Hoofdrekenen anno 2000
- aandachtspunten voor de leerlijn -

K. Buijs
SLO/Bekadidact, Enschede/Baarn

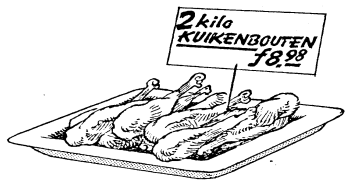
1 Inleiding

Tegenvallende PPON-resultaten

De tegenvallende PPON-resultaten hebben heel wat stof doen opwaaien. Deze zijn des te opmerkelijker omdat ze zich over een betrekkelijk breed front voordoen: zowel op het gebied van cijferen, hoofdrekenen, getallen als op het gebied van het meten, blijken de resultaten van 1997 in groep 8 minder dan die van 1992 en 1987. Over mogelijke oorzaken doen allerlei speculaties de ronde. Is het vooral een kwestie van gebrekkige implementatie waardoor leraren niet altijd goed zijn toegerust om de grondideeën van realistisch reken-wiskundeonderwijs in de praktijk te realiseren? Speelt wellicht ook een rol dat een leerlijn als die van het hoofdrekenen nog niet altijd optimaal is uitgewerkt in methoden? Of zijn de resultaten van 1997 wellicht niet in alle opzichten goed te vergelijken met die van 1992 en 1987?
Hoe dit ook zij, duidelijk is dat deze ontwikkeling zeker wat het hoofdrekenen betreft zorgwekkend is. Hoofdrekenen is immers in toenemende mate aan het uitgroeien tot de 'stam' van het reken-wiskundeonderwijs, met cijferend rekenen (of liever: rekenen volgens standaardprocedures) en schattend rekenen als belangrijke 'vertakkingen'. Het is van groot belang dat ook zwakkere leerlingen optimaal kunnen profiteren van deze ontwikkeling. Op dit moment lijkt dat vooralsnog nog niet geheel het geval te zijn. Zo worden elementaire opgaven als 20×2400, 8×98, het 'sokkenprobleem' en het 'folderprobleem' (fig.1) door de zwakkere leerlingen in groep 8 niet goed gemaakt (Janssen e.a., 1999). Terwijl het hier toch om opgaven gaat die door vrijwel alle leerlingen goed gemaakt zouden moeten kunnen worden.
Enkele kanttekeningen lijken hier overigens op zijn plaats. Het was de kinderen immers bij het onderdeel hoofdrekenen zoals afgenomen bij de PPON niet toegestaan om tussenstappen of -antwoorden op papier te zetten. Terwijl het inmiddels toch een algemeen aanvaarde opvatting is dat dit bij hoofdrekenen wel degelijk mogelijk moet zijn. Bovendien bevinden zich in de schaal hoofdrekenen zoals gehanteerd door het Cito, nogal wat

5 17,9 x 100 = ________

6



De chef van een restaurant koopt 10 kilo kuikenbouten in. Hoeveel moet hij betalen? ƒ ________

7 Meneer Fluiters koopt vijf paar sokken voor ƒ 8,-. Hoeveel kosten die sokken per paar? ƒ ________

8 43,8 : 100 = ________

9 Kees verdient met het rondbrengen van folders ƒ 7,50 per keer. Na hoeveel keer kan hij zijn fel begeerde draagbare televisie van ƒ 299,- kopen? ________ keer

10 8 x 1,5 x 12,5 = ________

11 4 : 0,25 = ________

12 Mijn bromfiets verbruikt 2,5 liter benzine op elke 100 kilometer. Hoeveel kilometer kan ik nog rijden op 1,5 liter benzine? ________km

figuur 1

opgaven die betrekking hebben op kommagetallen. Bijvoorbeeld: 17,9 × 100 en 43,8 : 100. Het zal duidelijk zijn dat dergelijke factoren een zuiver beeld omtrent de werkelijke vaardigheid van de kinderen op het gebied van het basale hoofdrekenen met hele getallen enigszins in de weg staan. Nochtans zal iedereen het erover eens zijn, dat het correct kunnen oplossen van opgaven als de hierboven genoemde, ook voor zwakkere leerlingen haalbaar moet zijn. Hoe zou dat bevorderd kunnen worden?

In dit artikel buigen we ons nader over deze problematiek. We beperken ons daarbij tot een beperkt, maar voor de ontwikkeling van het hele hoofdrekenen beslissend gebied: de leerlijn rond het vermenigvuldigen en delen met grotere getallen, zoals die in de loop van groep 6 voor een belangrijk deel doorlopen wordt. Deze leerlijn is in het kader van het TAL-project grondig overdacht en in kaart gebracht (TAL-team, 2000). We beschouwen deze leerlijn hier vanuit het perspectief van de zwakkere leerlingen. Wat zijn de problemen waar zij bij het doorlopen van deze leerlijn zoal tegenaan kunnen lopen? En hoe kan daarop door het onderwijs worden ingespeeld? Het zijn deze vragen waarop we nader in zullen gaan. Omdat deze problematiek raakt aan de kern van realistisch reken-wiskundeonderwijs, stellen we de met realistisch rekenen beoogde onderwijsbenadering eerst in meer algemene zin aan de orde.

2 De realistische onderwijsbenadering

Mogelijke schaduwzijden voor zwakkere leerlingen

Een wezenlijk kenmerk van realistisch reken-wiskundeonderwijs is gelegen in de wijze waarop de overdracht van kennis plaatsvindt. Het is in deze benadering niet zozeer de leraar die zijn of haar kennis overdraagt op de kinderen door uit te leggen hoe het kan of moet. De kinderen zelf hebben een essentiële inbreng in hun leerproces, doordat zij uitgenodigd worden bij zichzelf te rade te gaan en eigen strategieën aan te dragen; en doordat in het onderwijs aansluiting wordt gezocht bij deze strategieën en gepoogd wordt de kinderen op basis van deze eigen strategieën verder te helpen in de richting van beoogde, meer geavanceerde strategieën. Een en ander gaat gepaard met een sterk element van onderlinge uitwisseling (interactie) waarbij de leraar er zorg voor draagt dat aangestuurd wordt op de beoogde aanpakken, inzichten, en dergelijke (Treffers, 1987).
Op zich biedt deze benadering grote voordelen boven een meer traditionele onderwijsbenadering, omdat de kinderen de ontwikkelde kennis veel meer als iets van zichzelf ervaren; als iets om te verwerven waaraan zij een wezenlijke bijdrage hebben geleverd en mede daardoor een veel beter begrip daarvan hebben (Gravemeijer, 1995). Het is echter de vraag in hoeverre in de praktijk ook de zwakkere leerlingen profijt van deze opzet hebben. Immers, er kan zich een grote verscheidenheid aan aanpakken voordoen, die niet alleen voor de leerlingen, maar ook voor de leraar soms niet zo makkelijk te over- en te doorzien zijn. Hoe ga je daar als leraar in de praktijk mee om? Wat stel je uitgebreid aan de orde, wat minder? En, meer toegespitst op de zwakkere leerlingen, hoe bereik je dat ook zij de samenhang tussen de verschillende strategieën leren doorzien en optimaal gelegenheid krijgen om een repertoire aan efficiënte hoofdrekenstrategieën op te bouwen? Het zal duidelijk zijn dat hier nogal wat mis kan gaan, zeker als er sprake is van klassen met 30 of 35 leerlingen. In het volgende nemen we enkele cruciale ‘didactische passages’ onder de loep uit de leerlijn van het vermenigvuldigen en delen met grotere getallen. Omdat de beginsituatie van de kinderen hierbij uiteraard een doorslaggevende rol speelt, staan we daar eerst nog even bij stil.

3 Beginsituatie

Het belang van een ‘retraceerbaar leertraject’

In de laatste periode van groep 5 of de eerste periode van groep 6 vindt gewoonlijk een eerste verkenning plaats van grotere vermenigvuldigingen als 14 × 6, 30 × 4, 8 × 15 en 6 × 48. Dat kan pas met enig succes gebeuren indien er in het voorafgaande het nodige totstand gebracht is. Dit betreft bijvoorbeeld het inzicht in getallen tot 1000 (en daarboven) en het optellen en aftrekken tot 1000. Binnen dit laatste gebied dienen de kinderen op z’n minst in staat te zijn de rijgaanpak op getalsmatig niveau redelijk vlot uit te voeren, terwijl een zekere mate van vertrouwdheid met de splitsaanpak (alsmede met de valkuilen daarvan) eveneens wenselijk is. Verder speelt uiteraard de kennis van het vermenigvuldigen een belangrijke rol. Heeft een kind bijvoorbeeld met een som als 6 × 8 nog moeite, dan wordt het verkennen van sommen die op die kennis voortborduren (zoals 6 × 48) al gauw een moeizame aangelegenheid. Voor de kinderen bij wie het automatiseringsproces nog niet zo ver is voortgeschreden, kan hier een flink probleem liggen. Echter, helemaal rampzalig hoeft dit niet te zijn. Het hangt er maar vanaf hoe het leerproces rond de tafels in het voorafgaande is opgebouwd. Is dit vooral een kwestie geweest van blind inprenten op de manier waarop van oudsher bijvoorbeeld ook de provinciehoofdsteden van Nederland en (nog langer geleden) de 24 vulkanen van Java ingeprent dienden te worden, dan is er inderdaad een groot probleem. De splitsstrategie die bij de verkenning van grotere vermenigvuldigingen verworven dient te worden (6×48 oplossen via 6×40 en 6×8 of via een andere geschikte splitsing) is dan nauwelijks bereikbaar voor de deze kinderen. Is in het voorafgaande echter de nodige aandacht besteed aan de begripsmatige fundering van de operatie ‘keer’ en is het automatiseringsproces mede op basis daarvan vooral een kwestie geweest van voortgaande verkorting en niveauverhoging, dan is het een ander verhaal. In dat geval heeft het kind immers in ieder geval een goed inzicht in de aard van het vermenigvuldigen ontwikkeld en is het in staat om vermenigvuldigstructuren in bepaalde situaties te herkennen. Bovendien heeft het op basis van dat inzicht geleidelijk aan enkele efficiënte strategieën leren gebruiken (handig verdubbelen, gebruik van 5 keer en 10 keer als steunpunt) waarmee de tafelsommen redelijk vlot uitgerekend kunnen worden. Zodoende is het ermee vertrouwd geraakt om in gevallen waarin een som nog niet gekend wordt, op zoek te gaan naar sommen die op de beoogde som lijken en die als ‘steunsom’ gebruikt kunnen worden. Bijvoorbeeld, in het geval van 6×8: uitgaan van 5×8 als bekende som, en daar nog 8 bijdoen. Of uitgaan van 3×8 als bekende som en de uitkomst daarvan verdubbelen (Ter Heege, 1985).

Het is juist als het kind op deze wijze het beoogde leertraject heeft doorlopen, dat nog niet geheel geautomatiseerde tafelkennis geen ramp hoeft te zijn. Het kind kan dan in voorkomende gevallen bij zichzelf te rade gaan en overwegen welke som hij kan gebruiken om toch redelijk vlot het betreffende product te achterhalen. In tegenstelling tot een leerproces waarbij het vooral een kwestie is van ‘je weet het of je weet het niet’, hoeven er dan geen flessenhalseffecten op te treden, waardoor zwakkere leerlingen binnen het nieuwe gebied weinig kans hebben om de nodige progressie te maken. Men zou meer in het algemeen van een reconstrueerbaar of ‘retraceerbaar leertraject’ kunnen spreken; het kind hoeft in gevallen dat zijn kennis even tekortschiet niet helemaal terug naar af, maar kan op basis van wat hij nog wel weet de ontbrekende kennis retraceren.

4 Het ponyprobleem

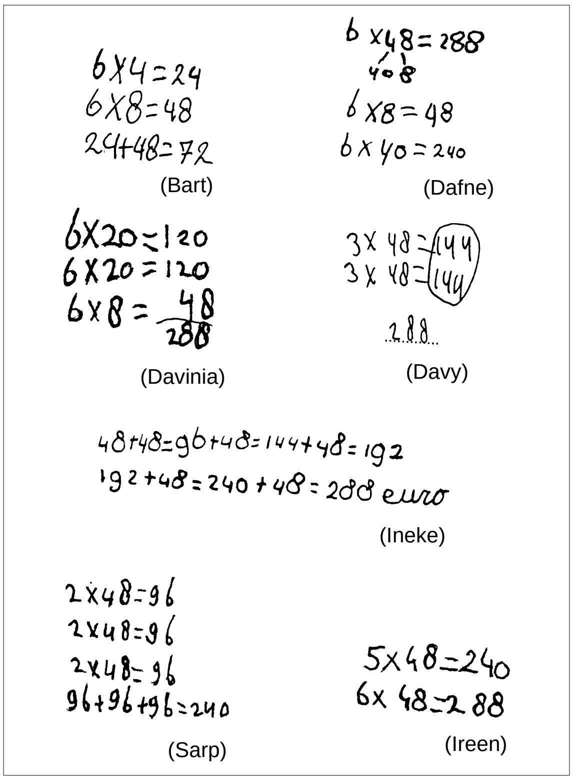
Waar kunnen kinderen zoal tegenaan lopen?

Bij de verkenning van grotere vermenigvuldigingen (eind groep 5, begin groep 6) wordt het vertrekpunt veelal gekozen in contextproblemen als in figuur 2. Zo’n probleem wordt gewoonlijk even in de klas besproken, waarbij de context tot leven wordt gebracht. Vervolgens gaan de kinderen aan de slag om een oplossing te bedenken of uit te werken. In de nabespreking wordt ernaar gestreefd om juist die oplossingen voor het voetlicht te halen die veel perspectief bieden. In dit geval betreft dat naast varia-strategieën als compenseren en handig verdubbelen vooral de reeds genoemde splitsstrategie die op verschillende manieren uitgevoerd kan worden.

Cindy gaat met een groepje van 6 kinderen
een weekend naar een ponykamp. Per persoon
moeten ze 48 euro betalen.
Hoeveel gaat dat in totaal kosten?

figuur 2

Wat voor oplossingen kunnen zich in de praktijk bij een dergelijk probleem zoal voordoen? In het kader van het TAL-project is het ponyprobleem aan een viertal klassen voorgelegd met in totaal ongeveer honderd kinderen. In alle vier de klassen bleek zich in grote lijnen een vergelijkbare variëteit aan aanpakken voor te doen. In figuur 3 wordt een overzicht gegeven van de oplossingen uit één groep; het beeld in de overige drie groepen stemt daarmee in hoge mate overeen.



figuur 3

Globaal zijn de oplossingen als volgt te categoriseren (TAL-team, 2000). Er is een groep kinderen die het vooral zoekt in vormen van herhaald optellen en verdubbelen. De oplossingen van Ineke, Davy en Sarp behoren tot deze categorie. Het zijn veelal vooral de zwakkere leerlingen die met dergelijke aanpakken komen. Soms wordt daarbij redelijk efficiënt gewerkt, maar het gebeurt ook nogal eens dat er bij het (vele) rekenwerk iets misgaat, waardoor een foute uitkomst ontstaat (de oplossing van Sarp).Verder is er een groep kinderen die verschillende vormen van splitsen hanteren. Soms is dit de gangbare manier waarbij het vermenigvuldigtal in een tienvoud en een getal kleiner dan 10 wordt gesplitst (zoals Daphne laat zien). Maar ook andere splitsingen komen voor, zoals via 6×20, 6×20 en 6×8 (de aanpak van Davinia). Bovendien blijkt deze aanpak soms ondoordacht gebruikt te worden. Bijvoorbeeld doordat een kind zich niet goed realiseert dat de 4 in 48 staat voor 40 (oplossing van Bart). En ten slotte zijn er vaak kinderen die een varia-strategie volgen. Een voorbeeld hiervan is die van Ireen waarbij de uitkomst van 5×48 waarschijnlijk handig is afgeleid uit 10×48 net zoals dat in het voorafgaande binnen het gebied van de tafels regelmatig is gebeurd. In de andere groepen kwam daarnaast ook het compenseren voor waarbij 6×48 via 6×50 min 6×2 wordt uitgerekend. Ook bij deze strategieën komen overigens soms fouten voor.

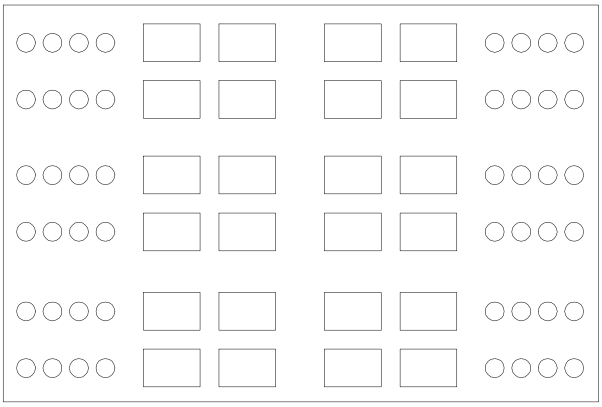
Een dergelijke variëteit aan strategieën is aan de ene kant natuurlijk heel mooi. Tot op zekere hoogte ziet men er als het ware de globale opbouw van de leerlijn in weerspiegeld (TAL-team, 1999). Aan de andere kant kan deze variëteit ook voor de nodige problemen zorgen, zeker vanuit de optiek van de zwakkere leerlingen. Immers: wat kun je als zwakkere leerling uit deze veelheid opmaken? Wat zijn goede strategieën, wat minder goede, wat foute? Zou er niet op een oppervlakkig niveau geconstateerd kunnen worden dat eigenlijk alles wel zo'n beetje goed is? Wil men voorkomen dat zulke leerlingen al gauw door de bomen het bos niet meer zien, dan zullen er in het onderwijs prioriteiten gesteld moeten worden en zodanige accenten moeten worden geplaatst, dat met name de samenhang tussen de meer primitieve, door zwakkere leerlingen gehanteerde aanpakken met de meer geavanceerde aanpakken doorzichtig wordt gemaakt. Hoe kan dat in z'n werk gaan?

5 Aandachtspunten voor de leerlijn (1)

Een brug slaan

Waar het voor het onderwijs in de hiervoor beschreven situatie eerst en vooral op aankomt, is een brug te slaan tussen de omslachtigere, foutgevoeligere aanpakken in de sfeer van herhaald optellen en verdubbelen enerzijds en de efficiëntere, meer geavanceerde aanpakken in de sfeer van het splitsen anderzijds. Komt dit goed uit de verf, dan is er al enorm veel gewonnen. Dan zijn ook de zwakkere leerlingen goed op weg geholpen en krijgen alle kinderen het perspectief op een steeds breder repertoire aan efficiënte strategieën. In de onderhavige probleemsituatie is het vooral het geldmodel dat zich ervoor leent een dergelijke brug te slaan.

Dit model ligt immers al in de situatie besloten en kan in de vorm van een bordtekening of van namaakgeld gebruikt worden om op een aanschouwelijk, modelmatig niveau duidelijk te maken dat herhaald optellen en splitsen in feite op hetzelfde neerkomen (fig.4).



figuur 4

De leraar kan in de bordtekening aan de ene kant de strategieën in de sfeer van herhaald optellen aanschouwelijk maken: 48 en 48 is 96 euro; en nog eens 48 is 144 euro, enzovoort. Maar ook splitsstrategieën kunnen goed geïllustreerd worden en in verband worden gebracht met herhaald optellen. In plaats van steeds 48 euro in z'n geheel toe te voegen, worden nu van alle bedragen de tientjes apart genomen.[1] Bijvoorbeeld: 6 keer 40 (c.q. 6 keer 4 tientjes) is 240 (c.q. 24 tientjes); en dan nog 6 keer 8 is 48 losse euro's; in totaal dus 240 plus 48 is 288 euro. Zeker als de beide typen aanpakken in enkele vervolgactiviteiten op een soortgelijke manier met elkaar in verband worden gebracht, kan dit tot gevolg hebben dat ook de zwakkere leerlingen steeds beter gaan doorzien hoe de splitsstrategie in z'n werk gaat en hoe deze gezien kan worden als een waardevolle aanvulling op strategieën van herhaald optellen, zoals zij die aanvankelijk al gebruikten.

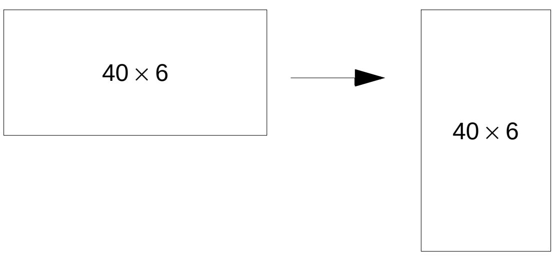
Uiteraard is niet iedereen even goed geholpen met deze verheldering. Er zijn immers kinderen die uit zichzelf al de splits- of variastrategie als compenseren of halverenverdubbelen gebruiken en voor wie herhaald optellen in dergelijke situaties al een gepasseerd station is. Het is van grote waarde dat tijdens besprekingsmomenten ook aan zulke meer geavanceerde strategieën aandacht wordt besteed. Niet alleen voor de betreffende kinderen zelf is dit van belang, maar ook omdat zich in deze strategieën een verdere verbreding aankondigt van het repertoire aan efficiënte strategieën die naderhand ook voor de andere kinderen steeds actueler zal worden. Indien dit aanvankelijk echter met de nodige terughoudendheid gebeurt, wordt het ontluikende inzicht van de zwakkere leerlingen in het meer basale splitsen niet in de wielen gereden.

6 Aandachtspunten voor de leerlijn (2)

Onderbouwing van de nulregel

Een kwestie die in dit stadium van de leerlijn eveneens een belangrijke rol speelt is die van de ‘nulregel’: het feit dat er een nul achter een getal komt als je dat getal 10 keer zo groot maakt (c.q. met 10 vermenigvuldigt). Begrijp je niet goed hoe deze regel in z’n werk gaat, dan ligt het gebruik van de splitsstrategie in gevallen als 6×48 bepaald niet voor het oprapen. Je bent dan immers niet goed in staat om sommen als 6×20 en 6×40 vlot en efficiënt uit te rekenen. Het is dus zaak om het inzicht in deze nulregel zorgvuldig te ontwikkelen. Dat kan door opgaven in de trant van 6×40 en 8×300 enkele keren gericht aan de orde te stellen. Door daarbij de relatie met geld te leggen, kan nader inzichtelijk gemaakt worden dat je zulke sommen kunt opvatten als ‘6 keer 4 tientjes’ respectievelijk ‘8 keer 3 honderdjes’.

Daarmee is de kous echter nog niet af. Dat namelijk ook 40×6 op een soortgelijke manier opgelost kan worden via ‘4 keer 6 met een nulletje erachter’, is nog weer een ander verhaal. Sommige kinderen zijn hier in eerste instantie vooral geneigd tot allerlei vormen van herhaald optellen. Bijvoorbeeld: 10×6 is 60, dat weet ik; dan doe ik nog eens 10×6 is 60; samen 120; en dan nog een keer (180), en nog een keer (240). Dat dit efficiënter kan door de som om te keren en te redeneren via 6×40, is zeker een grondige bespreking waard. Het rechthoekmodel dat in het verleden reeds een centrale rol speelde bij de verkenning van het vermenigvuldigen als zodanig, kan hier goede diensten bewijzen (fig.5).



figuur 5

Dit model maakt het mogelijk de verwisseleigenschap nog eens op een aanschouwelijk niveau te ervaren en om te doorzien hoe je 40×6 kunt herleiden tot 6×40. Door aldus systematisch aandacht aan deze verschijnselen te besteden, wordt bereikt dat datgene wat voor de betere leerlingen op grond van het voorafgaande soms al binnen bereik is gekomen, ook voor de zwakkere leerlingen doorzichtig en bereikbaar wordt gemaakt. Mede daardoor ontstaat ook voor hen een hechte basis waarop zij op een ‘retraceerbare manier’ een steeds breder en efficiënter repertoire aan hoofdrekenstrategieën kunnen opbouwen.

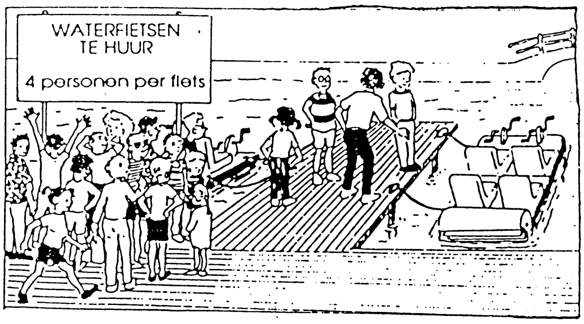
7 Delen met grotere getallen

Het waterfietsenprobleem

Wat hiervoor gezegd is over de beginsituatie bij het vermenigvuldigen met grotere getallen, geldt in grote lijnen ook voor het delen. Het automatiseren van de deeltafelsommen is in het algemeen weinig problematisch indien de relatie met het vermenigvuldigen voldoende helder is geworden en de vermenigvuldigtafels in voldoende mate geautomatiseerd zijn. Maar het delen moet uiteraard ook een meer op zichzelf staande betekenis als operatie gekregen hebben. Dat is het geval als er een brede en diepgaande verkenning heeft plaatsgevonden van situaties rond verdelen (twaalf ballen verdelen met z’n drieën) en opdelen (twaalf ballen in doosjes van drie doen). De formele operatie ‘gedeeld door’ kan hieruit gedestilleerd worden als een handeling waarbij het erop aankomt na te gaan hoeveel groepjes van drie je bijvoorbeeld uit twaalf kunt halen. Als deze betekenis van het delen goed is opgepakt door de kinderen, kunnen de deeltafelsommen op betrekkelijk eenvoudige wijze worden afgeleid uit de corresponderende vermenigvuldigingen.
Is hier voldoende progressie mee gemaakt en hebben de kinderen ook met het vermenigvuldigen met grotere getallen een redelijke mate van vertrouwdheid opgebouwd in bovengenoemde zin, dan kan het delen met grotere getallen verkend worden. Gewoonlijk gebeurt dat zo omstreeks het midden van groep 6. Net als bij het vermenigvuldigen wordt het vertrekpunt veelal gekozen in contextproblemen als het volgende (fig.6).
Ook hier is de gang van zaken gewoonlijk dat het probleem eerst klassikaal besproken wordt. Daarna proberen de kinderen zelf een oplossing te bedenken, terwijl de nabespreking wordt aangegrepen om enkele beoogde strategieën nader voor het voetlicht te halen. Door binnen een betrekkelijk korte tijd een aantal soortgelijke activiteiten te laten plaatsvinden, wordt bereikt dat deze strategieën steeds meer ingang bij de kinderen vinden.

Wat voor strategieën doen zich hier in de praktijk zoal voor? Om daarvan een idee te krijgen, is er in het kader van het TAL-project een vergelijkbaar onderzoekje gehouden als bij het vermenigvuldigen. Ook nu werd de opgave aan vier klassen voorgelegd, en ook nu was de variëteit aan oplossingsstrategieën groot.

Er gaan 90 kinderen waterfietsen.
Er mogen 4 kinderen op één waterfiets.
Hoeveel waterfietsen moeten ze huren?



figuur 6

Hieronder een overzicht van strategieën zoals die binnen één groep voorkwamen (fig.7); de andere groepen vertoonden een soortgelijk beeld. Ook hier is er in de eerste plaats een (betrekkelijk kleine) groep kinderen die aanpakken in de sfeer van herhaald optellen en herhaald aftrekken hanteren: net zo lang het aantal kinderen per bootje van 4 bij elkaar optellen tot de 90 bereikt is; c.q. net zolang bootjes van 4 van de 90 afhalen tot er geen kinderen meer over zijn.

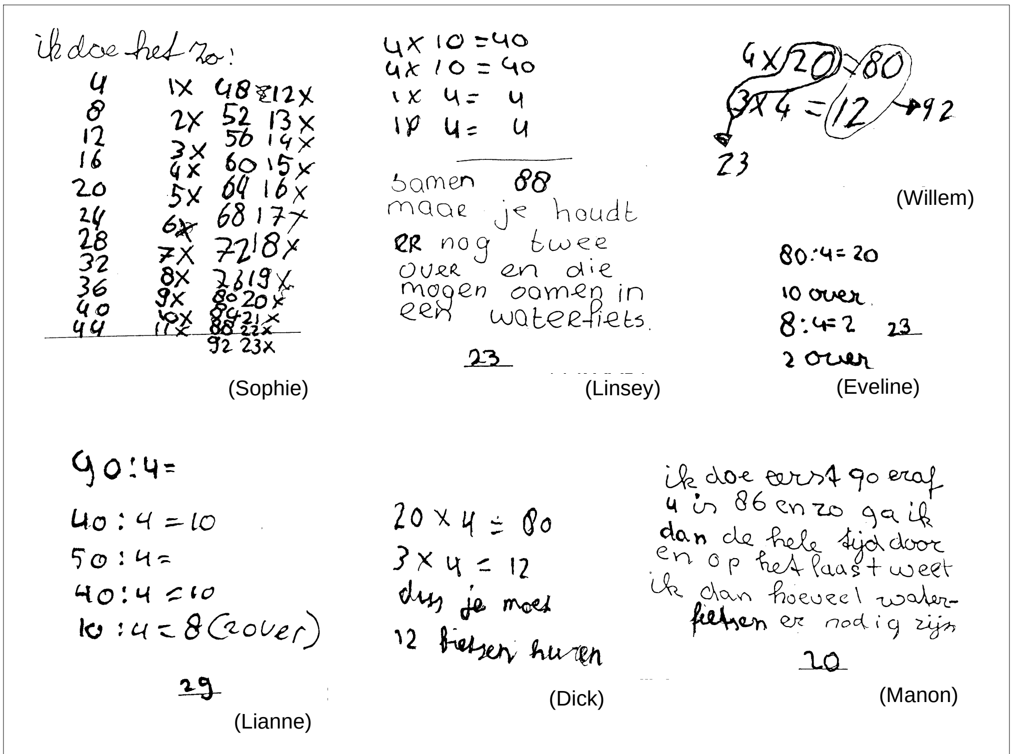
Sophie en Manon laten zien hoe ze deze strategie hebben gebruikt. Het gebeurt nogal eens dat er tijdens het rekenwerk 'onderweg' een fout wordt gemaakt, waardoor een verkeerde uitkomst wordt gekregen (Manon).

Verder is er een groep kinderen die een vorm van opvermenigvuldigen hanteert. Willem en Linsey laten zien hoe dat kan.

Dat het bij deze aanpak ook wel eens mis kan gaan, laat Dick zien: waarschijnlijk vanuit de gedachte dat het laatste getal van een berekening veelal ook de uitkomst oplevert, concludeert hij abusievelijk dat 12 de uitkomst moet zijn.

Ten slotte is er een groep kinderen die verschillende vormen van splitsen hanteren. Bijvoorbeeld bij Eveline: 80 : 4 = 20; 8 : 4 = 2; en nog één waterfiets voor de resterende twee kinderen. Soms wordt ter nadere verklaring bij dergelijke oplossingen nog vermeld dat 'de laatste waterfiets niet vol hoeft'. Dat deze splitsstrategie ook wel eens fout kan gaan, laat Lianne zien: zij vergist zich bij 10 : 4 en komt op het onjuiste antwoord van 29 uit.

In het oog springend is de grote diversiteit aan oplossingen. En daarmee dient zich wederom de vraag aan hoe daar in het onderwijs het beste mee kan worden omgegaan.

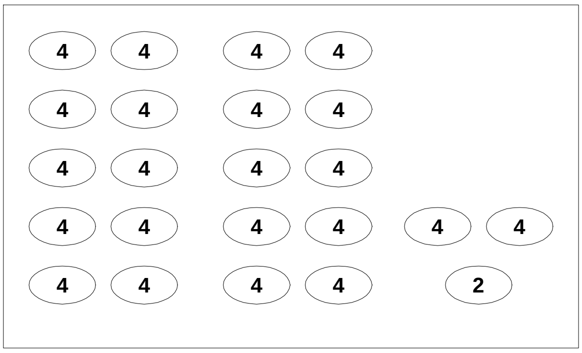


figuur 7

8 Aandachtspunten voor de leerlijn (3)

Een brug slaan

Na wat er in het voorgaande over het vermenigvuldigen is opgemerkt, hoeft het weinig betoog dat er in de TAL-visie in eerste instantie bij voorkeur het accent dient te liggen op het met elkaar in verband brengen van de meer primitieve strategieën in de sfeer van herhaald optellen en aftrekken met het meer geavanceerde, efficiënte opvermenigvuldigen. Niet alleen is deze laatste strategie veel doelmatiger, zij is bovendien uitvoerbaar in diverse graden van verkorting en behoudt haar waarde tot in lengte van dagen voor allerlei toepassingssituaties. Net als bij het vermenigvuldigen kan deze verbinding het beste tot stand komen door de situatie op modelmatig niveau aanschouwelijk te maken en de kinderen te laten ervaren dat herhaald optellen/aftrekken uiteindelijk op hetzelfde neerkomt als opvermenigvuldigen. In dit geval komt het groepjesmodel natuurlijkerwijs het meest in aanmerking (fig.8).



figuur 8

Aan de hand van dit model kan inzichtelijk gemaakt worden dat herhaald optellen en aftrekken (bijvoorbeeld: steeds groepjes van 4 samen nemen tot het deeltal bereikt is) in essentie op hetzelfde neerkomt als opvermenigvuldigen (bijvoorbeeld: in één keer 10 groepjes van 4 samennemen; nog een keer 10 groepjes van 4 erbij doen; enzovoort). De ‘omgekeerde vermenigvuldigstructuur’ van de situatie kan aldus verduidelijkt worden op een wijze die de samenhang met strategieën in de trant van herhaald optellen en aftrekken duidelijk naar voren laat komen. Zodoende kunnen ook de kinderen die in eerste instantie vooral geneigd zijn tot dit laatste type aanpak, het opvermenigvuldigen als een welkome aanvulling leren zien op de eigen, soms omslachtigere strategieën. Wordt deze samenhang nog enkele keren in soortgelijke situaties aan de orde gesteld, dan wordt bereikt dat de strategie van het opvermenigvuldigen steeds meer tot een soort basisstrategie voor het delen kan uitgroeien.

Ook hier geldt natuurlijk dat dit niet het hele verhaal is. Voor de kinderen die uit zichzelf al opvermenigvuldigen of een splitsstrategie gebruiken, bevat de genoemde relatie immers niet zoveel nieuws. Het is dan ook aan te bevelen om ook aan meer geraffineerde strategieën als die van het splitsen en het compenseren tijdens besprekingsmomenten de nodige aandacht te geven. Indien dit aanvankelijk net als bij het vermenigvuldigen echter met een zekere terughoudendheid gebeurt, wordt bereikt dat in ieder geval de strategie van het opvermenigvuldigen voor alle kinderen toegankelijk en doorzichtig wordt gemaakt. Deze kan door iedereen dan als een verkorting en stroomlijning van primitievere strategieën begrepen worden.
Het grote voordeel daarvan is dat daarmee het leertraject ook voor de zwakkere leerlingen ‘retraceerbaar’ gemaakt wordt.
Het zal overigens duidelijk zijn dat het rekenen met nullen (c.q. het gebruik van de nulregel) in deze fase eveneens de nodige aandacht vraagt. Het is immers vooral ook bij de gratie van het feit dat je allerlei sommen als 20×4, 100×4, 30×40 en 20×12 vlot op basis van het inzicht in de nulregel kunt oplossen, dat het opvermenigvuldigen als strategie goed hanteerbaar wordt.

9 Besluit

Taalontwikkeling als katalysator van wiskundig denken

In het voorgaande hebben we enkele cruciale didactische passages onder de loep genomen uit de leerlijn van het vermenigvuldigen en delen met grotere getallen zoals die in de loop van groep 6 voor een belangrijk deel doorlopen wordt. Daarbij werden enkele obstakels gesignaleerd waar met name zwakkere leerlingen nogal eens tegenaan lopen. Bij een realistische onderwijsopzet doet zich in de praktijk van het onderwijs veelal een grote diversiteit aan aanpakken voor die niet zo makkelijk te overzien en te doorzien zijn. Worden dergelijke aanpakken niet in voldoende mate met elkaar in verband gebracht, dan bestaat voor de zwakkere leerlingen het gevaar dat ze zich moeten vastklampen aan werkwijzen die ze niet echt begrepen hebben. Daardoor is de opgebouwde kennis niet goed ‘retraceerbaar’ in de zin dat de kinderen naderhand kunnen reconstrueren ‘waar een strategie vandaan komt’, en zich dus ook niet goed kunnen vergewissen of deze correct is. Voor de verdere uitbouw en niveauverhoging van hun kennis kan deze omstandigheid remmend werken. Ook bij andere TAL-onderzoekjes is gebleken waartoe dat kan leiden: sommige kinderen doorzien niet goed wat nu precies wel en niet mag en komen op een oppervlakkige manier tot een vorm van handig rekenen die men zou kunnen typeren als ‘al te flexibel rekenen’.

In het voorgaande zijn ook enkele aandachtspunten beschreven die ertoe kunnen bijdragen dat het niet zo ver komt. Deze hebben in de eerste plaats te maken met de wijze waarop de leerlijn is opgebouwd en de wijze waarop de verschillende inzichten en vaardigheden worden ontwikkeld. Beschreven werd hoe in het onderwijs een zeker accent gelegd kan worden op het op modelmatig niveau met elkaar in verband brengen van de meer omslachtige, veelal door zwakkere leerlingen gehanteerde aanpakken met enkele meer geavanceerde, maar toch basale aanpakken, die vaak door betere leerlingen aangedragen worden. Wordt daarnaast op een meer terughoudende manier ook de nodige aandacht besteed aan verfijnde variastrategieën, dan wordt bereikt dat alle kinderen aan hun trekken kunnen komen en dat het perspectief op een repertoire aan basale en minder basale hoofdrekenstrategieën zich voor iedereen steeds verder verbreedt. Daarnaast werd gewezen op het belang van goed ontwikkelde bijkomende inzichten en vaardigheden. Zo vraagt de nulregel een doordachte, indringende behandeling waarbij ook de zwakkere leerlingen zich geleidelijk aan verder bewust kunnen worden waarom je in gevallen als 6×40 en 60×4 mag redeneren: ‘6 keer 4 met een nulletje erachter’.
Een bijkomend aandachtspunt bij dit alles is de taalontwikkeling. Zoals eerder gesteld, kunnen de kinderen bij het onderling uitwisselen en bespreken van de gehanteerde strategieën een belangrijke rol vervullen. Alleen al het zelf verwoorden van een strategie en het proberen om, gesteund door de leraar, je woorden zodanig te kiezen dat de andere kinderen optimaal gelegenheid hebben om deze strategie ook te begrijpen en in verband te brengen met een eigen aanpak, is van enorme waarde. Het is immers mede op grond van dit verwoorden dat een kind goed zicht krijgt in het eigen handelen. Zoals een aantal kinderen tijdens een evaluatiegesprek op een Amsterdamse school in groep 8 het formuleerde: je begrijpt je eigen manier pas goed als je ook in staat bent om deze aan anderen uit te leggen. De daarbij gebruikte termen vormen de taalkundige neerslag van de handelingen die tijdens het oplossingsproces op een meer intuïtief niveau gebruikt worden. Door de kinderen onder leiding van de onderwijsgevende voor deze handelingen geschikte termen en een geschikte taal te laten construeren, wordt bereikt dat de handelingen beter bespreekbaar en ‘overdenkbaar’ gemaakt worden. Bovendien kan deze taal in meer algemene zin in de loop der tijd steeds meer uitgroeien tot een gezamenlijke uitwissel- en communicatietaal die ook een geschreven pendant heeft: de ‘rekentaal’ zoals die door de leraar op het bord gebruikt kan worden om de verschillende door een kind uitgevoerde stappen compact en helder in termen van rekensymbolen te beschrijven; en zoals de kinderen die zelf ook steeds meer kunnen leren gebruiken om hun eventuele tussenstappen overzichtelijk en beknopt te noteren. Het is juist de beschikbaarheid van deze taal die ervoor zorgt dat de interactie soepel verloopt, dat de kinderen elkaar goed verstaan; en dat ze in staat zijn met elkaar mee te denken, op elkaar in te spelen en van elkaar te leren. Tot besluit van dit artikel daarom een voorbeeld van een besprekingsmoment waarin iets van de functie van deze taal naar voren komt. Het betreft een deel van de nabespreking rond de hiervoor vermelde opgave rond het ponykamp (6×48 euro). Het moment doet zich voor in november in groep 6. Zoals al aangegeven is het ponyprobleem eerst even voorbesproken. Daarna zijn de kinderen er individueel mee aan de slag gegaan, waarbij de onderwijsgevende de klas is rondgegaan en over de schouder van de kinderen heeft geobserveerd hoe deze tewerk gingen. Mede op grond van het aldus geconstateerde vindt na enkele minuten de volgende nabespreking plaats:

Leerkracht:	Laten we eens kijken ... Cindy, hoe heb jij het gedaan?
Cindy:	Het is 6 keer 48, want ze zijn met z’n zessen; ik deed eerst 48 en 48, en toen steeds 48 erbij.
Leerkracht:	Hoe ging dat precies ...? Eerst 48 en 48?
Cindy:	Ja, dat is 96; en dan 48 erbij ...; 90 en 40 is 130; 8 en 6 is 14; samen 130 en 14 is 144.
Leerkracht:	Prima, ik schrijf met je mee op het bord (doet dit; zie figuur 9).
Cindy:	En toen nog een keer 48 erbij, dat was (kijkend op haar kladblaadje) ... 192; en nog een keer is 240; en nog een keer is 288.
Leerkracht:	En zo kwam je uit op 288. Wie heeft dat nog meer? (veel kinderen steken de vinger op). Goed zo, dat zal dan vast wel goed zijn, hè? Wie heeft het anders gedaan? Rosalie?
Rosalie:	Ik deed het in het begin hetzelfde als Cindy; maar toen had ik 3 keer, dat is 144. En toen heb ik gewoon 144 en 144 gedaan (de leerkracht schrijft dit weer op het bord).
Leerkracht:	Hoe dat zo? Waarom 144 en 144?
Rosalie:	Nou ... want ik had al *drìe* keer 144; en dan moet er nog drie keer bij (andere kinderen betuigen hun instemming).
Leerkracht:	Aha. Dus jij zegt: ik moet 6 keer 48 uitrekenen; dan doe ik eerst 48 en 48 en 48; dat is al drie keer en dan doe ik er gewoon nog drie keer bij, dan heb ik zes keer ... (Rosalie bevestigt dit.) Zien we dat allemaal? (instemmend gemompel.) Wie heeft het nóg anders gedaan? Robin?
Robin:	Ik deed eerst 6 keer 20 en nog een keer 6 keer 20 en toen nog 6 keer 8.
Leerkracht	(half niet-begrijpend): Maar je moest toch 6 keer 48 doen?
Robin:	....? Ja, maarre ...; 48, dat is 20 en 20 en 8; dus dan kun je ook doen: eerst 6 keer 20; dan nog eens 6 keer 20; en dan nog 6 keer 8 (anderen bevestigen dit).
Fiona:	Maar je kan ook in één keer 6 keer 40 en 6 keer 8 doen; dan ben je nóg sneller klaar ...

Op het bord staan nu naast elkaar de volgende vier aanpakken (fig.9). Deze worden gezamenlijk nog even doorgenomen en nader met elkaar in verband gebracht aan de hand van een bordtekening met geld, zoals hierboven al beschreven (fig.4). Vervolgens buigen de kinderen zich over een aantal soortgelijke opgaven. Een deel van de kinderen houdt daarbij vooralsnog vast aan een vorm van het meer vertrouwde herhaald optellen of verdubbelen, maar er zijn ook al heel wat kinderen die het efficiënte van splitsen doorzien en in sommige gevallen de voorkeur geven aan splitsaanpakken. In de komende lessen zal hun aantal steeds verder toenemen.

$48 + 48 = 96$
$96 + 48 = 144$ $(90+40 = 130$
$144 + 48 = 192$ $6+8 = 14)$
$192 + 48 = 240$
$240 + 48 = 288$

(Cindy)

$48 + 48 = 96$
$96 + 48 = 144$
$144 + 144 = 288$

(Rosalie)

$6 \times 20 = 120$
$6 \times 20 = 120$
$6 \times 8 = 48$
$120 + 120 + 48 = 288$

(Robin)

$6 \times 40 = 240$
$6 \times 8 = 48$
$240 + 48 = 288$

(Fiona)

figuur 9

De hierboven gebruikte taal komt de kinderen uiteraard niet zo maar aanwaaien. Ze dienen deze onder leiding van hun leraren geleidelijk aan steeds verder te ontwikkelen, te beginnen in de kleutergroepen en in groep 3 bij de verkenning van het rekenen tot 10 en 20. Naarmate de reken-wiskundige ontwikkeling verder voortschrijdt, dient deze taal ook steeds verder tot bloei te komen. Het zijn vooral de regelmatige interactieve momenten met een sterk element van gezamenlijke uitwisseling en afweging, die ertoe bijdragen dat deze taal zowel in gesproken als in geschreven vorm steeds verder gestalte krijgt. Bovendien werkt het ook in omgekeerde richting: het is juist de beschikbaarheid van deze 'taal-in-ontwikkeling' die een gunstig effect kan hebben op de hele denkontwikkeling op reken-wiskundig gebied. In die zin is dit laatste aandachtspunt misschien nog wel het meest sprekende.

Noten

1 Via het gebruik van magnetische bordrondjes kan dit splitsen ook heel mooi aanschouwelijk gemaakt worden. Voor een beschrijving daarvan zie:
Moerlands, F.: Bordrondjes, gereedschap voor de vakman. *Willem Bartjens*, 14(*4*).

2 Met dank aan A. Noteboom, M. Torn en C. Bergmans voor de uitgevoerde onderzoekjes.

Literatuur

Gravemeijer, K. (1995). Het belang van social norms en socio-math norms voor realistisch reken-wiskundeonderwijs. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs,* 14*(2),* 17-23.

Heege, J. ter (1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics,* 16, 375-389.

Janssen, J e.a. (1999). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3.* Arnhem: Cito.

TAL-team (1999). *Jonge kinderen leren rekenen; tussendoelen annex leerlijnen.* Groningen: Wolters Noordhoff.

TAL-team (2000). *Hele getallen bovenbouw basisschool.* (werktitel; verschijnt dit najaar). Groningen: Wolters Noordhoff.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.