

80 Zo schreef hij af en toe over het getalbegrip van Tom en noteerde hij uitspraken van Thijs en Didi; notitieboekje uit 1943, pagina’s 9, 16, 17, 35, 43, 54; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 440.

81 Freudenthal, ‘Rekendidaktiek’ 4; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465.

Hij gaf in ‘Rekendidaktiek’ een voorbeeld van een gesprek tijdens een wandeling met een van zijn zoontjes. Het was een vermakelijk voorbeeld van hoe moeilijk het bleek voor Freudenthal – in de rol van onderwijzer – om tot een ‘spontaan’ socra-tisch vraaggesprek te komen:

Ik: Waar komt de wind vandaan?

A.: Uit het Westen.

Ik: Neen, dat bedoel ik niet. Steek je vinger op!

A : Daar komt-ie vandaan.

Ik: Juist! Hoe heet die richting?

A: Noord.

Ik: Neen. Waar staat de zon?

A: In het zuiden.

Ik: Neen. Wijs even, waar de zon staat!

A: Daar!

Ik: Staat de zon dus aan dezelfde kant, als waar de wind vandaan komt, of aan een andere kant? ⁸²

Freudenthal stopte hier even voor een intermezzo met de lezer:

De lezer bemerkt, dat ik niet de moed bezit te vragen “welke betrekking bestaat tussen de richting, waar de zon staat, en de richting waar de wind vandaan komt? ”, een vraag, die fraaier zou staan en beter in het schema der socratische methode zou passen. ⁸³

Daarna vervolgde hij de dialoog met zijn zoontje:

A: Aan dezelfde kant.

Ik: En waar staat de zon nu in de ochtend?

A: Daar!

Ik: Neen, je hebt net gezegd, dat-ie dààr stond. Hoe heet die richting?

A: Zuid.

Ik: Neen, ik bedoel, hoe die kant heet, waar de zon altijd in de ochtend staat.

A: Oost.

Ik: Dus waar komt de wind vandaan?

A: Daar!

Ik: Neen, hoe heet de richting, waar de wind nu vandaan komt?

A: West.

Ik: Waar is West?

A: Waar de zon staat.

Ik: Neen! Wanneer staat de zon in het westen?

A: 's Avonds.

Ik: Ja. Is het nu avond?

A: Neen. Nu is [het] 's ochtends.

Ik: Dus waar moet de zon nu staan?

⁸² Ibid., 70-71.

⁸³ Ibid.

A: Waar de wind vandaan komt.

Ik: Ja, daar staat de zon. Maar ik bedoel: hoe heet de streek, waar de zon elke ochtend staat – wind of geen wind.

A: Het Oosten.

Ik: Goed. En waar komt de wind nu vandaan? ⁸⁴

De socratische tweespraak werd toen afgebroken, omdat volgens Freudenthal de wind ondertussen was gaan draaien. Hij concludeerde vervolgens:

Leermeesters zijn meestal even hardnekkig in het ondervragen als leerlingen in het niet weten (of niet willen weten), maar zoveel er ook aan de socratische methode prijzenswaardigs is – toch zal de leermeester soms beter doen, om minder hardnekkig socratisch te zijn en eenvoudigweg te vertellen: ‘Kijk, daar staat de zon, daar komt de wind vandaan, en dat heet Oosten, want Oosten noem je ’t, waar de zon altijd in de ochtend staat’.⁸⁵

In zijn ‘Rekendidaktiek’ was het voor Freudenthal duidelijk dat de waarde van dergelijke observaties niet in het individuele geval kon liggen, maar pas bij herhaling en vergelijking van grote groepen kinderen iets wetenschappelijk waardevols zou opleveren. Niet alleen de kleine steekproef was een belemmering, ook het feit dat dergelijke observaties in de literatuur voornamelijk bij kinderen uit een intellectueel milieu, namelijk dat van de proefnemer, gedaan werden, was voor Freudenthal een nadeel.⁸⁶

De observaties die hij in deze jaren van zijn kinderen deed, hadden over het algemeen weinig spontaans. Freudenthal speelde zelf als onderwijzer een nadrukkelijke rol in de dialogen die hij noteerde. Van het onbevangen ‘kijken naar het kind’ was nog weinig sprake, van het afdwingen van leermomenten des te duidelijker, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt:

Tom 3,6. *

Pak vijf suikerparsels. Hij pakt een voor een en gaat onbeperkt door. Hoeveel zijn dat[?]: “3” (juist), dat[?] “4” (juist) dat[?] geen antwoord (vijf; wordt hem gezegd), dat? Geen antwoord (2), ondanks herhaalde pogingen geen antwoord. Zijn dat twee? “Ja” Waarom zeg je dat niet? Geen antwoord. Zeg eens 2. Geen antwoord. Het blijkt dat hij het woord 2 niet uitspreken kann [sic]. Spraakoefening. Hij benoemt de hoeveelheden 1, 2, 3 over het algemeen goed; de hoeveelheid 4 met 30% fouten. [...] Enkele dagen later: Zeg “tik tik tik”. Hij zegt onbeperkt tik. Zeg tik tik. Idem. Zeg tik tik tik. (Met zwaar accent op de eerste tik.) Lukt. Zeg tik tik met accent. Hij zegt weer tik tik tik. Na herhaalde pogingen kan hij zoowel tik tik als ook tik tik tik zeggen. Het lukt niet hem een viervoudige tik te zeggen ondanks alle rythme.

Zeg	eens	tik tik tik.	Hoeveel	heb	je	tik	gezegd.	Goed.
”	”	tik tik.	”	”	”	”	”	Goed.

Analoge uitkomsten met tak en boem.⁸⁷

⁸⁴ Ibid.

⁸⁵ Ibid.

⁸⁶ Zie ook paragraaf 4.4.

⁸⁷ Aantekeningenboekje ‘Rekendidaktiek’, 1943; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 440.

Wel gaf Freudenthal ook toen al aan als leraar zelf ook veel te leren van zijn bewust observeren en manipuleren van zijn leerlingen tijdens de rekenlessen en de fouten die zij – en hij – daarbij maakten.

In de jaren erna hield Freudenthal zich weinig bezig met dergelijke observaties, of maakte er in ieder geval geen (bewaard gebleven) vergelijkbare aantekeningen van. Het leven en werken in Utrecht na de oorlog nam hem volledig in beslag en maakten ‘Rekendidaktiek’ tot een uitzonderlijk uitstapje. Wel was hij begin jaren vijftig – gezien zijn stukjes in *De Groene Amsterdammer* – begaan met de schoolperikelen van zijn kinderen, maar tijd voor dagelijkse wandelingen en observaties had hij niet meer.⁸⁸ Hij hield zich in de jaren vijftig en zestig weinig bezig met het observeren van het lerende kind. Zijn bemoeienissen en activiteiten op het gebied van het onderwijs lagen in die jaren voornamelijk op het didactisch-theoretische of organisatorische vlak.

9.4.2 Observeren als grootvader: wandelen met kleinkinderen

Het veldwerk dat binnen WISKOBAS en later binnen het IOWO gedaan werd, wakkerde Freudenthals oude interesse in het observeren van leerprocessen weer aan. ‘Het observeren van lerende kinderen’ speelde binnen de werkwijze van het IOWO van begin af aan namelijk een prominente rol.⁸⁹ Maar tegelijkertijd werd ook op een veel speelsere manier zijn interesse voor het doen van observaties hernieuwd. In de jaren zestig werd Freudenthal grootvader. En in het bijzonder met de kinderen van zijn dochter Mirjam, die op loopafstand woonden, had hij veel contact.⁹⁰ Met Bastiaan, de oudste, die in 1970 geboren werd en later ook met zijn twee jaar jongere zusje Monica maakte Freudenthal wandelingen die aanleiding gaven tot talloze – niet per se direct aan de wiskunde gerelateerde – observaties. Dat hij zich als grootvader bewust minder nadrukkelijk als leraar opstelde, bleek uit zijn volgende woorden:

I gave a 9 years old girl the problem to double a square. Of course she did not succeed. If it had been my daughter, I would have led her safely to find the solution. But she was my granddaughter so I said: ‘I see, it is too hard, let us try it another time’.⁹¹

Juist die meer ontspannen en onbevangen houding als grootvader en niet zozeer als leraar gaf Freudenthal de mogelijkheid de wiskunde in de wereld van het kind te zien. Toen Bastiaan zo’n 28 maanden oud was, begon Freudenthal met het opschrij-

88 Zie ook paragraaf 5.1.1.

89 Freudenthal was bij het observeren op de ontwerp scholen van WISKOBAS en WISKIVON, maar ook op de Pedagogische Academies altijd intensief betrokken geweest; Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 359.

90 In zijn boeken *Mathematics as an educational task* en *Appels en peren. Wiskunde en psychologie. Gebundelde opstellen* schreef hij ook over oudere kleinkinderen; Freudenthal, *Mathematics as an educational task*; Hans Freudenthal, *Appels en peren. Wiskunde en psychologie. Gebundelde opstellen* (Apeldoorn 1984).

91 Voordracht ‘The Institute on Developing Mathematical Education (IOWO) in the Netherlands’, 1972 Argentinië, 9 pagina’s; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 571.

Wandelen met kleinkinderen.



ven van zijn belevenissen met het jongetje in een schriftje.⁹² Hij deed dit niet enkel als trotse grootvader, maar in de eerste plaats met de bedoeling een zo objectief mogelijke weergave van Bastiaans cognitieve ontwikkeling te geven.⁹³

Vijfentwintig jaar later memoreerde Bastiaan aan de wandelingen in een artikel in *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. Veel van wat zijn grootvader over de wandelingen geschreven had, wist hij zich niet meer zo gedetailleerd te herinneren. Hij schreef:

I do not remember, e.g., that we walked so often together. What I do know is, that I liked to walk to distant places like the DE Coffee factories. They all seemed very far away then, today I walk to the railway station or to town in fifteen minutes, in my memory it seems far away like Australia. The park where we went to most of the time was [...] a place so common to me, I could draw a plan by memory.⁹⁴

Zo dwingend ‘socratisch’ als met zijn eigen kinderen ondervroeg hij zijn kleinzoon tijdens de wandelingen niet. Zijn beschrijvingen waren zoveel mogelijk gespeend van emotie en waardeoordeel. Zelden schreef hij er in zijn schriftjes een conclude-

92 In twee schriftjes schreef Freudenthal over de belevenissen met zijn kleinzoon, die de periode augustus 1972 – september 1977 besloegen; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 446 en 447.

93 Het observeren en noteren van activiteiten van en met kinderen is een vaak voorkomend fenomeen bij pedagogen als W. Stern en O. Decroly. Zo noteerde Decroly gebeurtenissen en uitspraken van zijn dochtertje op vergelijkbare leeftijd als Bastiaan. Freudenthal kende dit werk overigens al uit zijn studie tijdens de oorlogsjaren en noteerde in 1944 hierover “Decroly vindt zijn middelen niet als Mont[essori] in formeel materiaal, maar in ‘t volle leven”. Ook Kohnstamm beschreef af en toe een observatie van zijn kleinkind; C. Philippi-Siewertsz van Reesema, *Uit en over de werken van Prof.Dr. Ovide Decroly* (Groningen 1931); Kohnstamm, *Keur uit het didactisch werk van Prof.dr. Ph. Kohnstamm* 90; Freudenthals aantekeningenboekje 1943; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 440.

94 Bastiaan van der Velden, ‘Between “Bastiaan ou de l’éducation” and “Bastiaan und die Detektive”’, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 32 (2000) 201-202, aldaar 201.

rende of analyserende opmerking bij. Het doel leek voornamelijk een zo exact mogelijke weergave van de kleine gebeurtenissen weer te geven. Wel gaf hij af en toe wat meer uitleg over de (spraak)gewoonten van Bastiaan bij sommige van zijn uitspraken. Een treffend voorbeeld van de stijl waarin hij gesprekken en gebeurtenissen opschreef is het volgende fragment:

5-2-74 Enkele dagen geleden: Hij vindt een glazen knikker. “Als ik hard duw, zou hij op straat rollen” (wat hij niet wil). De irrealis wordt meestal alleen in de hoofd- óf de bijzijn gebruikt. In antwoord op een vraag: “Anders zou ...”.

De knikker rolt onder een band van een geparkeerde auto. Hij kan hem niet te pakken krijgen. Ik wijs hem een stokje. Hij, op het gezicht: “Dat is niet hard genoeg.” Inderdaad een slap stokje, maar het lukt er wel mee.⁹⁵

Om diverse redenen is een dergelijke weergave van de belevenissen van een (klein) kind natuurlijk nooit objectief te noemen. Ook al deed hij minder moeite Bastiaan nadrukkelijk iets te leren – zoals hij dat dertig jaar eerder met zijn eigen zoons wel deed –, niet zelden kon Freudenthal het toch niet laten Bastiaan met vragen of aanwijzingen een bepaalde kant op te sturen. Zo komt in het volgende voorbeeld nog even de socratische vraagmethode om de hoek kijken:

15-9-74. Op straat vindt hij een wioldop van een Fiat. ‘Ik heb er al zo een’.

– ‘Hoeveel heb je er dan nu?’

– ‘Twee.’

– ‘Hoeveel heb je er voor een hele auto nodig?’

– ‘Dat weet ik niet.’

– ‘Hoeveel wielen heeft een auto?’

– ‘Vier.’

– ‘Hoeveel heb je er dan nu nog nodig?’

– ‘Vier.’

– ‘Nee, hoeveel moet je er nog bij vinden?’

– ‘Twee.’

Thuis, opgewonden, roept hij al voor de deur [zijn vader] Frans toe: ‘Ik moet er nog twee bij vinden, dan heb ik er vier!’⁹⁶

Vaker probeerde Freudenthal zijn vraagstelling zo open mogelijk te houden, om het jongetje zo veel mogelijk zelf zijn conclusies te laten trekken. Daarin lag voor Freudenthal de grootste waarde van de observaties. Toch was Freudenthal zich wel bewust van de betrekkelijkheid van de spontaniteit van zijn observaties. Over de invloed van zichzelf als waarnemer bij dergelijke terloops gedane waarnemingen schreef hij in zijn boek *Appels en peren*:

95 Schriftje met observaties van Bastiaan en Monica, 1972-1976; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 446. Deze anekdote is ook opgenomen in het artikel: Freudenthal, ‘Wandelingen met Bastiaan. Wereldverkennen van de straatstenen tot de maan’, *Pedomorfose* 25 (1975) 51-64, aldaar 58.

96 Freudenthal, ‘Wandelingen met Bastiaan. Wereldverkennen van de straatstenen tot de maan’, *Pedomorfose* 25 (1975) 51-64, aldaar 62.

Het kon weleens spontaan starten, maar een woord, een blik, een geste van de waarnemer is voldoende om het spontane een bepaalde kant op te buigen. Is dit erg? Welneen. Er is spontaniteit, maar voor alle ontwikkeling is er ook een sociale context. Dwarsdoorsneden zijn onvoldoende, om ontwikkeling te achterhalen, zolang er geen theorie is om de dwarsdoorsneden te verbinden. Longitudinale observatie is praktisch onmogelijk. Wat heb je dan aan die terloopse observaties, in de wandeling? ⁹⁷

Ja, wat heb je aan die terloopse observaties? Freudenthal gaf hierop zelf vervolgens het antwoord: juist in het terloops observeren zag hij een belangrijk werktuig bij de ontwikkeling van wiskundeonderwijs. Dat hij daarbij wel juist die observaties selecteerde waarvan hij dacht of verwachtte er (later) meer uit te kunnen concluderen, bleek uit zijn opmerking over de keuze van de beschreven belevenissen met Bastiaan:

Wel, uit de wijze waarop ik ze heb verteld, zal u duidelijk zijn geworden, dat het voor mij meer waren dan anekdoten. Ik heb niet wat ik heb waargenomen te kust en te keur genoteerd, maar alleen datgene wat me te denken gaf. Gedachten bij elkaar vormen nog geen theorie, maar elke gedachte kan aanzet tot theorie zijn.⁹⁸

9.4.3 Opa Hans: een kritische noot

Met deze nieuwe invalshoek begaf Freudenthal zich nadrukkelijk buiten zijn eigen vakgebied, de wiskunde, en openlijk op het gebied van de pedagogiek, de ontwikkelingspsychologie en de taalwetenschappen. Zijn wandelingen met Bastiaan publiceerde hij in *Pedomorfose*, het tijdschrift voor Jenaplanonderwijs waarvan mevrouw Freudenthal redactrice was.⁹⁹ Blijkbaar was een tijdschrift als *Euclides* niet de aangewezen plek voor dergelijke weinig wiskundige observaties. De reacties die Freudenthal op zijn artikelen kreeg, kwamen dan ook vooral uit taalkundige hoek.

Zo reageerde de filoloog E.M. Uhlenbeck op de meer taalkundige aspecten van Freudenthals observaties.¹⁰⁰ Hij verweet Freudenthal, als niet-taalkundige te gemakkelijk over taalverschijnselen te spreken en oordelen.

Wat altijd weer verbazing wekt, is het gemak waarmee niet-taalkundig geschoolden over taalverschijnselen spreken en oordelen. Zijn zulke personen professor in een ander vak, dan worden hun pseudo-taalkundige uitspraken door een aantal onkritische lezers nog geloofd ook.¹⁰¹

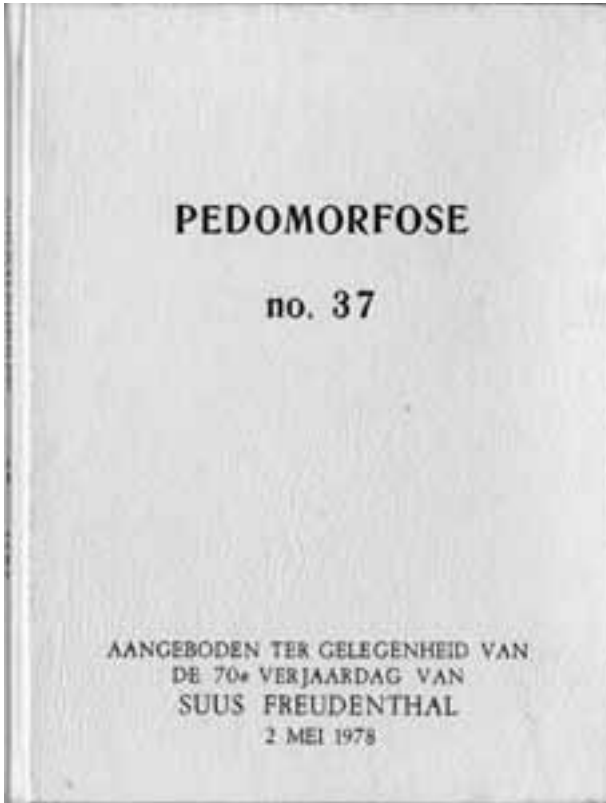
97 Dit artikel dateert uit 1977/1978, samengesteld uit *Jaarverslag over 1977*, Provinciaals Utrechts Genootschap (1978) 8-18 en *Weeding and sowing*; Freudenthal, *Appels en peren* 101.

98 Freudenthal, 'Cognitieve ontwikkeling – kinderen geobserveerd'; *ibid.*

99 Freudenthal, 'Wandelingen met Bastiaan', *Pedomorfose* 25 (1975) 51-64, Freudenthal, 'Bastiaan's lab', *Pedomorfose* 30 (1976) 35-54, Freudenthal, 'Bastiaan meet zijn wereld', *Pedomorfose* 37 (1978) 62-68.

100 Uhlenbeck reageerde op een interview van Freudenthal in *Resonans* (1975-76) 18-22, aldaar 20-21: E.M. Uhlenbeck, 'Professor Freudenthals kleinzoontje verdedigd tegen zijn grootvader', *Forum der Letteren* 16 (1975) 253-254; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 616.

101 E.M. Uhlenbeck, 'Professor Freudenthals kleinzoontje verdedigd tegen zijn grootvader', *Forum der Letteren* 16 (1975) 253-254, aldaar 254.



Feestelijke uitgave van *Pedomorfose* ter gelegenheid van mevrouw Freudenthals zeventigste verjaardag (1978).

Freudenthal reageerde hier onmiddellijk op. Het ging hem niet om de kwaliteit van het Nederlands waarin Bastiaan met zijn grootvader sprak, maar om de taalkundige niveaus van communicatie. Aangezien dat net zomin het vak van Uhlenbeck was, kaatste Freudenthal de bal terug:

‘Wat altijd weer verbazing wekt is het gemak waarmee niet-taalkundig geschoolden over taalverschijnselen spreken en oordelen. Zijn zulke personen professor in een ander vak ...’ eindigt E.M.U. zijn verhaal. Ik had er eigenlijk een grapje op willen maken, maar het zou zonde zijn. Deze passage spreekt beter voor zichzelf.¹⁰²

Een uitgebreide kritische reactie op zijn wandelingen met Bastiaan kreeg Freudenthal van Bruce Pelupessy, een medewerker van het Project Leerpakket Ontwikkeling Natuurkunde uit Utrecht.

Ik wil proberen, hier en daar, wat opmerkingen, twijfels en vragen te plaatsen bij hetgeen door opa Hans is geschreven. Ik doe dit omdat ik het – bescheiden – gevoel heb

¹⁰² Freudenthals reactie werd niet integraal afgedrukt in *Forum der Letteren*. Wel mocht Freudenthal een korte reactie plaatsen, met de aanbieding “op wens aan elke lezer portvrij” de volledige tekst toe te zenden; Freudenthal, ‘Commentaar’, *Forum der Letteren* 17 (1976) 263; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 616.

dat er uit de vele akties [sic] die Bastiaan onderneemt, hier en daar heel andere konklusies [sic] te trekken zijn dan opa Hans doet. We zullen er wel nooit achterkomen welke konklusies de juiste zijn. Of zou Bastiaan ons – nog – kunnen helpen ...¹⁰³

Pelupessy liet vervolgens aan de hand van voorbeelden zien hoe Freudenthal onbewust de richting van de gesprekjes met zijn kleinzoon stuurde. Volgens hem leefde Freudenthal zich niet genoeg in in de fantasiewereld van het jongetje. Juist de door Freudenthal zo geroemde en vaak gebruikte vraag: “Hoe weet je dat?” en die uit de vergelijkbare categorie: “Wat denk jij?” zetten de kleuter op het verkeerde been. Volgens Pelupessy moest Freudenthal figuurlijk meer door de knieën in zijn gesprekken met Bastiaan. Een mooi voorbeeld was Freudenthals analyse van het taartjes tellen in de zandbak:

10-9-'74. In de zandbak in het park. Bastiaan maakte – voor het eerst – een hele rij taartjes op de rand. Ik telde mee. Het waren er 18. Toen begon hij zelfstandig van het begin af aan te tellen: 1, 2, 3, 4, 5, 8. Hij zei: “Ik wou dat het er zes waren.” (“zes” betekende tot nu toe “veel”). Ik wees hem tot waartoe het er zes waren; er was daar toevallig een gleuf in de rand van de zandbak. Hij wees op de rest en zei zoiets als “dat moeten er ook zes zijn”. Ik wees dienovereenkomstig, maar hij, door iets anders afgeleid, hield ermee op. We hadden vlierbessen geplukt en in een mandje gedaan. Hij droeg het en zei: “6 pond”. Ik: “Hoe weet je dat?” Hij: “Mijn moeder kan het wegen.” – “Hoe?” – “Met de weegschaal”.¹⁰⁴

Pelupessy vermoedde dat Freudenthal ook hier te hoog inzet met zijn vraag: “Hoe weet je dat?” en bovendien als leermeester om de hoek kwam kijken:

Wat had Bastiaans opmerking over het mandje met vlierbessen te betekenen? “6 pond” zei hij. Het mandje is dus behoorlijk zwaar, volgens Bastiaan. Zo maar, een ‘emotionele’ opmerking. Net zo’n opmerking als “Het is vandaag behoorlijk koud”. Dat voel je gewoon. Wat moet je dan met zo’n vraag als “Hoe weet je dat?”. Nadenken, en er proberen een zo goed mogelijk antwoord op te geven. Waarom stelt Hans Freudenthal die vraag eigenlijk? Een reactie op Bastiaans opmerking? Of wil hij hem iets leren?¹⁰⁵

Freudenthal ging hieraan in zijn reactie op Pelupessy volkomen voorbij. Hem interesseerde slechts het antwoord van Bastiaan:

Elk kind schijnt een zekere tijd lang een zeker telwoord voor ‘veel’ te gebruiken. Bij Monica is dat nu nog ‘zeven’, hoewel zij veel verder kan tellen. Bastiaan had op dat ogenblik zeker geen notie hoe zwaar 6 pond weegt. Het verbazingwekkende, het vol-

103 B. Pelupessy, ‘Enkele annotaties bij “Wandelingen met Bastiaan”’, *Onderwijs in Natuurwetenschap. Een nieuwsbrief over de integratie van natuurwetenschappen in het basis- en voortgezet onderwijs* 2 (1975) 17-20, aldaar 17.

104 Freudenthal, ‘Wandelingen met Bastiaan’, *Pedomorfose* 25 (1975) 51-64, aldaar 61.

105 Pelupessy, ‘Enkele annotaties bij “Wandelingen met Bastiaan”’, *Onderwijs in Natuurwetenschap* 2 (1975) 17-20, aldaar 19.

strekt ongewone in deze situatie is dat hij op mijn vraag “hoe weet je dat?” een terzake doend antwoord geeft. Dat hij in ’t geheel een verband legt tussen ‘6 pond’ en ‘iets wegen’. Dit is op het punt waar het mij op aankomt. Bastiaan is op dat ogenblik 4 1/2 jaar!¹⁰⁶

Met die nadruk op de 4 1/2 jaar van Bastiaan kwam toch nog even de trotse grootvader om de hoek kijken. Hij legde de schrijver uit dat Bastiaans fantasiewereld een heel andere was dan de schrijver vermoedde. Vragen stellen was voor Bastiaan gewoon een spel, zijn manier om te communiceren. Hij speelde geen rollenspel en de sprookjeswereld was op vierjarige leeftijd voor hem “niet meer dan een intellectueel spelletje”.¹⁰⁷ Dit rechtvaardigde volgens Freudenthal zijn onconventionele vragen aan de kleuter. Maar hij was de eerste om toe te geven hoe moeilijk het was uitspraken van kinderen te interpreteren:

Het doen en laten, zelfs het zich taalkundig uiten van kinderen – van wie dan ook die niet onze gelijke is – is moeilijk te interpreteren. Ik heb me wel honderden malen vergist. Conclusies trekken is nog lastiger – wie wandelingen met Bastiaan leest, merkt op dat het vaak relaas en zelden conclusie is. Misschien worden door deze dictie juist conclusies gesuggereerd, die vanzelfsprekend lijken. Ook wel door het feit dat Bastiaan veelal hardop denkt en dus zelf de conclusies schijnt te trekken.¹⁰⁸

Zo pareerde Freudenthal de kritiek. Omdat de situaties zo eigen, zo persoonlijk waren, kon niemand controleren of, hoe en in welke mate hij de situaties met zijn kleinkinderen manipuleerde en stuurde. Maar, zo stelde Freudenthal, dit deed ook niet ter zake. Elke observatie had een zekere mate van subjectiviteit. Altijd had de inmening van een volwassene invloed op de spontaniteit van het kind. Maar dit was niet belangrijk. Mits met de nodige bescheidenheid in het achterhoofd geanalyseerd, ging het er voornamelijk om wát er gebeurde. Analyse was moeilijk en makkelijk te bekritisieren. Desalniettemin was er volgens Freudenthal juist uit de kleine gebeurtenissen grote wiskunde te halen, al zag hij het zelf ook niet altijd in één keer.

9.4.4 Wandeling over de rails: wiskunde van een driejarige

Eén van de meest gebruikte anekdotes uit de schriftjes van Freudenthal was die waarin hij met Bastiaan en Monica over een verlaten treinrails wandelde. Frappant was dat van de vele anekdotes in zijn schriftjes hij juist deze zo frequent gebruikte. Frappant, omdat dit een pas achteraf in 1975 in het schriftje opgenomen belevenis was. De eerste keer dat deze anekdote opdook was in een voordracht voor de WISKOBAS-conferentie in Noordwijkerhout in 1974. Later gebruikte hij hem ondermeer nog in een voordracht in Polen in 1975 en op een conferentie in 1977.¹⁰⁹ Het

¹⁰⁶ Freudenthal, ‘Annotaties bij annotaties, vragen bij vragen’, *Onderwijs in Natuurwetenschap* 2 (1975) 21-22, aldaar 22.

¹⁰⁷ Ibid.

¹⁰⁸ Ibid., 21.

¹⁰⁹ RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 606, 618.

Vandaag was't eerst Monica naar de rails meegenomen.
 Bastiaan was iets ouder toen ik het eerst met hem deed.
 In gelouf deed het de tweede keer tussen de rails ^(tussen de rails) ~~dat de rails~~
~~was dat hij met het voet-^{de}redwood gebeurde dat de en alle de~~
 Ard'hals het verteld: In die deed hij iets opzettelijks probeert
 en hij ziet dat ik het zie. Hij: "Opa, kijk hoe ik het doe, een schoen erop,
 een schoen erin" – namelijk op en tussen de biels. Maanden later: "Opa, nu doe ik
 op de grote mens manier. Maanden later: "Opa, nu doe ik

op de grote mens manier" – van biel tot biel.
 Monica ontdooide pas toen ze zich tussen de rails van mijn
 hand had losgemaakt. Ik zag, dat ze bewust deed: één voet erop
 en voet ertussen in. Ik riep Bastiaan toe: "Moet je eens kijken
 wat Monica doet." Hij luisterde niet, maar Monica ging direct
 tot inspanning over om het op de grote mens manier
 te doen.

De 'biels-anekdote' uit Freudenthals aantekeningenboekje (1975).

moest omstreeks 1973 zijn geweest dat Freudenthal de desbetreffende wandeling maakte, die hij pas twee jaar later in zijn schriftje noteerde:

Vandaag voor 't eerst Monica naar de rails meegenomen. Bastiaan was iets ouder toen ik het eerst met hem deed. Ik geloof dat het de tweede keer tussen de rails was dat de geschiedenis gebeurde die ik in allerlei artikels heb verteld: ik zie dat hij iets opzettelijk probeert en hij ziet dat ik het zie. Hij: "Opa, kijk hoe ik het doe, een schoen erop, een schoen erin" – namelijk op en tussen de biels. Maanden later: "Opa, nu doe ik op de grote mens manier" – van biel tot biel. Monica ontdooide pas toen ze zich tussen de biels van mijn hand had losgemaakt. Ik zag, dat ze bewust deed: één voet erop een voet ertussen in. Ik riep Bastiaan toe: "Moet je eens kijken wat Monica doet". Hij luisterde niet, maar Monica ging direct tot inspanning over om het op de grote mens manier te doen.¹¹⁰

110 Aantekening van 20 april 1975 in het schriftje met observaties van Bastiaan en Monica, 1972-1976; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 446. Opvallend en typerend is Freudenthals hypercorrecte taalgebruik wanneer hij het over "biel" en de bijbehorende meervoudsvorm "biels" heeft (met dank aan prof.dr. A. Treffers voor zijn opmerking hierover, 9 november 2001).

Freudenthal verweet zichzelf achteraf, de uitspraak van het jongetje niet goed genoeg geïnterpreteerd te hebben. In zijn voordracht van 1975 vertelde hij dat zijn vrouw hem thuis duidelijk maakte, dat Bastiaans uitroep “Opa, kijk hoe ik het doe ...” een uitnodiging was om hem na te doen:

I was stupified by this example of feminine intuition, and I was sorry I had disappointed the boy by my stupidity¹¹¹

bekende hij zijn publiek. De tweede fout die hij met betrekking tot dit incident in eerste instantie maakte, was deze in het licht van Bastiaans ontwikkeling wiskundig gezien niet serieus genoeg te hebben genomen:

Several times I told this story at lectures and I added: This is the first mathematics in this boy’s life: one foot therein, one foot above. It is mathematics not because he did it, this periodical activity, but because he became conscious of it and formulated it in a way that resembles mathematical intuition. I called it mathematics in a slightly joking way but people would believe I am silly. I was wrong.¹¹²

De uitspraak van Bastiaan over ‘de grote mensen manier’ een paar maanden later maakte pas dat Freudenthal de eerste uitspraak goed begreep: er zat nog meer wiskunde in de gebeurtenis dan hij oorspronkelijk dacht. Niet alleen het herkennen van de periodieke activiteit en het formuleren ervan was als wiskunde te interpreteren:

I now know that my first interpretation was wrong and that what the boy said a year before was mathematics in an even deeper sense than I understood then. Probably without knowing it I had always made steps from one tie to the next. He would imitate it but he knew it was too long a step so he replaced my period by half of it: because isomorphism was difficult to attain he was then satisfied with a homomorphism. Only a year later he was able to perform the isomorphism, but in both cases he was conscious about the two phenomena and about their relatedness. This is the reason why I was right to call it his first mathematicism and wrong to do it jokingly.¹¹³

Dit maakte ook gelijk duidelijk waarom Freudenthal deze gebeurtenis niet direct genoteerd had: blijkbaar zag hij pas veel later de significantie van het moment in. Dit bleek ook wel uit het feit dat hij het in de jaren erna zo vaak in voordrachten als voorbeeld van ‘de eerste wiskundige actie van een peuter’ opvoerde, en tegelijkertijd impliciet als voorbeeld van de moeilijkheid van het terloops observeren. Twijfel over zijn achteraf-interpretatie uitte hij niet, enkel verbazing dat hij dit nooit eerder op de juiste manier had begrepen. “Herhalingsstructuren waarnemen en scheppen – dit is een bezigheid in ontelbare variaties met vaak een wiskundige inslag”, dat was de les die Freudenthal uit deze gebeurtenis trok.

De wandeling-over-de-rails-anekdote was in zoverre uniek dat het één van de

111 Voordracht in Polen 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 606.

112 Ibid.

113 Ibid.

weinige was waarbij Freudenthal redelijk vergaande wiskundige analyse toepaste en deze in zijn voordrachten openbaar maakte. Commentaar op zijn observatie en analyse was er niet. Nu ging het hem ook niet zozeer om dit betreffende voorbeeld en de daarbij behorende conclusie, maar om het voorbeeld als illustratie van de rol en de kracht van het doen van observaties van kleine kinderen in hun eigen wereld. En juist in het wiskundeonderwijs was het nodig om bij het alledaagse, kleine te beginnen. In 1974 zei Freudenthal hierover:

Der Fehler dieser stark formalisierten Mathematik ist, daß sie darüber hinweggeht, wieviel wirkliche Mathematik Kinder vom ersten Schuljahr an, vielleicht schon im Kindergarten lernen können. Aber wirkliche Mathematik, die so einfach ist, daß wir Erwachsenen, die wir uns so sehr an sie gewöhnt haben, nicht mehr sehen, daß es sich um lernenswerte Dinge handelt, die Kinder lernen müssen.¹¹⁴

9.4.5 Observeren en het IOWO

In een brief aan Goffree over het wiskundeonderwijs-ontwikkelwerk noemde Freudenthal desgevraagd het kijken naar kinderen en studenten “zijn rijkste ervaringsbron”.¹¹⁵ Observeren speelde dan ook een prominente rol binnen het ontwikkelingswerk van het IOWO en was op deze schaal toegepast misschien wel een van de meest vernieuwende aspecten van het IOWO-ontwikkelingswerk. Heel concreet kwam de rol van het observeren natuurlijk tot uiting door het gebruik van de ontwerpscholen en het observeren op de Pedagogische Academies.¹¹⁶

Maar ook op de wekelijkse bijeenkomsten van de werkgroepen werd veel aandacht besteed aan het bespreken van observaties. Freudenthal stimuleerde dat en benadrukte het belang van het onbevangen kijken naar kinderen. Tegelijkertijd werd hij op zijn beurt geïnspireerd en geënthousiasmeerd door hetgeen hij op deze manier binnen het IOWO tot stand zag komen.¹¹⁷

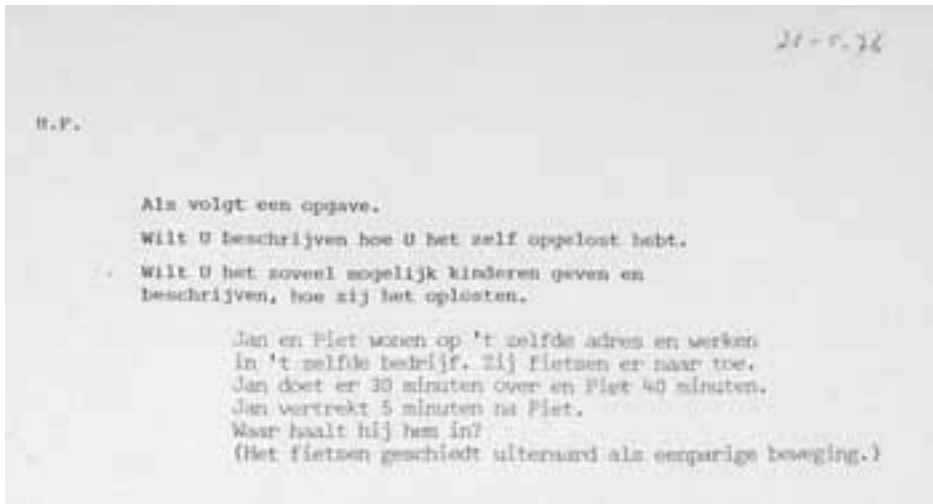
Het werken binnen het IOWO was voor Freudenthal heel vruchtbaar. Zo kon hij binnen de context van de IOWO-teams zijn eigen ideeën toetsen. Heel concreet deed hij dat met zijn observaties, die hij in kattebelletjes optekende en verspreidde in de

114 Freudenthal, ‘Mathematische Erziehung oder Mathematik im Dienste der Erziehung’, voordracht Universiteitsweek te Innsbruck, 21 juni 1974; memiografische weergave, 18 pagina’s, aldaar 12; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1055.

115 Freudenthal aan Goffree, 9 februari 1986; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 33.

116 In 1977 vertelde Freudenthal in een interview één keer per week naar de Pedagogische Academie in Gorinchem te gaan, één dag naar een school waar de PA-studenten stage liepen en ook nog één dag per week naar een school voor lager beroepsonderwijs in Utrecht. Hij zei erover: “Het plezierigste eigenlijk wat ik ooit gedaan heb in mijn leven is naar die P.A. gaan, met de studenten daar werken en met de kinderen van die school”; interview met Hans Freudenthal: ‘Wiskunde in andere wetenschappen’, in: *De vakidoot. Maandblad van de subfaculteiten wiskunde en natuur- en sterrekunde* 9 (1977) 14-20, aldaar 15; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1849.

117 Zijn lezing gehouden op een CIEAEM-conferentie in Bordeaux in 1974 was een introductie bij filmmateriaal van een lessituatie over IOWO-materiaal (‘Kijk op kans’). In deze lezing verhaalde Freudenthal over diverse observaties van lessituaties in de klas; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 588.



Kattebelletje van Freudenthal aan WISKOBAS-medewerkers (1976).

postvakjes van de medewerkers. In deze notities schetste hij korte verhaaltjes, ruwe ideeën, anekdotes, maar vooral vraagstukjes. Voor deze vraagstukjes vroeg hij dan aan alle medewerkers hun oplossing op schrift te stellen:

Als volgt een opgave. Wilt u beschrijven hoe U het zelf opgelost hebt. Wilt U het zoveel mogelijk kinderen geven en beschrijven, hoe zij het oplosten.¹¹⁸

Blijkbaar was hij erg geïnteresseerd in oplossingsstrategieën en gebruikte hij de IOWO-medewerkers als proefkonijnen. Deze informele acties kwamen het dichtst bij wat systematisch onderzoek genoemd zou kunnen worden, maar iets direct concreets deed Freudenthal er niet mee. Dergelijke acties en aantekeningen droegen vooral impliciet bij aan de vorming van Freudenthals gedachtegoed, een letterlijke verwijzing is in zijn werk dan ook niet te vinden. Net als zoveel van wat op zijn pad kwam, nam hij het direct op in het grote geheel van zijn gedachtegoed.

Sporadisch bevatten de kattebelletjes in de postvakjes wel een meer uitgekristalliseerd idee, zoals bij het volgende:

Het blijkt bij proeven dat kinderen 1e klas basisschool, die sommen als $3+2$ en $4+3$ enz.. al behoorlijk kunnen, op de vraag “wat prefereer je, die twee stapels met snoepjes van 3 en 2 of die ene van 5” enz. in 't algemeen foutief antwoorden. Geen wonder indien ze nooit geleerd hebben optelsommen op preferenties toe te passen. Het lijkt mij een vruchtbaar gebied – ook met vragen erbij waar het optelmodel niet op de preferentie past. Dus ook bijv. een touwtje zo lang of hetzelfde in twee stukken. Een taart of dezelfde in parten. Een sinaasappel als geheel of in parten. Drie appels en twee peren, of drie peren en twee appels. Enz.¹¹⁹

¹¹⁸ Freudenthal aan de WISKOBAS-medewerkers, 21 mei 1976; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 405.

¹¹⁹ Freudenthal aan de WISKOBAS-medewerkers, 7 februari 1973; *ibid.*

Ook veel van de Bastiaan-anekdotes kwamen op deze manier in de postvakjes terecht, vaak nog voor Freudenthal ze in zijn voordrachten en artikelen gebruikte. Net als in zijn artikelen waagde Freudenthal in deze kladversie van de anekdotes het niet ze te verklaren of te analyseren. Hij gooide ze zo blanco mogelijk in de groep om een zo objectief mogelijke respons terug te krijgen. Een uitzondering maakte hij in de beschrijving van de volgende wandeling, waarbij hij zich ter afsluiting een sneer richting het niveaurekenen veroorloofde:

28-11-76 Met Bastiaan en Monica bij de Leijen. Een groot aantal amazones passeert ons. Ik vraag: “Hoeveel zijn het er wel geweest?” Monica meteen: “Zeven”. Bastiaan: “40”. Ik: “Neen”. Bastiaan: “20”. Ik: “Ik denk 15 à 20”. Ik, voor de grap: “We hoeven toch alleen maar de hoeven in het zand te tellen.” Bastiaan telt van 1 tot 20 terwijl hij telkens in een andere afdruk stapt. “Dus 20”. Ik: “Maar een paard heeft vier poten”. Hij, springend met grote stappen: “4, 8, 16, (aarzelend) 20, 24, (aarzelend) 27, (aarzelend) 30, 34, (aarzelend) 37, (aarzelend) 40, Dus 20 paarden”. Ik: “Maar 40 hoeven zijn 10 paarden. Een paard heeft 4 poten. 10 paarden hebben tien linkervoortpoten, 10 rechtervoortpoten, dit zijn er al twintig”. Bastiaan: “Dus 80; 20 paarden hebben 80 poten”. De fout in de tafel van 4 ontstaat blijkbaar door tellen 24, 25, 26, 27.
Conclusie: leve het niveaurekenen.¹²⁰

9.5 De observatie als bron

9.5.1 Professor of kindse grootvader?

Ten tijde van zijn ‘Rekendidaktiek’ in 1944 was de kiem van Freudenthals belangstelling voor observaties dus al gelegd. In het observeren van zijn kleinkinderen dertig jaar later herontdekte Freudenthal de kracht van de observatie: observatie als dé bron van inspiratie en informatie voor het leerproces. Dat hield voor Freudenthal echter niet op bij het op waarde leren schatten van de uitspraken van een peuter tijdens een wandeling. Sterker nog: hij zag in de observatie het uitgangspunt voor de ontwikkeling van wiskundeonderwijs. Dat hij ook wel besepte dat dit een niet voor de hand liggend en nog weinig gangbaar standpunt was, bleek uit zijn toespraak in 1977:

¹²⁰ Freudenthal aan de WISKOBAS-medewerkers, 30 november 1976; *ibid.* Freudenthals “leve het niveaurekenen” sloeg waarschijnlijk op de rekenmethode *Niveaucursus rekenen* van de werkgroep o.l.v. H.M.M. Vossen, een sterk mechanistische rekenmethode. In het onderzoek van R.A. de Jong, zoals beschreven in zijn *Wiskobas in methoden*, bleek deze methode weinig verwantschap te hebben met hetgeen WISKOBAS karakteriseerde: De Jong vond nauwelijks iets van de door hem gedefinieerde WISKOBAS-karakteristieken (waaronder bijvoorbeeld “veelzijdige benadering van getalbegrip en operaties” en “geen geïsoleerde begripsverwervende activiteiten, speciaal voor het aanvangsonderwijs”) in deze methode terug. Dit zou Freudenthals sneer richting “niveaurekenen” verklaren: Bastiaan (die klaarblijkelijk volgens de methode *Niveaucursus rekenen* les heeft) bleek moeite te hebben zijn rekenvaardigheden in deze context begrijpend toe te kunnen passen; R.A. de Jong, *Wiskobas in methoden* 180-183.

I agree it is not easy to observe individual developments, and the laboratory of the psychologist is the least appropriate place to do it. The easiest place is the family and the next easiest the classroom. So if there are so many families and so many classrooms in the world, why do we know so little about learning processes? The answer is that you need a strategy of observing – a highly sophisticated strategy but which can be expressed in one principle: look and listen with an open mind and have the courage to notice and to report events that most people would consider as too silly to be noticed and to be reported – there might be a minority who can appreciate them, and this minority will be right.¹²¹

Ook buiten het IOWO hamerde Freudenthal in lezingen en voordrachten steeds vaker op het belang van de observatie. Hiermee stak hij wel zijn nek uit in onderwijsland. Want er was volgens Freudenthal moed voor nodig om juist aan die kleine, dagelijkse gebeurtenissen belang te hechten en ze wereldkundig te maken. Zoals hij zelf al aangaf bij het voorbeeld van de wandeling over de rails met Bastiaan werden zijn observaties nogal lacherig ontvangen. Freudenthal speelde daar ook expres op in door zichzelf als ‘onnozele oude leermeester’ af te schilderen en meermalen de zogenaamde onbenulligheid van de gebeurtenissen te benadrukken:

We rijden met hem door de Veluwe waar een geweldige storm veel bomen heeft geveld. Het meest indrukwekkende voor hem is, dat dit hetzelfde hout is als waarmee zijn vader thuis timmert. Hij raakt er niet over uit gepraat – een hele week niet – ‘Bastiaan bomen zagen’.

Ik vertel hier heel onbenullige verhaaltjes – ik waarschuwde u al eerder. Misschien vindt u me kinds. Inderdaad, ik leef mee met een jongetje van nog geen drie, voor wie dit – de gelijksoortigheid van hout in het bos en houten planken – een geweldige ontdekking is en ik ben niet te oud om zijn Aha-Erlebnis mee te voelen. (Of ben ik er net weer oud genoeg voor?)¹²²

Hij stelde zich hierdoor schijnbaar kwetsbaar op als een zich over kinderlijke onbenulligheden verwonderende en vertederde grootvader. Schijnbaar, want juist door zijn al opgebouwde autoriteit als hoogleraar wiskunde én die op het gebied van het wiskundeonderwijs kon hij dit doen zonder zijn geloofwaardigheid te verliezen. Sterker nog, zijn boodschap: terug naar het kleine, de huis-tuin-en-keuken-gebeurtenissen om te leren over wiskunde-leren kwam daardoor des te beter over.

Ich erzählte einmal versammelten Pädagogen, wie sich eine Viereinhalbjährige aufregte, als sie merkte, daß sie auch unsichtbare Dinge (die Beine unter dem Tisch der Herumsitzenden) zählen konnte, von einem Achtjährigen, der sich ebenso aufregte, als er

121 Freudenthal tijdens de openingstoespraak van ‘The first conference of the international group for the psychology of mathematics education’ in Utrecht, 29 augustus – 2 september 1977; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1840.

122 Freudenthal, ‘Cognitieve ontwikkeling – kinderen geobserveerd’, artikel samengesteld uit *Jaarverslag over 1977*, Provinciaals Utrechts Genootschap (1978) 8-18 en Freudenthal, *Weeding and sowing*; Freudenthal, *Appels en peren* 105.

entdeckte, daß ein Hundertstel mehr sei als ein Tausendstel. Es regte keinen der Zuhörer auf, es langweilte sie. Und doch sind das die wahrhaft tiefen mathematischen Erlebnisse, wichtiger als das Einmaleins und algebraische Formeln – wichtig nicht nur psychologisch, auch als Mathematik!¹²³

Bovendien gaf hij met deze boodschap indirect aan, welke lange weg er nog te gaan was bij de ontwikkeling van wiskundeonderwijs. Immers, als iemand met het aanzien dat Freudenthal genoot al aangaf de bron op zijn hurken, in het kleine, alledaagse te zoeken – en zelfs dan nog niet meer vond dan aanwijzingen voor de richting waarin hij antwoorden moest zoeken – was het wel duidelijk dat een pasklare invulling van wiskundeonderwijs nog lang niet verwacht kon worden. En dit was precies Freudenthals boodschap: we staan pas aan het begin van een lange weg. En dat begin, dat was het kleine kind en hoe het in zijn wereld stond. En dan waren het vanzelfsprekend de kleine, schijnbaar onbenullige gebeurtenissen waar het om ging, juist als je op zoek was naar handvatten voor de ontwikkeling van wiskundeonderwijs. Want in die kleine onbenulligheden was wiskunde te vinden.

9.5.2 Het paradigma: voorbeeld der voorbeelden

Leken de observaties die hij ten tijde van ‘Rekendidaktiek’ deed nog voornamelijk bedoeld om bestaande ideeën over onderwijs en kennisvorming te weerleggen, nu vervulden observaties een actievere functie: uitgangspunt en aanzet tot theorie, zo werkte het observeren van kinderen bij Freudenthal. Observaties die leidden tot kleinere inzichten, zoals de eerste wiskundige activiteit van een drie-jarige, maar ook observaties die leidden tot grotere, algemenere inzichten en richtlijnen die hem in de jaren zeventig en tachtig bezig bleven houden.

Freudenthal verkondigde al veel langer voorstander te zijn van het principe van de geleide heruitvinding in het wiskundeonderwijs. Nu kwam daar nog iets bij. Bij het principe ‘het wiskunde leren door actief wiskunde te mogen doen’ lag volgens Freudenthal de essentie in het vinden van een sleutelvoorbeeld: het paradigma.¹²⁴

Wetenschapshistoricus en -filosoof Thomas Kuhn (1922-1996) introduceerde het begrip paradigma in zijn boek *The structure of scientific revolutions* uit 1962.¹²⁵ Hij schetste hierin een ontwikkelingsmodel voor de wetenschap waarin hij een periode van ‘normale wetenschap’ afgewisseld zag met een periode van ‘revolutie’. Die eerste werd gekarakteriseerd door de overeenstemming die er tussen wetenschappers

123 Freudenthal, ‘Der Ärger mit der Mengenlehre’, als artikel: Hans Freudenthal, ‘Was fehlt der modernen Mathematik?’, in: *Deutscher Zeitung* 38 (21 september 1973); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1621.

124 Ook in zijn latere publicaties zou het paradigma een belangrijke rol blijven spelen. Hij schreef hier onder andere over in *Mathematics as an educational task*, maar beter nog kwam de waarde die hij aan het concept ‘paradigma’ hechte naar voren in *Weeding and Sowing*. Ook in *Revisiting mathematics education* kwam hij er uitgebreid op terug.

125 T.S. Kuhn, *The structure of scientific revolutions* (Chicago 1962); G. de Vries, *De ontwikkeling van wetenschap. Een inleiding in de wetenschapsfilosofie* (Groningen 1984) 91-117.

te vinden was. In de normale periode werden door de wetenschappelijke gemeenschap dezelfde prestaties van voorgangers als maatgevend beschouwd. Deze prestaties (en de bijbehorende problemen en methode van onderzoek) functioneerden als typisch, als exemplarisch voorbeeld voor de wetenschapsbeoefening: het paradigma. Wanneer zich voldoende problemen voordeden die niet langer binnen dit kader opgelost konden worden, viel overeenstemming weg en brak een tijd van ‘crisis’ aan. Een wetenschappelijke revolutie was dan nodig om weer tot consensus over een nieuw paradigma en een periode van normale wetenschap te komen.

Kuhns boek en de door hem geïntroduceerde terminologie (waaronder ‘paradigma’) werden in de jaren zestig en zeventig veelbesproken en met name in sociaal wetenschappelijke kring populair. Freudenthal verwees in didactische context nergens naar Kuhns paradigma. Toch zouden ‘paradigma’ en ‘paradigmatic instruction’ in de jaren zeventig een belangrijk onderdeel van Freudenthals didactische terminologie worden. De manier waarop was typerend voor Freudenthals gave om op actuele ontwikkelingen in te springen en ze in zijn eigen gedachtegoed te assimileren door er zijn eigen draai aan te geven.

Een van de eerste keren dat Freudenthal de term paradigma gebruikte, was in zijn artikel ‘Trends in modern mathematics’ van 1962. Daar had hij het over de wiskundige tendens de (wiskundige) taal aan te passen aan de toenemende complexiteit van de wiskundige structuren. Hij zag in deze tendens “a paradigm which shows how mathematics can be applied in chaotic working fields like human language, namely by remodelling the field rather than simply by describing it”.¹²⁶

In 1972 gebruikte Freudenthal de term in meer didactische context in een voordracht.¹²⁷ Net als in zijn artikel van 1962 legde Freudenthal in zijn gebruik van de term paradigma het accent op de discontinuïteit in het leerproces: het paradigma als voorbeeld voor de leerling van andere, nabij gelegen wiskunde en daarmee als uitgangspunt voor uitbreiding van wiskundig inzicht bij de leerling. Het onderliggende idee had zich natuurlijk al eerder gevormd, maar het was pas in 1972 dat hij het voor het eerst zo aan de orde stelde: zoek in het leerproces naar een voorbeeld, dat cruciaal is bij het reflecteren en het je bewust maken van hetgeen je onbewust doet of kent. Een dergelijk voorbeeld stond model en diende als uitgangspunt voor generalisatie naar andere situaties, naar reflectie op het eigen handelen en uiteindelijk naar een sprong in het leerproces en een zekere niveauverhoging. Freudenthals uitgangspunt bleef hierbij overigens dat het (wiskundige) leerproces niet geleidelijk, maar sprongsgewijs verliep.

126 Hans Freudenthal, ‘Trends in modern mathematics’, *ICSV Review* 4 (1962) 54-61, aldaar 61. Zie voor het volledige citaat ook paragraaf 8.4.1.

127 Het begrip paradigma kwam voor in de twee lezingen in 1972: ‘Tendenzen zur Mathematik in der Grundschule’, gehouden op ‘Der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung’ en in de lezing die hij in Argentinië hield, getiteld: ‘The Institute on Developing Mathematical Education (IOWO) in the Netherlands’: Freudenthal, ‘Tendenzen zur Mathematik in der Grundschule’, *Didaktik der Mathematik* 1 (1973) 2-11; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 571.

In order to explain what we like to consider as mathematics, I will stress two main features: mathematizing reality, and generality by paradigms with a vast scope. [...] “Generality by paradigms” aims at a philosophy of interpreting mathematics for the primary level which is opposed to the prevailing ones. We do not believe that abstraction is being achieved by accumulating a large number of concrete examples, nor generality by adducing a collection of special cases, in particular if behavioural responses have to be reinforced, if some technique has to be settled and improved by exercises and drill, but this is not characteristic of mathematics. True mathematics has to be found in the discontinuities of the learning process.¹²⁸

Zo kwamen met Freudenthals hernieuwde aandacht voor het doen van observaties alle belangrijke karakteristieken in zijn visie op het ontwikkelen van wiskundeonderwijs samen: het analyseren van het leerproces, om te zoeken naar de sprongen daarin en het vinden van paradigmatische situaties – waarbij voor hem voor die situaties gold: hoe realistischer, hoe beter. In 1972 vond de gebeurtenis plaats die voor hem ‘het paradigma van het paradigma’ was:

I begin with the event that for me, if my memory does not deceive me, was the paradigm of the paradigm. Certainly I had pressed for paradigmatic instruction for long, and I could sprinkle others and myself with examples of paradigms, but not until a talk with 8-year old (8;2 to 8;6) did I discover the one paradigm that I really found convincing as an example of a paradigm. The area to which it belongs is not included in traditional arithmetic and mathematics teaching – this made my experience possible – though it would fit at least into the second grade, but even kindergarten teachers who participated in our refresher courses tried it convincingly. Meanwhile I expounded this paradigm many times: I drew a map with three towns A, B, C, where A and B are joined by three roads and B and C by two. The question is: In how many ways can I travel from A through B to C? [...] It is characteristic of the fundamental weaknesses of our traditional arithmetic instruction that 8-9 year olds have difficulties with this problem, and that even adults, including people who have enjoyed a higher education in the arts or social sciences, often do not know how to tackle such problems.¹²⁹

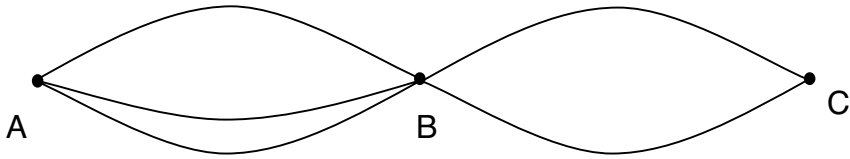
In *Schrijf dat op, Hans* legde Freudenthal uit waarom juist dit vraagstuk voor hem het ‘paradigma van het paradigma’ was, en vatte daarmee de belangrijkste essentie van een goed paradigma samen:

De vraag – en dus het antwoord – staat model voor een rits van vragen, gelijksoortige, ingewikkeldere, als beginpunt van een groot stuk wiskunde, van de onderbouw van de lagere school als je wilt tot heel hoog boven, een vaak door mij beproefde weg.¹³⁰

128 Freudenthal in zijn lezing ‘The Institute on Developing Mathematical Education (IOWO) in the Netherlands’, 1972; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 571.

129 Freudenthal, *Weeding and sowing* 202.

130 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 358.



Hoeveel wegen van A naar C via B?

In zijn lezing van 1972 deed Freudenthal verslag van zijn ervaringen met kinderen met dit probleem. Hij vertelde hoe de kinderen met moeite het probleem oplosten. Daarna gaf hij de kinderen een nieuw vraagstuk: een muis moet door gaten in twee muren bij een stuk kaas komen. De eerste muur heeft drie en de tweede twee gaten:

The children answered the new question without any hesitation. They even answered the question of how many paths I must draw to join four houses directly with each other, that is to say, they answered it by 12 which shows that rather than counting the number of paths they used a paradigm, which in the present case was not refined enough.

This is true mathematics. It does not matter that the original problem was formulated with special numbers. One seemingly special case was sufficient to show the essentials of the structure. It was acquired by a hard but effective learning process, and it led to mastering a host of isomorphic problems. Do children grasp consciously this isomorphy? In general they do not, though it happened, that after such a lesson an intelligent seven years old girl told her parents: “Granddaddy is stupid, is he not? He gave me ten times the same problem and did not notice it.”¹³¹

In dit voorbeeld kwam naar voren hoe kinderen een oplossingsstrategie die ze in een specifieke situatie (onbewust) hadden ontwikkeld en gebruikt, zich bewust konden maken door deze uit die situatie los te maken en in andere, aan de oorspronkelijke gerelateerde situaties toe te passen. Dit maakte het ‘hoeveel wegen zijn er van A naar C via B?’-vraagstuk een goed voorbeeld van het paradigma. Een jaar later schreef Freudenthal over het karakteristieke sprongmatige van het wiskunde leren:

Und Mathematik ist nicht Routine, sondern das Einmalige, aber doch allgemein Bedeutungsvolle. Herauszufinden, was paradigmatisch sein könnte, ist die Kunst der Lehrplanentwicklung in der Mathematik.¹³²

Het zoeken naar paradigma’s was voor Freudenthal de weg in onderwijsontwikkeling. Het concept paradigma was ook een typisch voorbeeld van een door Freudenthal uit zijn (buitenwiskundige) omgeving opgepikte term, die in wisselwerking tussen Freudenthal en het werk van het IOWO verder ingevuld werd. Het was

¹³¹ Lezing van Freudenthal in Argentinië, eind 1972; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 571.

¹³² Freudenthal, ‘Was fehlt der modernen Mathematik?’, *Deutsche Zeitung*, 21 september 1973; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1621.

nauw geliëerd aan een ander IOWO-/Freudenthal-stokpaardje: dat van de rijke context.

Een rijk paradigma. Rijke contexten – ik weet niet wie op het IOWO het eerst deze term heeft gebruikt. In elk geval stamt het idee uit het concreet ontwikkelingswerk van het IOWO en het zal eventjes geduurd hebben voor het bewust gemaakt en verwoord werd – er is inmiddels veel op gereflecteerd. Oorspronkelijk was het alleen maar ‘context’. ‘Rijk’ kwam erbij toen de rijkdom zich onder het ontwikkelen manifesteerde.¹³³

Zelf kon Freudenthal zich achteraf dus blijkbaar niet meer herinneren wie dergelijke termen als eerste in deze context gebruikte. Observeren, het analyseren van leerprocessen, het zoeken naar sprongen en paradigma’s: het kwam allemaal terug in zowel het werk van Freudenthal als in dat van medewerkers van het IOWO. Freudenthal had in zijn gedachtegoed de basis hiervoor al gelegd in de jaren vijftig en zestig, maar zag het nu ook in de praktijk gebracht, uitgewerkt en toegepast in de onderwijsontwikkeling van het IOWO.

Als er één leerproces was dat van deze combinatie profiteerde, dan was het wel Freudenthals eigen leerproces. Met het IOWO als middel om zo vaak hij wilde tot de essentie – die van de realiteit in de klas – af te dalen, kon hij voor het eerst zijn tot nu toe voornamelijk theoretische beschouwingen over het wiskundeonderwijs aanscherpen, concreet maken en onderbouwen met praktijkervaringen. In combinatie met zijn hervonden enthousiasme voor de wereld van (zijn klein)kinderen leverde dit stof voor veel voordrachten, artikelen en daarmee ook voor zijn boeken.¹³⁴

9.5.3 Freudenthal ziet het zo: getalbegrip en didactische fenomenologie

Bij het observeren van jonge kinderen met een ‘wiskundige bril’ is de ontwikkeling van het getalbegrip een van de eerste dingen die in het oog springt. Zo verging het Freudenthal bij zijn eigen kinderen. Al in de aantekeningen voor ‘Rekendidaktiek’ noteerde hij observaties van tellende zoons.¹³⁵ Ook tijdens de wandelingen met Bastiaan kwam het tellen en het getalbegrip regelmatig aan de orde.

Getalbegrip was ook een vaak terugkerend onderwerp in Freudenthals artikelen en boeken in de jaren zeventig. Om een paar redenen nam het in de ontwikkeling van zijn gedachtegoed een belangrijke plaats in. Allereerst was de New Math-benadering van het getalbegrip een van de hoofdpunten van Freudenthals kritiek op New Math-ontwikkelingen voor het rekenonderwijs. In de tweede plaats was de ontwikkeling van het getalbegrip voor Freudenthal nauw verbonden met observe-

¹³³ Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 358.

¹³⁴ Deze thema’s – observeren en analyseren van leerprocessen, sprongen en discontinuïteiten, paradigma’s en wiskunde leren door wiskunde doen in realistische context – blijven terugkeren in zijn latere publicaties. Zo komt het paradigmatisch zijn van wiskundige stof voor in *Mathematics as an educational task* (met name voor de hogere wiskunde van het middelbare en universitaire onderwijs) en in *Weeding and sowing* komt het uitgebreid aan de orde op een meer abstracte manier als gereedschap voor onderwijsontwikkeling.

¹³⁵ Zie ook het ‘tik, tak en boem’-voorbeeld in paragraaf 9.4.1.

ren als hulpmiddel bij het ontwikkelen van wiskundeonderwijs. Tot slot zou het een indirecte aanleiding geven tot de ontwikkeling van een voor Freudenthal belangrijk didactisch handvat: didactische fenomenologie.

Getalbegrip in New Math

Onder invloed van New Math en de daarmee samenhangende wens tot modernisering van het rekenonderwijs kreeg ook het getalbegrip de nodige aandacht. Eind jaren zestig lag in het rekenonderwijs in Nederland de nadruk nog hoofdzakelijk op het mechaniseren van rekentechnieken.¹³⁶ Onder invloed van New Math kreeg het door de leerling zelf verkrijgen van (wiskundig) inzicht in zijn handelen meer nadruk, ook op de lagere school. De aansluiting met de ontwikkeling van het kinderlijk denken werd daarbij gezocht in de moderne wiskunde, met name in de logische structuren. Verzamelingsleer werd zo de nieuwe basis voor het rekenonderwijs.

Een rechtvaardiging voor deze invalshoek vonden voorstanders in het werk van Piaget. Voor Freudenthal was deze ontwikkeling een doorn in het oog. In een interview voor de *Haagse Post* in 1969 sprak hij hierover:

Prof. Freudenthal heeft vooral bezwaar tegen de in sommige leerboeken toegepaste benadering van de wiskunde, geheel vanuit de verzamelingsleer. ‘Dat is een grote vergissing’, meent hij, ‘je vindt dat in veel van de Amerikaanse literatuur, maar het is allemaal fout wat daar gebeurt. Dat hele gedoe is afkomstig van de Zwitserse psycholoog Piaget, waar sommige mensen in het wiskundeonderwijs wiskunde van schijnen te leren. Ik heb het al aan diverse vakmensen uitgelegd en die zeiden dan steeds weer: wat stom dat we die fout niet eerder hebben gezien.’¹³⁷

Wat was het geval? Piaget en zijn assistente Szeminska wijdden in 1941 een boek aan de ontwikkeling van het getalbegrip: *La g n se du nombre chez l’enfant*, waarin kinderen van diverse leeftijden getoetst werden op hun begrip van het kardinaalgetal (aantal). Uit Piagets bevindingen was – ten onrechte – afgeleid dat het begrip van het kardinaalgetal in de ontwikkeling van kinderen de belangrijkste plaats innam, belangrijker dan het ordinaalgetal (telgetal). Onterecht, zoals Piaget zelf ook al aangaf in een voetnoot van een artikel uit 1973:

Several authors (Freudenthal, etc.) seem to have understood that I think the ordinal number is more primitive than the cardinal number, or the opposite. I have never made such a statement and have always considered these two aspects of finite numbers indissociable and psychologically reinforcing one another in a synthesis that goes beyond both the inclusion of classes and the order of asymmetrical transitive relations.¹³⁸

136 De meest gebruikte rekenmethoden waren dan ook mechanistische methoden, vergelijkbaar met *Fundamenteel rekenen* (zie ook paragraaf 4.3); De Jong, *Wiskobas in methoden* 133 e.v.

137 Freudenthal in: Vuysje, ‘De wiskundeles verandert: $3+2=1$ ’, *Haagse Post* (december 1969, januari 1970); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1847.

138 J. Piaget, ‘Comments on mathematical education’, in: A.G. Howson, ed., *Developments in mathematical education. Proceedings of the second international congress on mathematical education* (Cambridge 1973) 79-87, aldaar 82.

De uitkomsten van Piagets onderzoek suggereerden dat de spontane ontwikkeling van het getalbegrip bij kinderen een grote overeenkomst vertoonde met de logische structuur van moderne wiskunde, waarbij met name het één-één afbeelden van twee verzamelingen op elkaar een belangrijke plaats in zou nemen. De conclusie dat de logica en structuur van moderne wiskunde dus als basis voor het rekenonderwijs genomen moesten worden, was vervolgens makkelijk getrokken.

Zo maakten de Franse Nicole Picard en de Canadees Zoltan Dienes in hun ontwerpen voor rekenonderwijs al op de kleuterschool een begin met logisch redeneren. In Nederland is Picards werk als uitgangspunt gekozen bij de structuralistische rekenmethode *Denken en Rekenen*, waarbij ook mevrouw Freudenthal betrokken was.¹³⁹ Volgens de Belgische pedagoog Valeer van Achter, redactielid van *Denken en rekenen*, moest er gezocht worden naar “de fundamentele en wiskundig verantwoorde vooroefeningen op het getal”.¹⁴⁰ Hij legde daarbij net als Dienes de nadruk op het gebruik van de één-één-afbeelding tussen twee verzamelingen om bij het getalbegrip van jonge kinderen aan te sluiten.

Redactielid De Iongh beschreef in het bij de methode horende *Tijdschrift Denken en Rekenen* hoe de verzamelingenleer aan het wiskunde-inzicht kon bijdragen. Hij sprak hierbij van het ‘ondercomplex’: “het geheel van de niet gemakkelijk in woorden te beschrijven “voorstellingen” en “herinneringen”, wat ons het wiskundige inzicht schonk”. Bij het vastleggen en aanleren van exact taalgebruik en het koppelen hiervan aan het al aanwezige ‘ondercomplex’ was volgens hem verzamelingenleer nodig:

Als we op deze wijze pogen het ‘ondercomplex’ voor het gewone rekenen te ontwikkelen, blijkt dat dit een deel vormt van wat de wiskundigen beschrijven in de elementaire verzamelingsleer en wel het deel, dat alleen de eindige verzamelingen bevat. Dit is de wezenlijke rechtvaardiging ervoor, dat we deze elementaire verzamelingsleer – neen, niet apart gaan bestuderen – maar wel gaan gebruiken om tellen en rekenen van de goede ‘plaatjes’ te voorzien. Dat we daardoor reeds heel vroeg de leerlingen vertrouwd maken met dat fundamentele deel van de wiskunde, de verzamelingsleer, dat de woorden en begrippen levert, waarmede tegenwoordig het gehele bouwwerk van de wiskunde wordt opgetrokken, is een extra voordeel, nu ook de wiskunde van de middelbare school zich meer en meer rondom de verzamelingsleer gaat herstructureren.¹⁴¹

In het onderzoek van R.A. de Jong uit 1986 kreeg de rekenmethode *Denken en rekenen* als typering: “biedt ruime mogelijkheid tot wiskundig rijk onderwijs”, maar met de kanttekening “of deze gerealiseerd kunnen worden is de vraag”. De methode zou uiteindelijk niet aanslaan in Nederland. In 1974 verschenen de laatste deeltjes.¹⁴²

139 De Jong, *Wiskobas in methoden* 158-161. *Denken en rekenen* werd uitgegeven door Malmberg. De eerste druk verscheen in 1968. In 1976 was de methode uit het fonds genomen. Zie ook paragraaf 8.5.2.

140 V. van Achter, *De modernisering van het rekenonderwijs op de basisschool* ('s-Hertogenbosch 1969) 23.

141 J.J. de Iongh, ‘Zeggen en zien’, in: *Keur uit de eerste jaargang van het tijdschrift Denken en Rekenen* ('s-Hertogenbosch 1970) 7-9, aldaar 8-9.

142 De Jong, *Wiskobas in Methoden* 161.

Getalbegrip en Bastiaans aalbessen

Dergelijk gebruik van verzamelingenleer op de lagere school was typerend voor de New Math-aanpak van het rekenonderwijs. Op deze manier kon ook op de basisschool al een begin gemaakt worden met wiskunde. Typerend voor deze aanpak met verzamelingen was om vervolgens de nadruk op het getalbegrip als *aantal* (kardinaalgetal of ‘numerosity aspect’) en niet als *telgetal* (ordinaalgetal, belichaamd door de oneindig doorlopende getallenrij) te leggen. Hierbij werd dan verwezen naar het door Cantor eind negentiende eeuw gedefinieerde kardinaalgetal (of: machtigheid). De grondslagen van de getallenleer en de bijbehorende rekenwetten leken vervolgens met het grootste gemak ‘bewezen’ te kunnen worden. Het (af)tel-len werd in deze aanpak vervangen door het kardinaalaspect van het getal en het één-één afbeelden en vergelijken van twee (eindige) verzamelingen.

Freudenthal verzette zich in diverse artikelen tegen deze aanpak.¹⁴³ “Dikdoenerij van handige auteurs” noemde hij het, dikdoenerij die volgens hem niets met wiskunde te maken zou hebben.¹⁴⁴ Zowel wiskundig als didactisch vond hij het fout om het aantalaspect als basis voor de natuurlijke getallen te nemen en daarbij het principe van volledige inductie te negeren. Wiskundig was deze aanpak ‘ronddraaien in een kringetje’, want ook bij het ontwikkelen van een theorie van eindige verzamelingen, die dan als basis van de natuurlijke getallen moest dienen, was uiteindelijk volledige inductie nodig:

The majority of the manuals suggest a concept of the natural number based purely on set theory and ignore or obscure the mathematical fact that this is impossible. Natural numbers are introduced as the cardinals of finite sets; but to explain what a finite set is, the familiar sequence of natural numbers is used. This is simply going around in a circle.¹⁴⁵

En ook didactisch was het ‘enzovoorts ...’ van de eindeloze getallenrij volgens Freudenthal voor kinderen onmisbaar bij de ontwikkeling van het getalbegrip. Het primitievere begrip van ‘aantal’ waarop sommige methoden steunden, was volgens Freudenthal ook bij dieren aanwezig en zeker niet afdoende als uitgangspunt:

Ik heb leerboekjes voor de lagere school gezien, waarin de kindren na twee jaar nog niet konden tellen. [...] Ze leren dan alleen om te zien dat vijf meer is dan drie enzovoort. Dat kunnen dieren ook. Een vogel ziet of een van de vijf eieren uit zijn nest verdwenen is, maar een vogel kan daarmee nog niet tellen! Die benadering is de puurste waanzin.¹⁴⁶

143 Freudenthal in: Vuysje, ‘De wiskundeles verandert: $3+2=1$ ’, *HP Magazine*; Freudenthal, ‘Les tendances nouvelles de l’enseignement mathématique’, *Revue de l’Enseignement Supérieur* 46-47 (1969) 23-29; Freudenthal, ‘Phaenomenologie van het getalbegrip’, *Wijsgerig Perspectief* (1971) 225-235; Freudenthal, ‘Tendenzen zur Mathematik in der Grundschule’, *Didaktik der Mathematik* 1 (1973) 2-11; Freudenthal, *Weeding and sowing*.

144 Freudenthal, ‘Ontsporingen’, *Wiskobas Bulletin* 1 (1971); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1351.

145 Freudenthal, ‘Recent tendencies in the teaching of mathematics’ 16.

146 Freudenthal in: Vuysje, ‘De wiskundeles verandert: $3+2=1$ ’; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1847.

Na dit eerste primitieve aantalaspect was voor de verdere ontwikkeling van het getalbegrip Freudenthals “psychologische *Enz.*” van groot belang. Hij volgde daarbij dezelfde gedachtegang als in zijn eerste *Euclides*-artikel uit 1948:¹⁴⁷

Het kind leert niet rekenen door Venn-Diagrammen [sic] met elkaar te vergelijken, maar door te tellen. Het telt op, niet door onoverzichtelijke verzamelingen bij elkaar te gooien, maar door *verder* te tellen. Het trekt af, door terug te tellen, het vermenigvuldigt de 3 door bij drieën verder te tellen. Het primitieve aantal, dat ook dieren bezitten, is spoedig door het veel effectievere telgetal overschaduwd.¹⁴⁸

Natuurlijk moest het ‘aantal’ in het rekenonderwijs ook aan de orde komen, maar “het is een wiskundig [sic] én didactisch drogbeeld als men meent, het met het aantal alleen te kunnen doen”.¹⁴⁹ Het telgetal speelde volgens Freudenthal in de vorming van het getalbegrip de eerste en belangrijkste rol, en dat moest in het rekenonderwijs óók onderkend worden.¹⁵⁰

Tellen was volgens Freudenthal de eerste bewuste wiskundige activiteit van een kind. Het begon als ritmisch spel.¹⁵¹ Spelenderwijs ondervond het kind vervolgens de invariante eigenschappen van dat tellen. Dit zag Freudenthal terug bij het observeren van zijn (klein)kinderen. Zo beschreef hij bijvoorbeeld hoe zijn toen vijfjarige kleindochter eindeloos plezier beleefde aan het tellen van alle ogen, oren, voeten etc. van een gezelschap. Het hoorde voor haar bij de lol van het spel elke keer opnieuw tot hetzelfde aantal te komen bij het tellen.¹⁵² Juist het tellen (en niet zozeer het één-één afbeelden van twee verzamelingen op elkaar) was op haar niveau het ultieme bewijs van ‘hetzelfde zijn’.

Het wiskundige concept ‘verzameling’ was volgens Freudenthal van een hoger niveau dan het vormen van getallen.¹⁵³ Desalniettemin was het mentaal vormen van verzamelingen wel nodig voor het getalbegrip, maar met een andere reden dan in New Math-kringen aangevoerd werd:

What matters is forming certain mental objects of which the numbers are properties; I call these objects sets because this is what we do with mathematical objects of this kind. Several times I signalled the confusion, which is all the fashion now: rather than forming sets, which is important for the number concept, one attempts to instil the set concept in the children. And one step further, rather than numbers one wishes to teach the children the number concept. It is ever and again the skipping of levels in the learning process. In the genesis of the set and number concept the lowest level is con-

147 Zie ook paragraaf 5.3.2.

148 Freudenthal, ‘Phaenomenologie van het getalbegrip’, *Wijzgerig Perspectief* (1971) 225-235, aldaar 234.

149 *Ibid.*, 234.

150 Freudenthal, *Mathematics as an educational task* 191. Van Parreren schreef in zijn *Leren op school* iets vergelijkbaars als hij het heeft over de trapsgewijze vorming van begrippen volgens de theorie van de Russische psycholoog Gal’perin. Hij beschrijft de noodzaak van het aftellen als eerste trap in het leren optellen; C. van Parreren, *Leren op school* (Groningen 1976 (tiende herziene druk)) 30-31.

151 Freudenthal, ‘Recent tendencies in the teaching of mathematics’ 15.

152 Freudenthal, *Mathematics as an educational task* 191.

153 Zie ook: Freudenthal, ‘Kennst du deinen Vater?’, *Der Mathematikunterricht* 5 (1974) 7-18, 11.

stituting sets and numbers, and only at far higher levels is the constitution of the set concept and the number concept at home.¹⁵⁴

Bij Bastiaan zag Freudenthal de uitzondering op de regel bij de ontwikkeling van het getalbegrip. Bastiaan had volgens Freudenthal als kleuter geen plezier in het tellen-om-het-tellen, zoals de meeste kinderen hadden. Zijn ‘verwerving van het getalbegrip’ vond plaats in één duidelijke sprong in zijn leerproces, waarbij Freudenthal aanwezig was. Hij vertelde erover op een conferentie in 1975:

Dat kind weigert te tellen, de moeder werd wanhopig omdat het kind nooit zou leren tellen en het begon pas te tellen nadat het volledig het getalbegrip verworven had. De verwerving van het getalbegrip was heel duidelijk één ogenblik. We zaten te eten, aan het dessert. Hij had aalbessen op zijn bord. Hij hield het lepeltje omhoog en zei: dat is zoveel als wij hier aan tafel zitten. We waren met zijn zessen aan tafel en er lagen zes aalbessen op de lepel. Ik vroeg hem waarom, toen zei hij dat zie ik zo, en toen zei hij: er zijn twee kinderen, twee volwassenen en twee opa en oma.¹⁵⁵

Een paar dagen na dit voorval begon Bastiaan pas met tellen. Het was volgens Freudenthal uitzonderlijk voor een kind, om eerst zoals Bastiaan het getalbegrip te verwerven en daarna pas te tellen. Hij benadrukte in deze lezing het belang van de mentale verbinding die Bastiaan op het cruciale moment legde.¹⁵⁶ Weliswaar waren de personen en de aalbessen concreet aanwezig, het meest essentiële bij het ontstaan van het getalbegrip in dit voorbeeld was het ontstaan van het mentale aspect, het losmaken van het concrete.

De ‘aalbessen’-observatie zou Freudenthal – net als die van het lopen op de spoorrails – in veel artikelen en voordrachten opvoeren. Het was voor hem het ultieme voorbeeld van een discontinuïteit in het leerproces. Waar het volgens Freudenthal in deze observatie op aankwam verwoordde hij als volgt:

It shows that rather than sets it is structures that are fundamental in the mathematical development of children. Indeed how can an unstructured chaos, which a set is supposed to be, attain interest? The child likes structure and tries to put structures into the world around it in order to measure it.¹⁵⁷

Structuur was het sleutelwoord bij het ontwikkelen van wiskunde bij jonge kinderen. Aantal was een eigenschap van verzamelingen zonder structuur. Dus om het

¹⁵⁴ Freudenthal, *Weeding and sowing* 216.

¹⁵⁵ Freudenthal op de ‘Noordwijkerhout conferentie’ in 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 412. Ook gebruikt en beschreven in onder andere: de voordracht in Polen in 1975, Freudenthal, ‘Wat is meetkunde?’, *Euclides* 50 (1974/75) 151-160, Freudenthal, ‘Wandelingen met Bastiaan. Wereldverkennen van de straatstenen tot de maan’, *Pedomorfose* 25 (1975) 51-64, aldaar 61, Freudenthal, *Weeding and sowing* 281.

¹⁵⁶ Ook hier is een parallel te trekken met Van Parrerens beschrijving van de theorie van de Russische psycholoog Gal’perin. Volgens Gal’perins trapsgewijze vorming van een mentale handeling wordt een handeling eerst op materieel, dan op verbaal en daarna pas op mentaal niveau geleerd; Van Parreren, *Leren op school* 32.

¹⁵⁷ Voordracht in Polen, 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 606.

aantal als een mentaal object te ervaren, moest het kind het kunnen losmaken van de structuur van de te beschouwen verzamelingen. Dat was de sprong in het leerproces bij het verwerven van getalbegrip. In het geval van de aalbessen was het duidelijk:

The sets to be compared bear heavy structure, a structure by generations and by sides of the table of the one set, and the geometrical arrangement of the six [currants] in the second. By these heavy structures comparing the sets is achieved. Number is a property of sets without structure, and in order to constitute number as a mental object, the child has to eliminate – not necessarily explicitly but certainly implicitly – structures from sets to be compared.¹⁵⁸

Om het getalbegrip te verwerven moest men dus allereerst op zoek naar structuur. De één-één-afbeelding tussen twee verzamelingen waarop binnen New Math de nadruk gelegd werd, deed volgens Freudenthal aan dit inzicht te kort:

Onze verzamelingstheoretische vooroordelen eisen, dat we de relatie, die Bastiaan tussen de aalbessen en de personen schijnt te constitueren, als één-één-afbeelding interpreteren, maar het is een veel globalere relatie, waarbij verzamelingen niet in elementen geatomiseerd, maar in groeperingen gestructureerd worden.¹⁵⁹

“Ik zie het zo” en didactische fenomenologie

Het kwam er bij het observeren van jonge kinderen volgens Freudenthal op aan, alert te zijn op uitspraken als de “ik zie het zo” van Bastiaan in het aalbessenvoorbeeld. Dat gold niet alleen bij het verwerven van het getalbegrip. Freudenthal ging hierin zo ver dat hij meetkunde op de lagere school definieerde als “hetgeen in termen van het gedrag van de leerling door de reactie “ik zie het zo” op de vraag “waarom” gekarakteriseerd kan worden”.¹⁶⁰ De kunst was vervolgens, de kinderen zo ver te krijgen “hun interne visioenen als het ware naar buiten [te] laten kondenseren [sic]”, zonder ze hierbij een niet passend taalniveau op te dringen.¹⁶¹

Wie wiskunde onderwijst, ziet gaarne dat zijn leerlingen hun gedachten in onberispelijke formuleringen kunnen uiten; te schatten hoe ver de onderwijzende mag gaan met deze eis, is iets waarvoor tact en wijsheid van hem gevraagd worden. Wanneer het ‘ik zie het zo’ van een leerling door stamelen of het opleggen van formuleringen door de onderwijzende wordt vervangen, is men didactisch geen stap verder. Wie onderwijst, ga eens bij zich zelf na, hoe moeilijk het zijn kan te beredeneren hetgeen men al helder en duidelijk ziet.¹⁶²

Het soort meetkunde dat begin jaren zeventig in het WISKOBAS-team ontwikkeld werd, sloot volgens Freudenthal aan bij de sfeer van “ik zie het zo”: “leerlingen re-

¹⁵⁸ Ibid.

¹⁵⁹ Freudenthal, ‘Wat is meetkunde?’, *Euclides* 50 (1974/75) 151-160, 154.

¹⁶⁰ Ibid., 152.

¹⁶¹ Ibid.

¹⁶² Ibid., 153.

deneren met hand en oog, aan het model en op ’t papier, niet in een taalkundig vastgelegd begrippensysteem”.¹⁶³

De vraag, in hoeverre het aangeboden materiaal voorgestructureerd mocht of moest zijn was daarbij van belang. Freudenthal pleitte ervoor niet met gestructureerd materiaal te starten, maar fenomenologisch rijker materiaal te kiezen in een verticale leerstofplanning, waarbij dezelfde leerstof op steeds hoger niveau behandeld werd. Maar hoe pakte men zoiets nu aan?

Er was nog veel werk te verrichten bij het ontwikkelen van wiskundeonderwijs vanuit de door Freudenthal (en in WISKOBAS) voorgestane visie. Het aanbieden van een rijke context was slechts een begin. Door leerprocessen te observeren moest men verder zoeken naar niveaustructuren en beslissende stappen in het leerproces. In zijn artikelen beschreef Freudenthal legio voorbeelden uit zijn eigen observaties van (klein)kinderen en uit de ontwerpen waarmee bij WISKOBAS geëxperimenteerd werd. Maar een theoretische methode bij het ontwikkelen van wiskundeonderwijs gaf hij ook: “didactische fenomenologie” noemde hij die.

Zonder dat de term ‘fenomenologie’ genoemd werd, kon een kiem van dit theoretisch hulpmiddel al gevonden worden in Freudenthals artikel ‘De algebraïsche en analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde’ uit 1948. Hierin pleitte hij voor het doordenken van de leerstof door de leraar vanuit een (niet per se wiskundig, maar zeker ook didactisch!) hoger standpunt. Vervolgens maakte hij een begin met wat hij in de jaren zeventig de didactische fenomenologie van het getalbegrip zou gaan noemen, hoewel bij lange na niet zo grondig als hij dat dertig jaar later zou doen.¹⁶⁴

Een eerste echte aanzet tot didactische fenomenologie volgde in Freudenthals artikel ‘Phaenomenologie van het getalbegrip’.¹⁶⁵ Het artikel gaf een wiskundige analyse van het getalbegrip waarmee tot een betere benadering van de bijbehorende didactiek kon worden gekomen. Freudenthal deed dit om de misstanden die hij zag bij de benadering van de ontwikkeling van het getalbegrip te kunnen bestrijden. Tegelijkertijd gaf hij een doortimmerde basis waarop een betere benadering zou kunnen worden gebouwd.

Aan ‘didactische fenomenologie’ wijdde Freudenthal in 1984 het boek *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren. Deel I*.¹⁶⁶ De oorsprong van dit boek was een artikel uit 1973, getiteld ‘Lernzielfindung im Mathematikunterricht’.¹⁶⁷ Dit artikel was als een van de hoofdstukken in het boek opgenomen. Hierin beschreef hij onder andere de werkwijze van het IOWO bij het ontwikkelen van wiskundeon-

¹⁶³ Ibid., 160.

¹⁶⁴ Zie ook paragraaf 5.3.2.

¹⁶⁵ Freudenthal, ‘Phaenomenologie van het getalbegrip’, *Wijsgerig Perspectief* (1971) 225-235.

¹⁶⁶ Freudenthal, *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren. Deel I* (Utrecht 1984). Het boek verscheen ook als: *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Dordrecht 1983). De Duitse versie is niet gepubliceerd (‘Didaktische Phänomenologie mathematischer Strukturen’, 1981); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 632.

¹⁶⁷ Freudenthal, ‘Lernzielfindung im Mathematikunterricht’, *Zeitschrift für Pädagogik* 20 (1974) 719-738.

derwijs en de zoektocht naar leerdoelen door het observeren van leerprocessen. “Didactische Phänomenologie eines mathematischen Gebietes” was volgens hem voor alle betrokkenen bij dit proces een belangrijke theoretische methode:

Niveaus moeten niet in de *leerstof*, maar in het *leerproces* gezocht worden. Om die te vinden, moet men leerprocessen observeren. Dit kan worden voorafgegaan en begeleid door een analyse van de leerstof, in denkbeeldige processen geplaatst, die ik didactische fenomenologie heb genoemd.¹⁶⁸

Hierbij had hij geen filosofisch getinte fenomenologie voor ogen (dit in tegenstelling tot de rol die ‘fenomenologie’ bijvoorbeeld speelde in het werk van Langeveld), maar “eine Analyse der Mathematik als Phänomen, nicht nach ihren Grundlagen”, een gedetailleerde analyse van de bronnen van wiskundige ideeën in de werkelijkheid.¹⁶⁹ De toevoeging “didactische” duidde erop dat dit uit didactisch perspectief moest geschieden: gericht op het verkrijgen van al dat nodig is om het ‘ding’, het ‘fenomeen’, wiskundig te kunnen organiseren. In zijn boek van begin jaren tachtig gaf Freudenthal een uitgebreide omschrijving:

Onze wiskundige begrippen, structuren, denkbeelden zijn uitgevonden als werktuigen om de verschijnselen van de fysische, sociale, mentale wereld te ordenen. *Fenomenologie* van wiskundige begrippen, structuren, denkbeelden betekent: ze in hun relatie tot de fenomenen te beschrijven waarvoor zij geschapen en waartoe zij uitgebreid werden in het leerproces van de mensheid; en voorzover deze beschrijving met het leerproces van de jongere generatie te maken heeft, wordt zij *didactische fenomenologie*, wegwijzer voor de onderwijsgevende naar de instap van de lerende in het leerproces van de mensheid. Niet in haar geschiedenis, maar in haar nog voortdurende leerproces – sloppen en omwegen vermijdend en levende wortels sparend en versterkend.¹⁷⁰

Hoe belangrijk hij didactische fenomenologie als uitgangspunt bij het ontwikkelen van wiskundeonderwijs ook vond, uiteraard was een dergelijke theoretische analyse voor Freudenthal nooit afdoende bij de ontwikkeling van wiskundeonderwijs. Hij presenteerde het in de jaren zeventig dan ook slechts als *hulp*middel, vanachter het bureau gemaakt en voorlopig niet meer opleverend dan een (voortdurend voor verbetering vatbare) lijst ter ondersteuning van de *observerende* onderwijsontwikkelaar.

9.5.4 Het recht op zindelijke wiskunde voor allen

Met de nadruk op het observeren van leerprocessen bij kinderen schoof het uitgangspunt bij de ontwikkeling van wiskundeonderwijs steeds verder weg van de wiskunde als wetenschap. Niet alleen binnen het IOWO, maar ook in Freudenthals

¹⁶⁸ Freudenthal, ‘Taxonomieën – waarvoor?’, *Faraday* 45 (1976) 142; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 610.

¹⁶⁹ Freudenthal, ‘Lernzielfindung im Mathematikunterricht’, *Zeitschrift für Pädagogik* 20 (1974) 719-738, 730.

¹⁷⁰ Freudenthal, *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren* 9-10.

werk kwam dit aspect steeds vaker aan de orde. Door in de eerste plaats naar het lerende kind te kijken, kwam als vanzelf de wereld van dat kind als nieuw uitgangspunt naar voren. Deze zogenaamde realistische vakdidactiek was uitermate typerend voor de jaren zeventig.¹⁷¹

De democratische onderwijsontwikkelingsprocedure van het IOWO werkte dit ook in de hand. Geen “reglementerende leerplanontwikkeling vanachter het bureau” zoals Freudenthal het omschreef, maar “democratische participatie met het veld”, waarbij de ontwikkelaars de onderwijzers, PA-docenten en -studenten en scholen nauw bij het ontwikkelwerk betrokken.¹⁷² Dat hierbij ook de doelgroep het proces heel direct beïnvloedde, was vanzelfsprekend. In het onderwijsleerplan van WISKOBAS werd dit als volgt omschreven:

Het kader van de algehele doelstelling en van wiskundeonderwijs, van waaruit dit ontwerp ontwikkeld is, is:

- begeleiding van de kinderen in hun benadering van de wiskundige aspecten van de werkelijkheid, zoals men zich die nu en in de (nabije) toekomst voorstelt
- wiskundige vorming in harmonie met persoonlijke aanleg en met redelijke eisen van samenleving en voortgezette opleiding¹⁷³

En tegelijkertijd met en door dit uitgangspunt veranderde ook het doel van het nieuw te ontwikkelen wiskundeonderwijs: de leerstof moest in de eerste plaats ‘nuttig’ voor de leerling zijn. Freudenthal legde in het *Wiskobas Bulletin* uit wat voor hem hierbij het criterium was:

Je kunt je leerlingen niet uitleggen wat er allemaal met de wiskunde gedaan kan worden, en dat hoeft ook niet. Je kunt wel – op elk nivo [sic] – laten zien *dat* er iets met wiskunde kan worden gedaan en dat *iedereen* er iets mee kan doen. Iemand opzadelen met een wiskunde waar hij niets mee kan doen, is te veel van het goede. Iemand verstoken doen zijn van die wiskunde die hij wel kan gebruiken, is hem geestelijk uit-hongeren. [...] Laat ik dan dichter bij de grond blijven, heel dicht bij de grond. Ik dacht dat we alle leerstof moeten weren, waarvan we, als de leerling vraagt ‘waarvoor dient het?’ met een goed geweten alleen maar kunnen zeggen: ‘nergens voor’.¹⁷⁴

Het nuttigheids criterium vierde dus hoogtij. Het argument dat wiskunde voor de lerende ‘vormende waarde’ had, raakte daarmee in deze periode buiten beeld. De meer kindgerichte houding van de ontwikkelaars en de grote maatschappelijke relevantie van de wiskunde lagen hieraan ten grondslag. Freudenthal droeg hieraan bij door de organisatie van het colloquium ‘How to teach mathematics so as to be useful’ van 1967. In zijn voordracht op dit colloquium wijdde Freu-

171 Zie ook: Nelissen, ‘Eeuwenlang rekenen’, *Willem Bartjens* 18 (1998/99) 36-39.

172 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 589.

173 ‘Onderwijsleerplan Wiskobas’, zoals deze uitgedeeld was op de WISKOBAS werkweek te Scheveningen van 16-19 maart 1971; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 407.

174 Freudenthal, ‘Een pijnlijke operatie’, *Wiskobas Bulletin* 3 (1973) 118-122; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1362.

denthal enkele woorden aan het ‘waarom’ van het onderwijzen van ‘nuttige wiskunde’:

Since mathematics has proved indispensable for the understanding and the technological control not only of the physical world but also of the social structure, we can no longer keep silent about teaching mathematics so as to be useful. In educational philosophies of the past, mathematics often figures as the paragon of a disinterested science. No doubt it still is, but we can no longer afford to stress this point if this keeps our attention off the widespread use of mathematics and the fact that mathematics is needed not by a few people, but virtually by everybody.¹⁷⁵

Het antwoord op de vraag ‘hoe te bereiken dat de onderwezen wiskunde nuttig is?’ had Freudenthal al klaar. Geen toegepaste wiskunde onderwijzen, geen zuivere wiskunde onderwijzen om achteraf toe te passen, maar:

The problem is not what kind of mathematics, but how mathematics has to be taught. In its first principles mathematics means mathematizing reality, and for most of its users this is the final aspect of mathematics, too. For a few ones this activity extends to mathematizing mathematics itself.¹⁷⁶

Door de leerling te leren mathematiseren deed je de wiskunde en de leerling pas recht. Het domweg aanleren van wiskundige technieken had volgens Freudenthal geen enkel nut:

Nobody can teach and nobody can learn enough prefabricated mathematics to meet all possible mathematizable situations. Moreover a mathematical subject that has reached the state of a technique, can with more efficiency be handled by machines than by man. [...] Mathematics as an aim in itself counts for a very small minority only. For all others mathematics is important enough to play a part in their education.¹⁷⁷

‘Wiskunde voor allen’, dat was zijn boodschap. En met de invalshoek van het leren mathematiseren in de realiteit zou dat mogelijk moeten zijn op een manier die functioneel was in de wereld van de gebruiker: het kind. Liever deed Freudenthal zo min mogelijk concessies aan die realiteit waarin wiskunde ontdekt moest worden. De ‘spreekjesverhalen’ waarin de lespakketjes van het IOWO gegoten werden, vond hij vaak te vergezocht en te kunstmatig:

Ik vind dergelijke dingen kun je ook realistisch doen en niet met kabouters. Die kaboutermentaliteit ... Maar goed, misschien wat ouderwets van me of zo. Ik erger me wanneer ik mijn kleinkinderen naar Paulus de boskabouter zie kijken. Ze vinden het verschrikkelijk leuk, maar het stoort me op één of andere manier.¹⁷⁸

175 Freudenthal, ‘Why to teach mathematics so as to be useful’, *Educational Studies in Mathematics* 1 (1968) 3-8, aldaar 4-5.

176 Ibid., 7.

177 Hans Freudenthal, ‘Allocution du premier Congrès International de l’Enseignement Mathématique Lyon 24-31 août 1969’, *Educational Studies in Mathematics* 2 (1969) 135-138, aldaar 136.

178 Hans Freudenthal in het interview: ‘Wiskunde in andere wetenschappen’, in: *De Vakidoot. Maand-*

Het lag hem meer om bij het zoeken naar wiskundeonderwijs zo dicht mogelijk bij de dagelijkse werkelijkheid te blijven. Bovendien zag hij een gevaar van zekere gemakzucht en afdwalen in het uitwijken naar sprookjeswerelden:

Maak je het jezelf niet bijzonder makkelijk met die sprookjeswerelden? Zou je niet, als je die niet had, naar veel reëlere werelden zoeken om de kinderen aan te bieden dat ze daarin werken? [...] Beïnvloed je de stof niet al te zeer misschien te ongunstig door nu alles in zo'n wereldje te stoppen? ¹⁷⁹

Volgens Freudenthal was wiskunde die met sterke banden aan de werkelijkheid gerelateerd was het soort dat het best bekliefde:

I espouse the philosophy of teaching mathematics related to reality. Mathematics is important for many people because it admits of multifarious applications. I do not trust teachers of other disciplines to be able to tie bonds of mathematics with reality which have been cut by the mathematics teacher. Moreover, I do not believe that mathematics, not tied to lived reality with strong bonds, can have a lasting influence in most individuals. [...] People usually forget what is not related to the world in which they live. For most people mathematics cannot be an aim in itself; if they have learned it in an unrelated way, they will never be able to use it. ¹⁸⁰

Freudenthal wilde dat de op school geleerde wiskunde iets was wat de leerling zich actief eigen gemaakt had: wiskunde die de leerlingen daardoor konden hanteren, manipuleren en toepassen in relevante situaties.

Een andere eis aan de te onderwijzen wiskunde die geregeld in zijn artikelen naar voren kwam, was die van 'oprechtheid'. De te onderwijzen wiskunde moest echte, 'eerlijke' wiskunde zijn. Pedagogische idealen die in deze tijd opgeld deden, kwamen zo ook in het wiskundeonderwijs tot uiting.

In de 'kritische' of 'emancipatorische pedagogiek' (een in de jaren zestig en zeventig uit Duitsland opkomende pedagogische stroming) was de kritiek op de gevestigde maatschappij en de onrechtvaardigheid van de ongelijkheid binnen die maatschappij een belangrijk gegeven. ¹⁸¹ Het centraal stellen van het kind ('vom Kinde aus') in de reformpedagogiek en de individuele ontplooiing van het kind bleven be-

blad van de Subfaculteiten Wiskunde en Natuur- en Sterrekunde 9 (1977) 14-20, aldaar 16; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1849. "Paulus de Boskabouter", een creatie van Jean Dulieu (pseudoniem van Jan van Oort) was in 1946 begonnen als strip en werd dagelijks uitgezonden als hoorspel op de radio. Vanaf 1967 was "Paulus de Boskabouter" als poppenserie op de Nederlandse televisie te zien. Overigens noemde Freudenthal het desbetreffende lespakketje 'Sproeteldam' als *wiskundig* stuk "uitstekend".

179 Freudenthal op de conferentie in Noordwijkerhout, 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 412.

180 Hans Freudenthal, 'Geometry between the devil and the deep sea', *Educational Studies in Mathematics* 3 (1971) 413-435, aldaar 420.

181 Belangrijke representanten van deze stroming waren K. Mollenhauer en W. Klafki; W.A.J. Meijer, *Stromingen in de pedagogiek* (Baarn 1996), 55 e.v.

langrijk, maar tegelijkertijd had de kritische pedagogiek emancipatie en het verbeteren van de maatschappij ten doel. Opvoeden kon niet los worden gezien van de maatschappij waarin dat plaats vond, en kritiek op die maatschappij moest in de opvoeding tot uiting komen. In het onderwijs was dit bijvoorbeeld terug te vinden in de ontwikkeling van leerplannen met voor de leerling relevante leerstof. Met het instellen van maatschappelijk relevante leerplannen zouden kinderen uit de arbeidersklasse beter van het onderwijs profiteren en bracht het onderwijssysteem niet langer slechts aan de bovenlagen van de maatschappij voordeel.

Dergelijke algemeen pedagogische idealen waren ‘vertaald’ terug te vinden in het wiskundeonderwijs. Het ‘opvoeden tot kritische individuen’ en ‘eerlijkheid’ werden ook in het wiskundeonderwijs een maatstaf bij de bepaling van de leerstof. Zo mochten er naast de eis van maatschappelijke relevantie ook geen concessies worden gedaan aan de wiskundige correctheid van die leerstof: die moest als wiskunde blijven kloppen en op elk moment verantwoord kunnen worden aan de leerling.

Voor Freudenthal was ‘wiskundige eerlijkheid’ een belangrijke eis. Overal waar hij overtredingen tegen deze eis constateerde, klom hij in de pen. Zo beschuldigde hij in een serie artikelen in *Euclides* de Nomenclatuurcommissie ervan in haar voorstellen ‘schoolwiskunde’ in plaats van echte wiskunde te willen cultiveren.¹⁸² Vooral waar groepentheorie en verzamelingen in het onderwijs gebruikt werden, werd volgens Freudenthal vaak met de wiskundige eerlijkheid gesjoemeld. Een ernstige zaak:

We have to be careful and honest if we want to adapt some piece of high mathematics to a lower level. Simplifying is a good thing but wrong elementarisations are a danger, and so is imitating superficial features while destroying the great ideas of some mathematical theory. If children are taught groups they are entitled to learn genuine group theory rather than a childish version. In the past, mathematics has seriously suffered under the falsifying tendencies in adaptations of mathematical subject matter to school level. Let us be more cautious in the future. Honesty is a cardinal virtue in education. Nothing is lost if some subject matter cannot be taught prematurely and much is gained if it can in an honest way.¹⁸³

De tegenstelling was niet die van ‘didactisch versus wetenschappelijk’, zo betoogde Freudenthal. Goede leerstof koos je met het oog op de doelmatigheid voor het gebruik van die wiskunde in het leven.¹⁸⁴ En dan niet iets aanleren, waarvan slechts een handvol leerlingen later zou inzien dat het beter kan of – erger – fout was:

Er zijn volwassenen, die menen tegen kleuters in een brabbeltaaltje te moeten praten; als de kleuter dit overneemt, kunnen ze immers zeggen: zie je, hij kan niet beter. Ge-

182 Freudenthal, ‘Kanttekeningen bij de nomenclatuur’, *Euclides* 47 (1971), 139-140, Freudenthal, ‘Nog eens nomenclatuur’, *Euclides* 47 (1972), 181-192, Freudenthal, ‘Nomenclatuur en geen einde’, *Euclides* 49 (1973) 53-58.

183 Freudenthal, ‘What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education’, in: G.A. Howson, ed., *Developments in mathematical education: the proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* (Cambridge 1973) 101-114, aldaar 114.

184 Freudenthal, ‘Nog eens nomenclatuur’, *Euclides* 47 (1972) 181-192, aldaar 181.

lukkig leren kleuters het af. In Wiskunde II zullen we ze het afleren – aldus volgens Vredenduin. En de anderen? Moeten ze maar blijven brabbelen? ¹⁸⁵

De verantwoordelijkheid voor het leren van denkwijzigheid en nuttige wiskunde lag bij de wiskundigen zelf volgens Freudenthal. Hoe breed hij die verantwoordelijkheid zag, bleek uit zijn artikel ‘De niveaus in het leerproces en de heterogene leergroep, met het oog op de middenschool’. Hierin besprak hij zijn wiskunde-ervaringen met door het rekenonderwijs ‘getraumatiseerde’ LBO-leerlingen:

Als wiskundigen zijn we verplicht aan het herstel van hun gehavende persoonlijkheid mee te werken. Alleen door middel van de wiskunde – en dan goede – kunnen ze genezen worden van het trauma, dat hun door slechte wiskunde is toegebracht – als het ware een homeopathische kuur. ¹⁸⁶

Door deze leerlingen opnieuw in goede wiskunde in te leiden, en wel op het nulde niveau, was het volgens Freudenthal mogelijk de gedane schade te herstellen. En die goede wiskunde was “een wiskunde [...] waar men – afgezien van het meest elementaire – niet hoeft te rekenen, een met de realiteit geliëerde [sic], de kinderen nabije en maatschappelijk relevante wiskunde”, zoals die voor het LBO werd gemaakt door het IOWO. ¹⁸⁷ Freudenthal vond dergelijke wiskunde “onmisbare kennis en kunde voor iedereen, als krantenlezer, vader of moeder, burger, consument en producent, en ook als kunstgenieter en -schepper kun je ervan profiteren”. ¹⁸⁸

In hetzelfde artikel kwam een voor Freudenthal ander belangrijk aspect van ‘democratisch’ wiskundeonderwijs naar voren: zijn belangstelling voor de mogelijkheden van het leren in een heterogene leergroep. De in deze periode erg in de belangstelling staande middenschool maakte dit tot een actueel onderwerp. De kern van het middenschool-idee was het opzetten van een geïntegreerd voortgezet onderwijs bestaande uit een middenschool, gevolgd door een bovenschool. In onder andere Duitsland en Engeland was dit idee in de jaren zestig al uitgewerkt tot respectievelijk de ‘Gesamtschule’ en de ‘comprehensive school’. ¹⁸⁹ In Nederland startte in 1973 vanuit de regering opgezette experimenten in deze richting, waartoe de Innovatiecommissie Middenschool (ICM) werd ingesteld. ¹⁹⁰ Het belangrijkste motief voor de instelling van de middenschool was het uitstellen van beroeps- en studiekeuze en het daarmee aanbieden van gelijke kansen voor iedereen.

Door het ‘gelijke kansen voor iedereen, ongeacht milieu en achtergrond’-principe sprak het idee van de middenschool Freudenthal wel aan. De invulling ervan was echter juist het tegenovergestelde van wat hem met heteroog onderwijs voor ogen stond:

¹⁸⁵ Ibid., 192.

¹⁸⁶ Freudenthal, ‘De niveaus in het leerproces en de heterogene leergroep, met het oog op de middenschool’, *Gesamtschule Conferentie* (1973) 88-99, aldaar 89-90.

¹⁸⁷ Ibid., 90.

¹⁸⁸ Ibid.

¹⁸⁹ M.A.J.M. Matthijsen, *De elite en de mythe. Een sociologische analyse van de strijd om onderwijsverandering* (Deventer 1982) 163.

¹⁹⁰ Ibid. 164.

Er moet gedifferentieerd worden. Akkoord! Maar “differentiëren”, zoals bedoeld in de discussies omtrent *Gesamtschule* en Middenschool – is een eufemisme. Je zegt “differentiatie” en je bedoelt “separatie”. [...] Men begint ermee het hoofd te breken over differentiatie, terwijl de integratie nog niet eens aan de orde is geweest, laat staan doordacht is, en zwelgt in het ontwerpen van geraffineerde systemen van differentiatie: hoe men de kinderen verschillende leerstof zal toedienen terwijl men de schijn van één programma ophoudt.¹⁹¹

Waar lag de kracht van werken in heterogene leergroepen dan wel volgens hem?

Wat men na zou moeten streven en trachten te realiseren, is een systeem, waarbij de leerlingen op verschillende niveaus – elk op het zijne – met elkaar aan hetzelfde onderwerp werken en leren werken. Dit is het principe van heterogene leer- en werkgroepen, waar de leden van lager niveau zich op het hogere niveau van hun medeleden kunnen oriënteren en die op hoger niveau inhoudelijk en sociaal kunnen profiteren van hun kijk op het lagere. Het is niet zo’n vreemd idee, die heterogene leer- en werkgroep; op veel plaatsen in de maatschappij is het gerealiseerd. Het kost alleen moeite leerinhouden zakelijk en leerprocessen sociaal opnieuw te doordenken, om tot deze onderwijsvernieuwing te geraken. Wil men zich deze moeite niet getroosten, dan loopt de operatie ‘Middenschool’ de kans een papieren plan met papieren gevolgen te blijven.¹⁹²

Juist de wiskunde, door de verschillende niveaus in het leerproces, leende zich volgens Freudenthal goed voor een dergelijke aanpak. Binnen een groep zouden leerlingen op verschillende niveaus met dezelfde stof bezig kunnen zijn en van elkaars verschillen kunnen profiteren in hun eigen leerproces. Op deze manier zouden leerlingen zeker de eerste twee jaren op de middenschool hetzelfde wiskundeprogramma moeten kunnen volgen:

De samenwerking moet de leerlingen op alle niveaus de toegang naar een hoger niveau openen, die van het lagere, omdat ze zich op die op het hogere kunnen oriënteren, die van het hogere, omdat de blik naar het lagere niveau hun nieuwe inzichten verschaft.¹⁹³

Dat de invulling van het concept ‘heterogene leergroep’ nog in de kinderschoenen stond en de eventuele mogelijkheden nog erg onzeker waren, beseft Freudenthal ook wel. Toch was het voor hem zeker de moeite waard dit verder te onderzoeken, juist waar het het wiskundeonderwijs betrof.¹⁹⁴ En daarmee kwam Freudenthal

191 Freudenthal, ‘De Middenschool’, *Rekenschap* 20 (1973) 157-165, aldaar 164.

192 Ibid., 165.

193 Freudenthal, ‘De niveaus in het leerproces en de heterogene leergroep, met het oog op de middenschool’, *Gesamtschule Conferentie* (1973) 88-99, aldaar 93. Dat hier zeker mogelijkheden lagen in de praktijk ontleende Freudenthal onder andere aan experimenten van de Russische wiskundige Davydov.

194 Ook in het Jenaplanonderwijs – waarbinnen mevrouw Freudenthal actief was – speelde de heterogene leergroep een belangrijke rol. In zijn boek *Weeding and sowing* gaat Freudenthal op dit concept en de moeilijkheden die een dergelijke aanpak voor de onderwijsontwikkelaar geeft verder in; Freudenthal, *Weeding and sowing* 60-64; S.J.C. Freudenthal-Lutter, *Naar de school van morgen* (Alphen aan de Rijn 1971) 81.

weer terug bij datgene, waar het allemaal mee en om begonnen was: het doen van observaties – en dan met name die van zijn kleinzoon. Freudenthal en Bastiaan als de “extreem heterogene leergroep”:

Ik kom terug op een van die leergroepen. Ik bedoel die extreem heterogene van grootvader en kleinzoon. U herinnert het zich wel? Neen, niet lachen! Het was echt een leergroep. Heeft de kleinzoon iets geleerd? Ja, doordat hij iemand had om tegen te praten. En de grootvader? Heeft hij iets geleerd? Iets, neen, heel wat. Zoveel, dat hij het gepast vond om u er hier van te vertellen. Dit ter geruststelling van hen die vrezen, dat heterogene leergroepen de leerprocessen naar onderen moeten nivelleren.¹⁹⁵

9.6 **Enfant terrible**

9.6.1 Onkruid wieden

Begin jaren zeventig had Freudenthal in en door het werk op het IOWO een manier gevonden om op een positief productieve manier bezig te zijn met wiskundeonderwijs. Het meemaken van het zich daar afspelende proces van onderwijsontwikkeling was voor hem uiterst vruchtbaar en hiervan zijn de directe resultaten terug te vinden in al zijn voordrachten, artikelen en boeken uit die tijd en later. Het nam echter niet weg, dat hij ook nog steeds als criticus op velerlei gebied van zich liet horen.¹⁹⁶ Voor velen in de kringen van wiskundeonderwijs had hij dan ook de reputatie van een gevreesd professor met aanzien. Wiskundedidacticus en lerarenopleider Van Dormolen herinnerde zich:

Nu was Freudenthal in die tijd niet iemand waarbij je veilig ging vragen wat hij precies bedoelde. We waren eigenlijk een beetje bang voor hem en begrepen niet, dat diens scherpe kritieken helemaal niet betekenden dat hij je dom vond. Jaren later leerde ik dat hij het juist in iemand waardeerde als die met hem in debat wilde gaan, maar als jong leraar begon je daar niet aan.¹⁹⁷

Ook internationaal was duidelijk dat met Freudenthal niet te spotten viel. Bishop schreef hierover:

195 Freudenthal, ‘De niveaus in het leerproces en de heterogene leergroep, met het oog op de middenschool’, *Gesamtschule Conferentie* (1973) 88-99, aldaar 98.

196 Nog veel nadrukkelijker dan in zijn boek *Mathematics as an educational task* was Freudenthal kritisch in zijn *Weeding and sowing. A preface to a science of mathematical education* van 1972 – een boek dat Freudenthals werkwijze en houding misschien wel het beste typeerde, niet in de laatste plaats door de titel. In dit boek ‘wiedde’ hij systematisch de stand van zaken schoon op het gebied van wetenschap, onderwijs, onderwijs als wetenschap en de wetenschap van wiskundeonderwijs; Freudenthal, *Weeding and sowing*.

197 J. van Dormolen, ‘Freudenthal *cursef*. Hoe didactiek een deel van wiskunde kan worden’, *Nieuwe Wiskrant* 10 (3) (1991), 19.

He was a tough critic and someone who did not shirk his responsibilities in helping a knowledge field to develop. He undoubtedly believed that those of us who are genuinely concerned with the development of knowledge are not as critical of ideas, methods and practices as we ought to be. His first inspiration to me therefore was as a critic.¹⁹⁸

Freudenthal was zich van dit imago wel bewust en koesterde het:

Een enfant terrible – zowel nationaal als internationaal – waar ze blijkbaar toch niet omheen konden, zoals straks zal blijken. Of hoopten ze dat ik al rijzende mijn wilde haren zou kwijt raken? ¹⁹⁹

Die kritische houding en de ongezouten manier waarop hij vaak zijn kritiek uitte, kwamen echter niet uit de lucht vallen. Voor Freudenthal waren dergelijke acties bittere noodzaak. Wanneer hij vond dat iets wetenschappelijk ongefundeerd, een kwestie van verkeerd toepassen van statistiek of domweg grote kolder was, kon hij het niet laten te reageren. Bovendien bleef hij altijd benadrukken dat het niet het juiste moment was om op lauweren te rusten: er was nog een lange weg te gaan als het ging om wiskundeonderwijs. En bij die weg hoorde ook steeds alert te blijven op wantoestanden.

Natuurlijk was deze kritische houding verre van nieuw voor Freudenthal. Zijn credo ‘iedere positieve actie begint met critiek’ uit 1944 bleef hij altijd trouw. Maar met het nieuwe leerplan van 1968, de invloed van New Math en alle nieuwe ideeën en opkomende initiatieven in het onderwijs in het algemeen was hij als criticus actiever dan ooit.

Opvallend was hoe spaarzaam Freudenthal was met het in positieve context noemen van andermans werk.²⁰⁰ Expliciet in zijn uitlatingen over andermans werk was hij vooral wanneer hij wilde uitleggen hoe het niet moest. In het voorwoord van *Mathematics as an educational task* legde hij uit waarom hij in dit kader geen voetnoten wilde gebruiken:

On the other hand I avoided all citations with respect to textbooks, designs and lessons wherever it was feasible. I believe I had a compelling reason to do so for this material was frequently subjected to criticism, which in fact was often negative. The material could be sharply divided into serious work and trash. Citations in footnotes would have meant tarring everything with the same brush. This I would hate to do. At the same time, it would have been too much an honour for trash to be quoted along

198 A. Bishop, ‘Freudenthal *cursief*. HF-an inspiration in the search for truth’, *Nieuwe Wiskrant* 10 (1991) 13.

199 Hans Freudenthal over zichzelf in: Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 347.

200 Belangrijke uitzonderingen vormden het werk van Tatiana Ehrenfest, Van Dantzig, het echtpaar Van Hiele en de Russische onderzoeker V.V. Davydov. In het voorwoord van *Mathematics as an educational task* noemde hij bovendien nog Castelnuovo, Krygovska, Servais en Revuz in een rijtje van internationale vrienden van wie hij veel geleerd had. In de loop van de jaren zeventig werd Freudenthal voor zijn doen aanzienlijk scheutiger met zijn lof, vooral waar het het werk van veel wiskundeonderwijsontwikkelaars van het IOWO betrof; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1589.

with serious literature. Therefore, I have made explicit quotations only in a few quite specific cases.²⁰¹

Oppervlakkig bezien leek het hem in zijn kritiek soms om onbenullige details te gaan, maar altijd zat daar een meer algemeen gefundeerde kritiek achter.

Zo was een van Freudenthals stokpaardjes een correct (wiskundig) taalgebruik.²⁰² In zijn artikel ‘Verzamelingen in het onderwijs’ hekelde hij het ongelukkige gebruik van de associatie van de wiskundige verzameling met het verzamelen als hobby, en alle taalkundige problemen die dat met zich meebracht. Want wat is een postzegelverzameling in die zin: een verzameling stukjes papier? Of “een soort van zulke stukjes papier die onderling op elkaar gelijken in die zin dat ze dezelfde postale functie kunnen of konden vervullen”? “Detailkritiek” noemde Freudenthal het zelf, “die de grote lijnen van de methode niet aantast”.²⁰³

Is dit nu muggezifterij? Het is evenzeer muggezifterij als het verschil tussen ‘liggen’ en ‘leggen’, tussen ‘word’ en ‘wordt’. Het antwoord op uiteenzettingen als de bovenstaande luidt vaak: ‘Je kunt met kinderen niet alles zo exact doen’. $3+2$ is voor elke leeftijd hetzelfde, een drogredenering is voor elke leeftijd een drogredenering. Als je met verzamelingen van postzegels of van letters op een bepaalde leeftijd niet redelijk kunt werken, omdat ze te veel kritisch besef vereisen, laat ze dan weg, je verliest er niets aan.²⁰⁴

Door op de details te letten en ook – en juist! – de kleine fouten te noemen, hoop- te Freudenthal ergere te voorkomen:

[...] laat het dan wiskunde blijven: verzamelingen en relaties, waar ze voor deugen en niet om er sommetjes mee te maken. We hebben een van de echte wiskunde gescheiden schoolwiskunde gehad en we gaan met reuzestappen weer naar zo iets toe. Toen ik in de buitenlandse literatuur zag wat voor fouten kunnen worden gemaakt, heb ik er in lezingen en cursussen op gewezen. Ik hoop dat er een preventieve werking van uit gaat.²⁰⁵

Die preventieve werking, daar ging het hem om in zijn kritiek. Door onkruid direct bij opkomst te wieden, kon je verspreiding ervan voorkomen. Vooral wanneer het ging om misbruik van moderne wiskunde in het onderwijs was dit hard nodig. Het grote gevaar van wat hij als ‘bedrog’ betitelde was volgens hem dat het serieuze pogingen tot verbeteringen van het wiskundeonderwijs in de weg zou staan:

201 Freudenthal, *Mathematics as an educational task* vi.

202 Zijn discussie in *Euclides* met Vredenduin als voorzitter van de nomenclatuurcommissie was daar een goed voorbeeld van; Freudenthal, ‘Kanttekeningen bij de nomenclatuur’, *Euclides* 47 (1971) 139-140, Freudenthal, ‘Nog eens nomenclatuur’, *Euclides* 47 (1972) 181-192, Freudenthal, ‘Nomenclatuur en geen einde’, *Euclides* 49 (1973) 53-58.

203 Freudenthal, ‘Verzamelingen in het onderwijs’, *Euclides* 45 (1970) 321-326, aldaar 321. Het betrof kritiek op: Krooshof, Jacobs, e.a., *Moderne wiskunde deel 1* (Groningen 1968).

204 Freudenthal, ‘Verzamelingen in het onderwijs’, *Euclides* 45 (1970) 321-326, aldaar 325-326.

205 *Ibid.*, 326.

All this is the consequence of a modernism that insists on sets no matter what.[...] I have no fear that it will last (it is undoubtedly a transitory phenomenon), but it tends to discredit modern mathematics and consequently delay its true development in instruction. To sustain serious efforts, it is essential to criticize the idle production of manuals, films, and other methods of mathematics instruction.²⁰⁶

9.6.2 Trommelen op lege vaten

Naast de kritiek op de millimeter, zoals die op het wiskundig taalgebruik, had Freudenthal ook vaak kritiek op een tak van wetenschap in zijn geheel. In het bijzonder de onderwijskunde moest zijn kritiek vaak verduren. Het ging dan vooral om vanuit de (algemene) onderwijskunde foutief naar het vakonderwijs vertaalde zaken, maar geregeld ook om onderwijskunde in het algemeen. Zoals in zijn artikel ‘De middenschool’, waarin hij het over het Nederlandse schoolsysteem had:

[...] met de splitsing van het AVO naar MAVO, HAVO, VWO erbij is het Nederlandse voorgezette onderwijs zeker het meest opgesplitste in de hele wereld. Deze opsplitsing – een kluif om te watertanden voor onderwijskundigen, die van systemen en systematische leven – is bestendig en verfijnd door de Mammoet-wet, in een tijd dat in heel Europa de algemene trend de andere kant op wees.²⁰⁷

Typerend voor de onderwijskunde was volgens Freudenthal het werken vanuit een abstracte schematiek, om die pas op het eind te vullen met vakonderwijs. Hij was hier pertinent op tegen: onderwijsinhoud en onderwijsvormen kunnen niet van elkaar gescheiden worden. Om tot zinnig onderwijs te komen, had het geen zin dit onderwijs zuiver abstract en theoretisch te benaderen. In een ander artikel over de middenschool verwoordde hij het als volgt:²⁰⁸

Men kan vanuit het algemene deduceren wanneer men al eens een keer naar het algemene toe geïnduceerd heeft, van het onderwijs in ’t algemeen naar het vak, als men de weg van het vak naar ’t algemeen al eens heeft afgelegd. Zo zou men ook dergelijke conferenties moeten opzetten: met de vakken beginnen, om vanuit de concrete ervaringen het algemene te begrijpen en naar waarde te schatten – als men onderwijstheoretische argumenten ten bate van de middenschool zoekt, kan men ze alleen vanuit de vakken vinden.²⁰⁹

206 Freudenthal, ‘Recent tendencies in the teaching of mathematics’, in: W.E. Lamon, ed., *Learning and the nature of mathematics* (1972) 11-18, aldaar 14. Vertaling van: Freudenthal, ‘Les tendances nouvelles de l’enseignement mathématique’, *Revue de l’Enseignement Supérieur* 46-47 (1969) 23-29.

207 Freudenthal, ‘De Middenschool’, *Rekenschap* 20 (1973) 157-165, aldaar 159.

208 Ook in de lerarenopleiding zou Freudenthal onderwijskunde het liefst in de vakcomponent geïntegreerd onderwezen zien worden; Freudenthal, ‘Denkbeelden over universitaire lerarenopleiding’, voordracht op de seminar van de ‘Vereniging Universitaire Leraren Opleiding Nederland’, 1976; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 609.

209 Freudenthal, ‘De niveaus in het leerproces en de heterogene leergroep, met het oog op de middenschool’, *Gesamtschule Conferentie* (1973) 88-99, aldaar 91.

Een dergelijk betrekken van vakdeskundigheid bij onderwijskundig onderzoek was erg zeldzaam. Volgens Freudenthal was hiervoor vanuit de onderwijskunde een “soms tot hysterie opgevoerde afkeer”.²¹⁰ Bovendien was er binnen het onderwijskundige systeem sprake van “een wijde mantel der liefde en een gigantische doofpot voor al wat er in de onderwijskundige productie scheef gaat”.²¹¹

Ook tussen de psychologie als wetenschap en het leren van wiskunde was er volgens Freudenthal een enorme kloof. In het voorwoord van *Mathematics as an educational task* vroeg hij zich vertwijfeld af hoe en door wie dit opgevuld kon worden:

When in an excellent modern book [R.M. Gagné, *The conditions of learning* (Londen 1965)] I tried to find out what I should understand under learning and how I should subdivide it, I felt myself very far from what I had experienced myself and with others as *mathematical* learning. A feeling of loneliness seized me: is mathematics really so different? I wish that someone who profoundly understands both mathematics and psychology would show us the bridge.²¹²

Van zijn kant was het dus geen kwestie van niet willen, maar een kwestie van niet zien hoe het nu, met de huidige kennis, ingevuld zou moeten worden. Totdat daar een zinnige oplossing voor was, bleef Freudenthal strijden tegen elke holle theorie, vooral wanneer die gevaarlijk drastische consequenties zou kunnen hebben voor het onderwijs.

Een mooi voorbeeld hiervan was Freudenthals kritiek op een internationaal vergelijkend onderzoek naar de leerprestaties van schoolkinderen in moedertaal en natuurwetenschappen.²¹³ Aan dit onderzoek was weinig goed in Freudenthals visie. Zo was er op verschillende manieren gemeten met twee maten en waren er leerling-situaties uit verschillende landen vergeleken die volkomen onvergelijkbaar waren. De uitkomsten – waaronder de conclusie die stelde dat Nederlandse kinderen ver achter bleven bij hun leeftijdsgenoten in de natuurwetenschappen – waren dan ook volkomen onbetrouwbaar, hoewel Freudenthal het niet na kon laten te benadrukken dat er zeker meer aan natuurwetenschappen op onze scholen gedaan zou moeten worden.²¹⁴

²¹⁰ Freudenthal in een recensie in 1975 over het boek van G. Boomsma, *Handboek voor het moderne rekenonderwijs in de basisschool*; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 602.

²¹¹ Ibid.

²¹² Freudenthal, *Mathematics as an educational task* vi.

²¹³ Dit onderzoek was internationaal georganiseerd door de International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA); Freudenthal, ‘Mammoetonderzoek wekt wantrouwen’, *Universiteitsblad U Utrecht* (14 juni 1974). Freudenthal besprak dit onderzoek ook in: Freudenthal, ‘Een internationaal vergelijkend onderzoek over wiskundige prestaties’, *Pedagogisch Studiën* 52 (1975) 43-55; Freudenthal, ‘Pupils’ achievement internationally compared – the IEA’, *Educational Studies in Mathematics* 6 (1975) 127-186; Freudenthal, ‘Schülerleistungen im internationalen Vergleich’, *Zeitschrift für Pädagogik* 21 (1975) 890-910; Freudenthal, ‘Leerlingenprestaties in de natuurwetenschappen internationaal vergeleken’, *Faraday* 45 (1975) 58-63; Freudenthal, ‘De wereld van de toetsen’, *Rekenchap* 23 (1976) 60-72.

²¹⁴ Freudenthal, ‘Mammoetonderzoek wekt wantrouwen’, *Universiteitsblad U (Utrecht 14 juni 1974)*.

Hoe komt het dat dit soort mammoet-onderzoek – ondanks de steeds weer blijkende levensgrote gebreken – door blijft gaan? Eén van de redenen is het ontzag voor grote getallen, computers, databanken; een andere dat het gemakkelijker is om miljoenen dan om duizenden voor onderzoek los te krijgen. Het opvoedkundig bezwaar van dit soort onderzoek is het aankweken van zorgeloosheid bij de onderzoeker die geheel op de grote getallen gaat vertrouwen, en de uitnodiging aan het publiek tot het zonder kritiek aanvaarden van met deskundig gebaar geponeerde cijfers.²¹⁵

Freudenthal vond het zeer kwalijk dat op geen enkele wijze moeite was gedaan, informatie over het hoe en waarom van de invulling van het onderwijs in de natuurwetenschappen in te winnen en te verwerken in de opzet van het onderzoek. Wat er uiteindelijk wel gebeurde, was het bekende werken met lege ‘onderwijsvaten’ – met alle gevolgen voor het vakonderwijs van dien:

Ik beklemtoon het nog eens: ik trek de bekwaamheid van de Nederlandse projectleiding niet in twijfel. Het onderzoek is bepaald niet slechter dan wat anders en elders op dit gebied wordt gepresteerd. Wat fout is, is het idee van dit soort onderwijskunde dat de Duitsers ‘inhaltneutral’ noemen – het werken in holle vormen, die dan maar met vakinhouden moeten worden gevuld. Dit systeem veroordeelt op zichzelf bekwame onderzoekers tot werk waarvoor ze niet opgeleid en niet berekend zijn. Met schouderophalen aan de vakkundige kant komen we niet verder. Dit oordeel moest een keer – en dan gedocumenteerd – uitgesproken worden.²¹⁶

Een uitgelezen en door Freudenthal vaak aangehaald voorbeeld van zo’n holle vorm was de taxonomie van Bloom zoals beschreven in *Taxonomy of educational objectives. The classification of educational goals* (1956).²¹⁷ Dit in de jaren zeventig vooral in de Verenigde Staten populaire werk werd in de onderwijswereld als hulpmiddel in de leerplanontwikkeling gebruikt. Blooms taxonomie was ontwikkeld om leerdoelen te categoriseren en hiërarchisch te rangschikken als hulpmiddel bij het bepalen en waarderen van examenresultaten, met name voor de geesteswetenschappen. De toepassing ervan was in Freudenthals woorden “een voor wiskunde en natuurkunde totaal ongeschikt en alleen de lachspieren activerend modeverschijnsel”.²¹⁸

In zijn boek *Weeding and sowing* zette Freudenthal uitgebreid uiteen waarom een dergelijke classificatie niet werkte: alleen al het feit dat aspecten als ‘observeren’ en ‘experimenteren’ ontbraken, maakte de taxonomie waardeloos voor de natuurwetenschappen.²¹⁹ Bovendien werd een belangrijk aspect over het hoofd gezien: de

²¹⁵ Ibid.

²¹⁶ Ibid.

²¹⁷ Ook Langeveld bekritiseerde Blooms werk; M.J. Langeveld, ‘Over de voorbereiding van het gebruik van exacte methoden in bewerking en interpretatie van psychologische onderzoekingen’, *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afdeling Letterkunde* 30 (Amsterdam 1967) 187-204.

²¹⁸ Freudenthal, ‘Mammoetonderzoek wekt wantrouwen’, *Universiteitsblad U Utrecht* (14 juni 1974).

²¹⁹ Freudenthal, *Weeding and sowing*. Eerder besprak Freudenthal het werk van Bloom in: ‘Lernzielfindung im Mathematikunterricht’, *Zeitschrift für Pädagogik* 20 (1974) 719-738.

vaardigheid om testen te kunnen maken ontbrak in de schema's. Dit was een taboe om te noemen, maar volgens Freudenthal niet uit te vlakken in de waardering van dergelijke systemen. Het ergste was nog dat met dergelijke systemen uitgegaan werd van de op zichzelf staande wiskundige vraagstukken, zonder deze een plaats in het leerproces toe te kennen. En daar lag voor Freudenthal juist de essentie: uitgaan van de leerprocessen, en dus van de leerstof. In zijn voordracht 'Taxonomieën – waarvoor?' liet hij op niet mis te verstane wijze weten hoe weinig hij zag in de taxonomie van Bloom en de onderwijskunde die erop leunde:

'Taxonomy' is een van die modes, waaraan iedereen in de onderwijskunde verplicht wordt aan [sic] mee te doen. 'Taxonomy' is maar een symptoom. Het euvel is gebrek aan wetenschappelijk houvast. In de natuurwetenschappen is het ook begonnen met indelen, bij voorkeur volgens heilige getallen. Dit stadium is in de onderwijskunde nog niet overwonnen.²²⁰

Ook in het onderzoek van de IEA was de taxonomie van Bloom misbruikt om de test bij gebrek aan inhoudelijke maatstaven te kunnen valideren. Freudenthal legde uit:

The purpose of Bloom's categories in this context was the following: tests require a validation ritual; if, as in the present case (among numerous others) no yardsticks for validation of the contents of the instruments are available, one can use as an object of validation the distribution over Bloom's categories, which in fact as a formal criterion is more attractive to psychometrists than subject matter and educational context, and is more intelligible too. [...] The attempts at validation had entirely failed, but since they had taken place, the instrument was pronounced valid. If rituals are indispensable, would it not be time to replace the Bloom categories ritual by another where for instance committee and experts unite in a silent prayer?²²¹

In een brief aan de minister van Onderwijs en Wetenschappen over het IEA-onderzoek liet Freudenthal weten dat dergelijk malafide onderzoek bepaald niet uniek was. Ook in zijn ervaringen met de Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs (svo) had hij al meermalen dergelijke wanpraktijken opgemerkt.²²² Dat hij hier niet altijd ruchtbaarheid aan gaf, deed hij uit opportunistische overwegingen:

Ik ken tussen de tien en twintig projecten van svo van iets naderbij – er is er geen een onder, waarop niet ernstige aanmerkingen zijn te maken – aanmerkingen t.a.v. inhoud of t.a.v. de behandeling door svo. Dit zou een heel toevallig ongunstige steekproef kunnen zijn, maar daar geloof ik niet in. Ik heb tot nu toe over mijn ervaringen in het onderwijskundige wereldje in bredere kring gezweven. Ik deed dit uit opportunisme. Ik wilde door misstanden in de bestaande structuur aan te vallen niet mijn instituut,

220 Freudenthal in een presentatie op het symposium 'Toepasbaarheid van taxonomieën' 1976, getiteld: 'Taxonomieën – waarvoor?'; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 610.

221 Freudenthal, *Weeding and sowing* 143-144.

222 De Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs was de organisatie verantwoordelijk voor de programmering en subsidiëring van onderwijsonderzoek in Nederland. Later is de svo grotendeels opgegaan in NWO en in 1997 uiteindelijk opgeheven.

het rowo, in gevaar brengen. Ik heb wel over de verantwoordelijkheid die ik met dit zwijgen op me laadde, wakker gelegen. Tot mijn verschoning mag ik eraan toevoegen, dat ik mijn bezwaren wel intern kenbaar heb gemaakt – zonder succes.²²³

De kritiek die Freudenthal op het svo-werk had, had bijna altijd betrekking op het niet (genoeg) inwinnen van vakdeskundig advies: het werken met lege vaten. Opmerkelijk was dat Freudenthal – die op het eerste gezicht nooit bang leek een blad voor de mond te nemen – blijkbaar toch voorzichtig was in zijn uitspraken en zeker de consequenties op langere termijn meenam in zijn overweging om kritiek al dan niet te uiten. Jaren later had Freudenthal aan de staatssecretaris van o&w, mevrouw Ginjaar-Maas, in een brief kritiek over crto-onderzoek. Hieruit bleek, hoe voorzichtig hij nog altijd was in het uiten van zijn kritiek op onderwijskundigen:

Ik hoop dat U met deze uiteenzetting iets kunt doen. Men hoeft niet te weten uit welke koker de pijl komt. Voor onderwijskundigen ben ik toch het zwarte schaap en dat komt de zaak niet ten goede.²²⁴

Ondanks het gevoel niet veel te hebben kunnen uithalen in onderwijsland met zijn kritiek, had Freudenthal geen spijt. In *Schrijf dat op, Hans* blikte hij terug:

Ik heb me veel met onderwijs meer in het algemeen bemoeid, maar nooit met onderwijs als leeg vat, door anderen te vullen, zoals sommige psychologen en algemeen onderwijskundigen het opvatten, die in en door het lawaai wanneer je op dat vat trommelt, de meeste zelfbevrediging scheppen en de meeste aandacht trekken. Of veeleer: voor zover ik mij wel met zoiets heb bemoeid, was het om onwetendheid, charlatanerie en boerenbedrog aan de kaak te stellen. [...]

Ik heb ook getrommeld, maar niet op lege vaten, ik heb de trom geroerd om voor mijn ideeën te werven, in het onderwijs en anderszins. Ja dat is het, ik ben een tamboer geweest, ik heb de trom geroerd om mensen wakker te maken. [...]

Nee, ik was geen goed tamboer. Een goede tamboer gaat niet diep in de nacht, maar in de ochtend trommelen – als het tijd is om op te staan. Maar denk niet dat ik er spijt van heb. Een enfant terrible hoort trots op zijn ondeugden te zijn.²²⁵

Trommelen bleef hij, bij kleine zaken, bij grotere zaken, publiekelijk of intern, onvermoeibaar en altijd met de hoop en verwachting, vroeg of laat effect te bereiken. In het laatste van de drie artikelen over de nomenclatuurkwestie beschreef hij het als volgt:

Het is nog niet, het hoofd in de schoot leggen. Zolang er leven is, is er hoop en zolang er fouten worden gemaakt, is er rood potlood.²²⁶

223 Freudenthal aan de minister van o&w over internationaal vergelijkend onderzoek naar schoolprestaties, 28 juni 1974; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1730.

224 Ginjaar-Maas antwoordde hierop: “Ik weet niet of u in onderwijsland een zwart schaap bent – wel weet ik dat u vaak uw vinger precies op de wonde weet te leggen, en ik heb daar veel bewondering voor. Maar dat heb ik u al eens eerder gezegd. Nogmaals dank voor uw brief.” Freudenthal aan Ginjaar-Maas, staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen, 2 januari 1989, antwoord van Ginjaar-Maas, 5 januari 1989; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 33.

225 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 360-363.

226 Freudenthal, ‘Nomenclatuur en geen einde’, *Euclides* 49 (1973) 53-58, aldaar 53.

9.6.3 Freudenthal over Piaget: bewondering en genadeloze kritiek

Als er één onderwerp was waarop Freudenthal schijnbaar eindeloos zijn kritiek uitlet, was dat wel het werk van de Zwitserse psycholoog Piaget. Of iets preciezer: het gebruik van het werk van Piaget bij de ontwikkeling van wiskundeonderwijs. Tijdens zijn literatuurstudie in de oorlogsjaren had Freudenthal nog geen werk van Piaget gelezen, maar wel de inleiding op zijn werk van C. Philippi-Siewertsz van Reesema.²²⁷ In 1957 Freudenthal noemde Piagets werk pas voor het eerst in een artikel:

All will admit that Piaget's research is highly interesting. But it is quite another thing to apply his results to teaching mathematics, firstly because Piaget's mathematical background has been rather weak, but mainly because Piaget's approach hardly reflects the teaching situation of the classroom, but the rather unusual laboratory situation of the psychologist. Mathematical teaching theory can be furthered by mathematical teachers who are able mathematicians and able educators.²²⁸

Een paar jaar later kwam Piaget en passant aan de orde toen Freudenthal schreef over het ontbreken van een techniek voor het zoeken naar protocollen van leerprocessen:

Man könnte mir hier Piaget und seine Schule vorhalten. In der Tat haben sie den Lernprozess untersucht, aber denn in einem Milieu, das uns kaum interessiert: Das Lernen im Laboratorium, nicht in der Klasse. So kommt es, daß Piagets Erfahrungen von Schulmännern nicht bestätigt werden. Es kommt weiter hinzu, daß Piagets Schule von einem verschrobenen Bild der Mathematik ausgeht.²²⁹

Maar pas echt fel en uitgebreid werd Freudenthal in zijn kritiek, toen Piaget en zijn bevindingen vanaf de jaren zeventig gebruikt werden ter verantwoording van de invoering van New Math. De gevolgen die dit voor de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs kon hebben, waren voor Freudenthal ‘onkruid’ in zijn ergste vorm. In *Mathematics as an educational task* voelde hij de noodzaak tot kritiek op Piaget zo sterk, dat hij zelfs een hele appendix aan de bespreking ervan wijdde.²³⁰ Wie was Piaget en wat maakten zijn ideeën in Freudenthals ogen zo gevaarlijk voor de ontwikkelingen binnen het wiskundeonderwijs?

227 En wel het artikel: C. Philippi-Siewertsz van Reesema, ‘Inleiding tot de werken van Prof. dr. Jean Piaget’, *Paedagogische Studien* 10 (1929) 1-52; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 440.

228 Freudenthal, ‘Report on a comparative study of methods of initiation into geometry’, *Euclides* 34 (1957) 289-306, aldaar 306.

229 Freudenthal, ‘Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?’, *Der Mathematikunterricht* (1963) 5-29, 15.

230 Ook uit deze tijd stamde het aantekeningenboekje met aantekeningen die hij maakte naar aanleiding van het lezen van Piagets *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Deze aantekeningen waren korte samenvattingen en bevatten geen commentaar van Freudenthal op het werk; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 445.

Een Zwitserse ontwikkelingspsycholoog

De van oorsprong Zwitserse bioloog Jean Piaget (1896-1980) ontwikkelde zich begin twintigste eeuw tot een ontwikkelingspsycholoog, die vooral in de periode na de Tweede Wereldoorlog school maakte.²³¹ Piaget publiceerde een grote hoeveelheid boeken en artikelen waarin hij op zoek ging naar het tot stand komen van kennis. Hierbij splitste hij de kennis die een kind opbouwde over de wereld om hem heen uit in aspecten als logica, ruimte, tijd, kans en wiskunde. In zijn vroege werk publiceerde hij veel observaties van zijn eigen kinderen. Later legde hij zich toe op meer formeel methodologisch opgezette experimenten met verschillende kinderen in wat bekend zou worden als ‘de school van Piaget’.

Centraal binnen Piagets ideeën stond het gegeven dat er bepaalde ontwikkelingsfasen waren die bij ieder kind universeel in een bepaalde volgorde optraden. De omgeving van het kind leverde het materiaal en de ervaringen waarover het kind ging denken. Deze ervaringen werden actief verwerkt in wat Piaget denkkaders of ‘schème’ noemde – elk met een eigen vaststaande logische structuur.

Voortdurend was er een wisselwerking tussen de ervaringen van het kind en de denkstrategieën die het kind op dat moment hanteerde. Assimilatie (het inpassen van de werkelijkheid in het denkkader) en accommodatie (het aanpassen van denkkaders aan de nieuwe ervaringen en waarnemingen) wisselden elkaar daarbij continu af (adaptatie). De volgorde van de denkstrategieën die een kind tijdens zijn ontwikkeling doorliep, lag volgens Piaget vast volgens een aangeboren logisch patroon. De logica van het denkkader dat een kind op een bepaald moment hanteerde, bepaalde hoe het met de werkelijkheid omging.

Piaget was als ontwikkelingspsycholoog te plaatsen in de hoek van het constructivisme. Met deze term komt tot uitdrukking hoe hij de nadruk legde op het heruitvinden van ideeën en logische gedachtevormen van het kind, in plaats van het voorgeschoteld krijgen van afgeronde ideeën. Het kind moest zich volgens Piaget nieuwe ideeën in zijn ontwikkeling actief eigen maken. Dit algemenere aspect van Piagets ontwikkelingstheorie paste op zich wel in Freudenthals straatje. Maar in Piagets theorie kwam daar vervolgens bij dat er sprake was van een vaststaande logica, die bij elk kind in dat stadium van ontwikkeling bepalend was. Dit aspect kwam tot uitdrukking in de wat bredere karakterisering van Piagets theorieën in de term genetische epistemologie. Freudenthal zei over Piagets visie op de ontwikkeling van de mens in een vraaggesprek met Vredenduin:

231 Bij de samenstelling van deze paragrafen is gebruik gemaakt van de volgende werken: A.L. Baldwin, *Theories of child development* (New York 1967); H.E. Gruber and J.J. Vonèche, ed., *The essential Piaget. An interpretive reference and guide* (1977 London); R. Kohnstamm, *Kleine ontwikkelingspsychologie I. Het jonge kind* (Houten 1993); Mary Sime, *Zoals een kind het ziet. Wegwijzer in de theorieën van Piaget* (Purmerend 1976) met inleiding en nawoord van Van Hiele; L. Smith, J. Dockrell en P. Tomlinson, ed., *Piaget, Vygotsky and beyond. Future issues for developmental psychology and education* (London 1997); Rita Vuyk, *Overview and critique of Piaget's genetic epistemology 1965-1980* (Londen 1981).

De hele binding van verschillende verschijnselen aan een leeftijdsperiode, dat schijnt me nu weer onjuist. [...] Het is een psychologisch onderzoek en hij [Piaget] denkt dat bepaalde door hem logisch geconstrueerde ontwikkelingen daar in zitten. Er zit natuurlijk ook een ontwikkeling in, maar dat je die logisch kunt construeren, dat geloof ik niet. [...] Hij heeft een bepaald epistemologisch beeld van hoe kennis is opgebouwd, gestructureerd is en dienovereenkomstig stelt hij zich de ontwikkeling voor. [...] Uit de mathematische structuur heeft hij een epistemologie afgeleid, die zeker niet ontwikkelingstheoretisch is.²³²

In Piagets werk was veel te vinden over specifiek wiskundige aspecten in de ontwikkeling van het kind.²³³ Dat maakte zijn bevindingen extra aantrekkelijk voor gebruik in wiskundendidactiek en -onderwijs. Zo had Van Hiele zich tijdens zijn promotieonderzoek al in Piagets werk verdiept en zich erdoor laten inspireren bij de ontwikkeling van zijn niveaustheorie. Later zou hij onder andere een studie over Piagets psychologie in relatie met het wiskundeonderwijs publiceren in de serie *Acta Paedagogica Ultrajectina* van het Paedagogisch Instituut van de Universiteit Utrecht. In deze serie verschenen meer studies over het werk van Piaget, zoals die van onder andere A.H. Syswerda (*De ruimtevoorstelling bij het kind volgens J. Piaget en B. Inhelder*) en Bunt (*The development of the ideas of number and quantity according to Piaget*).²³⁴

Van Hieles grootste kritiek op het werk van Piaget was dat deze bij de beschrijving van niveausprongen uitging van een vastliggend genetisch proces van rijping in een bepaalde periode. Van Hiele vond door didactische observaties dat deze sprongen niet in het genetische proces, maar als discontinuïteiten in het leerproces plaatsvonden. Ook wees hij op de onjuistheid om op grond van Piagets bevindingen – zoals de logische structuren die hij in de cognitieve ontwikkeling van het kind ontwaarde – het wiskundeonderwijs te ontwikkelen volgens de structuur van de wiskundige logica.

Binnen de algemene didactiek en pedagogiek was er naast grote bewondering eveneens een bepaalde kritische houding ten aanzien van Piagets theorieën.²³⁵ Dit bleek ook uit het voorwoord van Langeveld bij de studie van Van Hiele, waar hij

232 Vraaggesprek door Piet Vredenduin over ‘mensbeeld’, 9 januari 1984; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1850.

233 Vier van zijn vroegere werken die met wiskundige aspecten te maken hadden, waren *La génèse du nombre chez l’enfant*, *La géométrie spontanée de l’enfant*, *La représentation de l’espace chez l’enfant* en *La génèse des structures logiques élémentaires*; J. Piaget et Alina Szeminska, *La génèse du nombre chez l’enfant* (Neuchâtel 1941), J. Piaget, B rbel Inhelder et Alina Szeminska, *La géométrie spontanée de l’enfant* (Parijs 1948), J. Piaget et B rbel Inhelder, *La représentation de l’espace chez l’enfant* (Parijs 1948) en J. Piaget et B rbel Inhelder, *La génèse des structures logiques élémentaires* (Neuchâtel 1959).

234 P.M. van Hiele, *Development and learning process. A study of some aspects of Piaget’s psychology in relation with the didactics of mathematics* (Groningen 1959); A.H. Syswerda, *De ruimtevoorstelling bij het kind volgens J. Piaget en B. Inhelder. Synthese en kritiek* (Groningen 1955); L.N.H. Bunt, *The development of the ideas of number and quantity according to Piaget* (Groningen 1951).

235 Zo was er vanuit de psychologie het commentaar dat Piaget in zijn interpretatie van de cognitieve ontwikkeling van het kind te ver ging met zijn wiskundig abstracte theorieën; A.L. Baldwin, *Theory of child development* (New York 1967) 299-300.

sprak over de publicaties die er afgelopen jaren over Piagets werk binnen het instituut waren verschenen:

It will appear from these publications that we are critical of several of Piaget's theories, methods and conclusions in many respects. This, however, does not interfere with our deep respect for this scientific worker who devoted the greater part of his life to genetic psychology.²³⁶

Met de opkomst van New Math eind jaren vijftig werd Piagets theorie door de voorstanders van New Math omarmd als een impliciete psychologische goedkeuring voor de beslissing om de logische structuur als uitgangspunt in het wiskundeonderwijs te nemen. In België bijvoorbeeld was veel belangstelling voor Piagets werk, mede door zijn lidmaatschap van de CIEAEM waarin Papy ook actief was.²³⁷ In *Schrijf dat op*, Hans omschreef Freudenthal het als “de zegen van een psycholoog, een epistemologisch psycholoog die het erop hield dat de wiskunde zich bij het individu volgens epistemische lijnen ontwikkelde, dat wel”.²³⁸ Dit was voor Freudenthal dé aanleiding, tot kritische actie over te gaan.

Over ondeugdelijke proeven en pseudowiskunde

Freudenthals preoccupatie met Piaget en zijn werk ging zo ver, dat hij hier tot in zijn laatste boek uit 1991 op terugkwam en zijn kritiek verder uiteenzette.²³⁹ Hij nam het in *Revisiting mathematics education* Piaget niet kwalijk met zijn theorieën onbewust te hebben bijgedragen aan de impact van New Math. Net als twintig jaar eerder in *Mathematics as an educational task* legde hij de verantwoordelijkheid bij de wiskundigen zelf. Hij nam het de wiskundigen ten zeerste kwalijk, dat zij de kritiek op Piagets werk (en dan met name van wat Freudenthal noemde het ‘pseudowiskundige’ deel) nooit luid genoeg geuit hadden:

A mathematician should be able to indicate in Piagets problems what is adequate and what is distorted, and with a bit of common sense he could be the person best placed to uncover the numerous errors in Piagets experiments and interpretations.²⁴⁰

Deze verantwoordelijkheid als wiskundige nam Freudenthal zelf met een uitgebreide appendix in *Mathematics as an educational task* getiteld: ‘Piaget and the Piaget School’s investigations on the development of mathematical notions’.²⁴¹ In zijn voorwoord schreef hij erover:

To be honest I should say that I feel there is no need to embellish low-key education using high-brow psychology, in particular if the cited literature is far removed from

236 M.J. Langeveld in ‘Preface’ van: P.M. van Hiele, *Development and learning process. A study of some aspects of Piaget’s psychology in relation with the didactics of mathematics* (Groningen 1959) iv.

237 Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Deel III* 99.

238 Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 349.

239 Freudenthal, *Revisiting mathematics education. China lectures*.

240 Freudenthal, *Mathematics as an educational task* 662.

241 Ibid., 662-677.

educational preoccupations. If others prefer this procedure, then indeed, I feel the need to oppose it. Misusing Piaget’s name has become quite a habit in didactical literature. This led me to discuss in passing, and finally in a more connected form in the Appendix, what Piaget’s investigations could mean for mathematical education.²⁴²

Een meer gedetailleerde beschouwing in deze vorm vond Freudenthal nodig om zijn eigen “somewhat summary criticism” op Piagets werk uit zijn artikelen verder te onderbouwen. Desalniettemin voelde hij zich ook geroepen zijn waardering voor het werk van Piaget uit te spreken:

Before going into this I would like to stress the wealth of ideas in his work, his originality, not to say genius, while not excluding the negative undertones which often reverberates this word.²⁴³

Freudenthals kritiek op Piaget had diverse gronden. Allereerst was er het duidelijk in het oog springende verschil tussen de aanpak van Freudenthal en die van Piaget. Waar Piaget in zijn vroegste werk nog wel verslag deed van observaties van zijn eigen kinderen, baseerde hij zich in zijn latere en meer bekende werk op wat Freudenthal ‘laboratoriumsituaties’ noemde: een kunstmatige opzet van proefopstelling, proefpersoon en een proefleider die vastomlijnde experimenten afwerkte.

Dit vormde natuurlijk een schril contrast met de terloopse observaties en ontspannen wandelingen van Freudenthal met zijn kleinzoon Bastiaan. Maar ook met de onderwijssituaties zoals die zich in een klas voordeden had het volgens Freudenthal weinig van doen. Met zijn experimenten belichaamde Piagets onderzoeken voor Freudenthal de zo door hem verafschuwde bureauwetenschap, die elk contact met de realiteit verloor. De enige keer dat Freudenthal zelf bewust proeven deed was in een reeks voorbedachte en daardoor min of meer opzettelijke natuurkunde-experimenten met Bastiaan, maar hierbij liet hij de jongen zoveel mogelijk zelf doen en aangeven. Hij schreef over deze experimenten – die hij “Bastiaan’s lab” noemde –:

Het is niet het Lab van de ontwikkelingspsycholoog, waar de kinderen – in ’t Engels – *subject*, d.w.z. onderwerp of onderdaan, zijn, of – in ’t Nederlands – proefpersoon. Bastiaan *doet* proeven.²⁴⁴

Freudenthals argwaan tegenover Piagets laboratoriumsituaties stelde op zijn eigen observatie-ervaringen. Eén keer zag hij heel duidelijk hoe in laboratoriumexperimenten verkregen theorie door de terloopse praktijk weerlegd werd. Het ging om het begrip conservatie, een begrip dat kleuters volgens Piaget nog niet konden beheersen. Freudenthal vertelde hoe hij met Bastiaan langs het kanaal liep, waar men aan een verbreding van de kanaalbedding begonnen was. Bastiaan merkte opgewonden op, dat er voor de weggebaggerde aarde water bij zou moeten – iets wat Freudenthal nauwelijks kon geloven:

²⁴² Ibid., v-vi.

²⁴³ Ibid., 662.

²⁴⁴ Freudenthal, ‘Bastiaan’s lab’, *Pedomorfose* 15 (1976) 35-54, aldaar 35.

Het hier gebeurde is zo verbazend, omdat het een teken is van wat Piaget conservatie noemt, ver beneden de leeftijd die volgens de psychologische laboratoriumproeven hiervoor bepaald is – ontdekkingen in het vrije veld contra de dwangbuis van het laboratorium. Meermalen in de volgende maanden geeft hij – met de dezelfde opwindings – blijk van het ontdekken van conservatieverschijnselen, wanneer iets overgegoten wordt van een breed in een smal vat, wanneer bij het onderdompelen van zijn hand het water in een weckglas stijgt. Wanbegrip ten aanzien van conservatie doet zich, volgens mijn ervaringen, bij kinderen alleen in kunstmatige laboratoriumsituaties voor.²⁴⁵

Maar erger en kwalijker dan de kunstmatige opzet van Piagets experimenten vond Freudenthal de fouten die hij bij de uitvoering ervan maakte: niet alleen wiskundige fouten, maar ook taalinterpretatiefouten, waaruit vervolgens niet zelden foute conclusies volgden. Piagets wiskundige dwalingen werden door Freudenthal in zijn appendix geschetst door het vertalen van een hoofdstuk uit Piagets *La représentation de l'espace chez l'enfant* uit 1948. Freudenthal waarschuwde de lezer dat de vertaling niet erg soepel liep, want hij was geen “professional translator who is obliged to translate things he does not understand”, hiermee al het niveau van het stuk aangevende.²⁴⁶ Vervolgens vertaalde hij, met toevoeging van tientallen voetnoten vol uitleg en vraagtekens, de schier onbegrijpelijke bespreking van Piaget van zijn acht “infralogical operations” die de Euclidische ruimte bepaalden zoals hij dat zag. Vervolgens concludeerde Freudenthal:

After our short analysis this extract speaks so loudly for itself that there is no need to add criticism. It is, however, not too far-fetched to ask whether such ideas have influenced Piaget's work in a decisive way. They did influence it, but I doubt whether they were in any way decisive influences.²⁴⁷

Ondanks Piagets herhaaldelijk foutieve gebruik van wiskundige begrippen, zijn wiskundig gammele theorieën en dito experimentopzet vond Freudenthal het kenmerkend toch nodig hier uitgebreid aandacht aan te besteden. Dit deed hij, omdat Piagets bevindingen – ondanks alle fouten – namelijk wél weer wiskundig werden geïnterpreteerd en hun invloed hadden op de wiskundededidactiek en de inhoud van het wiskundeonderwijs, waar ze golden als psychologische legitimatie en onderbouwing voor het nemen van de wiskundige structuur als uitgangspunt.

Nog meer dan de wiskundige fouten, waren de fouten in taalkundige interpretatie van de testuitkomsten voor Freudenthal een doorn in het oog. Voor Freudenthal was het in Piagets testsituaties van essentieel belang dat proefpersonen de vraag taalkundig hadden begrepen, maar nergens in de proefnemingen verzekerde de testleider zich hiervan.²⁴⁸ In zijn appendix beschreef hij een conservatie-experiment uit

245 Freudenthal, ‘Cognitieve ontwikkeling – kinderen geobserveerd’, in: Freudenthal, *Appels en peren* 104. Deze observatie noteerde Freudenthal ook in: Freudenthal, ‘Bastiaan’s lab’, *Pedomorfose* 15 (1976) 35-54, aldaar 35.

246 Freudenthal, *Mathematics as an educational task* 663.

247 Ibid., 669.

248 Ibid., 87-88.

Piagets boek *La g n se des structures logiques  l mentaires*, door Freudenthal met N aangeduid:

N starts with investigating whether and to which degree children understand that pouring fluid from one vessel into another or into a number of vessels does not influence the quantity; the subjects are asked whether this is more or less than that or as much as that. According to the author’s intention the question aims at the quantity rather than at the number of vessels or the height of the level of the fluid. This fact, however, is not included in the information provided to the children; the experimenters’ questions are sometimes even misleading, to which contributes the linguistic circumstance that in French both “is this more?” and “are there more?” can be translated by the same phrase “y en a-t-il plus?”²⁴⁹

Wanneer Piaget tot de conclusie kwam dat een kind van een bepaalde leeftijd een bepaald concept niet beheerste, bewees hij volgens Freudenthal niet meer dan het feit dat het kind de vraag niet had begrepen. Piagets uitkomsten hadden volgens hem dan ook geen betrekking op de cognitieve ontwikkeling, maar op de taalkundige. Vaak was er ook sprake van communicatieproblemen tussen de testleider en de kinderen: een antwoord werd niet begrepen, fout geïnterpreteerd of domweg ten onrechte fout gerekend. Het enige dat dus onderzocht werd, waren volgens Freudenthal de communicatievaardigheden:

There is no real interpretation of mathematics to which Piaget’s research can be related. Though the subjects of his experiments are set mathematical tasks, he almost never tests whether they understood the language in which the task was formulated. It is rather the *linguistic* than the mathematical content or the task which is object of the investigation. In other cases, rather than testing the reaction of the child to a mathematical problem, the leader of the experiment tests how the child manages to disentangle irrelevant complications of the problem, or whether you can cheat the child by misleading suggestions. A still sadder sight is the attempt by the experiment leader to induce the experiment subject, who might hesitate between a right and a wrong answer, to choose the wrong one. Even worse are the manifest blunders of the experiment leader who marks correct answers as wrong.²⁵⁰

Naast de wiskundige fouten, de fouten in de opzet van het onderzoek en de fouten in de interpretatie van de resultaten van het onderzoek had Freudenthal nog meer kritiek op Piagets werk. Hij rekende dat punt echter niet Piaget zelf aan, maar de wiskundigen, die zonder kritische houding bij de invoering van nieuw lesmateriaal met Piagets werk aan de haal gingen, en daarbij zelfs verzuimden, de door Piaget gebruikte wiskunde te controleren.²⁵¹

In een nawoord op het boekje *Zoals een kind het ziet. Wegwijzer in de theorieën van Piaget* schreef Van Hiele een weliswaar mild geformuleerde, maar toch essentiële kritiek op het werk van Piaget, die in grove lijnen overeenkwam met die van

²⁴⁹ Ibid., 671.

²⁵⁰ Ibid., 120.

²⁵¹ Zie ook paragraaf 9.5.3, waarin beschreven wordt hoe een in Freudenthals ogen foutieve invalshoek bij het invoeren van het getalbegrip door Piagets onderzoeksresultaten zou worden gesteund.

Freudenthal.²⁵² Over dit boekje schreef Freudenthal dan ook in een recensie dat hij het “voortreffelijke nawoord [...] niet zou willen missen”.²⁵³ Het zette volgens Freudenthal tot nadenken aan, nadenken

... uiteraard ook over dit boekje, en dan niet door na te praten, maar kritisch. Hij [de lezer] mag dit best riskeren, want van vrijwel alle proeven die hij hier vindt, is de ondeugdelijkheid al erkend, van sommige door Piaget zelf. Maar zelf erachter komen is meer waard.²⁵⁴

Want de essentie van Piagets werk – het inzicht dat de kennis en beleving van een kind essentieel anders is dan die van de (onderwijzende) volwassene – kon ook Freudenthal natuurlijk onderschrijven. In een vraaggesprek met Piet Vredenduin over ‘Mensbeeld’ gaf hij jaren later toe, dat zijn mensbeeld en dat van Piaget op zichzelf waarschijnlijk niet eens zoveel verschilden.²⁵⁵ Het grote verschil zat in de uitgangspunten. Piaget goot de door de mens verkregen kennis in een (semi-wiskundige) structuur en achtte daarmee bewezen dat deze ook zo tot stand kwam. Over deze denkwijze schreef Freudenthal:

Je maakt die kennis van die mens los, dan beschouw je de kennis die klaar gekomen is, en die orden je op de een of andere manier in een lexicon of in een wiskundige zin. Zo zit die kennis in elkaar. Maar zo is hij niet tot stand gekomen. Niet in de geschiedenis, en komt ook bij een individu niet zo tot stand, integendeel, het gaat net omgekeerd. [...] Ik zie juist hoe langzaam het gaat voor je die kennis kunt losmaken van de manier waarop je hem zelf verworven hebt. Dat wil zeggen een deel van de kennis blijft op een onbewuste manier verworven en er is nog heel wat vereist om die kennis daarvan los te maken.²⁵⁶

En die kennis van het onbewuste bewust te maken, dat was de opdracht waar men in het ontwerpen van onderwijs voor stond. De zoektocht naar onderwijs was niet los te zien van de vakinhoud – lokaal, op het niveau van het lerende kind. Zijn afkeer voor de blinde acceptatie van psychologisch onderzoek ten koste van de eigen vakkennis van de wiskundigen bracht Freudenthal weer terug naar de bron: het observeren van het kind. Twee belangrijke activiteiten onderscheidde Freudenthal om tot de ontwikkeling van een theorie over het wiskundeonderwijs te kunnen komen: nauwgezette en voortdurende observatie van het leerproces en de analyse daarvan.²⁵⁷ Beter bij de dagelijkse werkelijkheid beginnen en om je heen kijken, dan klakkeloos hoogdravende theorieën omarmen, zo betoogde hij, want:

252 Sime, *Zoals een kind het ziet. Wegwijzer in de theorieën van Piaget*.

253 Freudenthal in een boekbespreking van: Sime, *Zoals een kind het ziet. Wegwijzer in de theorieën van Piaget*; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1714.

254 Ibid.

255 Vraaggesprek door Piet Vredenduin over ‘mensbeeld’, 9 januari 1984; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1850.

256 Ibid.

257 Uit: ‘Verslag van het college van Prof.Dr.H. Freudenthal’ op de WISKOBASconferentie te Lochem, 1972; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 408.

Als we weinig van cognitieve ontwikkeling afweten, zou de reden ervan niet kunnen zijn, dat we het tot nu toe te ver, te hoog hebben gezocht, dat we over wat ons onbelangrijk leek, argeloos heen zijn gestapt? ²⁵⁸

9.7 De opdracht voor de toekomst

In 1969 blikte Freudenthal terug op eerdere jaren. Hij omschreef het verschijnen van zijn artikel ‘Instruction of modern mathematics or modern instruction of mathematics?’ van 1963 als “a solitary effort to defend the priority of pedagogy and the art of teaching over programs”.²⁵⁹ “Nonconformist”, zo karakteriseerde hij dit artikel.²⁶⁰ Sindsdien was er veel veranderd: de aandacht voor pedagogiek en didactiek in het wiskundeonderwijs was sterk toegenomen, steeds meer geaccepteerd en nog groeiende, niet in de laatste plaats door de inspanningen van Freudenthal zelf. Deze veranderingen en de toename – ook internationaal – van de activiteiten op het gebied van het wiskundeonderwijs maakten het een woelige, maar daardoor ook inspirerende tijd.

Tegen deze achtergrond zijn de sprongen in Freudenthals eigen leerproces moeilijk uit te lichten. De enorme golf aan bedrijvigheid in binnen- en buitenland maakten dat de impulsen legio waren: van congressen en conferenties tot het observatiewerk van het IOWO kwamen er op allerlei manieren evenveel vruchtbare ideeën van Freudenthal vandaan, als op hem af. Ideeën om zich tegen af te zetten – zoals in zijn kritiek op Piaget – maar ook ideeën om constructief mee verder te bouwen.

En meer dan in welke voorgaande periode ook, valt Freudenthals tomeloze energie en onvermoeibare inzet op. Zijn grote naam en reputatie zette hij in bij de diverse sociale functies die hij vervulde: het opzetten van *Educational Studies in Mathematics* en het organiseren van het eerste internationale congres voor wiskunde-didactiek zijn daar voorbeelden van. Hij sprong onmiddellijk in op bestaande initiatieven en gaf deze vervolgens een ongekennde versnelling en extra impuls, zoals in zijn interactie met WISKOBAS en het IOWO.

Hij volgde actuele ontwikkelingen op de voet en nam alles direct in zich op. Razendsnel vonden er in de ontwikkeling van zijn gedachtegoed assimilatie en integratie van andermans ideeën plaats. Eén belangrijk element sprong er daarbij uit: het (her)ontdekken van de observatie als bron bij de ontwikkeling van wiskundeonderwijs.

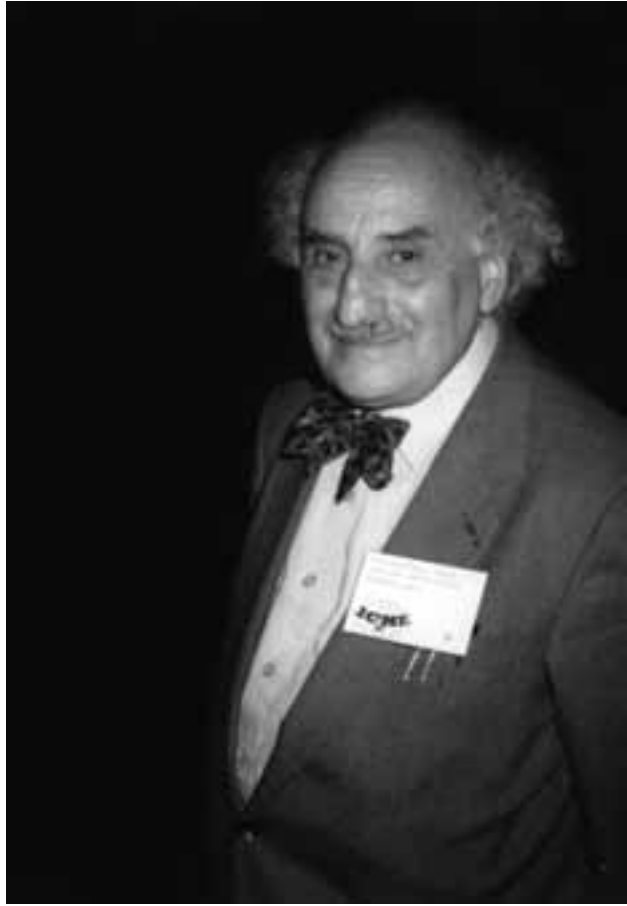
Tegen de achtergrond van het belang van nuttig, eerlijk en zindelijk wiskun-

²⁵⁸ Freudenthal, ‘Cognitieve ontwikkeling – kinderen geobserveerd’, artikel samengesteld uit *Jaarverslag over 1977*, Provinciaals Utrechts Genootschap (1978) 8-18 en Freudenthal, *Weeding and sowing*; Freudenthal, *Appels en peren* 105.

²⁵⁹ Hij doelde op zijn artikel: Freudenthal, ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’.

²⁶⁰ Freudenthal, ‘Recent tendencies in the teaching of mathematics’, in: W.E. Lamon, ed., *Learning and the nature of mathematics* (1972) 11-18, aldaar 13.

Freudenthal tijdens ICME-1980 in Berkeley (1980).



deonderwijs voor allen, op elk niveau, bleef de observatie als houvast en richtlijn terugkomen. Het zoeken naar paradigma's vloeide daar voor Freudenthal logischerwijs uit voort. Toen hij een kleindochter met veel geduld over de tijdspanne van een paar weken het principe van de verdubbeling van een vierkant liet ontdekken, vroeg het meisje

“How can you teach mathematics in this way to a whole class?” She was right to ask this question. School teachers cannot afford to delay solutions patiently for hours or weeks. They have to develop methods to teach 250.000 children a year mathematics in the same way as a girl is taught by a granddaddy who is a university professor in mathematics.²⁶¹

En daarmee vatte hij de opdracht voor de toekomst samen: methodes ontwikkelen om in de klas wiskunde te laten herontdekken, zoals een grootvader dat met zijn kleinkinderen deed. Deze opdracht was het *IOWO* op het lijf geschreven. Maar niet

²⁶¹ Lezing van Freudenthal in Argentinië, eind 1972; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 571.

alleen binnen het IOWO, ook daarbuiten zou Freudenthal in deze nieuwe traditie nog veel onderwijswerk verrichten.

“Een wiskundige [...] die zich altijd en de laatste jaren vrijwel uitsluitend voor het onderwijs heeft geïnteresseerd” zo omschreef hij zichzelf in 1973.²⁶² De balans in zijn belangstelling en werkzaamheden was nu definitief doorgeslagen naar de kant van het onderwijs: Freudenthal – de ongenaakbare wiskunde-professor, de kindse grootvader, de onvermoeibare criticus – wás wiskundeonderwijs.

²⁶² Freudenthal, ‘De niveaus in het leerproces en de heterogene leergroep, met het oog op de middenschool’, *Gesamtschule Conferentie* (1973) 88-99, aldaar 88.

Epiloog

De cirkel is rond

Onderwijs is een geweldig systeem met zijn eigen wetten van reactie op, en immuniteit tegen, maatregelen van buiten, een systeem dat zijn eigen leven leidt. Het is allesbehalve ongevoelig, het is geweldig vatbaar voor invloeden, als je maar weet waar en hoe, maar niemand weet het. Of veeleer: zij die het weten, weten niet dat ze het weten, en zij die denken dat ze het weten, kunnen zich schromelijk vergissen.

Freudenthal in de rede bij zijn afscheid als hoogleraar-directeur van het IOWO op 14 augustus 1976¹

De geschiedenis van het Nederlandse wiskundeonderwijs laat grillige ontwikkelingen zien. Buitenlandse invloeden, leerplan-erfenissen, vanuit de politiek opgelegde vernieuwingen, druk van uitgeverijen en hun keuzes bij het uitgeven van leermethoden: de invloeden waren legio, divers en slecht te voorspellen. De volgende (waarschijnlijk Amerikaanse) grap schetst de ontwikkeling van de 'leessom' gedurende de afgelopen vijftig jaar:

Teaching Math in 1950: A logger sells a truckload of lumber for \$ 100. His cost of production is $\frac{4}{5}$ of the price. What is his profit?

Teaching Math in 1960: A logger sells a truckload of lumber for \$ 100. His cost of production is $\frac{4}{5}$ of the price, or \$ 80. What is his profit?

Teaching Math in 1970: A logger exchanges a set L of lumber for a set M of money. The cardinality of set M is 100. Each element is worth one dollar. Make 100 dots representing the elements of the set M . The set C , the cost of production contains 20 fewer points than set M . Represent the C as a subset of set M and answer the following question: What is the cardinality of the set P for profits?

Teaching Math in 1980: A logger sells a truckload of lumber for \$ 100. Her cost of production is \$ 80 and her profit is \$ 20. Your assignment: Underline the number 20.

Teaching Math in 1990: By cutting down beautiful forest trees, the logger makes \$ 20. What do you think of this way of making a living? Topic for class participation after answering the question: how did the forest birds and squirrels feel as the logger cut down the trees? There are no wrong answers.²

¹ Hans Freudenthal, 'Wiskunde-onderwijs anno 2000', *Christelijk Pedagogisch Studieblad* (1976) 42-46.

² De oorsprong van deze grap is helaas niet achterhaald, vooral doordat deze via internet wijdverspreid is.

Hoewel natuurlijk danig gechargeerd, is deze grap typerend voor de manier waarop de veranderingen in het wiskundeonderwijs beleefd werden: van de mechanistische recht-toe-recht-aan aanpak, via de verzamelingen-gekte van New Math naar de maatschappelijk verantwoorde, maar nauwelijks meer met ‘echte wiskunde’ verwante aanpak uit de jaren negentig. Deze schets is natuurlijk overdreven en niet zo direct van toepassing op de Nederlandse situatie, maar in grote trekken komen beide ontwikkelingen wel degelijk overeen.

In het Nederlandse wiskundeonderwijs van de jaren negentig leek het pleit definitief beslecht in het voordeel van het zogenaamde ‘realistische wiskundeonderwijs’. Het IOWO was – via de vakgroep ‘Onderzoek Wiskunde onderwijs en Onderwijscomputercentrum’ – uitgegroeid tot het ‘Freudenthal Instituut’ en het realistische wiskundeonderwijs dat daar in de geest van Freudenthals gedachtegoed ontwikkeld werd, genoot wereldfaam.³ Het leek alsof de vooroorlogse strijd tussen de voorstanders van een logisch deductieve aanpak en de voorstanders van een intuïtieve aanpak definitief in het voordeel van de laatsten was beslecht.⁴

Maar er waren ook tegengeluiden te horen: kinderen zouden geen echte wiskunde meer leren, maar blijven hangen in een nooit ophoudende praktisch-realistische inleiding. In een artikel in *NRC/Handelsblad* naar aanleiding van zijn inaugurele rede noemde F.J. Keune de schoolwiskunde “zo plat als een pannenkoek”.⁵ Een heftige discussie tussen voor- en tegenstanders van realistisch wiskundeonderwijs volgde, waarin Keune zowel vanuit de lerarenhoek als vanuit de universiteit bijval kreeg.

Het leek, alsof de logisch-deductieve stroming een nieuwe opleving meemaakte. Was de cirkel weer rond? Moest er teruggegaan naar Bourbaki, of – weer dertig jaar eerder – naar Dijksterhuis cum suis? Had Freudenthal dan uiteindelijk toch niet ‘gewonnen’?

Dit zijn de verkeerde vragen. Tussen de theorie van realistisch wiskundeonderwijs en de onderwijspraktijk – of: de indruk die die praktijk maakte – was een groot verschil. Realistisch wiskundeonderwijs houdt niet op bij ‘het leren van wiskunde aan voorbeelden’, zoals ook door voorstanders van dat wiskundeonderwijs al werd aangedragen. De term ‘realistisch’ hield ook zeker niet in dat er geen plaats zou zijn voor abstractie, of dat er geen aandacht zou zijn voor het bewijzen van stellingen. De discussie ging dan ook niet over het voor of tegen ‘Freudenthal’ (of: de met zijn gedachtegoed geassocieerde stroming) zijn, maar betrof het Nederlandse wiskundeonderwijs: dat wat er in de praktijk van realistisch wiskundeonderwijs terecht kwam.⁶

3 N. van Dam, “Ze rekenen ons alles aan wat mis is”. De aparte status van het Freudenthal Instituut’, *Het Onderwijsblad* (2003); als elektronisch tijdschrift beschikbaar en geraadpleegd.

4 Zie ook de eindconclusie in: K. Gravemeijer en J. Terwel, ‘Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory’, *Journal of Curriculum Studies* 32 (2000) 777-796, 792.

5 ‘Pannenkoekwiskunde’, *NRC/Handelsblad* (25 april 1998). Keune, hoogleraar algebra in Nijmegen, pleitte in zijn inaugurele rede voor meer aandacht voor abstractie en logisch redeneren om het Nederlandse wiskundig talent dat met de realistische aanpak verloren zou gaan, beter te benutten.

6 Ook Keune bleek zich goed te kunnen vinden in de in een gesprek aan hem voorgelegde selectie van ideeën en uitgangspunten uit Freudenthals werk. Zijn kritiek betrof dan ook voornamelijk het uitvergroten van één aspect (het realistische) van de wiskundendidactiek in het wiskundeonderwijs; gesprek met F.J. Keune, 29 april 1999.

Zonder verder in te gaan op de vraag, in hoeverre realistisch wiskundeonderwijs in het huidige wiskundeonderwijs op de juiste wijze geïmplementeerd is, moet voorop gesteld worden dat de discussie het gelijk of ongelijk van Freudenthal nauwelijks raakt. Het is zelfs aannemelijk dat Freudenthal in deze discussie ook het standpunt voor ‘meer echte wiskunde’ zou innemen – in ieder geval voor de betere leerling. Immers: voor hem was het realistische aspect ook slechts een uitgangspunt, voor sommige leerlingen weliswaar ook direct het eindpunt, maar idealiter een eerste stap in het wiskundeonderwijs op weg naar wiskunde, naar het ontdekken van logische verbanden, naar bewijzen, tot axiomatiseren aan toe, op elk niveau:

Yes, I told you there are so many kinds of understanding in mathematics. At every moment you may believe you have just reached ultimate understanding of some subject, such that nothing is left to be desired. But no, there is no ultimate understanding in mathematics, you can understand any problem in an ever larger context, from an ever higher point of view, and finally – it looks the lowest of all, but perhaps it is the highest – you can learn to understand it in the perspective of the learning child, and this is what happened many times to me.⁷

Bij nagenoeg alle stromingen in de discussie over wiskundeonderwijs stond uiteindelijk steeds het uitdragen van *wiskunde* voorop. Ook voor Freudenthal gold dat ‘leren wat wiskunde was’ tot op zeker niveau haalbaar moest zijn voor elke leerling. Het ‘leren wiskunde bedrijven’ was voor hem daarbij net zo belangrijk als het realistische aspect als startpunt.⁸

Op 14 augustus 1976 nam Freudenthal afscheid als hoogleraar-directeur van het IOWO. Het IOWO bestond op dat moment vijf jaar. Freudenthal kende zich in zijn afscheidsrede de rol van IOWO-grootvader toe: niet meer direct betrokken bij de kleine en grotere beslommeringen en zorgen, maar met een zekere afstand genietend en de vruchten plukkend van het werk dat er gedaan werd. Hij blikte terug op zijn rol in het IOWO:

Als ik terugkijk op mijn activiteit bij het IOWO en U me vraagt wat ik denk dat mijn belangrijkste bijdrage was, dan zeg ik: hun met mijn gezag als wiskundige garanderen dat hetgeen zij aan het ontwikkelen waren, echte wiskunde is, dat om jezelf als wiskundige waar te maken, je geen minderwaardigheidscomplexen bij anderen hoeft te kweken door middel van verzamelingenleer, propositie-calculus, groepentheorie, vectorruimten en andere hoogdravende onverteerde theorie, dat je wiskunde overall kunt ontdekken, met je blote oog en je gezond verstand, dat het het kenmerk van wiskunde is, zo voor zich zelf te spreken, dat je je niet hoeft uit te sloven, om anderen ervan te overtuigen dat het waard is, om te kennen, te leren, te onderwijzen.⁹

7 Freudenthal, ‘Teacher training – an experimental philosophy’, *Educational Studies in Mathematics* 8 (1977) 369-376, aldaar 374.

8 Streefland betitelde Freudenthal als zijnde verantwoordelijk voor het ontstaan van ‘wiskunde als activiteit’ als theorie; L. Streefland, ‘Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron’, *Nieuwe Wiskrant* 5 (1985) 60-67.

9 Freudenthal, ‘Wiskunde-onderwijs anno 2000’, *Christelijk Pedagogisch Studieblad* (1976) 42-46, aldaar 45.

Met deze – gemakkelijk als provocerend interpreteerbare – uitspraken leek hij op het eerste gezicht onomwonden te pleiten voor de ‘knip-en-plak-wiskunde’ die in de jaren negentig zo onder vuur zou komen te liggen. Maar Freudenthals credo ‘doe maar gewoon (wiskunde), dan doe je al gek genoeg’ was zeker geen pleidooi voor een eeuwigdurende intuïtieve knip-en-plak-inleiding in plaats van ‘harde wiskunde’. De te leren wiskunde moest voor hem uiteindelijk ook wel degelijk echte, correcte en relevante wiskunde zijn.

Bovendien moest deze als een activiteit, een wijze van denken door de leerling beleefd worden. Op die manier onderwezen, was wiskunde een voor iedereen onmisbaar element in de opvoeding, op dezelfde manier als dat het onmisbaar was in de maatschappij: “vraag niet hoeveel wiskunde een kind kan slikken, vraag wel op welke wijze wiskunde in het onderwijs kan bijdragen tot de menselijke [sic] waardigheid van het kind”, zo sprak hij in dezelfde rede.¹⁰

Het *10wo* was voor Freudenthal de belichaming van zijn theorie over wiskundededidactiek. Of beter nog: de belichaming van de *weg* tot die theorie over wiskundededidactiek. Over die *weg* schreef hij niet veel later zijn boek *Weeding and sowing*, ‘voorwoord tot een wetenschap van wiskundeonderwijs’.¹¹

Na zijn afscheid in 1976 braken geen jaren van rust en met voldoening terugzien aan voor Freudenthal. Waarschijnlijk werkte Freudenthal juist meer dan ooit aan wiskundeonderwijs en -didactiek, onderwijl nieuwe elementen aan zijn gedachtegoed toevoegend, andere herziend of aanscherpend. Twee boeken en een kleine tweehonderd artikelen over wiskundeonderwijs schreef hij in die laatste vijftien jaar van zijn leven. Bijna dagelijks was hij op het instituut te vinden. De wiskundeonderwijs-Freudenthal van 1975 zoals die gepresenteerd is in dit onderzoek is op veel punten zeker niet de ‘definitieve’ Freudenthal, maar aan de richting waarin en de wijze waarop hij zocht naar wiskundeonderwijs zou niet veel fundamenteels meer veranderen.¹²

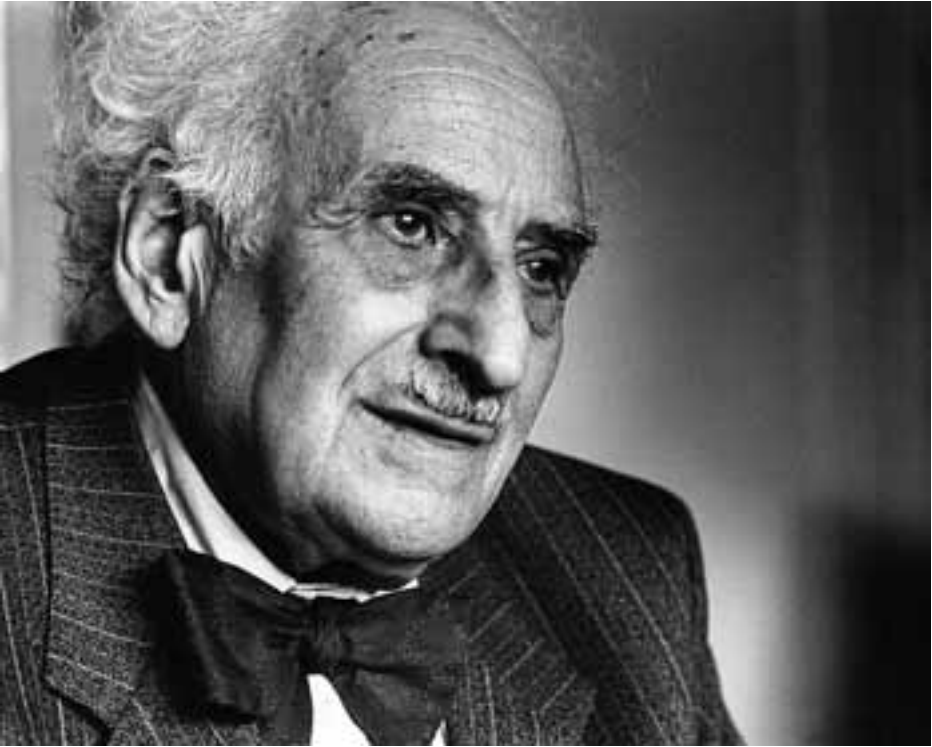
In 1977 keek hij in een brief aan zijn Poolse vriendin Krygovska terug op zijn werkzaamheden in het wiskundeonderwijs. Hij drukte haar op het hart vertrouwen te hebben in de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs en de invloed die haar ideeën daarop zouden hebben. Hun werk zou niet tevergeefs blijken volgens Freudenthal:

Voici la différence entre votre tristesse et la mienne: la vôtre est ce que vous craignez que ce que vous avez semé, n’aille germer ou soit étouffé par de mauvaises herbes – la mienne, que je ne verrai plus la moisson. Soyez sûre qu’elle sera riche. Ayez plus de

¹⁰ Ibid., 46.

¹¹ Freudenthal, *Weeding and sowing*.

¹² Meetkundeonderwijs en breukenonderwijs zijn maar enkele voorbeelden van onderwerpen uit het wiskundeonderwijs die in de jaren zeventig nog volop bij Freudenthal in ontwikkeling waren. De invloeden van pedagogen en leerpsychologen als Carpay, Van Parreren, Gal’perin en Davydov op Freudenthals werk zouden ook pas goed in de navolgende periode bekeken kunnen worden. Hetzelfde gold voor zijn internationale contacten en vriendschappen met gelijkgestemde didactici zoals die met Krygovska, Josette Adda, Christine Keitel en de invloed die zij op het werk van Freudenthal hadden.



Freudenthal poserend voor de achterflap van zijn autobiografie *Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven* (1986).

confiance! Ce que nous avons créé, tant peu que ce soit, survivra. Vous vous croyez vieille? Se vêtir à la mode ne démontre pas qu'on soit jeune. À notre âge on peut être plus jeune que ceux qui dès le début n'étaient que des vieillards.¹³

Vertrouwen! Zo sprak hij Krygovska moed in. En ook: met de heersende mode meedoen, wil nog niet zeggen dat je jong bent. Freudenthal was ervan overtuigd, dat er geogst zou worden van hetgeen hij – hoe tegendraads ook! – zaaide.

En oogsten was vijftien jaar later zeker aan de orde. Zijn naam is dan gekoppeld aan het Freudenthal Instituut, dat nationaal de toon zet en internationaal aanzien geniet. Ook werd Freudenthals naam verleend aan een door de ICMJ ingestelde prijs voor “outstanding achievement in mathematics education research”.¹⁴ Als het gaat om wiskundeonderwijs is Freudenthal *zelf* een instituut, waar een ieder die zich met dat onderwijs bezig houdt niet omheen kan.

13 Freudenthal aan Krygovska, 24 november 1977. Hoezeer zij op een lijn zaten, bleek uit een andere brief van Freudenthal aan Krygovska een paar jaar later: “En dehors de l'owto il n'y a personne qui comprenne et interprète mes idées comme vous et qui y ajoute des arguments et des aspects essentiels”; Freudenthal aan Krygovska, 29 april 1980; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 47.

14 Dit is de zogenaamde ‘Hans Freudenthal Medal’ uitgereikt in oneven jaren als erkenning voor “a major cumulative program of research”.

Maar op zijn lauweren rusten was voor Freudenthal nooit aan de orde. Hij schreef, enkele weken voor zijn overlijden, aan de Duitse wiskundendidacticus Hans Steiner (1928-2004):

Ich habe weiterhin große Pläne. Mit dem Computer geht es ja rasend schnell – so schnell wie man spricht oder denkt. Allmählich wird man ein lebender Mythos.[...] Mir geht es augenblicklich so gut wie kaum je in den letzten zehn Jahren.¹⁵

Enkele weken later stierf Freudenthal, gezeten op een bankje in het park in Utrecht, waar hij werd gevonden door spelende kinderen. Hetzelfde park, waar hij jaren eerder zo vaak met zijn kleinzoon wandelde. Wandelingen, waarin de kiem voor het observeren van kinderen lag.

De cirkel is rond.

15 Freudenthal aan H.G. Steiner, 21 september 1990; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 71.

SUMMARY

‘Elke positieve actie begint met critiek’ (‘Criticism is the start of all positive action’)

Hans Freudenthal and the didactics of mathematics

Hans Freudenthal (1905–1990), professor in mathematics, scientist, literator, but above all mathematics-educator, was inextricably linked to the changes which took place in mathematics education and didactics during the second half of the last century. To this day he is the dominating figure in mathematics education in the Netherlands and this is one of the main reasons for dedicating a study like the present to Freudenthal. However, for a professor in mathematics it was anything but obvious to devote himself to mathematics education and didactics and it is interesting to see what made Freudenthal choose this path. But there is more.

This study provides a historical analysis of Freudenthal’s didactic ideas and his didactic career and is partly biographical since it concerns the analysis of Freudenthal as an educator and didactician. It also contributes to the historiography of mathematics education. In an indirect way, it also addresses other, closely related questions such as what is mathematics and where does it start? Which role does mathematics play in society and what influence does it have on the prevailing views concerning its accompanying didactics? His diversity as a scientist and his inexhaustible efforts to establish the didactics of mathematics as a seriously pursued science, made Freudenthal’s influence in this area considerable.

He foresaw an essential, practical role for mathematics in everyone’s life. As a starting point in their education he encouraged students to discover and create mathematics themselves, instead of imposing a ready-made mathematical system on them. In the seventies this point of view was put into practice by the co-workers of the rowo (Institute for the development of mathematics education). The mathematics education thus developed would gain world fame in the following decades.

Today, in the light of the discussions about recent mathematics education, in which the call for ‘genuine’ mathematics instead of the so-called ‘kindergarten’-mathematics can be heard, Freudenthal’s approach seems to be passé. However, the outcome of this study (which is mainly based on documents from Freudenthal’s vast personal archive) shows a more refined picture. The direct identification of ‘kindergarten’-mathematics with Freudenthal’s view on mathematics education

does not seem justified. ‘Realistic mathematics’ as advocated by Freudenthal includes more than a practical introductory. For him school mathematics, among other things, should also aim at teaching ‘genuine’ mathematics in the end. This attributes to the justification of a profound analysis and a renewed introduction to Freudenthal’s ideas.

A roughly chronological structure has been chosen. An introductory chapter on the education of mathematics in the interbellum period (see Chapter II) is followed by a biographical chapter (see Chapter III) outlining Freudenthal’s life. In 1930 the young, promising mathematician Freudenthal moved from Germany to Holland. At Amsterdam University an appointment as assistant of the mathematician L.E.J. Brouwer awaited him. Freudenthal married Susanna Lutter in 1932 and until 1946 they and their four children lived in Amsterdam.

Didactics and education did not take a prominent place among Freudenthal’s activities in the thirties. He spent most of his time on his mathematics and on his work for *Compositio Mathematica*, a journal published by Brouwer. He did, however, experiment with teaching a colloquium on mathematics education for mathematics students. He was not a gifted teacher and most of his students had difficulty keeping up with his classes.

After the occupation of the Netherlands during the Second World War, Freudenthal, being Jewish, was removed from office. This involuntary passivity gave him the opportunity to concentrate on his – until then – slumbering interests. His non-Jewish wife still had access to all libraries, which enabled Freudenthal to proceed working at home. Apart from his mathematics, which he kept doing as best as he could, he concentrated on writing plays, novels and poetry and spent much time with his children.

The arithmetic lessons he taught to his sons became a practical reason to take up studying literature on mathematics education and didactics. Early 1944 he started working on what initially was to be a book i.e. ‘Rekendidaktiek’ (Didactics of Arithmetic, see Chapter IV).

When Freudenthal started writing ‘Rekendidaktiek’, he already envisioned the outline and contents of the book. It should become a didactical textbook, based on scientific experiments and research, without any false ‘scientific’ pretence which he had so often come across in the works of others.

The larger part of the manuscript is taken up with Freudenthal’s criticism of the use of what he called the ‘assisting sciences’. Philosophy, psychology, pedagogy, general didactics, all these ‘assisting sciences’ were rejected by him for various reasons. In doing so he also criticised a large number of arithmetic teaching methods. After all, he wrote in this manuscript, ‘criticism is the start of all positive action’. A motto to which he remained faithful for the rest of his life.

Yet, ‘Rekendidaktiek’ was more than just criticism. While rejecting the various ‘assisting sciences’ one by one, and describing the reasons for this, he also tried to find a way in which these sciences could become useful for the didactics of arith-

metic. He emphasized, for instance, the correct use of statistical methods and the importance of making observations. Describing the conversations he had with his children was a phenomenon he would also use in his later work. Finally, he made a stand against the classical education which was common in these days.

In the final ten pages that have been preserved of the manuscript Freudenthal denounced arithmetic education as a means of teaching to think logically – something that was viewed as the main goal of arithmetic education in many arithmetic teaching methods. According to him, ‘learning to think logically’ could be much more efficiently acquired through the learning of the native language. The structure of ‘arithmetic thinking’ and the thinking of formal logic were too simple, too transparent and therefore not typical of thinking in general. According to him arithmetic teaching did not have any other important practical implication besides ‘arithmetic thinking’.

The manuscript ‘Rekendidaktiek’, however, remained unfinished. After the liberation in 1945, Freudenthal resumed his activities at the university and let arithmetic education be. In 1946 he was appointed professor in pure and applied mathematics at the university of Utrecht, where he would live and work the rest of his life. There, an enormous amount of work establishing the Mathematical Institute awaited Freudenthal. That his little excursion to the didactics of arithmetic would remain just that, would have seemed obvious. Nothing was further from the truth.

After the liberation of the Netherlands (1945), Freudenthal seemed to be bursting with impatience to make his pedagogical-didactical findings from wartime known (see Chapter v). At first, on his own initiative he chose the innovative audience of the wvo, the Working community for education and teaching. In August 1945, the wvo organised a summer conference, where Freudenthal spoke about ‘pedagogy of arithmetic and mathematics’, as well as ‘educating for thinking in the broadest sense’. His lecture ‘Educating for thinking’, in which many themes from ‘Rekendidaktiek’ could be recognized, was – according to himself – very successfully received. This was not surprising, as his lecture fitted very well in wvo-circles where conceptions such as ‘education is accompanying the child in its natural growth’ and ‘educating for peace’ were commonly accepted. Freudenthal’s lecture did not merely concern didactics (of arithmetic). He mostly spoke about educating and teaching the masses to think. By the way, he did not think to accomplish this through arithmetic education, but by stimulating reading because, as he wrote, ‘a child that reads twice as much, learns to think twice as much’.

His own contribution to this ‘educating through reading’ were articles published in the weekly journal *De Groene Amsterdammer*. He himself had initiated this connection by sending his article ‘Calculating machines win the war’ to the editors, who published it the following month. It would be the first of a long series of articles he was going to write. Easy to read articles about mathematical and scientific issues, about academic innovations and education in general. In the seventies and eighties he would find a way to vent his literary (and other) comments by writing columns for the daily paper *NRC/Handelsblad*.

After the war, Freudenthal's commitment to carry out his ideas about didactics and education were unstoppable. These efforts did not remain without consequence. His speaking at the wvo-conference put him in contact with the 'Wiskunde Werkgroep' (Mathematics Study Group) of the wvo. In this ww-group he found not only a sounding board but also inspiration for his ideas concerning mathematics didactics, working together with mathematicians and physicists such as Wansink, Ehrenfest-Afanassjewa and the married couple Van Hiele. He defined the ww for himself as an 'environment for gaining mathematics education consciousness'. In 1950 he became president of the ww and it did not take long before Freudenthal was completely involved in the current debates about the modernization of mathematics education at the secondary schools. In doing so, he was not afraid to take a stand against prevailing opinions, like those concerning the formative value of mathematics education.

In the interbellum period the formative value of mathematics was seen as one of the greatest virtues of mathematics education. Teaching mathematics as a deductive, closed system would do optimal justice to its formative value. In this way, mathematics was presented to the student as a ready-made subject. Advocates of this approach, such as H.J.E. Beth and E.J. Dijksterhuis, thought that purity and honesty of mathematical thinking were to be of the utmost importance for the intellectual development and the lifting of the moral level of the student. With this approach, school mathematics would acquire a rather elite character as it meant that understanding mathematics was reserved only for a lucky few.

Freudenthal renounced this formative value of mathematics. In his opinion mathematics education should foremost aim at the teaching of mathematics, and he considered this difficult enough. To develop thinking abilities, students should learn to weigh arguments against each other in an abundance of pros and cons. Mathematics, with its straightforward reasoning and well-organized structures, did not contribute anything to such thinking abilities.

Freudenthal did not mince his words in his publications. 'Abolish this nonsense-science!' he wrote in an article on mechanics education at secondary schools. With these subtlety-lacking utterances he did not make things easy for himself. But still, his opinion was valued. The regards he received as a professor in mathematics contributed to that, and since the prevailing opinions on the education of mathematics were slowly changing, there was more room for modernization.

In 1958 a new mathematics curriculum was adopted, which was partly based on extensive preliminary work of the ww. The sharp distinction between the 'innovators' of the ww and the 'conservatives' of the teachers associations disappeared. In the fifties, Freudenthal's position shifted (see Chapter VI). From a critical outsider he became a true authority in the field of mathematics education and didactics, not in the least due to his increasing flow of publications on these subjects. With unflagging zeal he remained critical, using every opportunity to emphasize the abuses in Dutch mathematics teaching. The old-fashioned curriculum, the abominable final exams, the lack of a genuine teachers' training and the huge gap that existed be-

tween the caricature of mathematics that students learned at high school and the mathematics they came to know at university.

With his reputation as a mathematician (one who also made out a case for all issues related to pedagogy, didactics and education) established, Freudenthal appeared more frequently on the international scene. He became chairman of the 'NOCW' the Dutch committee for mathematics education, and hence the Dutch representative of 'International Commission on Mathematical Instruction' (ICMI). In 1966 he became president of the ICMI and in 1968 he founded the international journal for mathematics education, *Educational Studies in Mathematics*, of which he was general editor.

The writing of the doctoral theses of the Van Hieles meant a turning point in the development of Freudenthal's ideas (see Chapter VII). Freudenthal acted as supervisor for Pierre van Hiele, but was also indirectly involved with Dieke van Hiele-Geldof's doctoral thesis. The main influence of the work by the Van Hieles on Freudenthal's didactical ideas was not so much found in its direct contents, as well as in the development of the theory it initiated for him. Up until then, his publications on education contained few to no descriptions of concrete educational matters such as micro-didactics or learning processes. He had mainly pointed out abuses and criticized what were known as 'traditional' education methods. He had not gone much further than indicating the direction in which should be looked for improvement and solutions, thereby wholeheartedly admitting that he could not do much more either, as long as decent research results were missing.

But this changed with the work of the Van Hieles. Freudenthal highly appreciated and admired the analysis of classroom observations of Mrs. Van Hiele and the intuitive approach she promoted in introductory geometry education. However, it was Mr. Van Hiele's 'theory of levels' that would mostly influence Freudenthal's ideas. In his theory of levels Van Hiele, inspired (among others) by Piaget, described the different levels students had to go through in their learning processes in geometry education and the leaps occurring between the subsequent levels of understanding. In his articles, Freudenthal took Van Hiele's theory from its context of geometry and abstracted it to a procedure of logical analysis in gaining insight in (the levels of) any mathematical subject that was to be taught.

In two articles from 1962 and 1963 he took a crucial step when, for the first time, he used two important pillars of his didactical ideas which were closely related i.e. the so-called 'anti-didactical inversion' and the principle of 'guided reinvention'. These expressions summarize what the level theory implied for him: starting mathematics education in a concrete way, providing students with the opportunity to experiment and to investigate and teaching students at a level they can grasp without making concessions to the 'exactness' of the subject. Above all, mathematics should not be identified with the result, but analysed and taught as an activity. In this Freudenthal's intuitionistic background can be recognised: mathematics was considered a mental creation and this assumption should also be the starting point in education.

In the late fifties, when the 1958-curriculum was barely in working order, the urge for a drastic change in course was felt. In Europe, influenced by the American ‘New Math’, the call to introduce modern mathematics in the classroom, was also heard. Although the 1958-curriculum was better organized and easier to work with, it hardly contained ‘modern’ mathematics. A turbulent time had come for mathematics education. Freudenthal emerged from this period as the lonely opponent of New Math, not taken seriously by anybody – not in the least by portraying himself as such with due pride.

This picture does not seem entirely correct (see Chapter VIII). Freudenthal’s real violent criticism on New Math-initiatives mainly concerned foreign tendencies, such as those in Belgium under supervision of F. Papy. In the more conservative Dutch field of mathematics education such tendencies were never under discussion. What did happen in the Netherlands in the sixties, happened with support and collaboration of Freudenthal.

His whole life he held on to the motto: ‘better to cooperate and adjust, than to stand as an opponent outside the field of action’. Furthermore, Freudenthal was very consistent in placing himself above the current New Math-discussion by demanding not the modernization of the *contents* of mathematics education, but the modernization of mathematics education *as such*, thus emphasizing the modernization of the teaching methods. According to him, this could be attained by refresher courses for teachers in modern mathematics, such as the ones organised by the ‘CMLW’ (Commission for the modernization of the mathematics curriculum), in which Freudenthal played an active role. He was confident that a teacher with sufficient knowledge of higher and modern mathematics – besides having the due knowledge of the logical analysis of the learning process – should be able to develop the accompanying didactics and methodology himself.

Freudenthal’s point of view in the sixties was ‘introduction to the mathematical method, to genuine mathematics, useful for students with acumen’. It would be a nice incidental circumstance if school mathematics could be modern mathematics. Freudenthal hardly gave any specific proposals for subject matter.

Gradually, he discovered that his goal was not so easily reached as he originally thought. Venting his opinion in lectures and articles, and the organizing of refresher courses for teachers was not enough. He needed a bolder action.

In the late sixties an – at first rather cautious – culture change in mathematics education was noticeable. The attention gradually shifted from the mathematical contents to the child learning mathematics and to the (micro-)didactics involved. Internationally this attention for subject didactics could be seen in the growing number of international congresses and meetings bearing mathematics education as a theme. Freudenthal attended many of these congresses.

In the Netherlands the foundation of the IOWO in 1971 would prove to be an important factor in these developments. As an institute, it was unique in the Netherlands and as such a sign of the growing importance subject-related didactics received – that is, in mathematics. Apparently there was room for such an initiative

in this new didactical climate, although the foundation did not go very smoothly – mathematics narrowly escaped having to wait for a coordinating curriculum institute like all the other curriculum subjects. The influence of mathematics education as developed at the IOWO would prove to be unprecedented. In the IOWO-approach the motto ‘observing the child’ was also (and particularly there) adopted.

Though almost at retiring age, Freudenthal still took part in all the action (see Chapter IX). Relentlessly critical, but with noticeable interest for more positive action. Next to his ever growing amount of articles and lectures on mathematics education, in 1973 his book *Mathematics as an educational task* appeared in German and then in English. Here nearly all his previously published articles were combined in one voluminous work of almost 700 pages. It would not so much function as a book to be read cover-to-cover (although it was written in this way), but as an important reference book for mathematics educators. The contents did not add any spectacularly new insights to Freudenthal’s ideas as propagated in his articles and lectures, but were of great significance as evidence of his almost complete devotion to mathematics education.

Apart from these publications he also actively participated in the field of mathematics education, his activities ranging from organizing congresses and symposia to observing the practice of the classroom. As professor and head of the IOWO he became the mathematical didactician in the Netherlands, giving the institute an enormous impulse by doing so.

Filled with admiration and enthusiasm for the IOWO-work, he promoted the institute whenever he could. Almost daily he could be found at the institute. Through (but also apart from) the IOWO Freudenthal kept developing, accentuating and extending his ideas. The IOWO also provided an outlet and a sounding board for his other – almost forgotten and in the fifties and sixties hardly ever touched – interest i.e. the observation of children and their learning processes and, by sharing these experiences with others, to incorporate them into teaching.

His grandchildren were an important source of inspiration in this. In ‘Rekendidaktiek’ he already wrote about the importance of observing learning processes and the recording of ‘seemingly unimportant things, which might surprise more and give more room for thought than any profound theoretical research’. While having subjected his own sons to never-ending Socratic inquiries, he tried during their walks together, to observe his grandson Bastiaan as objectively as possible. Filling various notebooks with his observations, Freudenthal used these as illustrations in his articles and lectures. In these articles he not so much emphasized the boy’s adventures as well as the role and the power of observing small children in their own world. Especially in mathematics education it was necessary to start with small, everyday things. In doing so, he himself set an example by not considering himself, a professor, too high to stoop to the level of a toddler.

For Freudenthal, observations like these actually led to the development of theories and new premises such as the concept ‘paradigm’, a much-discussed topic in

several of his articles from the seventies. Looking for paradigms – crucial examples of reflecting on and making conscious that which you already unconsciously do or know – proved to be an important tool for him in the development of teaching. Such an example served as a starting point for generalisation and for reflection on your own actions. Finally this would lead to a leap in the learning process and with that a certain rise in the level of understanding. The ‘paradigm’ as a concept was a typical example of how Freudenthal would adopt a non-mathematical term and, in interaction with IOWO-co-workers, give it a new meaning.

Another, closely related IOWO-/Freudenthal hobbyhorse was the rich, realistic context. He had founded this idea in the fifties, but now saw it put into practice, elaborated on and applied in the development of education as took place in the IOWO. Using the IOWO as a means to come down to the essence – the practice of the classroom – as often as he wanted, it was the first time that he could accentuate, concretize and underpin his, until now, mostly theoretical ideas on mathematics education with his, so highly valued, experiences from practice. In combination with his regained enthusiasm for the child’s world, this gave him material for many lectures, articles and new books. In 1973 he described himself as ‘a mathematician who had always (and in later years exclusively) been interested in education’. In his interests and activities the scales had tipped permanently to the side of education: Freudenthal – the unapproachable professor in mathematics, the childish grandfather, the inexhaustible critic – had himself become mathematics education.

However, Freudenthal’s ideas on mathematics education did not end here. He would still work ceaselessly on the development of mathematics education and didactics up until his death in 1990. This study ends at a point where the basis of Freudenthal’s didactical ideas have largely taken a definite shape. The direction in which his work will further develop is roughly given. Finally in Chapter x, the epilogue, a glance backwards and forwards is given. Freudenthal died on an afternoon walk, on a bench in the park, where he was found by children. The circle was closed.

Afkortingen

APS	Algemeen Pedagogisch Studiecentrum
CIEAEM	Commission Internationale pour L'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques
CIEM (= ICMI)	Commission Internationale pour l'Enseignement Mathématique
CITO	Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling
CMLW	Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde
COL	Commissie Opleiding Leraren
COLO	Commissie Organisatie Leerplan Ontwikkeling
CPS	Centraal Pedagogisch Studiecentrum
ESM	<i>Educational Studies in Mathematics</i>
HAVO	hoger algemeen vormend onderwijs
HBS	hogere burgerschool
HTS	hogere technische school
ICM	Innovatiecommissie Middenschool
ICME	International Congress on Mathematical Education
ICMI	International Commission on Mathematical Instruction
ICSU	International Council for Science
IEA	International Association for the Evaluation of Educational Achievement
IMC	International Mathematical Commission
IMU	International Mathematical Union / Internationale Wiskundige Unie
IMUK	Internationale Mathematik-Unterrichts Kommission
IOWO	Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs
KNAW	Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen
KPC	Katholiek Pedagogisch Centrum
LBO	lager beroepsonderwijs
LIWENAGEL	Leraren in de Wiskunde en Natuurwetenschappen aan Gymnasia en Lycea
MAPHA	Mathematisch-Physikalischen Arbeitsgemeinschaft
MAVO	middelbaar algemeen voortgezet onderwijs
MBO	middelbaar beroepsonderwijs
MC	Mathematisch Centrum
MMS	middelbare meisjesschool
MO-akten	middelbaar-onderwijs akten
MO-wet	wet op het middelbaar onderwijs (1863)
MULO	meer uitgebreid lager onderwijs
NOCW	Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde
NOV	Nederlandse Onderwijzers Vereniging
OECD	Organisation for Economic Co-operation and Development
OEEC	Organisation for European Economic Co-operation
OEEES	Organisatie voor Europese Economische Samenwerking

OESO	Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling
OK&W	Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen
OSTP	Office for Scientific and Technical Personnel
O&W	Onderwijs en Wetenschappen
OW&OC	Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijscomputercentrum
PA	Pedagogische Academie
PvdA	Partij van de Arbeid
SLO	Stichting Leerplan Ontwikkeling
SMSG	School Mathematics Study Group
SVO	Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs
UICSM	University of Illinois Committee on School Mathematics
UNESCO	United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization
VHMO	voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs
VWO	voorbereidend wetenschappelijk onderwijs
VWO	Vereniging van Wetenschappelijke Onderzoekers
WIMECOS	Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmographie aan Hoogere Burgerscholen met vijfjarigen cursus B, Lycea en Meisjes-Hoogere Burger- scholen met 5-/6-jarigen cursus
WISKOBAS	wiskunde in het basisonderwijs
WISKIVON	wiskunde in voortgezet onderwijs
WVO	Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs
WW	Wiskunde Werkgroep

Bibliografie

Ongepubliceerde teksten, aantekeningen en volledige bibliografieën van Freudenthal zijn te vinden in zijn persoonlijk archief in het Rijksarchief in Noord-Holland te Haarlem: Rijksarchief in Noord-Holland, Papers of Hans Freudenthal (1905-1990), mathematician, 1906-1990.

Gepubliceerde werken van Freudenthal:

- Freudenthal, H., 'Über die Enden topologischer Räume und Gruppen' (Berlin 1931).
- Freudenthal, H., 'Qualität und Quantität in der Mathematik', *Euclides* 8 (1932) 89-98.
- Freudenthal, H., '5000 jaren internationale wetenschap', *Euclides* 22 (1946) 222-241.
- Freudenthal, H., 'Rekenmachines winnen den oorlog', *De Groene Amsterdammer* (16 maart 1946).
- Freudenthal, H., 'Redeneren en doen', *De Groene Amsterdammer* (8 maart 1947).
- Freudenthal, H., 'De algebraïsche en de analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde', *Euclides* (1948) 106-121.
- Freudenthal, H., 'Eikenhout is eikenhout', *De Groene Amsterdammer* (13 maart 1948).
- Freudenthal, H., 'Tekort aan leraren. Gebreken aan de opleiding', *De Groene Amsterdammer* (3 juli 1948).
- Freudenthal, H., 'Onderwijsvernieuwing, maatschappelijk gezien', *De Vrije Katbeder* 8 (1949) 6-8.
- Freudenthal, H., 'Examen in vergiftigde toestand', *De Groene Amsterdammer* (8 oktober 1949).
- Freudenthal, H., 'Reorganisatie van het Hoger Onderwijs II', *De Groene Amsterdammer* (26 november 1949).
- Freudenthal, H., 'De universiteit – voor wie?', *De Groene Amsterdammer* (5 november 1949).
- Freudenthal, H., 'De recruitering der studenten. Het plan-studieloon der Afdeling Utrecht van het Verbond van Wetenschappelijke Onderzoekers', *De toelating tot het Hoger Onderwijs* (Leiden 1950) 51-74.
- Freudenthal, H., 'Zwaardere eindexamens?', *De Groene Amsterdammer* (23 september 1950).
- Freudenthal, H., 'Practische rekenkunde', *De Groene Amsterdammer* (24 oktober 1950).
- Freudenthal, H., 'En nu ... de wiskunde', *De Groene Amsterdammer* (2 december 1950).
- Freudenthal, H., 'De rol der traditie in de wiskundige wetenschappen', *De Nieuwe Stem* (1950) 574-589.
- Freudenthal, H., 'Driehoeken en spijkerschriftcijfers', *De Groene Amsterdammer* (8 april 1950).
- Freudenthal, H., 'De dwang der denkgewoonten', *Wetenschap en Samenleving* (1950) (I) 177-180, (1951) (II) 12-16.
- Freudenthal, H., 'Het Trippenhuys', *De Groene Amsterdammer* (1951-1960).
- Freudenthal, H., 'De dwarskijker I', *Euclides* 26 (1951) 245-251.
- Freudenthal, H., 'Escalators: en geen einde!', *De Groene Amsterdammer* (9 september 1951).
- Freudenthal, H., J. Sittig, *De juiste maat: lichaamsafmetingen van Nederlandse vrouwen als basis van een nieuw maatsysteem voor dames-confectiekleding* (Leiden 1951).

- Freudenthal, H., T. Ehrenfest-Afanassjewa, *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen? Discussie tussen T. Ehrenfest-Afanassjewa en prof.dr. H. Freudenthal* (Purmerend 1951).
- Freudenthal, H., 'Mevrouw, ze groeien ook zo hard!', *De Groene Amsterdammer* (4 augustus 1951).
- Freudenthal, H., 'Onderwijsvernieuwers bijeen', *De Groene Amsterdammer* (24 november 1951).
- Freudenthal, H., 'De opkomst der statistische denkwijze in de moderne wetenschap', *Natuurkundige Voordrachten* 29 (1951) 57-65.
- Freudenthal, H., 'De slotsom van de eindexamens', *De Groene Amsterdammer* (19 mei 1951).
- Freudenthal, H., 'Weet u wat een escalator is?', *De Groene Amsterdammer* (25 augustus 1951).
- Freudenthal, H., 'De dwarskijker II', *Euclides* 28 (1952) 58-62.
- Freudenthal, H., 'Examens en leerstof', *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 10 (1952) 193-197.
- Freudenthal, H., 'Gambling with a poor chance of gain', *KNAW Proceedings* 55 (1952) 433-438.
- Freudenthal, H., 'De kinderexamens', *De Groene Amsterdammer* (16 augustus 1952).
- Freudenthal, H., 'Hoe oud is Maria?', *De Groene Amsterdammer* (23 mei 1953).
- Freudenthal, H., 'Jagerslatijn', *De Groene Amsterdammer* (17 juli 1953).
- Freudenthal, H., 'Het mechanica-vraagstuk', *Nieuwe wegen bij het onderwijs in de wiskunde en de natuurwetenschappen* (Purmerend 1953) 22-43.
- Freudenthal, H., 'Op het telraam van het toeval', *De Groene Amsterdammer* (11 juli 1953).
- Freudenthal, H., 'Vakgeleerde of paedagoog?', *Christelijk Schoolblad. Onze Vacatures* (7, 15 en 21 mei 1953).
- Freudenthal, H., 'Weekend-conferentie Wiskunde-werkgroep': Amersfoort, 7 en 8 november 1953', *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 12 (1953) 91-92.
- Freudenthal, H., 'Erziehung des Denkvermögens (Diskussionsbeitrag)', *Archimedes* 6 (1954) 87-89.
- Freudenthal, H., *Van sterren tot inlegzolen* (Arnhem 1954).
- Freudenthal, H., 'De begrippen axioma en axiomatiek in de Wis- en Natuurkunde', *Simon Stevin* 39 (1955) 156-175.
- Freudenthal, H., 'Naar een nieuw wiskunde-onderwijs', *De Groene Amsterdammer* (2 april 1955).
- Freudenthal, H., 'Ons weekend', *Mededelingenblad van de Wiskunde Werkgroep der W.V.O.* (1955).
- Freudenthal, H., 'Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs', *Faraday* 25 (1956) 14-18.
- Freudenthal, H., 'Axiom und Axiomatik', *Mathematisch-physikalische Semesterberichte* 5 (1956) 4-19.
- Freudenthal, H., 'Initiation into Geometry', *The Mathematics Student* 24 (1956) 83-97.
- Freudenthal, H., 'De leraarsopleiding', *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 133 (1956) 173-180.
- Freudenthal, H., 'De opstand der horden', *Rekenschap* 3 (1956) 180-190.
- Freudenthal, H., 'Opvoeding tot hele mensen', *De Groene Amsterdammer* (21 april 1956).
- Freudenthal, H., 'Relations entre l'enseignement secondaire et l'enseignement universitaire en Hollande', *L'Enseignement Mathématique* 2 (1956) 238-249.
- Freudenthal, H., 'Tradition and education', *The New Era in Home and School* 37 (1956) 127-132.
- Freudenthal, H., 'Vrijheid en verantwoordelijkheid', *Universiteit en Hogeschool* 2 (1956) 295-301.
- Freudenthal, H., 'Traditie en opvoeding', *Rekenschap* 3 (1957) 95-103.
- Freudenthal, H., *Waarschijnlijkheid en statistiek* (Haarlem 1957).
- Freudenthal, H., (ed.), *Report on methods of initiation into geometry* (Groningen 1958).
- Freudenthal, H., 'A comparative study of methods of initiation into geometry', *L'Enseignement Mathématique* 5 (1959) 119-139.
- Freudenthal, H., 'Een gevaarlijk boek', *Euclides* 34 (1959) 188-192.
- Freudenthal, H., 'In schandblok klemmen: geen overschrijding der normen', *Universiteit en Hogeschool* 5 (1959) 259-263.
- Freudenthal, H., 'Report on a comparative study of methods of initiation into geometry', *Euclides* 34 (1959) 289-306.
- Freudenthal, H., *Lincos. Design of a language for cosmic intercourse. Part I* (Amsterdam 1960).
- Freudenthal, H., 'Logica als methode en als onderwerp', *Euclides* 35 (1960) 241-255.
- Freudenthal, H., 'Vrijetijdsbesteding', *Wetenschap & Samenleving* 14 (1960) 77-79.
- Freudenthal, H., *Exacte Logica* (Haarlem 1961).
- Freudenthal, H., 'Onderwijsproblemen in de Verenigde Staten', *De Groene Amsterdammer* (14 januari 1961).
- Freudenthal, H., 'Viskunde', *De Groene Amsterdammer* (23 december 1961).
- Freudenthal, H., 'De georiënteerde ruimte', *Faraday* 31 (1962) 15-16.
- Freudenthal, H., *Inleiding tot het denken van Einstein* (Assen 1962).

- Freudenthal, H., 'Logical analysis and critical survey' in: Freudenthal, *Report of the relations between arithmetic and algebra* (Groningen 1962) 20-41.
- Freudenthal, H., 'The main trends in the foundations of geometry in the 19th century', *Logic, methodology and philosophy of science: proceedings of the 1960 International Congress* (Stanford 1962) 613-621.
- Freudenthal, H., (ed.), *Report on the relations between arithmetic and algebra* (Groningen 1962).
- Freudenthal, H., 'Het staartje van de mammoet', *De Groene Amsterdammer* (28 juli 1962).
- Freudenthal, H., 'Trends in Modern Mathematics', *ICSU Review* 4 (1962) 54-61.
- Freudenthal, H., 'Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?', *L'Enseignement Mathématique* IX (1963) 28-44.
- Freudenthal, H., 'Tendenzen in der modernen mathematik', *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* 16 (1963) 301-306.
- Freudenthal, H., 'Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?' *Der Mathematikunterricht* (1963) 5-29.
- Freudenthal, H., 'Die Geometrie in der modernen Mathematik', *Physikalische Blätter* 20 (1964) 352-356.
- Freudenthal, H., 'New mathematics', *The New Era in Home and School* 45 (1964) 188-191.
- Freudenthal, H., 'The role of geometrical intuition in modern mathematics', *International Council Scientific Unions Review* 6 (1964) 206-209.
- Freudenthal, H., *De wereld in de spiegel* (Utrecht 1964).
- Freudenthal, H., 'Bemerkungen zur axiomatischen Methode im Unterricht', *Der Mathematikunterricht* (Stuttgart 1966) 61-55.
- Freudenthal, H., 'De betekenis van de wetenschappelijke basis voor de leraar', *Verslag van het Zestiende Congres van Leraren in de Wiskunde en Natuurwetenschappen* 18 (1966) 5-11.
- Freudenthal, H., 'De eerste ontmoeting tussen de wiskunde en de sociale wetenschappen', *Verhandelingen van de Koninklijke Vlaamse Academie voor Wetenschappen* XXVII (1966) 43-55.
- Freudenthal, H., 'Functies en functie-notaties', *Euclides* 41 (1966) 299-304.
- Freudenthal, H., 'Met leuzen alleen komt men er niet', *De Groene Amsterdammer* (28 mei 1966).
- Freudenthal, H., 'Het zwaartepunt van de wetenschap ligt bij de jeugd', *De Groene Amsterdammer* (24 december 1966).
- Freudenthal, H., 'Algèbre linéaire et géométrie élémentaire By Jean Dieudonné', *The American Monthly* 74 (1967) 745-748.
- Freudenthal, H., 'Logik als Gegenstand und als Methode', *Der Mathematikunterricht* 13 (1967) 7-22.
- Freudenthal, H., *Wiskunde in wetenschap en dagelijks leven* (Hilversum 1967).
- Freudenthal, H., 'Gebruik en misbruik van de statistiek', *Geloof en Wetenschap* 66 (1968) 1-12.
- Freudenthal, H., 'Modernisering Leerplan Wiskunde. Antwoord aan Prof. dr. N.G. de Bruyn', *Euclides* 43 (1968) 321-322.
- Freudenthal, H., 'Paneldiscussion', *Educational Studies in Mathematics* 1 (1968) 61-93.
- Freudenthal, H., 'Réponse. Remarques', *Dialectica* 21 (1968), 103-104, 164-165, 222-224, 255-256.
- Freudenthal, H., 'Why to teach mathematics so as to be useful', *Educational Studies in Mathematics* 1 (1968) 3-8.
- Freudenthal, H., 'Braces and Venn diagrams', *Educational Studies in Mathematics* 1 (1969) 408-414.
- Freudenthal, H., 'The concept of integration at the Varna Congress', *Educational Studies in Mathematics* 1 (1969) 338-339.
- Freudenthal, H., 'Further training of mathematics teachers in the Netherlands', *Educational Studies in Mathematics* 1 (1969) 484-492.
- Freudenthal, H., 'ICMI report on mathematical contests in secondary education (Olympiads)', *Educational Studies in Mathematics* 2 (1969) 80-114.
- Freudenthal, H., 'L'intégration après coup ou à la source', *Educational Studies in Mathematics* 1 (1969) 327-337.
- Freudenthal, H., 'Allocution du premier Congrès International de l'Enseignement Mathématique Lyon 24-31 août 1969', *Educational Studies in Mathematics* 2 (1969) 135-138.
- Freudenthal, H., 'A teachers course colloquium on sets and logic', *Educational Studies in Mathematics* 2 (1969) 32-58.
- Freudenthal, H., 'Les tendances nouvelles de l'enseignement mathématique', *Revue de l'Enseignement Supérieur* 46-47 (1969) 23-29.
- Freudenthal, H., 'XIth International Olympiad Bucharest, 5-20 July 1969', *Educational Studies in Mathematics* 3 (1970) 128-129.

- Freudenthal, H., 'The aims of teaching probability', *The Teaching of Probability & Statistics* (1970) 151-167.
- Freudenthal, H., 'Un cours de géométrie', *New Trends in Mathematics Teaching* 11 (1970) 309-314.
- Freudenthal, H., 'Introduction', *New Trends in Mathematics Teaching* II (1970).
- Freudenthal, H., 'Verzamelingen in het onderwijs', *Euclides* 45 (1970), 321-326.
- Freudenthal, H., 'Samen jarig', *Euclides* 46 (1970/71) 177-180.
- Freudenthal, H., 'Geometry between the devil and the deep sea', *Educational Studies in Mathematics* 3 (1971) 413-435.
- Freudenthal, H., 'Kanttekeningen bij de nomenclatuur', *Euclides* 47 (1971) 139-140.
- Freudenthal, H., 'Korrel CLXX', *Euclides* 46 (1971) 270-271.
- Freudenthal, H., 'Die neuen Tendenzen im Mathematik-Unterricht', *Neue Sammlung* 11 (1971), 146-153.
- Freudenthal, H., 'Phaenomenologie van het getalbegrip', *Wijsgerig Perspectief* (1971) 225-235.
- Freudenthal, H., 'The empirical law of large numbers, or the stability of frequencies', *Educational Studies in Mathematics* 4 (1972) 484-490.
- Freudenthal, H., 'Nieuwe niet-Euclidische meetkunde', *Euclides* 48 (1972) 13-18.
- Freudenthal, H., 'Nog eens nomenclatuur', *Euclides* 47 (1972) 139-140.
- Freudenthal, H., 'Recent tendencies in the teaching of mathematics', in: W.E. Lamon (ed.), *Learning and the nature of mathematics* (Chicago 1972) 11-18.
- Freudenthal, H., 'Strategie der Unterrichtserneuerung in der Mathematik', *Beiträge zum Mathematikunterricht* (1972) 41-45.
- Freudenthal, H., *Mathematics as an educational task* (Dordrecht 1973).
- Freudenthal, H., *Mathematik als pädagogische Aufgabe* 1, 2 (Stuttgart 1973).
- Freudenthal, H., 'De middenschool', *Rekenschap* 20 (1973) 157-165.
- Freudenthal, H., 'De niveaus in het leerproces en de heterogene leer groep, met het oog op de middenschool', *Gesamtschule Conferentie* (1973) 88-99.
- Freudenthal, H., 'Les niveaux de l'apprentissage des concepts de limite et de continuité', *Accademia Nazionale dei Lincei* 370 (1973) 109-115.
- Freudenthal, H., 'Nomenclatuur en geen einde', *Euclides* 49 (1973) 53-58.
- Freudenthal, H., 'Tendenzen zur Mathematik in der Grundschule', *Didaktik der Mathematik* 1 (1973) 2-11.
- Freudenthal, H., 'Was fehlt der modernen Mathematik?', *Deutscher Zeitung* 38 (21 september 1973).
- Freudenthal, H., 'What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education', in: G.A. Howson (ed.), *Developments in mathematical education: the proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* (Cambridge 1973) 101-114.
- Freudenthal, H., 'The crux of course design in probability', *Educational Studies in Mathematics* 5 (1974) 261-277.
- Freudenthal, H., 'Kennst du deinen Vater?', *Der Mathematikunterricht* 5 (1974) 7-18.
- Freudenthal, H., 'Lernzielfindung im Mathematikunterricht', *Zeitschrift für Pädagogik* 20 (1974) 719-738.
- Freudenthal, H., 'Mammoetonderwijsonderzoek wekt wantrouwen', *Universiteitsblad U Utrecht* (14 juni 1974).
- Freudenthal, H., 'Sinn und Bedeutung der Didaktik der Mathematik', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 3 (1974).
- Freudenthal, H., 'Soviet Research on teaching algebra at the lower grades of the elementary school', *Educational Studies Mathematics* 5 (1974) 391-412.
- Freudenthal, H., 'Die Stufen im Lernprozess und die heterogene Lerngruppe im Hinblick auf die Mittenschule', *Neue Sammlung* 14 (1974) 161-172.
- Freudenthal, H., 'Waarschijnlijkheid en statistiek op school', *Euclides* 49 (1974) 245-246.
- Freudenthal, H., 'Wat is meetkunde?', *Euclides* 50 (1974/75) 151-160.
- Freudenthal, H., 'Annotaties bij annotaties, vragen bij vragen', *Onderwijs in Natuurwetenschap* 2 (1975) 21-22.
- Freudenthal, H., 'Een internationaal vergelijkend onderzoek over wiskundige studiepresentaties', *Pedagogische Studiën* 52 (1975) 43-55.
- Freudenthal, H., 'Wandelingen met Bastiaan. Wereldverkennen van de straatstenen tot de maan', *Pedagogische Studiën* 25 (1975) 51-64.
- Freudenthal, H., 'Variabelen', *Euclides* 51 (1975/76) 349.
- Freudenthal, H., 'Bastiaan's lab', *Pedagogische Studiën* 30 (1976) 35-54.

- Freudenthal, H., (ed.), *L.E.J. Brouwer. Collected Works 2. Geometry, analysis, topology and mechanics* (Amsterdam 1976).
- Freudenthal, H., 'Preface', *Educational Studies in Mathematics* 7 (1976) 189.
- Freudenthal, 'Taxonomieën – waarvoor?', *Faraday* 45 (1976) 142.
- Freudenthal, H. 'Wiskunde-onderwijs anno 2000', *Euclides* 52 (1976) 290-295.
- Freudenthal, H., 'De C.M.L.-wiskunde: een interview met prof. dr. H. Freudenthal', *Euclides* 52 (1976/77) 100-107.
- Freudenthal, H., 'Bastiaan's experiments on Archimedes' principle', *Educational Studies in Mathematics* 8 (1977) 3-16.
- Freudenthal, H., 'Lernzielfindung im Mathematikunterricht', *Der Mathematikunterricht* 23 (1977) 26-45.
- Freudenthal, H., 'Teacher training – an experimental philosophy', *Educational Studies in Mathematics* 8 (1977) 369-376.
- Freudenthal, H., 'Bastiaan meet zijn wereld', *Pedomorfose* 37 (1978) 62-68.
- Freudenthal, H. 'Cognitieve ontwikkeling: kinderen geobserveerd', *Jaarverslag 1977 Provinciaal Utrechts Genootschap* (1978) 8-18.
- Freudenthal, H., 'Die Crux im Lehrgangentwurf zur Wahrscheinlichkeitstheorie', *Didaktik der Mathematik* (1978).
- Freudenthal, H., *Weeding and sowing. Preface to a science of mathematical education* (Dordrecht 1978).
- Freudenthal, H., 'New Math or new education', *Prospects* IX (1979) 321-331.
- Freudenthal, H., 'Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics?', *For the Learning of Mathematics* 2 (1981) 30-33.
- Freudenthal, H., *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Dordrecht 1983).
- Freudenthal, H., *Appels en peren. Wiskunde en psychologie. Gebundelde opstellen* (Apeldoorn 1984).
- Freudenthal, H., *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren* (Utrecht 1984).
- Freudenthal, H., *Berlin 1923-1930. Studienerinnerungen von Hans Freudenthal* (Berlin 1987).
- Freudenthal, H., *Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven* (Amsterdam 1987).
- Freudenthal, H., *Revisiting mathematics education. China lectures* (Dordrecht 1991).

Secundaire literatuur:

- Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 1-3 (1924-1927), voortgezet als:
Euclides. Tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken 4-56 (1927-1980).
Educational Studies in Mathematics 1-11 (1969-1980).
Mededelingen van de ww van de wvo 1-15 (1953-1967).
Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 1-12 (1981-1993).
Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs 9-28 (1950-1970).
 'Adres inzake het mechanica-onderwijs op de H.B.S.-B', *Euclides* 28 (1952) 123-128.
 'Adres van de Wiskunde-werkgroep van de w.v.o. inzake het ontwerp-leerplan van WIMECOS', *Euclides* 30 (1955) 202-203.
 'Adres van WIMECOS aan de minister van onderwijs, kunsten en wetenschappen inzake het mechanica-onderwijs', *Euclides* 29 (1953) 213-217.
 'Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde', *Euclides* 37 (1961) 144-151.
 'Het conferentie-weekend op het Maarten-Maartens-huis te Doorn georganiseerd door de Wiskunde Werkgroep der w.v.o.', *Euclides* 24 (1948) 81-133.
Educational Studies in Mathematics, 'In memoriam HF ('90)' 23 (1993).
Feestboek Prof. Dr. Hans Freudenthal – 70 jaar (1975) (uitgave van het Mathematisch Instituut en het IOWO ter ere van Freudenthals 70e verjaardag).
 'Five Years IOWO', *Educational Studies in Mathematics* 7 (1976).
 'H. Freudenthal', *Vrij Nederland* (1976) 232-247.
 'Interimrapport van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde', *Euclides* 42 (1966) 129-134.
Keur uit de eerste jaargang van het tijdschrift Denken en Rekenen ('s-Hertogenbosch 1970).
Kijk op Hans (1980) (bundel opstellen van IOWO-medewerkers, aangeboden aan prof.dr. H. Freudenthal ter gelegenheid van zijn vijfenzeventigste verjaardag).
 'On the mathematics curriculum of the high school', *The Mathematics Teacher* (1962) 191-195.

- 'Openingstoespraak van de voorzitter van WIMECOS, Dr.ir. B. Groeneveld op de algemene vergadering van 28 december 1966', *Euclides* 42 (1967) 184-187.
- 'De programma's wiskunde voor Gymnasium B en HBS B', *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 11 (1953) 216-218.
- 'Rapport van de leerplan-commissie-1954 van WIMECOS inzake het opstellen van een ontwerp-leerplan en een ontwerp-eindexamenprogramma voor wiskunde voor de H.B.S.-B', *Euclides* 30 (1955) 149-176.
- 'Rapport van sectie M', in: *Rapport van de Staatscommissie tot Reorganisatie van het Hoger Onderwijs* ('s-Gravenhage 1949) 335-353.
- Stemmen uit de praktijk* (1964) (conferentievorslag Vernieuwing van het wiskundeonderwijs).
- 'Tweede conferentie-weekend, georganiseerd door de wiskunde werkgroep', *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 8 (1949) 174-176.
- 'Uit de openingstoespraak van de voorzitter van WIMECOS tot de algemene vergadering van 28 december 1961', *Euclides* 37 (1962) 264-267.
- 'Uit de openingstoespraak van de voorzitter van WIMECOS tot de algemene vergadering van 28 december 1962', *Euclides* 38 (1963) 251-253.
- 'De universitaire opleiding tot leeraar in wiskunde en aanverwante vakken', *Euclides* 4 (1927/28) 41-57.
- 'Verslag, door de Vereeniging van Directeuren van Hoogere Burgerscholen met 5-jarigen cursus, in zake het rapport der Commissie-Beth, uitgebracht aan den Inspecteur E. Jensema', *Bijvoegsel* 3 (1926/27) 69-72.
- 'Verslag van de Varende Conferentie', *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 8 (1949) 16-21.
- 'Weekend-conferentie uitgaande van de Wiskunde Werkgroep der wvo', *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 7 (1948) 134-136.
- De wetenschappelijke basis van de lerarenopleiding, mede in verband met de ontwikkelingen van de exacte wetenschappen in de twintigste eeuw. Verslag van het zestiende congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen, gehouden te Utrecht op 18 april 1966* (Groningen 1966).
- 'Wiskunde in andere wetenschappen', in: *De vakidoot. Maandblad van de Subfaculteiten Wiskunde en Natuur- en Sterrekunde* 9 (1977) 14-20.
- 'Het wiskunde-programma voor het v.H.M.O. Een ontwerp van de Wiskunde-Werkgroep van de w.v.o.', *Euclides* 28 (1953) 206-226.
- 'Wiskunde Werkgroep der w.v.o.', *Euclides* 24 (1948) 56.
- 'Wiskunde Werkgroep. Verslag samenkomst van 8 mei 1948 te Utrecht', *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* (1948) 62-63.
- Achter, V. van, *De modernisering van het rekenonderwijs op de basisschool* ('s-Hertogenbosch 1969).
- Adda, J., 'Freudenthal cursief. Hans Freudenthal (1905-1990)', *Nieuwe Wiskrant* 10 (1991) 26.
- Albada, P.J. van, 'De wiskunde voor niet-mathematische richtingen', *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 8 (1949) 154-159.
- Alberts, G., *Jaren van berekening. Toepassingsgerichte initiatieven in de Nederlandse wiskundebeoefening 1945-1960* proefschrift (Amsterdam 1998).
- Alberts, G., *Twee geesten van de wiskunde. Biografie van David van Dantzig* (Amsterdam 2000).
- Alberts, G., H. Blauwendraat (red.), *Uitbeelden in wiskunde* (Amsterdam 2000).
- Alberts, G., F. van der Blij, J. Nuis (red.), *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen* (Amsterdam 1987).
- Alberts, G., H.J.M. Bos, J. Nuis (red.), *Om de wiskunde. Stimulansen voor toepassingsgerichte wiskunde rond 1946* (Amsterdam 1989).
- Alberts, G., I. Moerdijk, 'Interview W.T. van Est. De geometer', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/3 (2001) 52-56.
- Baayen, P.C., 'Beleid om de wiskunde', in: Alberts, G., H.J.M. Bos, J. Nuis (red.), *Om de wiskunde* (Amsterdam 1989) 61-74.
- Baggen, P., *Vorming door wetenschap. Universitair onderwijs in Nederland 1815-1960* proefschrift (Delft 1998).
- Bakker, E.L., 'The technology of instructional development' in: Travers, R.M.W. et al (ed.), *Second handbook of research on teaching* (Chicago 1973) 245-285.
- Baldwin, A.L., *Theories of child development* (New York 1967).
- Bartels, A., *Een eeuw middelbaar onderwijs 1863-1963* (Groningen 1963).
- Bastide-van Gemert, S. la, 'Hans Freudenthal', in: *Biografisch woordenboek van Nederland. Deel 5* (Den Haag 2001).

- Bastide-van Gemert, S. la, 'Van 'terloopse rekenlessen' tot dagtaak', *Euclides* 81 (2005) 94-98.
- Beckers, D., *Jacob Gelder en de wiskundige ideologie in Nederland (1800-1840)* (Nijmegen 1995).
- Begehr, H.W.G., H. Koch et al. (eds.), *Mathematics in Berlin* (Basel 1998).
- Behnke, H., (ed.), *Grundzüge der Mathematik für Lehrer an Gymnasien sowie für Mathematiker in Industrie und Wirtschaft I-V* (Göttingen 1958-1966).
- Berkel, K. van, *In het voetspoor van Stevin* (Meppel 1985).
- Berkel, K. van, *Dijksterhuis. Een biografie* (Amsterdam 1996).
- Berkel, K. van, *Citaten uit het boek der natuur* (Amsterdam 1998).
- Berkel, K. van, A. van Helden, L. Palm (eds.), *A history of science in the Netherlands: survey, themes and reference* (Leiden 1999).
- Berkel, K. van, 'Over het ontstaan van de twee culturen in negentiende-eeuws Europa', *Spiegel der letteren. Tijdschrift voor Nederlandse literatuurgeschiedenis en voor literatuurwetenschap* 42 (2000) 83-96.
- Berkel, K. van, *Academische illusies. De Groningse universiteit in een tijd van crisis, bezetting en herstel, 1930-1950* (Amsterdam 2005).
- Bertin, E.M.J., H.J.M. Bos, A.W. Grootendorst (eds.), *Two decades of mathematics in the Netherlands 1920-1940. A retrospection on the occasion of the bicentennial of the Wiskundig Genootschap. Part 1* (Amsterdam 1978).
- Beth, H.J.E., 'Het "meer en meer wiskundig" karakter der H.B. School met 5-jarigen cursus', *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 1 (1924/25) 90-100.
- Beth, H.J.E., 'Het experimenteel georiënteerde onderwijs in mechanica', *Euclides* 5 (1928) 49-60.
- Beth, H.J.E., 'Mechanica opnieuw examenvak', *Euclides* 6 (1929/30) 44-48.
- Beth, H.J.E., J. van Andel, P. Cramer, E.J. Dijksterhuis, 'Ontwerp van een leerplan voor het onderwijs in wiskunde, mechanica en kosmographie op de H.B. Scholen met vijfjarigen cursus', *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 2 (1925/26) 113-139.
- Beukers-Arts, I., *Kees Boeke: een Nederlands onderwijsvernieuwer* (Tilburg 1974).
- Bigot, L.C.T., G. van Hees, *Pedagogiek IV. Serie leerboeken ten dienste van kweekscholen. Verleden en heden. Beknopte geschiedenis van opvoeding en onderwijs* (Groningen 1963).
- Bishop, A., 'Freudenthal cursief. HF – an inspiration in the search for truth', *Nieuwe Wiskrant* 10 (1991) 13.
- Blij, F. van der, 'Professor Freudenthal zeventig jaar', *Euclides* 51 (1975) 3-7.
- Blij, F. van der, e.a., *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1975* (Amsterdam 1973).
- Bijpost, M., J.K. Timmer, *Met passer en liniaal 1. Eenvoudig leerboek der vlakke meetkunde* (Zutphen 1957).
- Block, A. de, *Algemene didactiek der theoretische intelligentie* (Antwerpen 1960).
- Boeke, K., 'Van onderwijsvernieuwing naar mensvorming', *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* 7 (1949) 298-299.
- Boekholt, P.Th.F.M., *Cabiers voor lokale en regionale geschiedenis* (Den Haag 1991).
- Boekholt, P.Th.F.M., E.P. de Booy, *Geschiedenis van de school in Nederland vanaf de middeleeuwen tot aan de huidige tijd* (Assen 1987).
- Boermeester, C., *Over meetkunde-onderwijs en psychologie* (Groningen 1955).
- Boermeester, C., *Grepen uit de psychologie van het denken in verband met het wiskunde-onderwijs* (Purmerend 1956).
- Bois-Reymond, M. du, J. Lamboo, M. Smits, T. Walaardt-Sacré, *Onderwijzersleven* (Nijmegen 1981).
- Borel, A., 'Twenty-five years with Nicolas Bourbaki, 1949-1973', *Notices of the American Mathematical Society* 45 (1998) 373-380.
- Bos, H., 'Afscheid van Dirk Struik. Uit de ivoren toren', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/2 (2001) 244-247.
- Bosch, M., *Het geslacht van de wetenschap. Vrouwen en hoger onderwijs 1878-1948* proefschrift (Amsterdam 1994).
- Boyer, C.B., *A history of mathematics* (New York 1968, tweede editie 1989).
- Brandenburg, W.J., L. Schrier, *Inleiding in de meetkunde 1* (Groningen 1961).
- Brandenburg, W.J., *Modernisering van het wiskunde-onderwijs* (Groningen 1968).
- Bremner, R.H.B., et al (ed.), *Children & youth in America. A documentary history. Volume II 1866-1932* (Cambridge 1971).
- Bruyn, N.G. de, 'Modernisering leerplan wiskunde', *Euclides* 43 (1968) 260-261.
- Bunt, L.N.H., 'De keuze van de leerstof bij het onderwijs in de wiskunde', *Euclides* 24 (1948) 83-105.
- Bunt, L.N.H., *De leerstof van ons wiskunde-onderwijs. Een onderzoek naar opvattingen en gebruiken dienaangaande* (Groningen 1949).

- Bunt, L.N.H., *The development of the ideas of number and quantity according to Piaget* (Groningen 1951).
- Bunt, L.N.H., *Statistiek als onderwerp voor het gymnasium A. An investigation into the possibilities of teaching descriptive and elementary mathematical statistics in secondary schools* (Groningen 1956).
- Bunt, L.N.H., *Statistiek als onderwerp voor het gymnasium A. Verslag van een proefneming. A Inrichting en resultaten van het onderzoek* (Groningen 1957).
- Bunt, L.N.H., *The training of a mathematics teacher in the Netherlands* (Groningen 1962).
- Burg, F. van den, *De Vrije Katheder 1945-1950. Een platform van communisten en niet-communisten* proefschrift (Amsterdam 1983).
- Calmthout, M. van, 'Hans Freudenthal. Kampioen van de alledaagse wiskunde', in: P. Brill (red.), *Kopstukken van het laagland. Een eeuw Nederland in honderd portretten* (Amsterdam 1999).
- Casimir, R., *Het Nederlandsch Lyceum* (Groningen 1934).
- Castelnuovo, E., *Geometria intuitiva* (Firenze 1948, tweede herziene druk 1952).
- Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, *Toelichting op het Leerplan Wiskunde* (1968).
- Corput, J.G. van der, *Het Mathematisch Centrum* (Groningen 1946).
- Coster, B., 'De ontwikkeling van het ruimteinzicht', *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 3 (1926/27) 143-154.
- Dalen, D. van, *Mystic, geometer and intuitionist – The life of L.E.J. Brouwer. Volume I: the dawning revolution* (Oxford 1999).
- Dalen, D. van, *L.E.J. Brouwer. Een biografie. Het heldere licht van de wiskunde* (Amsterdam 2001).
- Dantzig, D. van, 'Over de maatschappelijke waarde van onderwijs in wiskunde', *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 3 (1926/27) 186-196.
- Dantzig, D. van, 'Woord en werktuig. De strijd om het mechanica-onderwijs', *Euclides* 5 (1928/29) 86-103.
- Davis, P.J., R. Hersch, *The mathematical experience* (Boston 1984).
- Deen, N., *Een halve eeuw onderwijsresearch in Nederland. Het Nutseminarium voor pedagogiek 1919-1969* proefschrift (Groningen 1969).
- Dekker, R., *Wiskunde leren in kleine heterogene groepen* proefschrift (Utrecht 1991).
- Dessart, C.H., H. Frandsen, 'Research on teaching secondary-school mathematics', in: R.M.W. Travers et al (eds.), *Second handbook of research on teaching* (Chicago 1973) 1177-1195.
- Dijksterhuis, E.J., 'Antwoord aan mevrouw Ehrenfest-Afanassjewa', *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 1 (1924) 60-68.
- Dijksterhuis, E.J., 'Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden? Opmerkingen naar aanleiding van een brochure van Mevr. Ehrenfest-Afanassjewa', *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 1 (1924) 1-26.
- Dijksterhuis, E.J., 'Beschouwingen over de universitaire opleiding tot leeraar in wis- en natuurkunde', *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 2 (1925/26) 81-95.
- Dijksterhuis, E.J., 'Nadere beschouwingen over de opleiding tot leeraar in wis- en natuurkundige vakken', *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 2 (1925/26) 146-157.
- Dijksterhuis, E.J., 'De historische behandelingswijze van de axiomatie der mechanica van Newton', *Euclides* 4 (1927/28) 245-255.
- Dijksterhuis, E.J., 'De aanslag op de mechanica', *Euclides* 5 (1928) 61-69.
- Dijksterhuis, E.J., 'De opleiding tot leeraar in wis- en natuurkunde volgens de plannen van de commissie-Sijmons', *Euclides* 6 (1929/30) 185-203.
- Dijksterhuis, E.J., 'Opmerkingen over het onderwijs in mechanica als onderdeel der physica', *Euclides* 7 (1930/31) 76-94.
- Dijksterhuis, E.J., 'Epistemisch wiskunde-onderwijs', *Euclides* 10 (1933/34) 165-213.
- Dijksterhuis, E.J., *Mechanisering van het wereldbeeld* (Amsterdam 1950).
- Dodde, N.L., 'Nederlandse onderwijspolitiek 1945-1980', *Pedagogisch Tijdschrift* 5 (1980) 273-293.
- Dodde, N.L., *Het Nederlandse onderwijs verandert* (Muiderberg 1983).
- Dormolen, J. van, *Didactiek van de wiskunde* (Utrecht 1974).
- Dormolen, J. van, 'Freudenthal cursief. Hoe didactiek een deel van wiskunde kan worden', *Nieuwe Wiskrant* 10 (1991) 19.
- Duyvendijk, A.J. van, *De motivering van de klassieke vorming: een historisch-paedagogische studie over twee eeuwen* proefschrift (Groningen 1955).
- Dunk, H.W. von der, W.P. Heere, A.W. Reinink (red.), *Tussen ivoren toren & grootbedrijf; De Utrechtse Universiteit 1936-1986* (Utrecht 1986).
- Duparc, H.J.A., A.W. Grootendorst, 'Historical Survey', in: E.M.J. Bertin, H.J.M. Bos, A.W. Grootend-

- orst (eds.), *Two decades of mathematics in the Netherlands 1920-1940. A retrospection on the occasion of the bicentennial of the Wiskundig Genootschap. Part 1* (Amsterdam 1978) v-xxiv.
- Ebel, R.L., et al (ed.), *Encyclopedia of educational research* (London 1969).
- Eeden, C. van, *The scientific family tree of David van Dantzig* (Amsterdam 2000).
- Ehrenfest-Afanassjewa, T., 'Moet het Meetkunde-onderwijs gewijzigd worden? Een antwoord aan den heer E.J. Dijksterhuis', *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 1 (1924) 47-59.
- Ehrenfest-Afanassjewa, T., *Uebungensammlung zu einer geometrischen Propädeuse* (Den Haag 1931).
- Eilander, M., 'Caveat consul', *Euclides* 22 (1947) 212-221.
- Essen, M. van, J.D. Imelman, *Historische pedagogiek. Verlichting, romantiek en ontwikkelingen in Nederland na 1800* (Baarn 1999).
- Est, W.T. van, 'Hans Freudenthal. 17 september 1905 - 13 oktober 1990', *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Jaarboek 1991* (Amsterdam 1991) 139-142.
- Est, W.T. van, 'Hans Freudenthal. 17 september 1905 - 13 oktober 1990', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 9 (1991) 131-136.
- Freeman-Smulders, A., 'Lezen als ongedeelde vaardigheid. Een Freudenthal voor het leesonderwijs gezocht', *Leesgoed: tijdschrift voor kinderboeken* 24 (1997) 30-33.
- Freudenthal-Lutter, S.C.J., *De Jenaplanschool. Een leef- en werkgemeenschap* (Utrecht 1970).
- Freudenthal-Lutter, S.C.J., *Naar de school van morgen* (Alphen aan de Rijn 1972).
- Gelder, X. van, H. Wansink (red.) *Heimwee naar de HBS* (Amsterdam 1998).
- Gerrits, G.C., 'Het onderwijs in de natuurkunde aan de Hoogere Burgerschool. Opmerkingen naar aanleiding van het Rapport over het natuurkunde-onderwijs, uitgebracht aan het Bestuur van de Neerlandse Natuurkundige Vereeniging', *Euclides* 4 (1928) 256-268.
- Gerretsen, J.C.H., 'Doelstelling van het wiskundeonderwijs', *Euclides* 34 (1958) 90-94.
- Glas, E., *Wiskunde en samenleving in historisch perspectief* (Muiderberg 1981).
- Goffree, F., *Leren onderwijzen met wiskobas* proefschrift (Utrecht 1979).
- Goffree, F., *Ik was wiskundeleraar* (Enschede 1985).
- Goffree, F., 'Een halve eeuw onderzoek. Wiskundedidactiek in Nederland', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/3 (2002) 233-243.
- Goffree, F., 'De opbrengst. Wiskunedidactiek in Nederland', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/3 (2002) 333-345.
- Goffree, F., M. van Hoorn, B. Zwaneveld (eds.), *Honderd jaar wiskundeonderwijs - een jubileumboek* (Leusden 2000).
- Gravemeijer, K.P.E., *Developing realistic mathematics education* proefschrift (Utrecht 1994).
- Gravemeijer, K., J. Terwel, 'Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory', *Journal of Curriculum Studies* 32 (2000) 777-796.
- Groen, W., 'Vier decennia wiskundeonderwijs', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/4 (2003) 304-308.
- Groot, A.D. de, *Vijven en zessen. Cijfers en beslissingen: het selectieproces in ons onderwijs* (Groningen 1966).
- Groot, A.W. de, *De universiteit van Amsterdam in oorlogstijd* (Amsterdam 1946).
- Grotenhuis, S., *Op zoek naar middelbaar onderwijs* proefschrift (Amsterdam 1998).
- Gruber, H.E., J.J. Vonèche (eds.), *The essential Piaget. An interpretive reference and guide* (London 1977).
- Hark, M. ter, *Kunnen mensen denken? Honderd jaar onderzoek naar taal en cognitie* (Groningen 2000).
- Heijnen, P.H., *Methodiek van het rekenen in de lagere school, ten dienste van normaallessen en kweek-scholen* (Groningen 1917).
- Hesseling, D.E., *Gnomes in the fog. The reception of Brouwer's intuitionism in the 1920s* proefschrift (Utrecht 1999).
- Hiele, P.M. van, 'Een poging om de richtlijnen op te stellen voor een didactiek der wiskunde', *Euclides* 24 (1948) 122-133.
- Hiele, P.M. van, *De problematiek van het inzicht* proefschrift (Amsterdam 1957).
- Hiele, P.M. van, *Development and learning process. A study of some aspects of Piaget's psychology in relation with the didactics of mathematics* (Groningen 1959).
- Hiele, P.M. van, *Begrip en inzicht. Werkboek van de wiskunedidactiek* (Purmerend 1973).
- Hiele, P.M. van, 'Freudenthal en de didactiek der wiskunde', *Euclides* 51 (1975) 8-10.
- Hiele, P.M. van, D. van Hiele-Geldof, 'Een fenomenologische inleiding tot de meetkunde', *Euclides* 33 (1957) 33-47.
- Hiele-Geldof, D. van, *De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het v.h.m.o.* proefschrift (Amsterdam 1957).

- Hilvoorde, I. van, *Grenswachters van de pedagogiek. Demarcatie en disciplinevorming in de ontwikkeling van de Nederlandse academische pedagogiek (1900-1970)* (Amsterdam 2002).
- Hoorn, M. van, ‘Interview met Albert Koldijk’, *Euclides. Vakblad voor de wiskundeleraar* 78 (2002) 46-50.
- Hollman, K.P.M.J., *Mastery-learning en het wiskunde-onderwijs: exemplarisch materiaal voor gedifferentieerd onderwijs* (’s-Hertogenbosch 1974).
- Hoving, W., J. van IJzeren, *Onderzoek naar de wenselijkheid en de mogelijkheid om bij het onderwijs in de oude talen op gymnasia en lycea de lectuur met na-klassieke schrijvers uit te breiden beoordeeld in verband met de betekenis van het klassieke onderwijs in zijn geheel* (Groningen 1940).
- Howson, A.G., (ed.), *Developments in mathematical education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* (Cambridge 1973).
- Howson, G., ‘Hans Freudenthal and the foundations of a discipline of mathematics education’, *Nieuwe Wiskrant* 5 (1985) 68-72.
- Howson, G., C. Keitel, J. Kilpatrick, *Curriculum development in mathematics* (Cambridge 1981).
- Hulst, J.W. van, ‘Martinus Jan Langeveld. 30 oktober 1905-15 december 1989’, in: *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Jaarboek 1991* (Amsterdam 1991) 154-162.
- Idenburg, Ph.J., *Schets van het Nederlandse schoolsysteem* (Groningen 1964).
- Idenburg, Ph.J., J. Karsemeijer, H.H. Janssen, *Een eeuw middelbaar onderwijs herdacht* (Groningen 1963).
- Imelman, J.D., W.A.J. Meijer, *De nieuwe school gisteren en vandaag* (Amsterdam 1986).
- Iongh, J.J. de, ‘Zeggen en zien’, in: *Keur uit de eerste jaargang van het tijdschrift Denken en Rekenen* (’s-Hertogenbosch 1970) 7-9.
- Jacobs, H.J. e.a., *Moderne wiskunde voor voortgezet onderwijs. Deel 1 voor de brugklas* (Groningen 1972).
- Jansen, G.H., S. Vess, ‘Hans Freudenthal, tussen de bergen en de zee’, in: *Ballonnen en brood. Utrechtse portretten* (Utrecht 1986) 101-107.
- Janssen, G.A., ‘Over onze tijd met een heenwijzing naar onze taak’, *Euclides* 28 (1953) 116-122.
- Jensema, E., *Het middelbaar onderwijs en de critiek, die daarop uitgeoefend wordt* (Groningen 1927).
- Jong, B.C. de, *Jan Ligthart (1859-1916). Een schoolmeester-pedagoog uit de Schilderswijk* proefschrift (Groningen 1996).
- Jong, R.A. de, *Wiskobas in methoden* proefschrift (Utrecht 1986).
- Katz, V.J., *A history of mathematics* (New York 1993).
- Klausmeier, H.J., J.K. Davis, ‘Transfer of learning’, in: Ebel, R.L., et al (ed.), *Encyclopedia of educational research* (London 1969) 1483-1493.
- Kleijne, W., ‘NOCW vijftig jaar’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5 (2004) 308-313.
- Klein, D., ‘A brief history of American K-12 mathematics education in the 20th century’, in: J. Royer (ed.), *Mathematical Cognition* (Greenwich 2003).
- Kline, M., *Why Johnny can’t add: the failure of the New Math* (New York 1973).
- Klomp, H.A., *De relativiteitstheorie in Nederland. Breekijzer voor democratisering in het interbellum* proefschrift (Utrecht 1997).
- Knegtmans, P.J., *Een kwetsbaar centrum van de geest. De Universiteit van Amsterdam tussen 1935 en 1950* (Amsterdam 1998).
- Kohnstamm, Ph.A., *Keur uit het didactisch werk van Prof. Dr. Ph. Kohnstamm* (Groningen 1952).
- Kohnstamm, R., *Kleine ontwikkelingspsychologie I. Het jonge kind* (Houten 1993).
- Kolesnik, W.B., *Mental discipline in modern education* (Madison 1958).
- Koning, J., *Enige problemen uit de didactiek der natuurwetenschappen in het bijzonder van de scheikunde* proefschrift (Dordrecht 1948).
- Kool, M.J.H., *Die conste vanden getale. Een studie over Nederlandstalige rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw, met een glossarium van rekenkundige termen* proefschrift (Utrecht 1999).
- Kossmann, E.H., *De lage landen. Deel II 1914-1980* (Amsterdam 1976).
- Krooshof, G., ‘Moderniseren – nieuwbouw of verbouw?’, *Euclides* 42 (1966) 193-203.
- Krooshof, G., ‘Euclides. Tijdschrift voor de didactiek van de wiskunde’, *Euclides* 45 (1969) 1.
- Kruit, P.C. van der, K. van Berkel (eds.), *The legacy of J.C. Kapteyn. Studies on Kapteyn and the development of modern astronomy* (Londen 2000).
- Kuhn, T.S., *The structure of scientific revolutions* (Chicago 1962).
- Lange, J. de, ‘In memoriam Hans Freudenthal’, *Nieuwe wiskrant* 10 (1990) 3.
- Langeveld, M.J., *Inleiding tot de studie der paedagogische psychologie van de middelbare schoolleeftijd* (Groningen 1954, eerste druk 1937).

- Langeveld, M.J., 'Over de voorbereiding van het gebruik van exacte methoden in bewerking en interpretatie van psychologische onderzoeken', *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afdeling Letterkunde* 30 (Amsterdam 1967) 187-204.
- Langeveld, M.J., *Opvoedingshulp als groeiende wetenschap* (Amsterdam 1972).
- Leeman, H.Th.M., L.N.H. Bunt, P.G.J. Vredenduin, 'Verslag van het seminarium "New thinking in school mathematics" van de OES', *Euclides* 35 (1960) 218-229.
- Leen, A., *De ontwikkeling van het rekenonderwijs op de lagere school in de 19e en het begin van de 20e eeuw* (Groningen 1961).
- Lenstra, H.W., 'Boekbespreking. Prof.dr. Hans Freudenthal *Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek*', *Euclides* 32 (1957) 248-249.
- Levering, B., 'De betekenis van M.J. Langeveld voor de naoorlogse pedagogiek (met het accent op de periode 1945-1960)', *Pedagogisch Tijdschrift* 16 (1991) 147-160.
- Loonstra, F., P.G.J. Vredenduin, *Modernization of mathematical teaching in the Netherlands* (Groningen 1962).
- Maanen, J.A. van, *Facets of seventeenth century mathematics in the Netherlands* proefschrift (Utrecht 1987).
- Maanen, J.A. van, 'In memoriam prof.dr. E.M. Bruins (1909-1990)', *Tijdschrift voor de Geschiedenis der Geneeskunde, Natuurwetenschappen, Wiskunde en Techniek* 14 (1991) 116-118.
- Mandemakers, C.A., *Gymnasiaal en middelbaar onderwijs. Ontwikkeling, structuur, sociale achtergrond en schoolprestaties, Nederland, ca. 1800-1968* proefschrift (Rotterdam 1996).
- Matthijssen, M.A.J.M., *De elite en de mythe. Een sociologische analyse van de strijd om onderwijsverandering* (Deventer 1982).
- Meeder, M., F. Meester, *Vrouwiskundig. Meisjes in het wiskundeonderwijs* (Amsterdam 1984).
- Melsen, A.G.M. van, 'Herdenking van Evert Willem Beth (7 juli 1908-12 april 1964)', *Jaarboek der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen 1964-1965* (Amsterdam 1965).
- Meijer, W.A.J., *Stromingen in de pedagogiek* (Baarn 1996).
- Metselaars, H.J.A.H.G., 'Het archief van Hans Freudenthal voor onderzoek beschikbaar', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 4/9 (1991) 211-212.
- Moerdijk, I., J.P. Murre, 'In memoriam Willem Titus van Est', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/4 (2003) 281-283.
- Monna, A.F., 'Bericht over de werkzaamheden van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde', *Euclides* 41 (1965) 104-107.
- Monna, A.F., 'Bericht van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde', *Euclides* 42 (1966) 129-134.
- Monna, A., M. van der Put, 'Ambtenaar en wiskundige', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5 (2004) 136-146.
- Molenaar, L., 'Wij kunnen het niet langer aan de politici overlaten.' *De geschiedenis van het Verbond van Wetenschappelijke Onderzoekers 1946-1980* (Delft 1994).
- Molenaar, L., *De rok van het universum. Marcel Minnaert, astrofysicus 1893-1970* (Amsterdam 2003).
- Mooij, H., *Over de didactiek van de meetkunde benevens benaderingsconstructies van een boek in gelijke delen* proefschrift (Amsterdam 1948).
- Moor, E.W.A. de, 'Het 'gelijk' van Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa', *Nieuwe Wiskrant* 12 (1993) 15-24.
- Moor, E.W.A. de, 'Het ongenoeven van Dijksterhuis', *Nieuwe Wiskrant* 15 (1996) 22-26.
- Moor, E.W.A. de, *Van vormleer naar realistische meetkunde. Een historisch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw* proefschrift (Utrecht 1999).
- Moor, E.W.A. de, 'Het kistje van Albada', *Nieuwe Wiskrant* 21 (2001) 13-22.
- Morsch, C.J.J.A., *Met de moed van de hoop. Studies over de vernieuwing van opvoeding, onderwijs en maatschappij in Nederland in de periode tussen ±1930 en 1984* (Eindhoven 1984).
- Nelissen, J., 'Eeuwenlang rekenen. Historische ontwikkelingen in het rekenonderwijs', *Willem Bartjens* 18 (1998) 36-39.
- Nepveu, R.M., et al., *Universitaire flitsen: van Illustre School tot Rijksuniversiteit* (Utrecht 1986).
- Neut, D.N. van der, A. Holwerda, *Meetkunde. Met de beginselen der goniometrie. Eerste deel* (Groningen 1959).
- Noël, G., 'Pourquoi, pour qui enseigner les mathématiques? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes, au xxe siècle, en Belgique', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 34 (2002) 110-119.
- Organisation for European Economic Cooperation. Office for Scientific and Technical Personnel, *New thinking in school mathematics* (1961).

- Parreren, C.F. van, *Intentie en autonomie in het leerproces* proefschrift (Amsterdam 1951).
- Parreren, C.F. van, *Psychologie van het leren. Verloop en resultaten van leerprocessen* (Zeist 1960).
- Parreren, C.F. van, J.A.M. Carpay (eds.), *Sovjetpsychologen aan het woord. Leerpsychologie en onderwijs 2* (Groningen 1972).
- Parreren, C.F. van, *Leren op school* (Groningen 1976, tiende herziene druk).
- Pelupessy, B., 'Enkele annotaties bij "Wandelingen met Bastiaan"', *Onderwijs in Natuurwetenschap. Een nieuwsbrief over de integratie van natuurwetenschappen in het basis- en voortgezet onderwijs 2* (1975) 17-20.
- Philippi-Siewertsz van Reesema, C., 'Inleiding tot de werken van Prof. dr. Jean Piaget', *Paedagogische Studiën 10* (1929) 1-52.
- Philippi-Siewertsz van Reesema, C., *Uit en over de werken van Prof. dr. Ovide Decroly* (Groningen 1931).
- Piaget, J., B. Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant* (Paris 1948).
- Piaget, J., 'Comments on mathematical education', in: A.G. Howson (ed.), *Development in mathematical education. Proceedings of the second international congress on mathematical education* (Cambridge 1973) 79-87.
- Polak, F.L., 'Mens, techniek en cultuur', in: C.J. Drippel e.a., *Mens, cultuur en techniek* (Den Haag 1954).
- Polya, G. *How to solve it* (New York 1957, eerste druk 1945).
- Pulliam, J.D., *History of education in America* (Columbus 1976).
- Riedesel, C.A., P.C. Burns, 'Research in the teaching of elementary-school mathematics', in: R.M.W. Travers et al (eds.), *Second handbook of research on teaching* (Chicago 1973) 1149-1176.
- Rupp, J.C.C., *Van oude en nieuwe universiteiten* (Den Haag 1997).
- Scheltens, J., 'Natuurkunde en wiskunde', *Euclides 5* (1929) 268-269.
- Schenk, F., *De Utrechtse school. De geschiedenis van de Utrechtse psychologie tussen 1945 en 1965* (Utrecht 1982).
- Schogt, J.H., 'De mechanica als afzonderlijk leervak op de hogere burgerschool', *Euclides 5* (1928) 70-79.
- Schuyt, K., E. Taverne e.a., 1950. *Welvaart in zwart-wit. Nederlandse cultuur in Europese context* (Den Haag, 2000).
- Senegal, M., 'The continuing silence of Bourbaki – an interview with Pierre Cartier', *Mathematical Intelligencer 20* (1998) 22-28.
- Sime, M., *Zoals een kind het ziet. Wegwijzer in de theorieën van Piaget* (Purmerend 1976).
- Smid, H.J., *Een onbekookte nieuwwigheid? Invoering, omvang, inhoud en betekenis van het wiskundeonderwijs op de Franse en Latijnse scholen 1815-1863* proefschrift (Delft 1997).
- Smith, L., J. Dockrell, P. Tomlinson (eds.), *Piaget, Vygotsky and beyond. Future issues for developmental psychology and education* (London 1997).
- Staring, A.J., 'Doel en middelen bij het onderwijs in de mechanica', *Euclides 18* (1941) 115-124.
- Streefkerk, H., 'Het leerplan voor de wiskunde op de H.B.S.', *Euclides 21* (1945) 30-39.
- Streefkerk, H., 'Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?', *Euclides 27* (1951) 57-59.
- Streefkerk, H., 'Problemen rondom de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs', in: *Stemmen uit de praktijk. Vernieuwing van het wiskundeonderwijs. Inleidingen en verslagen van de conferentie wiskunde, georganiseerd door de afdeling v.h.m.o. van het Christelijk Paedagogisch Studiedecentrum (werkgroep wiskunde) op 6 en 7 maart 1964* (Den Haag 1964) 7-19.
- Streefland, L., 'Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron', *Nieuwe Wiskrant 5* (1985) 60-67.
- Streefland, L., *Realistisch breukenonderwijs. Onderzoek en ontwikkeling van een nieuwe leergang* proefschrift (Utrecht 1988).
- Streefland, L., (ed.), *The Legacy of Hans Freudenthal* (Dordrecht 1993).
- Streefland, L., *Learning from history for teaching in the future* (Utrecht 1996).
- Streun, A. van, *Heuristisch wiskunde-onderwijs. Verslag van een onderwijsexperiment* proefschrift (Groningen 1989).
- Struik, D.J., *Geschiedenis van de wiskunde* (Utrecht 1990).
- Syswerda, A.H., *De ruimtevoorstelling bij het kind volgens J. Piaget en B. Inhelder. Synthese en kritiek* (Groningen 1955).
- Terwel, J., *Onderwijs maken* proefschrift (Harlingen 1984).
- Timmer, J.K., 'De wiskunde werkgroep na 1945', *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs 183* (1961) 185-186.
- Thijssen, W.J., J.H. Wansink, 'Het internationale mathematische congres in 1958', *Euclides 34* (1959) 225-245.

- Turkstra, H., J.K. Timmer, *Rekendidactiek* (Groningen 1953).
- Treffers, A., *Wiskobas doelgericht. Een methode van doelbeschrijving van het wiskundeonderwijs volgens wiskobas* proefschrift (Utrecht 1978).
- Treffers, A., E.W.A. de Moor, 'Het aanvankelijk meetkundeonderwijs', *Euclides* 50/51 (1974) 81-99.
- Turkstra, H., *Het veelomstreden vraagstuk van het wiskunde-onderwijs op de middelbare school* (Zutphen 1938).
- Uhlenbeck, E.M., 'Professor Freudenthals kleinzoontje verdedigt tegen zijn grootvader', *Forum der Letteren* 16 (1975) 253-254.
- Velden, B. van der, 'Between "Bastiaan ou de l'éducation" and "Bastiaan und die Detektive"', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 32 (2000) 201-202.
- Velthuys-Bechthold, P.J.M., *Inventory of the papers of Hans Freudenthal (1905-1990), mathematician. 1906-1990* (Haarlem 1999).
- Verbist, R., A. de Block, *Experimenteel-didactisch onderzoek naar de waarde van denkpsychologisch georiënteerd rekenonderwijs* (Amsterdam 1961).
- Verhoeven, P., *Tekstbegrip in het onderwijs Klassieke Talen. Een onderzoek naar de verwezenlijking van nieuwe doelstellingen in het schoolonderzoek Grieks en Latijn* proefschrift (Leiden 1997).
- Vos, J., J. van der Linden, *Waarvan akte. Geschiedenis van de MO-opleidingen 1912-1987* (Assen 2004).
- Vredenduin, P.G.J., 'Een opzienbarend boek', *Euclides* 39 (1963/64) 237-247.
- Vredenduin, P.G.J., 'Het experiment Papy', *Euclides* 42 (1966) 167-182.
- Vries, G. de, *De ontwikkeling van wetenschap. Een inleiding in de wetenschapsfilosofie* (Groningen 1984).
- Vuyk, R., *Overview and critique of Piaget's genetic epistemology 1965-1980* (Londen 1981).
- Vuysje, B., 'De wiskundeles verandert: $3+2=1$ ', *HP Magazine* (24 december 1969-6 januari 1970).
- Wanders, W.E., S. Bohncke, *Boeiend rekenen voor de lagere school. Algemene inleiding* ('s-Hertogenbosch 1950).
- Wansink, J.H., 'Mathematical teaching in Dutch secondary schools', *Euclides* 26 (1950) 99-114.
- Wansink, J.H., 'De wiskunde werkgroep van de w.v.o.', *Euclides* 28 (1953) 197-205.
- Wansink, J.H., 'Didactische revue', *Euclides* 34 (1958) 165-175.
- Wansink, J.H., *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Delen I, II, III* (Groningen, 1969).
- Weijers, I., 'Mondige burgers. Een cultuurhistorische plaatsbepaling van de pedagogiek van M.J. Langeveld', *Pedagogisch Tijdschrift* 19 (1994) 189-206.
- Wijdeveld, E., 'Omzien in verwondering. Ontstaan, werkwijze en effecten van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde en het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (1960-1970)', *Euclides* 78 (2003) 218-225.
- Wijdenes, P., *Planimetrie. Eenvoudig schoolboek voor het eerste onderwijs in de vlakke meetkunde* (Groningen 1931).
- Wijdenes, P., H.J.E. Beth, *Nieuwe school-algebra. Derde deel* (Amsterdam 1947).
- Willoughby, S.S., 'Mathematics', in: R.L. Ebel et al (eds.), *Encyclopedia of educational research* (London 1969) 766-777.
- Wiskunde Werkgroep van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs, *Nieuwe wegen bij het onderwijs in de wiskunde en de natuurwetenschappen* (Purmerend 1953).
- Wiskunde Werkgroep van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs, *De aansluiting van het rekenonderwijs op de lagere school tot het wiskundeonderwijs op de middelbare school* (Purmerend 1958).
- Wolthuis, J., 'De ontwikkeling van de algemene onderwijsvakbeweging' (doctoraalscriptie onderwijssociologie Rijksuniversiteit Groningen) 1980.
- Wolthuis, J., 'Theorievorming over de Nederlandse onderwijsgeschiedenis: een terreinverkenning', *Info. Tijdschrift voor onderwijswetenschappen* 16 (1985/86) 228-251.

Namenregister

- Abbiw-Jackson, D.K. 280
Abel, N.H. 59
Achter, V. van 317
Adda, J. 17, 352
Albada, P.J. van 136-137, 183, 193, 256, 257, 261, 283
Alberts, G. 12, 17, 91, 92, 106
Alders, C.J. 160
Andel, J. van 34, 37
- Baan, P.H.A. 185
Barrau, J.A. 92-93
Beberman, M. 212, 280
Begle, E.G. 213, 280, 285
Behnke, H. 215, 277, 281, 285
Berkel, K. van 17, 18
Berlage, H.P. 163
Bernoulli, Jacob 59
Bernoulli, Johan 59
Beth, E.W. 45, 65, 153, 155, 179
Beth, H.J.E. 28, 34, 37-38, 43, 150, 153-154
Bieberbach, L. 51, 53
Bijpost, M. 253
Bishop, A.J. 17, 285, 330
Blij, F. van der 55, 62, 63, 66, 95, 136, 137, 242, 244, 273, 277, 294
Bloom, B.S. 335-336
Bockwinkel, H.B.A. 93, 136
Boeke, K. 44, 99, 109
Boormeester, Chr. 223
Bolkestein, G. 34
Boomsma, G. 334
Bosschart, R.A.J. 148
Bouman, P.J. 75, 76, 85
Bourbaki 56, 209-210, 282, 350
Brandenburg, W.J. 253, 272, 290
Breughel-Vollgraff, D. 62-63, 242
Brouwer, L.E.J. 21, 52-55, 89, 93, 108, 241
Bruins, E.M. 57, 62, 89-90
- Bruner, J. 214
Bruyn, N.G. de 249
Bunt, L.N.H. 128, 130, 131, 135, 156, 158, 160, 163, 179, 210, 223, 244, 272, 340
Buytendijk, F.J.J. 185
- Cals, J.N.L.Th. 247
Cantor, G.F.L.Ph. 318
Carpay, J.A.M. 352
Cartan, H. 210, 281-282
Casimir, R. 25, 40, 44, 45
Castelnuovo, E. 256, 331
Chasles, M. 59
Chevalley, C. 210
Choquet, G. 218, 280
Clay, J. 90
Corput, J.G. van der 92-93, 112-113, 117, 119, 183
Coster, B. 34
Coulomb, J. 210
Cramer, P. 34
- Dalen, D. van 18
Dante (Durante degli Alighieri) 149
Dantzig, D. van 28, 36, 39, 92-93, 146, 159, 179, 331
Davydov, V.V. 329, 352
Decroly, O. 299, 331
Dedekind, R. 32, 133
Deetman, W.J. 67
Delsarte, J. 210
Dewey, J. 85, 102
Dieleman, G. 85
Diels, P.A. 77, 80, 85
Dienes, Z.P. 285, 317
Dieudonné, J.A.E. 48, 210, 216, 223, 237, 252
Dijksterhuis, E.J. 17, 18, 26-28, 31-35, 38-45, 71, 146, 149, 171, 196, 350
Dol, mej. 109

- Dormolen, J. van 17, 283, 330
 Douwes, B.J. 85
 Drewes, J.B. 273
 Dulieu, J. 326
 Dynkin, E.B. 280
- Ehrenfest, P. 30
 Ehrenfest-Afanassjewa, T. 29, 30-35, 43, 45, 117,
 127, 129, 130, 142-147, 153, 186, 193, 255, 256,
 331
 Ehresmann, C. 210
 Eilander, J. 128
 Einstein, A. 52
 Engel, A. 280
 Est, W.T. van 17, 56, 64, 65, 93, 96,
- Fehr, H. 218
 Feigl, G. 51
 Félix, L. 280
 Flaubert, G. 110
 Fletcher, W.T. 285
 Floris V 59
 Fokker, A.D. 37
 Freudenthal, Hans *passim*
 Freudenthal, Jedidja 54, 60, 71, 72, 73, 85, 93,
 172, 295
 Freudenthal, Joseph 49
 Freudenthal, L. 50, 60, 64
 Freudenthal, Matthijs 54, 60, 71, 73, 85, 100, 295
 Freudenthal, Mirjam 54, 96, 240, 241, 298
 Freudenthal, T. 54, 60, 93, 295, 297
 Freudenthal-Ehmann, E. 49
 Freudenthal-Lutter, S.J.C. 46, 54, 53-54, 57, 58,
 63, 67, 72, 93, 96-97, 172, 240, 241, 301, 302,
 306, 317, 329
 Fröbel, F. 82
- Gagné, R.M. 334
 Gal'perin, P.J. 319, 320, 352
 Gangadharan, K.S. 187
 Gass, J.R. 216, 218, 219, 222, 223
 Gattegno, C. 237, 238
 Gelder, L. van 272
 Gerretsen, J.C.H. 179, 236, 272
 Ginjaar-Maas, N.J. 337
 Gleason, A.M. 280
 Gödel, K. 264
 Gravemeijer, K.P.E. 18
 Griffiths, H.B. 280
 Groeneveld, B. 245
 Groot, A.D. de 272
 Groot, J. de 57
 Grootendorst, A.W. 178, 294
 Grosheide, J.H. 287-289
 Gunning, J.H. 44, 96
- Haantjes, J. 92
 Hadamard, J. 52
 Hammersley, J.M. 281
 Heemert, P.C. van 57, 89
 Herbart, J.F. 81
 Heyting, A. 92, 241
 Hiele, P. van 19, 23, 56, 64, 128-130, 135, 138,
 145, 156, 161, 181-195, 197-198, 201-204, 206,
 283, 293, 331, 340, 344
 Hiele-Geldof, D. van 19, 130, 131, 156, 181-183,
 186-198, 201-204, 206, 331
 Hijmans van den Bergh, L.J. 243
 Hilbert, D. 30, 52, 198
 Hilton, P. 280
 Holwerda, A. 160
 Hope, C. 280
 Hopf, H. 51, 53, 60, 61, 119
 Hurewicz, W. 55
 Huygens, C. 59
- Imelman, J.D. 63
 Iongh, J.J. de 93, 241, 317
- Jacobi, C.G.J. 59
 Jacobs, H.J. 127, 129, 130, 136, 156, 161, 250
 Janssen, G.A. 152-155
 Janssen, H.H. 163
 Janssen, J.R. 97, 98, 99, 126-127, 130, 131, 138, 156
 Jensema, E. 24, 37
 Jong, R.A. de 309, 317
 Julia, G. 52
 Julius, W.H. 117
- Keitel, C. 352
 Kemenade, J. van 293
 Keune, F.J. 350
 Klafki, W. 326
 Klein, F. 30, 34, 41, 119, 209, 260
 Kline, M. 211, 213
 Klomp, H.A. 17
 Kloosterman, H.D. 92
 Kohnstamm, Ph.A. 41, 44-45, 76-77, 100, 144,
 145, 146, 152, 183-185, 299
 Koksma, J.F. 89, 92, 93, 178, 179
 Koning, J. 191
 Kossmann, E.H. 91
 Krogt, B. van der 290
 Krooshof, G. 238, 249, 250, 251
 Kuhn, T. 311, 312
 Kühnel, J. 76, 79, 85
 Kwantes, R.C. 217, 218, 223
 Krygovska, A.Z. 277, 280, 281, 283, 331, 352
- Lange, J. de 17, 66
 Langeveld, M.J. 174, 181, 184-185, 186, 187, 191,
 240, 323, 335, 340

- Leeman, H.Th.M. 223, 244, 245
 Leeuw, G. van der 92, 112
 Legendre, A.M. 59
 Leibniz, G.W. 59
 Lenstra, H.W. 168, 169
 Leujes, D. 136
 Ligthart, J. 97, 117
 Limburg, J. 25
 Lockefer, L. 85
 Lohuizen, T. van 39
 Loo, P.J. van 150
 Löwner, K. 51
 Luning Prak, J. 85

 Mandelbrojt, S. 210
 Mannoury, G. 28, 44
 Martin, W.T. 280
 Maupertuis, P.L. 59
 Meijer, W.A.J. 63
 Metzger, H. 217, 220, 221
 Meyer, C.F. 207
 Minnaert, M.G.J. 38, 92, 93, 117-118, 121, 123,
 124, 128-129, 156, 175
 Mises, R. von 51
 Molenaar, L. 17, 18, 117
 Mollenhauer, K. 181
 Monna, A.F. 244, 274, 277, 279, 287
 Montessori, M. 82, 83, 85
 Mooij, H. 183, 272
 Moor, E.W.A. de 17
 Moyer, J.C. 187

 Nauta, J. 77, 80, 85
 Nelissen, J. 17
 Neumann, J. von 51
 Neut, D.N. van der 179
 Newton, I. 59
 Nijhof, H. 85

 Odysseus 59
 Oort, J. van 326
 Ornstein, L.S. 38, 117

 Papy, F. 237, 285
 Papy, G. 237-239, 280, 285, 341
 Parreren, C.F. van 187, 319, 320, 352
 Pelupessy, B. 302, 303
 Pestalozzi, J.H. 82, 83, 85
 Petersen, P. 63, 96
 Philipp-Siewertsz van Reesema, C. 338
 Piaget, J. 87, 179, 191, 237, 238, 241, 316-317,
 338-346
 Picard, E. 52
 Picard, N. 317
 Piekaar, A.J. 217, 223
 Planck, M. 52

 Pollak, H.O. 277, 280, 281, 284, 285
 Polya, G. 323
 Pompe, W. 185
 Popken, J. 93
 Possel, R. de 210

 Reckendorf, A.O. 136
 Reindersma, W. 39, 44, 45
 Revuz, A. 280, 281, 283, 285, 331
 Roloff, H.P. 100
 Rosenthal, A. 119
 Rümke, H.C. 185
 Rutten, F.J.Th. 247

 Schaake, G. 57
 Schmidt, E. 51
 Schoemaker, G. 291
 Schoenfeld, A. 284
 Schogt, J.H. 31, 39, 43, 150
 Schrier, L. 253
 Schur, I. 51
 Selz, O. 77
 Servais, W. 218, 237, 277, 280, 281, 285, 331
 Sijmons, B. 42
 Sirolf, V. 59
 Sittig, J. 95, 163
 Smid, H.J. 17, 37
 Sobolev, S. 280, 281
 Steiner, H.G. 280, 354
 Stern, W. 299
 Stone, M.H. 218, 220, 285
 Streefkerk, H. 128, 130, 135, 136, 146-147, 259
 Streun, A. van 17, 278
 Struik, H.J. 136, 137
 Stubenrouch, G.C. 243
 Syswerda, A.H. 340
 Suppes, P. 280
 Szeminska, A. 316

 Telemann, G.P. 136
 Terlep, J.F. 61
 Terwel, J. 17
 Thijssen, W.P. 223
 Thorbecke, J.R. 22, 23, 25
 Thorndike, E.L. 27
 Thwaites, B. 280
 Timmer, J.K. 130, 253
 Tol, M.G. van 136
 Treffers, A. 17, 285, 290, 292, 294, 305
 Tucker, A.W. 212, 218
 Turkstra, H. 122, 130

 Uhlenbeck, E.M. 301-302
 Unnik, W.C. van 242

 Velden, B. van der 298-306, 309, 310, 315, 318,

- 320, 321, 330, 342
Verrijp, D.P.A. 42
Versluys, J. 76
Vos van Steenwijk, A.A. de 217, 220, 222
Vossen, H.M.M. 309
Vredenduin, P.G.J. 130, 131, 160, 223, 224, 238,
239, 283, 328, 332, 339, 340, 345
- Walusinski, G. 218
Wansink, J.H. 25, 40, 45, 120, 122, 123, 130, 131,
136, 147, 151, 157, 158, 159, 160, 161, 179, 223,
236, 272, 277
Washburne, C. 74, 101
Waterink, J. 76, 77, 85
Weil, A. 210, 282
Weyl, H. 52
Wijdenes, P. 31, 37, 44
Wijdeveld, E. 285, 287, 288, 290
Wittenberg, A. 280
Wolff, J. 92, 93, 118
- Yaglom, I.M. 280
- Zelm, J.C. van 75, 76, 85
Ziller, T. 81

