

---

Johan Zuidema  
Linda van der Gaag

# DE VOLGENDE OPGAVE VAN DE COMPUTER

*Multidisciplinair onderzoek  
voor de ontwikkeling van een  
intelligent onderwijssysteem*



---

**Johan Zuidema  
Linda van der Gaag**

**DE VOLGENDE OPGAVE VAN DE COMPUTER,  
MULTIDISCIPLINAIR ONDERZOEK VOOR DE ONTWIKKELING  
VAN EEN INTELLIGENT ONDERWIJSSTEEEM**



**Freudenthal instituut  
Tiberdreef 4  
3561 GG Utrecht**

---

CIP-GEGEVENS KONINKLIJKE BIBLIOTHEEK, DEN HAAG

Zuidema, Johan, Linda van der Gaag

De volgende opgave van de computer, multidisciplinair onderzoek voor de ontwikkeling van een intelligent onderwijssysteem / Johan Zuidema en Linda van der Gaag  
Utrecht: CD $\beta$  Press, Centrum voor  $\beta$ -Didactiek (CD- $\beta$  wetenschappelijke bibliotheek; 12)

Met lit. opg.

ISBN 90-73346-19-3

Trefw.: kunstmatige intelligentie / systeemontwikkeling / wiskunde-onderwijs; didactiek.

Omslag: A. Lurvink, OMI Universiteit Utrecht

Druk: OMI Universiteit Utrecht

Copyright: Freudenthal instituut, Utrecht 1993

ISBN 90-73346-19-3

---

**DE VOLGENDE OPGAVE VAN DE COMPUTER,  
MULTIDISCIPLINAIR ONDERZOEK VOOR DE ONTWIKKELING VAN EEN  
INTELLIGENT ONDERWIJSSYSTEEM**

---

## CD- $\beta$ WETENSCHAPPELIJKE BIBLIOTHEEK

onder redactie van :

Dr. P.L. Lijnse

Prof. Dr. A. Treffers

Dr. W. de Vos

Dr. A.J. Waarlo

- 1 Didactiek in perspectief  
redactie: P.L. Lijnse en W. de Vos
- 2 Radiation and Risk in Physics Education  
H.M.C. Eijkelhof
- 3 Natuurkunde-onderwijs tussen leefwereld en vakstructuur  
R.F.A. Wierstra
- 4 Een onverdeelbare eenheid, deel A en B  
M.J. Voegelzang
- 5 Betrokken bij evenwicht  
J.H. van Driel
- 6 Relating macroscopic phenomena to microscopic particles: a central problem in secondary science education  
editors: P.L. Lijnse, P. Licht, W. de Vos & A.J. Waarlo
- 7 Kwaliteit van kwantiteit  
H.E. Elzinga
- 8 Interactieve video in de nascholing rekenen-wiskunde  
F. van Galen, M. Dolk, E. Feijs, V. Jonker, N. Ruesink, W. Uittenbogaard
- 9 Realistic Mathematics Education in Primary School  
editor: L. Streefland
- 10 Ontwikkeling in energieonderwijs. Een onderzoek naar begripsontwikkeling bij VWO-leerlingen in realiteitsgericht natuurkundeonderwijs  
A.E. van der Valk
- 11 Methoden in het reken-wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek  
K. Gravemeijer, M. van den Heuvel-Panhuizen, G. van Donselaar, N. Ruesink, L. Streefland, W. Vermeulen, E. te Woerd en D. van der Ploeg
- 12 De volgende opgave van de computer, multidisciplinair onderzoek voor de ontwikkeling van een intelligent onderwijssysteem  
J. Zuidema en L. van der Gaag

Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen  
Universiteit Utrecht  
Postbus 80.008  
3508 TA Utrecht

---

**Dit onderzoek is mogelijk gemaakt door Subsidie van de Stuurgroep Nieuwe Media van het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen.**

# Vooraf

Dit boek doet verslag van het ontwikkelingsonderzoek voor het *ITS-breuken*. Het ITS-breuken is een intelligent, educatief computerprogramma voor de beginfase van het breukenonderwijs. Kenmerkend voor dit programma is de centrale plaats die de didactiek inneemt in de opzet en de invulling ervan.

Het bijzondere van dit boek is, dat het, naast een overzicht van de behaalde onderzoeksresultaten, een blik in de keuken van de ontwikkelaars biedt. Om iedereen zo snel mogelijk een weg te laten vinden door dit boek, is het in vijf delen opgebouwd. Het is de bedoeling van de schrijvers, dat een multidisciplinair lezerspubliek kan profiteren van de tijdens de ontwikkeling van het ITS-breuken verworven inzichten. Daarom wordt in het eerste deel een overzicht gegeven van de uitgangspunten voor dit project vanuit verschillende relevante disciplines. De delen twee en drie beschrijven het ontwikkelde programma. Deel twee gaat over de vorm waarin het programma zich aan de leerling en aan de leraar presenteert. In deel drie komt de architectuur van het ITS-breuken aan de orde, en worden de afzonderlijke componenten binnen deze architectuur besproken. De delen vier en vijf gaan over ontwikkelingsaspecten van het ITS-breuken. Deel vier beschrijft de manieren waarop de didactische kennis is vergaard voor de invulling van de componenten van het systeem. Deel vijf gaat over technische aspecten die van belang zijn tijdens de ontwikkeling van dit soort complexe computerprogramma's.

Het ITS-project is uitgevoerd aan het Freudenthal Instituut van de Faculteit Wiskunde en Informatica van de Universiteit Utrecht. Afstudeerstagiairs van de Vakgroep Informatica van voornoemde faculteit hebben een essentiële rol in de uitvoering van het project gespeeld. Degenen die hebben meegewerkt aan het project hebben teksten over hun specifieke bijdrage aan het ITS-breuken voor dit boek aangeleverd. Om één stijl van behandeling van de grote diversiteit aan onderwerpen en een onderlinge inhoudelijke afstemming te waarborgen zijn deze teksten door de redacteurs herschreven. Dr. Leen Streefland heeft het manuscript van waardevol commentaar voorzien.

*December 1992*

Johan Zuidema	Linda van der Gaag
Freudenthal Instituut	Vakgroep Informatica
Faculteit Wiskunde & Informatica	
Universiteit Utrecht	

# Inhoudsopgave

<b>Vooraf</b>	v
<b>Inhoudsopgave</b>	vii

## deel I

### De uitgangspunten

<b>1 Bakens in de historie van machinale instructie</b>	3
Het zilveren jubileum van moderne didactische idealen	3
De onderwijssituatie na de introductie van computers in de klas	7
Kunstmatige intelligentie in educatieve software	9
Educatieve software zonder kunstmatige intelligentie	12
Positiebepaling voor het te ontwikkelen ITS-breuken	13
<b>2 Realistische didactiek</b>	15
Onderwijstheoretisch kader van realistische leergangen	15
Een realistische leergang voor breuken	17
De consequenties voor de eerste opzet van het ITS-breuken	21
<b>3 Kennissystemen in vogelvlucht</b>	23
Het ontwikkelen van een kennissysteem	23
Het paradigma: scheiding van kennis en inferentie	24
De kennisbank	26
De inferentiemachine	27
Het evalueren van een kennissysteem	31

## deel II

### De interface

<b>4 Eerlijk Verdelen: voor de leerling</b>	37
De opbouw	38
Snijden & Geven	38
Snijmachines	41
Kleuren & Benoemen	47
Opgaven en eigen produkties	49
Overzicht van Eerlijk Verdelen	51
Eerlijk Verdelen in de lessituatie	53



<b>5 Eerlijk Verdelen: voor de leraar</b>	55
Het hoofdmenu	56
Standaardinstellingen	56
Oefeningenbibliotheek	57
Groepen & beurten	58
Te maken oefeningen	59
Gemaakte oefeningen	60

**deel III**  
**Redeneren**  
**achter de schermen**

<b>6 Architectuur van het ITS-breuken</b>	65
Motivatatie voor de globale opzet van het ITS-breuken	66
De architectuur van het ITS-breuken	69
<b>7 De didactische expert</b>	73
Uitgangspunten voor de inrichting van de didactische expert	73
Doelen voor didactische planning bij Snijmachines	75
De generatie van een didactisch plan	76
De samenwerking tussen de modulen	82
<b>8 De opgavengenerator</b>	85
<b>9 Het blackboard</b>	101
De blackboard-methodologie	101
De opzet van de didactische blackboard-architectuur	105
De module-kennisbronnen	106
De consistentie-kennisbronnen	107
De sturingskennisbron	112
<b>10 De diagnostische expert</b>	115
Diversiteit in 'goed' en 'fout'	115
Uitgangspunten voor de inrichting van de diagnostische expert	116
Diagnose bij Snijden & Geven	118
Diagnose bij Snijmachines en bij Kleuren & Benoemen	126
<b>11 Het leerlingmodel</b>	129
Technieken voor leerlingmodellering	129
Gegevens verwerken: onthouden en geleidelijk vergeten	133

**deel IV**  
**Kennis vergaren**

<b>12 Rollenspel</b>	143
De uitvoering van het rollenspel	144
De invloed op de ontwikkeling van het ITS-breuken	145
<b>13 Kennis maken met didactici</b>	149
Eerste en tweede gespreksronde	150
Derde gespreksronde	157
Uitwerking	163
<b>14 Kennis uit schoolboeken</b>	167
Classificatie van breuken op grond van formele kenmerken	167
Rekenboekenonderzoek	169
De opbrengst voor het ITS-breuken: het opgavenfilter	175
<b>15 Leerlingen maken kennis met Eerlijk Verdelen</b>	177
Het belang van schoolexperimenten en de reikwijdte ervan	177
Experimenten met het prototype van Eerlijk Verdelen	178
Experimenten met het ITS-breuken	184

**deel V**  
**Exploratieve  
systeemontwikkeling**

<b>16 Ontwikkelmethode bij exploratief onderzoek</b>	195
Methoden voor systeemontwikkeling	195
De ontwikkelmethode voor het ITS-breuken	198
<b>17 Technische ontwikkelomgeving</b>	201
Standpuntbepaling ten aanzien van computers en didactiek	201
Ontwikkelen onder veranderende omstandigheden	202
De implementatie van Eerlijk Verdelen binnen het ITS-breuken	205
De implementatie van de intelligente componenten	206
Het ITS-breuken op twee processoren	207
<b>Terugblik ... vooruitblik</b>	211
<b>Literatuur</b>	213

---

# I

## De uitgangspunten

*In deel I staan de uitgangspunten die leidraad zijn bij de ontwikkeling van het ITS-breuken. In het eerste hoofdstuk worden enkele belangrijke ontwikkelingen gevolgd in de historie van het gecomputeriseerde onderwijs (en net daarvoor). Het gaat hier niet om een systematische analyse: er worden slechts enkele bakens uitgezet, die duidelijk maken hoe het in dit boek gepresenteerde ontwikkelingsonderzoek zich verhoudt tot andere trends in de geschiedenis van educatieve software.*

*In het tweede hoofdstuk komt het didactisch uitgangspunt aan de orde: het realistisch rekenonderwijs. De basisprincipes van deze didactische stroming worden in dit hoofdstuk geëtaleerd. De realistische didactiek wordt niet afgezet tegen alternatieven. In het ITS-project is het namelijk niet de bedoeling om te onderzoeken bij welke didactische aanpak de inzet van computers het beste uitpakt. De keuze van het didactisch uitgangspunt geeft evenwel sterk richting aan de ontwikkeling van het ITS-breuken.*

*Het derde en laatste inleidende hoofdstuk gaat in op de kunstmatige intelligentie, het uitgangspunt vanuit de informatica. Meer in het bijzonder wordt een exposé over het deelgebied der kennissystemen gegeven, dat bepalend is voor de wijze waarop het ITS-breuken is ingericht. Het hoofdstuk is bedoeld als inleiding en beoogt geen technische diepgang.*

<b>1</b>	<b>Bakens in de historie van machinale instructie</b>	<b>3</b>
	<i>Ortwin Hutten en Johan Zuidema</i>	
<b>2</b>	<b>Realistische didactiek</b>	<b>15</b>
	<i>Johan Zuidema</i>	
<b>3</b>	<b>Kennissystemen in vogelvlucht</b>	<b>23</b>
	<i>Linda van der Gaag</i>	

---

# Hoofdstuk 1

## Bakens in de historie van machinale instructie

Ortwin Hutten  
Johan Zuidema

De historie van moderne, 'kunstmatig intelligente' educatieve computerprogramma's is voor het grootste deel van recente datum, vanaf ongeveer 1970. Sindsdien is de adaptiviteit van de instructie ten opzichte van leerlinggedrag uitgegroeid tot karakteriserend kenmerk van dergelijke programmatuur. Er zijn echter ook relevante ontwikkelingen van oudere datum. Zo hield men zich in de 60-er jaren reeds bezig met generatief computerondersteund onderwijs; het generatieve karakter van het verzorgen van de instructie is ook in de moderne systemen te vinden. In diezelfde 60-er jaren verschenen 'leermachines' op de markt, die weliswaar geen computers waren, maar wel invloed gehad hebben op het denken over modern, gecomputeriseerd onderwijs. Leermachines bestaan niet meer. Gezien de deels nog steeds moderne uitgangspunten is het goed om na te denken over waarom de leermachines verdwenen zijn, of liever: nooit zijn aangeslagen. Met dit doel voor ogen worden de idealen van de begintijd van de machinale instructie in herinnering geroepen.

### 1 Het zilveren jubileum van moderne didactische idealen

Ook zonder de inzet van computers is het mogelijk machinaal onderwijs te geven. Medio jaren '60 is dat gepropageerd met zogenaamde 'leermachines'. Het idee daarbij is, dat de leerstof in de vorm van allerlei teksten, volgens een vast formaat, op een microfiche staat. Leerlingen kunnen op allerlei manieren de stof doorwerken. Dat deden ze volgens het systeem van geprogrammeerde instructie, het didactisch ideaal van die tijd.

Om een indruk te geven van de doelstellingen van zo'n leermachine, is in figuur 1.1 een deel van een folder van zo'n machine overgenomen; figuur 1.2 toont het apparaat zelf. Opvallend is, dat die tekst, met slechts geringe aanpassingen, zó geschikt is voor het aanprijzen van gecomputeriseerd onderwijs. Van de vier genoemde kenmerken is alleen het derde niet van toepassing binnen de didactische filosofie van het Freudenthal Instituut. Het opsplitsen van de hele leerstof in 'hapklare brokjes' voor de leerling is in strijd met de uitgangspunten van het realistisch rekenonderwijs (zie hoofdstuk 2).

---

### PROGRAMMED INSTRUCTION

Programmed instruction is based on the following principles:

- Individual transmission of knowledge.
- Logical arrangement in small segments.
- Individual control and immediate correction.

Programming a lesson means dividing it into stages and arranging these in a logical sequence. This sequence must be chosen so that students can make themselves familiar with the subject, with a minimum of error, step by step.

The following facts play a main role:

- 1 Immediate feed-back. At the close of each stage the student is faced with questions. If his answers are correct, he goes on to the next stage, if not, he has to go back again through the stage he has failed to grasp or through at least part of it.
- 2 Student's activity. The student is forced to think individually. He must formulate his thought for himself. He must himself make a choice from the different possibilities which he must handle independently. To master the lesson he has to work or keep being sent back to revise.
- 3 Splitting the instruction up. Because the student works step by step, information is delivered to him in small quantities. The effect is a gradually increasing knowledge, making increasing demands upon his attention and grasp. As the difficulty of the latter stages in the lesson increases, care must be taken by the programmer to avoid hiatus in the teaching because this will lead to a sharp increase in errors. There must be no vacuum in the procedure.
- 4 Speed of learning. Because each student works independently, as if he were working with a private tutor, he can regulate his speed, accommodating it to his ability to grasp knowledge.

### Methods of answering

There are two methods of answering the questions and the sequence of steps can be made according to two distinct views.

- 1 Skinner's method, known as the Constructed Response Method. In this case questions are put so that the student is entirely free in formulating his answers.
- 2 Crowder and Pressey's method, the Multiple Choice Method. In this case questions are put so that the student must select one from a number of possible answers.

Skinner's method is known also as the Linear method of programming in which there is an interchangeable sequence of stages and all students must follow the same path. The assessment, that is the evaluation of the answers, lies entirely in the hands of the teacher.

Crowder's method is called the branching programme and consists of a sequence which depends on how the student answers each question at each stage. If the answer is correct he goes on to the next step, if not he will be sent back to receive repeated instruction in a changed form, depending on how incorrect his answer was, and so on until he successfully works his way out.

### Why programmed instruction

It may very well be asked why programmed instruction has been introduced, and there are a variety of reasons.

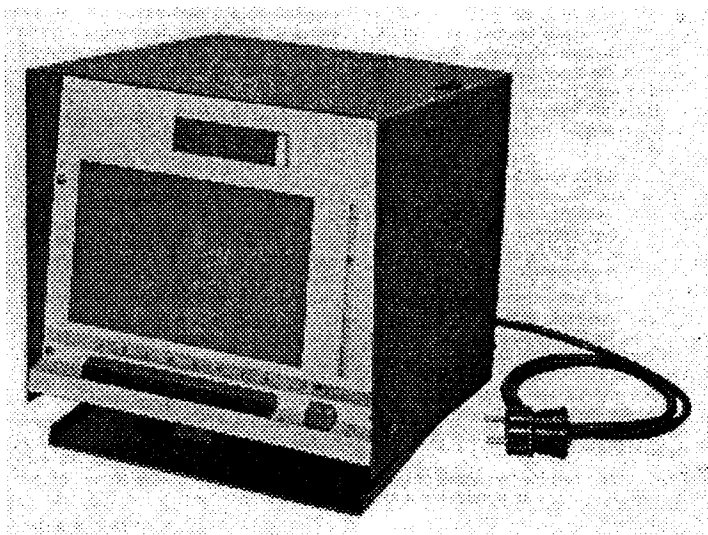
Primarily the ever increasing demand for knowledge, the rising number of pupils and the shrinking number of teachers has driven education experts to seek more efficient, up-to-date and intensive methods of teaching. The teaching load has grown considerably heavier on fewer teachers, and only rationalisation and reorganisation of teaching methods can help to relieve this burden.....

---

*figuur 1.1* Deel van een folder van de *Philips Teaching Machine EL 9000*<sup>1</sup>

---

1. De folder is ter beschikking gesteld door de heer J.C. van den Biggelaar, afdeling Company Archives / Historiography van Philips International B.V. te Eindhoven.



figuur 1.2 De Philips Teaching Machine EL 9000 (augustus 1967)

Eveneens zo'n vijftienvintig jaar oud is een tweede tekst, uit een boek over een onderwijsexperiment met geprogrammeerde instructie — de didactische aanpak die bij de leermachines werd aangeprezen. De tekst wordt weer letterlijk, maar ingekort, overgenomen (de tekst loopt door op pagina 6), om de sfeer ervan zo goed mogelijk te laten overkomen. En ook dit boekfragment zou, mits hier en daar een weinig aangepast, goed kunnen dienen om het gecomputeerd onderwijs te promoten.

---

Hier volgt dan een overzicht van de gebleken of (...) vooralsnog vermeende voordelen van de geprogrammeerde instructie. Ik neem hierbij steeds stilzwijgend aan, met terdege geijkte, door uitnemende didactici opgestelde programs te maken te hebben.

- 1 Een program is te beschouwen als een *reeks model-lessen* (...). De leerkracht die zelf programmeert wordt gedwongen meer dan ooit tevoren zijn onderwijs-methoden, alsmede de te onderwijzen leerstof grondig te analyseren. (...)
- 2 Er is minder kans op het nemen van te grote stappen dan bij gewoon gegeven lessen. (...)
- 3 De zelfwerkzaamheid van de leerlingen krijgt haar volle kans, namelijk in de vorm van actief bezig zijn met een zelfstandig te bestuderen stuk leerstof.
- 4 De voortdurende 'matching' (het vergelij-

ken van het eigen antwoord met dat van het tekstboek of van de machine) doet de kans op het behouden blijven van de motivatie toenemen. (...)

- 5 De onmiddellijke controle door de leerling zelf van elk door hem gegeven antwoord voorkomt:
  - a tijdverlies; (...);
  - b het vastgroeien van verkeerde denkwijzen, foutieve associaties of fouten in een bepaalde algoritme.
- 6 Indien één leerling een fout maakt, komen de anderen dit niet te weten; hij hoeft niet bevreesd te zijn uitgelachen te worden, de klas op te houden of de geprikkeldheid van de leraar op te wekken.
- 7 Iedere leerling werkt in zijn eigen tempo (...). [Dat] garandeert uiteraard niet dat hij inderdaad in zijn optimale tempo werkt.

- 8 Indien men gebruik maakt van een 'branching technique' is een individuele aanpak mogelijk, is er sprake van differentiatie.
- 9 Het is een efficiënte leervorm: het verschaft een hoog kennisrendement (dit is uit diverse experimenten gebleken). In feite heeft elke leerling privé-les van een uitstekende leerkracht.
- 10 De leraar is bevrijd van het vaak geestdodende en altijd tijdrovende corrigeren van thema's, sommen, oefeningen e.d. (...). De leraar zal zich dus kunnen wijden aan belangrijker taken: het geven van individuele hulp aan zijn leerlingen (...), het vaststellen van de soort programs die elk van zijn leerlingen nodig heeft, het wijzen van wegen ter verkrijging van extra bronnenmateriaal bij speciale interesses van zijn leerlingen, verbetering van de programs, de voorbereiding van klassikale lessen, die hoogstwaarschijnlijk nimmer geheel overbodig zijn, en vooral: aandacht voor meer pedagogische problemen (...).
  - 40% geprogrammeerde instructie;
  - 40% lezingen, films, excursies, t.v.-uitzendingen, enzovoort.
  - 20% groepsonderricht (...).
- 11 Elke leerling kan op elk gewenst ogenblik met een bepaald program beginnen (...).
- 12 Uit vrijwel alle experimenten is gebleken, dat langs deze weg een aanzienlijke hoeveelheid tijd kan worden bespaard (...) van 10% tot 50%.
- 13 De leerstof staat volkomen onder controle. De leerkracht weet op elk willekeurig ogenblik volkomen precies welke stof zijn leerlingen hebben doorgewerkt, welk niveau zij hebben bereikt, in welk tempo zij werken.
- 14 Uit sommige experimenten blijkt dat de beklijving der leerstof beter is dan bij gewoon onderwijs. (...)
- 15 Toepassing op grote schaal zou in financieel opzicht voordeliger zijn dan het huidige onderwijssysteem. (...)
- 16 Het zittenblijversprobleem is opgelost (...).
- 17 Elk nieuw program, elke nieuwe cursus, wordt aangevangen met een solide basis van kennis. (...) Tot nu toe is het gebruikelijk, dat een leerling die gemiddeld 60% van de leerstof beheerst, overgaat naar de volgende klas. Gedurende de vakantie zakt er nog het een en ander weg, zodat het niet ongewoon is, dat hij aan de nieuwe cursus begint met een kennis-fundament, dat ongeveer 50% is van wat het eigenlijk had moeten zijn. Bij geprogrammeerde instructie kan men dit voorkomen. Men kan hier zijn eisen hoger stellen (...).
- 18 Indien dit voor een bepaalde leerling noodzakelijk blijkt te zijn, kan men op elk gewenst ogenblik een fouten-analyse maken, opsporen waar de denkfouten, de hiaten, de zwakke punten liggen. (...)
- 19 Een program kan voortdurend verbeterd worden.
- 20 Bij ziekte van de leerling ontstaat er geen probleem; hij gaat verder waar hij gebleven was. Hetzelfde geldt voor leerlingen van schipperscholen, opvoedingsgestichten, onderwijs-afdelingen van ziekenhuizen, enz.
- 21 Een program kan een groot aantal welgekozen voorbeelden bevatten, waaruit de leerling een bepaalde regel moet induceren, en wel zoveel, dat ook de zwakkere leerlingen de regel kunnen vinden. (...)
- 22 Er is minder noodzaak voor de leerkracht zijn toevlucht te nemen tot verbalismen of algoritmiserend onderwijs (...).
- 23 Men zal in een onderwijssituatie, waarin geprogrammeerde instructie een groot deel van de tijd opeist, zijn gebrek aan kennis, ontwikkeling, of studie in een bepaald vak niet meer kunnen verontschuldigen met uitvluchten als: 'Ik had dit of gene wel willen leren en wel kunnen leren, als ik maar een goede leraar had gehad'.

Of: 'Mijn wiskunde-leraar kon niet uitleggen, dus ...'

Of: 'De leraar mocht me niet!'

Volgens Blyth realiseert de geprogrammeerde instructie een stuk van het democratisch ideaal: gelijke kansen voor elk!
- 24 De mogelijkheden tot zelfstudie (...).
- 25 Een leraren- of onderwijzerstekort zal minder funeste gevolgen hebben en is gemakkelijker op te vangen.
- 26 Het ordeprobleem zal voor sommige leerkrachten beslist minder moeilijkheden bieden.

---

figuur 1.3 Gebleken of vermeende voordelen van geprogrammeerde instructie

De leermachines zijn geen succes geworden, net zo min als de geprogrammeerde instructie. Een verklaring kan onder meer gevonden worden in de starheid van de onderwijsvorm. Bij computers hoeft het onderwijs niet star te zijn, want ze zijn in te zetten voor veel meer doelen dan alleen het presenteren van vaste teksten en plaatjes — de beperking van de leermachine met microfiches. Bijvoorbeeld kunnen computers onmiddellijk, in allerlei varianten, complexe tekeningen weergeven, animaties verzorgen van dynamische processen, of de leerstof op nog andere wijze presenteren die eerder niet mogelijk was. De volgorde van presentatie van de leerstofonderdelen is bij computers ook veel vrijer.

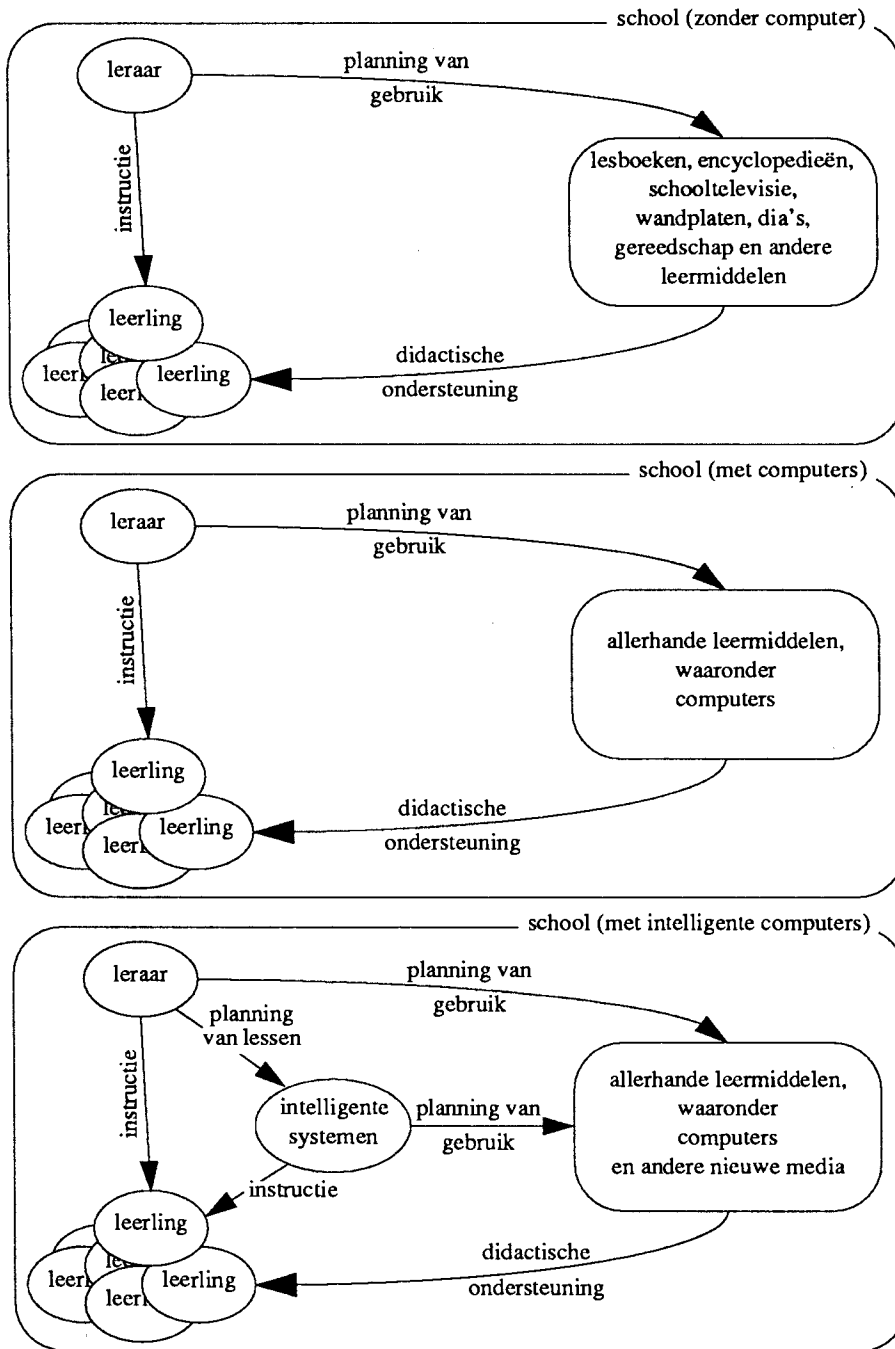
## 2 De onderwijssituatie na de introductie van computers in de klas

Op zich is de computer bij computerondersteund onderwijs één leermiddel tussen zovele andere. De overgang van een school zonder naar een school met computers wordt geïllustreerd in de eerste twee plaatjes van figuur 1.4 (op de volgende pagina); deze overgang veroorzaakt op het eerste gezicht geen grote veranderingen in de inhoudelijke taak van de leraar. Door de introductie van de computer op scholen verandert er echter nogal wat in de praktische lesorganisatie. Voortdurend klassikaal lesgeven bijvoorbeeld, wordt onpraktisch; het werken in groepen komt ervoor in de plaats.

Het karakter van computerondersteund onderwijs is ook voor de leerling afwijkend ten opzichte van andere leermiddelen. Een boek of schrift 'doet niets terug', een computer wél. Voor het eerst krijgt een leerling directe interactie met een educatief hulpmiddel, hetgeen uitnodigt tot een actievere houding van leerlingen. Bovendien zijn leerlingen in het algemeen heel gemotiveerd om achter een computerscherm te werken.

Het enthousiasme van leraren voor de computer neemt toe. Tot voor kort was er een select groepje leraren dat gebruik wilde maken van gecomputeriseerd onderwijs. Die leraren ontwierpen en implementeerden vaak zelf hun programma's. Hun voornaamste zorg was om foutloze, goed draaiende programma's te krijgen die werkten op de schaars aanwezige schoolcomputers. Door landelijke stimuleringsprogramma's is deze situatie tegenwoordig aanzienlijk gunstiger. Op alle scholen zijn inmiddels computers aanwezig en het aanbod van educatieve software is sterk vergroot. Het ontwerpen en programmeren van educatieve programma's is het stadium van hobbyisme ontgroeid en wordt nu door specialisten gedaan. Aanvankelijk was de aandacht van ontwerpers sterk gericht op het maken van foutloze (*bug-free*) programma's en op allerlei toeters en bellen die met de computer aan het lesmateriaal konden worden toegevoegd. De inhoud van de programma's leek echter vaak eerder bepaald door programmeerbaarheid dan door een pakket van onderwijskundig verantwoorde specificaties.





figuur 1.4 Modellen van schoolsituaties, met en zonder (intelligente) computer-systemen

Het is de hoogste tijd om kritisch na te gaan wat de onderwijskundige inhoud is van het computerondersteund onderwijs. Vaak levert de inzet van computers didactisch gezien nogal rigide programmatuur op; impliciet wordt het instructieprincipe verdedigd, dat de leraar (*in casu* de computer) precies weet hoe leerlingen het beste een nieuw begrip leren, welke denkstappen zij daarvoor moeten nemen en in welke volgorde. Het gevolg is, dat het programma de instructie niet aanpast aan de vorderingen van leerlingen. Evenmin geeft het programma leerlingen noch leraren inzicht in misconcepties die leerlingen ontwikkeld hebben over de te leren begrippen. Het programma houdt weliswaar nauwgezet bij hoeveel procent goede en foute antwoorden leerlingen geven, maar is niet in staat om kwalitatieve oordelen te vellen over de begripsontwikkeling van individuele leerlingen. Het registreert dus alleen in hoeverre de resultaten van de leerlingen afwijken van de norm. Leraren moeten zelf uit de ruwe data oordelen destilleren over de voortgang van de leerprocessen van hun leerlingen.

Bij de beoordeling van bestaande educatieve software ontstaat gemakkelijk de indruk, dat die het niveau van de leermachine lang niet altijd overstijgt, want de programma's gaan immers grotendeels uit van dezelfde idealen. Er moet tenminste voor gewaakt worden, dat de positieve invloed die uitgaat van de introductie van de computer in het klaslokaal niet leidt tot het opnieuw invoeren van een verouderde didactische aanpak. Gecomputeriseerd onderwijs *hoeft* niet gekoppeld te worden aan het inmiddels verouderde concept van de geprogrammeerde instructie. Daarmee zijn de kansen voor serieus computergebruik op school gunstiger.

### 3 Kunstmatige intelligentie in educatieve software

Uit recent onderzoek is gebleken, dat leerlingen op heel verschillende wijzen tot een goed antwoord kunnen komen, en dat een incorrecte oplossing te wijten kan zijn aan een grote diversiteit van misconcepties. Een ervaren leraar anticipeert op fouten die frequent optreden, en gaat bij ontspoorde leerlingen na hoe fouten ontstaan zijn, om vervolgens gerichte remediërende instructie te geven. Als een leerling tot een goede oplossing komt, maar op een 'onhandige' manier, zal de leraar hem wijzen op betere oplossingsstrategieën. Individuele differentiatie is immers één van de wettelijk vastgelegde, centrale uitgangspunten van de inrichting van het basisonderwijs. Eén en ander impliceert, dat een leraar bij gecomputeriseerd onderwijs veel tijd kwijt is aan het klaarzetten van opgaven. De tijd die hier van de leraar gevraagd wordt, komt niet elders vrij. Dit betekent een taakverzwaring van de leraren die verantwoord gebruik willen maken van computers.

Een computerprogramma dat, net als een leraar, zelfstandig in staat is om adequaat te reageren op sterk individueel verschillend leerlinggedrag, is een intelligent programma. De introductie van kunstmatige intelligentie in educatieve software kan ge-

zien worden als een poging om de kwaliteit van het gecomputeriseerd onderwijs te verbeteren en een poging om leraren de computers efficiënter in te laten zetten in de klas. Die introductie is geïllustreerd in het derde plaatje van figuur 1.4. De figuur maakt duidelijk, dat hierdoor de inhoud van de onderwijstaak van de leraar wezenlijk verandert. De leraar wordt meer onderwijsmanager dan tevoren. Een deel van het lesgeven en een deel van de organisatie van leermiddelen wordt mogelijk overgenomen door computers. Het scala van leermiddelen dat door de computer worden aangewend voor de instructie omvat eventueel zelf ook weer educatieve software of andere nieuwe media.

### 3.1 Sturing binnen educatieve software

Een belangrijk aspect van vernieuwing van educatieve software is de toenemende mate waarin de leerling initiatieven kan nemen, terwijl het programma adaptief blijft reageren op het leerproces van de leerling. In moderne educatieve software is de sturing van het leerproces derhalve een samenspel van leerling en computer, maar er zijn grote verschillen in uitvoering. Enerzijds is er de 'klassieke' ITS-aanpak waarbij de sturing grotendeels in handen is van de computer; ITS'en zijn oorspronkelijk een voortvloeisel van de geprogrammeerde instructie. ITS staat voor *Intelligent Tutoring System*. Als tegenbeweging zijn de zogenaamde *Open Learning Environments* ontworpen, waarbij de leerling alle initiatief heeft. Recentelijk zijn er syntheses van ITS'en en *Open Learning Environments* voorgesteld, met de aanduiding *Intelligent Learning Environment of Guided Discovery Tutoring*.

Deze verschillende vormen van sturing binnen educatieve programmatuur zijn voortgekomen uit verschillende visies op onderwijs: *kennisoverdracht* versus *kennisverwerving*. Bij kennisoverdracht is de sturing van het leerproces in handen van de leraar, die direct of indirect kennis en vaardigheden overdraagt op de leerling. Bij kennisverwerving ligt het initiatief sterk bij de leerling. Uitgangspunt bij kennisverwerving is, dat een leerling kennis en vaardigheden opdoet door interactie met een bepaalde responsieve omgeving.

De complexiteit van educatieve software die de leerling een open leeromgeving biedt, is hoog. Immers, als er veel vrijheid is voor de leerling, dus als hij initiatieven kan nemen waardoor de instructie verandert, dan moet de machine weet krijgen van de mentale toestand van de leerling. Dat kan alleen als er een gecomputeriseerde representatie van de vorderingen van de leerling binnen het programma geconstrueerd wordt, het 'leerlingmodel'<sup>1</sup>. De computer stuurt het leerproces dan zoveel mogelijk in overeenstemming met dit leerlingmodel, daarbij gebruik makend van andere,

---

1. Een 'leerlingmodel' is zeker niet hetzelfde als een 'modelleerling'. Een leerlingmodel is een component van een educatief programma, die tracht de begripsontwikkeling van een individuele leerling bij te houden — niet noodzakelijkerwijs in vergelijking met een 'expert' of een 'modelleerling'.

vaak eveneens intelligente, programma-onderdelen; een gecomputeriseerde didactische expert staat hierbij centraal. Daarentegen, als de mogelijke leerwegen door een programma volledig tevoren vaststaan, zoals bij geprogrammeerde instructie, dan is de sturing van het leerproces bepaald door de machine, en dan zijn de programma's betrekkelijk eenvoudig. Deze laatste aanpak is didactisch gezien echter lang niet altijd bevredigend.

### 3.2 Sturing door de computer bij *Intelligent Tutoring Systems*

In de 70-er jaren begon de ontwikkeling van ITS'en, met als doel de kennisoverdracht volledig te automatiseren. Een ITS stelt vast welke leerstof de leerling dient door te werken en in welke volgorde, het beoordeelt of de leerling opgaven al dan niet correct maakt, en beslist wanneer het nodig is om hem uitleg te geven.

Om adaptieve instructie te kunnen geven, bestaat een ITS uit een aantal met elkaar communicerende kennissystemen, die ieder afleidingen maken op een gespecialiseerd, afgebakend terrein. Kennissystemen zijn informatiesystemen die het menselijke redeneren nabootsen op de computer (zie hoofdstuk 3).

Tot halverwege de 80-er jaren heerste de trend om een algemeen geldende architectuur voor ITS'en na te streven. De componenten waaruit een ITS diende te bestaan zijn:

- een domeincomponent met kennis over het te onderwijzen domein;
- een component die de handelingen van een leerling diagnostiseert en deze diagnose verwerkt in een leerlingmodel;
- een didactische component met kennis over de didactiek op het betreffende domein, die de instructie bepaalt op grond van informatie uit de eerste twee onderdelen;
- een interactiecomponent tussen de leerling en de overige componenten.

Met deze componenten wordt het systeem in staat geacht zelf de instructie voor de leerling te genereren. Veel van de bestaande systemen leggen de nadruk op slechts één of enkele van deze componenten. Voor de te onderwijzen leerstof wordt meestal een afgebakend en sterk gestructureerd domein gekozen. Volledig geïmplementeerde ITS'en worden overigens toch nog nauwelijks aangetroffen; dit geldt zowel binnen als buiten onderzoekslaboratoria. Het blijkt veel moeilijker om ITS'en te ontwikkelen dan oorspronkelijk is gedacht. Daarom wordt de eis van een algemeen geldende architectuur tegenwoordig losgelaten — er zijn nog teveel onopgeloste vragen met betrekking tot de invulling van de componenten. Een variëteit aan architecturen is, tenminste voorlopig, realistischer.

### 3.3 Sturing door de leerling bij *Open Learning Environments*

Bij de tegenhanger van het ITS, de *Open Learning Environment*, stuurt de leerling het onderwijsproces. Het zelfontdekkend leren binnen een 'micro-wereld' staat hier

centraal. Bij een OLE krijgt een leerling op de computer een simulatie-omgeving aangeboden, waarin hij allerlei handelingen kan uitvoeren op objecten. Deze handelingen hebben, afhankelijk van de 'wetten' die binnen de simulatie-omgeving heersen, bepaalde observeerbare consequenties. Zo'n omgeving wordt aangeduid met de term 'micro-wereld'. De bedoeling is dat een leerling op basis van zijn handelingen en de consequenties daarvan inzicht krijgt in de wetmatigheden die binnen de simulatie-omgeving gelden. Een voorbeeld van zo'n micro-wereld is de educatieve programmeertaal LOGO. De daarop gebaseerde open leeromgevingen hebben een belangrijke initiërende impuls aan deze stroming gegeven. Een andere toepassing van OLE's is de gecomputeriseerde versie van practica natuurkunde of scheikunde.

Bij *Open Learning Environments* is er meestal geen sprake van zuiver zelfontdekkend leren: meestal krijgen de leerlingen enige vorm van opdrachten, uitleg, hints en/of feedback. Aan veel omgevingen is daartoe een *coach* toegevoegd, die echter uitsluitend ingrijpt als het noodzakelijk is.

### 3.4 Gemengd initiatief

Sinds enkele jaren beschouwen ontwikkelaars van educatieve software een synthese noodzakelijk van de ITS-benadering en het idee van een *Open Learning Environment*, om tot intelligente educatieve software met didactisch verantwoorde sturing te komen. Men spreekt wel van een *Intelligent Learning Environment* of *Guided Discovery Tutoring*. De onderliggende gedachte is, dat kennisverwerving en kennisoverdracht geen onverzoenbare extremen zijn — het zijn twee mogelijke, zinvolle visies op onderwijs, die elkaar niet uitsluiten, maar elkaar aanvullen. Als de computer altijd instrueert dan is er te weinig ruimte voor de eigen producties van leerlingen of voor persoonlijke (oplossings)strategieën. Als de leerling echter alles moet leren door eigen exploraties in een zo open mogelijk systeem, dan is leren niet effectief: enige sturing van het leerproces is dan gewenst. Een synthese van de twee benaderingen, waarbij de sturing op intelligente wijze afhangt van het leerproces van individuele leerlingen, biedt de beste perspectieven voor een effectieve leeromgeving. De ontwikkeling van de synthetische benadering is echter nog niet zo concreet dat er praktische, algemeen geldende richtlijnen uit voortvloeien voor de inrichting van nieuw te ontwikkelen intelligente educatieve software.

## 4 Educatieve software zonder kunstmatige intelligentie

De meeste directe inspanningen op het gebied van educatieve software betreffen de ontwikkeling van 'Computer-Ondersteund Onderwijs' (COO, in het Engels CAI) zonder kunstmatige intelligentie. COO dateert uit de jaren '50, en is traditioneel de hoofdstroom binnen de computerisering van het onderwijs. De verwachting is, dat dit nog wel enige tijd zo zal blijven. In het voorgaande werd namelijk geconstateerd,

dat de ontwikkeling van intelligente educatieve toepassingen nog op tal van moeilijkheden stuit. In de (nabije) toekomst zullen er meer concrete onderwijs toepassingen met kunstmatige intelligentie beschikbaar komen, maar tot die tijd blijft COO het enige concrete alternatief. Met het intelligent maken van educatieve software zal de toepassing van 'gewone' COO echter niet geheel vervallen. Er zal altijd plaats blijven voor relatief simpele, pretentieloze oefenprogramma's.

COO blijft tevens een belangrijk ijkpunt voor ITS'en. COO heeft, zij het nog schoorvoetend, zijn weg reeds gevonden in de schoolpraktijk. Als ITS'en een kans willen maken om de school in te komen, moeten ze hun winst bewijzen, in eerste instantie ten opzichte van COO. Uiteindelijk moeten ITS'en zich door middel van vergelijkende effectmetingen bewijzen ten opzichte van het onderwijs zonder computers.

Het onderscheid tussen ITS en COO is hierboven nogal scherp gesteld. Vanzelfsprekend beïnvloeden de ontwikkelingen bij deze verwante terreinen elkaar sterk. Wat men vroeger als heel complexe software beoordeelde, en soms van het predikaat 'intelligent' voorzag, heet nu COO.

## 5 Positiebepaling voor het te ontwikkelen ITS-breuken

Binnen het project ITS-breuken is een eigen architectuur van het programma ontworpen (zie hoofdstuk 6). Ten aanzien van bestaande ontwikkelingen is bij het ITS-breuken een eclectisch standpunt ingenomen. De voordelen van alle beschikbare resultaten zijn zo gunstig mogelijk met elkaar gecombineerd tot één programma, zonder noodzakelijkerwijs te kiezen voor de ene of de andere theoretische stroming. Leidraad voor de inrichting van het programma is de didactische invulling. Op dit punt is wél een keuze gemaakt voor een bepaalde theoretische stroming, namelijk voor het 'realistisch reken-wiskunde-onderwijs' (zie hoofdstuk 2). Het didactisch uitgangspunt geeft dus als eerste richting aan de ontwikkeling van het programma. Het ontwikkelde product blijft aangeduid worden met 'ITS-breuken', ook al wijkt de opzet soms nogal af van de klassieke ITS-aanpak.

Een tweede overweging die bepalend is voor de ontwikkeling van het programma, is de praktische realiseerbaarheid. Gezien de nogal moeizame ontwikkelingen binnen de moderne, generieke en adaptieve educatieve software, is het verstandig de technische haalbaarheid expliciet te bewaken. Dat betekent dat er, waar mogelijk, telkens is gekozen voor eenvoudige technieken.

### **Literatuur**

De informatie over de leermachine komt uit: Teaching Machine (1967), de uiteenzetting over geprogrammeerde instructie is te vinden in Boermeerster (z.j.). Cole (1990) waarschuwt voor het herinvoeren van verouderde didactiek bij gecompliceerd onderwijs. Dirkzwager (1991)

behandelt de standpunten over sturing. Door Sleeman en Brown (1982) is een groot aantal projectbeschrijvingen uit het ITS-onderzoeksterrein gebundeld. Papert (1980) heeft een belangrijke initiërende impuls gegeven aan open leeromgevingen. Wenger (1987) bevat een zeer gedetailleerde opsommende beschrijving van een groot aantal ITS(achtige) projecten. Lawler en Yazdani (1987) schrijven over OLE's. Elsom-Cook (1990) schrijft over de synthetische benadering. Andere boeken over het gebruik van kunstmatige intelligentie bij het ontwikkelen van educatieve software zijn Kearsley (1987), Polson en Richardson (1988), Self (1988), Sandberg en Pijls(1989) en Bierman, Breuker en Sandberg (1989). Pedagogische Studiën (1987) wijdde een themanummer aan "De computer en het onderwijsleerproces".

---

## Hoofdstuk 3

# Kennissystemen in vogelvlucht

Linda van der Gaag

Eén van de belangrijkste uitgangspunten bij de ontwikkeling van een *Intelligent Tutoring System* voor het breukenonderwijs is de observatie dat het beoogde computerprogramma kennis over de didactiek van breuken zal moeten bevatten. Deze kennis moet het programma flexibel kunnen toepassen, voor elke leerling op een individuele manier: alleen dan zal het programma zich ‘intelligent’ kunnen gedragen en aan de in het voorgaande hoofdstuk gestelde didactische doelen kunnen voldoen.

Een programma, waarin het gebruik van kennis een belangrijke rol speelt, wordt een *kennissysteem* genoemd. Kennissystemen worden op allerlei toepassingsgebieden voor de meest uiteenlopende problemen ontwikkeld, zoals bijvoorbeeld voor de diagnostiek van oogziekten, voor de configuratie van technische apparatuur en voor de didactiek in computerondersteund onderwijs; de rol van het kennissysteem kan daarbij het vervangen van (schaarse) deskundigen zijn, of het bieden van ondersteuning bij het nemen van complexe beslissingen. ITS-breuken is een kennissysteem — er is dan ook veelvuldig gebruik gemaakt van methoden en technieken uit het onderzoeksgebied van de kennissystemen.

### 1 Het ontwikkelen van een kennissysteem

Als voor een bepaald probleemgebied een software-systeem ontwikkeld moet worden, staan de ontwerpers van zo'n systeem vele technieken, methoden en standaard-programmatuur ter beschikking. Hieruit moeten hulpmiddelen gekozen worden die zo goed mogelijk aansluiten bij de eisen die het betreffende probleemgebied aan het beoogde programma stelt. Vaak zal de keuze daarbij vallen op conventionele informatica-technologieën; voor de ontwikkeling van software-systemen voor administratieve problemen bijvoorbeeld wordt meestal gekozen voor het gebruik van een database. Er zijn echter ook problemen die niet of moeilijk kunnen worden opgelost met behulp van dergelijke conventionele technologieën. Dit zijn enerzijds praktijkproblemen waarvoor geen welomschreven, in de literatuur terug te vinden, oplossing bestaat; anderzijds zijn het problemen waarvoor zeer veel theoretisch mogelijke oplossingen bestaan. In beide gevallen worden dergelijke problemen in de dagelijkse praktijk typisch opgelost door menselijke deskundigen. Voor het ontwikkelen van een software-systeem voor zo'n probleemgebied wordt gebruik gemaakt van tech-



nieken en methoden die ontwikkeld zijn binnen het onderzoeksgebied van de kennissystemen.

Een kennissysteem voor een gegeven probleemgebied zal moeten kunnen functioneren op een niveau dat vergelijkbaar is met dat van een menselijke deskundige. Daartoe zal het kennissysteem de kennis van zo'n deskundige moeten bevatten en kunnen toepassen. Deze kennis kan bijzonder specialistisch van aard zijn en het resultaat van jarenlange praktijkervaring, zoals bijvoorbeeld de kennis van een medisch specialist; het kan echter ook kennis betreffen waarover veel mensen beschikken, zoals kennis over het opsporen van defecten in het huishoudelijk elektriciteitscircuit. Voor dergelijke kennis geldt, dat deze meestal niet de vorm van expliciete definities, axioma's en stellingen heeft, maar bestaat in de vorm van vuistregels en ervaringsfeiten.

Zelfs in een sterk afgebakend probleemgebied is de kennis die in een systeem voor zo'n domein moet worden vastgelegd, omvangrijk en moeilijk te vergaren. In de praktijk wordt de voor het systeem benodigde kennis verzameld door verschillende bronnen te raadplegen; de ervaringskennis van een domeindeskundige wordt geëxpliciteerd met behulp van interviews, de meer algemene kennis wordt verkregen door vakliteratuur te bestuderen en de feitelijke praktijkgegevens worden aan het licht gebracht door middel van een analyse van beschikbare, historische informatie. Het vergaren, structureren en formaliseren van kennis op een gegeven probleemgebied wordt *kennisacquisitie* genoemd. In deel IV van dit boek zal meer in detail ingegaan worden op de wijze waarop de kennis voor het ITS-breken in kaart is gebracht.

Ondanks het beschikbaar komen van steeds betere ondersteunende technologie is het ontwikkelen van een kennissysteem voor een gegeven probleemgebied verre van triviaal: het vergt veel ervaring en inspanning van de ontwikkelaars van het systeem en vooral ook van de participerende domeindeskundigen. Het ontwikkelen van kennissystemen is zelfs uitgegroeid tot een apart aandachtsveld binnen de kunstmatige intelligentie: *knowledge engineering*.

## 2 Het paradigma: scheiding van kennis en inferentie

Het verschil tussen kennissystemen en conventionele programmatuur is niet alleen dat een kennissysteem expliciet kennis bevat — ook de organisatie van informatieverwerking verschilt. In een kennissysteem is de sterk domeinafhankelijke en aan uitbreiding en verfijning onderhevige kennis expliciet gescheiden van de vrijwel niet veranderende, domeinonafhankelijke methoden om de kennis toe te passen. Dit uitgangspunt bij de ontwikkeling van kennissystemen staat bekend als het paradigma van kennissystemen en wordt meestal weergegeven met de volgende vergelijking:

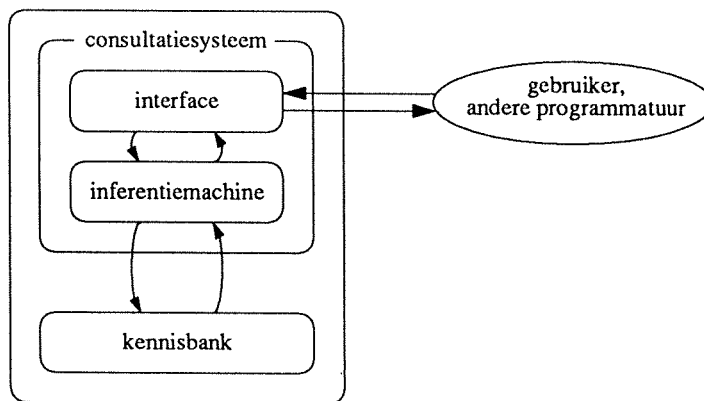
$$\text{kennissysteem} = \text{kennis} + \text{inferentie}$$

Met de term *kennis* wordt hier het geheel van voor het domein specifieke vuistregels, procedures en feitelijke informatie bedoeld, zoals deze in het kennissysteem zijn vastgelegd; de term *inferentie* geeft het geheel van domeinonafhankelijke methoden weer dat het kennissysteem voorhanden heeft om de aanwezige kennis ook daadwerkelijk te gebruiken in concrete probleemsituaties.

In kennissystemen wordt de expliciete scheiding van kennis en inferentie bewerkstelligd door deze aspecten in afzonderlijke onderdelen in het systeem onder te brengen. Een kennissysteem bestaat dan uit twee fysiek gescheiden delen:

- een *kennisbank* waarin de specifieke kennis van het betreffende probleemdomein is vastgelegd, en
- een *inferentiemachine* waarin de methoden om de in de kennisbank vastgelegde kennis te manipuleren, zijn opgenomen.

De inferentiemachine van een kennissysteem is vaak ingebed in een zogenaamd *consultatiesysteem* dat behalve de inferentiemachine ook nog een interface voor communicatie van het systeem met gebruikers of met andere systemen, bevat.<sup>1</sup> De globale architectuur van een kennissysteem is weergegeven in figuur 3.1.



figuur 3.1 Architectuur van een kennissysteem

Het onderbrengen van de domeinkennis in een aparte kennisbank en van de methoden om deze kennis toe te passen in een aparte inferentiemachine, maakt het mogelijk om deze twee onderdelen los van elkaar te ontwikkelen. Dit heeft een aantal voordelen. Een kennisbank kan op een natuurlijke manier stapsgewijs uitgebreid en

---

1. De term kennissysteem is een algemeen gebruikte term; indien een kennissysteem vanuit een gegeven probleemstelling in een bepaald vakgebied oplossingen kan bieden op een niveau dat vergelijkbaar is met dat van deskundigen op het betreffende vakgebied en argumenten voor deze oplossingen kan geven, spreekt men meer specifiek van een *expert-systeem*.

verfijnd worden, zonder dat daarvoor een gedegen kennis van de inferentiemachine noodzakelijk is; bovendien hebben wijzigingen in de kennisbank geen effect op de inferentiemachine. Het apart ontwikkelen van een inferentiemachine heeft het voordeel, dat wijzigingen in de inferentiemachine, voor zover deze geen betrekking hebben op de essentie van de methoden, eenvoudig verwerkt kunnen worden zonder consequenties voor de kennisbank; hierbij kan gedacht worden aan wijzigingen ter verbetering van de efficiëntie van de methoden.

Voor de constructie van een kennissysteem wordt tegenwoordig vaak gebruik gemaakt van een specifieke *ontwikkelomgeving* (in het Engels *shell*). Zo'n ontwikkelomgeving biedt een aantal formalismen voor de representatie van domeinkennis en een aantal domeinonafhankelijke methoden voor het toepassen van in zo'n formalisme vastgelegde kennis; de ontwikkelomgeving biedt vaak ook nog een hogere programmeertaal. Een systeemontwikkelaar maakt voor het bouwen van een kennissysteem een keuze uit de geboden formalismen en methoden, en stelt aan de hand hiervan een op het probleemgebied afgestemde inferentiemachine samen; vervolgens wordt de kennisbank gevuld met domeinkennis.

## 3 De kennisbank

In de kennisbank van een kennissysteem voor een gegeven probleemdomein wordt de voor dat domein specifieke kennis vastgelegd. Om automatische manipulatie van kennis mogelijk te maken, moet deze op een eenduidige en formele manier gespecificeerd zijn: alleen dan kan een onbedoelde interpretatie van de kennis uitgesloten worden. Daarom wordt voor het vastleggen van kennis in een kennisbank gebruik gemaakt van een *kennisrepresentatieformalisme*.

Een kennisrepresentatieformalisme moet in principe aan een aantal eisen voldoen. Het formalisme moet bijvoorbeeld een efficiënte interpretatie van en manipulatie met de gerepresenteerde kennis toelaten. Bovendien moet het formalisme expressief genoeg zijn: de kennis van het probleemdomein moet ook daadwerkelijk in het formalisme uitgedrukt kunnen worden. Deze eigenschappen blijken echter vrijwel nooit in één formalisme verenigbaar te zijn. Als gevolg daarvan is in de loop der jaren een aantal verschillende formalismen ontstaan. Elk van die formalismen heeft eigen voor- en nadelen die het formalisme geschikt maken voor de representatie van een bepaald type kennis en ongeschikt voor andere typen kennis. In moderne kennissystemen wordt daarom vaak gebruik gemaakt van een combinatie van kennisrepresentatieformalismen, waarbij de voordelen van die formalismen zo goed mogelijk worden benut.

Het bekendste en in de praktijk meest toegepaste kennisrepresentatieformalisme is het produktieregelformalisme. Dit formalisme is al in de 60-er jaren ontstaan, en is

voortgevloeid uit cognitief psychologisch onderzoek naar het menselijk redneervermogen. In dit formalisme wordt kennis gerepresenteerd in onderling onafhankelijke eenheden, de *produktieregels* genaamd. In zo'n produktieregel zijn uitspraken met elkaar in verband gebracht. Informeel weergegeven heeft een produktieregel de volgende vorm:

*Regel:*   **als**   aan bepaalde *voorwaarden* is voldaan,  
          **dan**   kunnen bepaalde *acties* uitgevoerd worden

De in een produktieregel genoemde voorwaarden hebben betrekking op eigenschappen van een concrete probleemsituatie. De acties van een produktieregel kunnen van zeer uiteenlopende aard zijn. Een voorbeeld van een produktieregel is:

*Regel:*   **als**   een leerling alle typen opgaven van het huidige onderdeel voldoende beheerst,  
          **dan**   begint de leerling met een nieuw onderdeel

De bovenstaande regel is in natuurlijke taal weergegeven. In een kennisbank zijn de produktieregels echter in een formele, wiskundige notatie gespecificeerd om de ambiguïteit, die nu eenmaal inherent is aan natuurlijke-taaluitspraken, uit te sluiten.

Met name de laatste vijftien jaar is veel ervaring met dit produktieregelformalisme opgedaan, in de meest uiteenlopende toepassingen. Deze ervaringen laten zien, dat het produktieregelformalisme bij uitstek geschikt is voor de representatie van vuistregels en andere domeinkennis die procedureel van aard is. Het formalisme is echter minder geschikt voor de representatie van kennis van meer declaratieve aard.

## 4 De inferentiemachine

Door de in een kennisbank vastgelegde kennis toe te passen op een concrete probleemsituatie kan nieuwe informatie met betrekking tot die situatie worden afgeleid: het afleiden van nieuwe informatie noemt men *inferentie*. In een kennisstelsel zijn de methoden voor inferentie ondergebracht in de inferentiemachine.

In de vorige paragraaf is naar voren gekomen, dat voor het vastleggen van kennis in een kennisbank verschillende kennisrepresentatieformalismen bestaan. Bij elk van deze formalismen zijn één of meer methoden ontwikkeld, om kennis die met behulp van het formalisme is vastgelegd automatisch te manipuleren. Ook met het produktieregelformalisme zijn zulke methoden geassocieerd. Deze methoden selecteren uit een gegeven verzameling van produktieregels alle relevante regels, en passen deze vervolgens toe. Het toepassen van een produktieregel komt neer op het verifiëren van de in de regel genoemde voorwaarden en het al dan niet uitvoeren van de gespecificeerde acties. Het is gebruikelijk om onderscheid te maken tussen twee basisvormen van inferentie met produktieregels: *datagestuurde* en *doelgestuurde inferentie*.

#### 4.1 Datagestuurde inferentie

Datagestuurde inferentie (in het Engels *bottom-up inference*) gaat uit van de feitelijke informatie die over een concrete probleemsituatie beschikbaar is. Aan de hand van deze feitelijke informatie selecteert datagestuurde inferentie alle produktieregels uit de kennisbank met behulp waarvan nieuwe informatie kan worden afgeleid. Dit zijn de produktieregels waarvoor geldt dat aan alle gespecificeerde voorwaarden is voldaan: immers, slechts dan mogen de bijbehorende acties worden uitgevoerd. Een geselecteerde regel wordt vervolgens toegepast door de bij die regel behorende acties uit te voeren, waardoor nieuwe feitelijke informatie beschikbaar komt. Deze nieuwe informatie kan weer tot de selectie van nieuwe produktieregels leiden. De inferentie wordt beëindigd als er geen nieuwe informatie meer kan worden afgeleid.

Datagestuurde inferentie wordt toegelicht aan de hand van een verzameling van vijf denkbeeldige produktieregels:

*Regel:* **als** de leerling alle opgaven van een bepaald type fout heeft opgelost,  
**dan** beheerst de leerling dat type opgaven onvoldoende

*Regel:* **als** de leerling een bepaald type opgaven onvoldoende beheerst,  
**dan** wordt dit aan de leraar gerapporteerd

*Regel:* **als** de leerling een bepaald type opgaven onvoldoende beheerst,  
**en** de vorige opgave was van een ander type,  
**dan** wordt nog een opgave van dit eerste type gegeven

*Regel:* **als** de leerling alle typen opgaven van het huidige onderdeel voldoende beheerst,  
**dan** begint de leerling met een nieuw onderdeel

*Regel:* **als** de leerling begint met een nieuw onderdeel,  
**dan** wordt een standaardopgave uit dit onderdeel gegeven

Veronderstel nu dat van een leerling bekend is dat hij in het eerste onderdeel achtereenvolgens opgaven van de typen 1, 2, 1, 2, 1 en 3 heeft gemaakt, met als resultaat respectievelijk 'fout', 'fout', 'fout', 'goed', 'fout' en 'goed': de leerling heeft dus alle opgaven van type 1 fout opgelost. Op grond van deze informatie selecteert datagestuurde inferentie de eerste produktieregel uit de verzameling:

*Regel:* **als** de leerling alle opgaven van een bepaald type fout heeft opgelost,  
**dan** beheerst de leerling dat type opgaven onvoldoende

Deze produktieregel wordt nu toegepast. Datagestuurde inferentie leidt derhalve af dat onze leerling opgaven van type 1 onvoldoende beheerst. Met behulp van alle nu beschikbare informatie worden vervolgens nog twee produktieregels uit de regelverzameling geselecteerd:

*Regel:* als de leerling een bepaald type opgaven onvoldoende beheerst,  
dan wordt dit aan de leraar gerapporteerd

en

*Regel:* als de leerling een bepaald type opgaven onvoldoende beheerst,  
en de vorige opgave was van een ander type,  
dan wordt nog een opgave van dit eerste type gegeven

Deze beide regels worden toegepast: aan de leraar wordt gerapporteerd dat de leerling opgaven van type 1 onvoldoende beheerst, en bovendien wordt afgeleid dat de leerling een nieuwe opgave van dit type moet krijgen. Op grond van de nu beschikbare informatie kunnen geen nieuwe regels meer geselecteerd worden, zodat het inferentieproces stopt.

In dit voorbeeld is van enkele produktieregels de actie niet uitgevoerd: dit zijn de produktieregels die uitspraken doen over het beginnen van een nieuw onderdeel voor een leerling. Deze produktieregels zijn echter ook niet van toepassing voor onze leerling.

#### 4.2 Doelgestuurde inferentie

De tweede vorm van inferentie met produktieregels richt zich op het vervullen van een aantal van tevoren gespecificeerde doelen, en wordt daarom doelgestuurde inferentie (in het Engels *top-down inference*) genoemd. Aan de hand van een initieel gegeven doel selecteert doelgestuurde inferentie alle produktieregels uit de regelverzameling met behulp waarvan dat doel bereikt zou kunnen worden: dit zijn de regels die een actie specificeren die het doel vervult. Voordat de acties van een geselecteerde produktieregel mogen worden uitgevoerd, moet echter nog geverifieerd worden of wel aan alle voorwaarden van die regel is voldaan. Als zo'n voorwaarde betrekking heeft op reeds beschikbare feitelijke informatie, kan direct gecontroleerd worden of aan de voorwaarde is voldaan. Als de benodigde feitelijke informatie echter ontbreekt, zal die eerst achterhaald moeten worden. Doelgestuurde inferentie zal zich daarom het verkrijgen van die informatie tot nieuw subdoel stellen. De inferentie stopt zodra alle mogelijke manieren om de initiële doelen te behalen, onderzocht zijn.

Het inferentieproces wordt opnieuw toegelicht aan de verzameling produktieregels uit de voorgaande paragraaf. Dezelfde leerling wordt bekeken: het is bekend dat hij achtereenvolgens opgaven van de typen 1, 2, 1, 2, 1 en 3 heeft gemaakt en dat hij alle opgaven van type 1 incorrect heeft opgelost. Veronderstel nu dat het doel van de inferentie het bepalen van de volgende opgave is.

Aan de hand van dit doel selecteert doelgestuurde inferentie de volgende twee produktieregels:

### 3 Kennissystemen in vogelvlucht

---

*Regel:* **als** de leerling een bepaald type opgaven onvoldoende beheerst,  
**en** de vorige opgave was van een ander type,  
**dan** wordt nog een opgave van dit eerste type gegeven

en

*Regel:* **als** de leerling begint met een nieuw onderdeel,  
**dan** wordt een standaardopgave uit dit onderdeel gegeven

Immers, deze twee regels doen een uitspraak over de volgende te geven opgave. De conclusies van deze regels mogen nu echter niet zonder meer worden getrokken.

Voordat de conclusie van de eerste van deze twee regels getrokken kan worden, moet onderzocht worden of aan de voorwaarden van de regel is voldaan. Doelgestuurde inferentie neemt daarom als nieuw subdoel het bepalen of de leerling een bepaald type opgaven onvoldoende beheerst. Met behulp van de produktieregel

*Regel:* **als** de leerling alle opgaven van een bepaald type fout heeft opgelost,  
**dan** beheerst de leerling dat type opgaven onvoldoende

wordt dat doel bereikt: uit de beschikbare informatie blijkt dat de leerling opgaven van type 1 onvoldoende beheerst. Als nu ook nog geldt dat de laatstgegeven opgave niet van type 1 is, mag doelgestuurde inferentie de conclusie trekken dat de volgende opgave voor de leerling van type 1 moet zijn. De laatste gegeven opgave is van type 3, zodat de genoemde conclusie inderdaad getrokken kan worden.

Doelgestuurde inferentie had ook nog een tweede produktieregel geselecteerd voor het bereiken van het initiële doel:

*Regel:* **als** de leerling begint met een nieuw onderdeel,  
**dan** wordt een standaardopgave uit dit onderdeel gegeven

Voordat de conclusie van deze regel getrokken mag worden, moet onderzocht worden of voor de leerling een nieuw onderdeel begonnen mag worden. De enige produktieregel die daarover een uitspraak doet, is de volgende regel:

*Regel:* **als** de leerling alle typen opgaven van het huidige onderdeel voldoende beheerst,  
**dan** begint de leerling met een nieuw onderdeel

Omdat voor onze leerling niet geldt dat hij alle typen opgaven van het huidige onderdeel voldoende beheerst — hij beheerst type 1 immers onvoldoende — mag niet geconcludeerd worden dat de leerling aan een nieuw onderdeel kan beginnen. Als gevolg hiervan mag ook de conclusie dat de leerling een standaardopgave van een nieuw onderdeel moet krijgen, niet afgeleid worden.

Alle mogelijkheden om het initiële doel te bereiken zijn nu onderzocht; het inferentieproces stopt dus. In tegenstelling tot datagestuurde inferentie heeft doelgestuurde

inferentie niet afgeleid dat aan de leraar gerapporteerd moet worden — die informatie zal met doelgestuurde inferentie alleen afgeleid kunnen worden als daartoe een doel voor de inferentie wordt geformuleerd.

#### 4.3 De twee inferentievormen vergeleken

De twee basisvormen van inferentie met produktieregels leiden tot een verschillend inferentiegedrag. Als gevolg hiervan zijn de inferentievormen geschikt voor verschillende typen toepassingen. Doelgestuurde inferentie wordt vaak gebruikt voor diagnostische kennissystemen, waarbij de inferentie gestuurd kan worden door een vastomlijnd doel en een geringe hoeveelheid invoergegevens. Datagestuurde inferentie is het meest geschikt voor toepassingen waarin de interpretatie van grote hoeveelheden gegevens een rol speelt; ook voor het oplossen van problemen waarin geen vastomlijnde initiële doelen te onderscheiden zijn, zoals bijvoorbeeld bij simulatie, is datagestuurde inferentie zeer geschikt.

## 5 Het evalueren van een kennissysteem

Als een kennissysteem eenmaal geïmplementeerd is, dan moet het, net als elk ander software-systeem, geëvalueerd worden. In zo'n evaluatie dienen verschillende aspecten van het systeem onderzocht te worden. Er moet bijvoorbeeld worden nagegaan of het systeem voor de beoogde eindgebruikers hanteerbaar is, of het efficiënt is en in de praktijk toepasbaar, en of het eenvoudig aangepast kan worden aan veranderende inzichten binnen het betreffende probleem domein. Daarnaast dient onderzocht te worden of het resulterende systeem functioneert op het beoogde niveau; dit specifieke onderdeel van de evaluatie wordt meestal de *validatie* van het systeem genoemd.

Bij de validatie van een kennissysteem is het de bedoeling om het systeem zo uitputtend mogelijk te testen. Nu geldt juist voor kennissystemen dat het testen met alle mogelijk voorkomende probleemsituaties onmogelijk is. Maar ook het samenstellen van een test met zorgvuldig gekozen representatieve probleemsituaties is vanwege de omvang en de complexiteit van het probleem domein vaak onmogelijk. Bovendien bestaat in dergelijke domeinen correctheid van oplossingen alleen als intersubjectieve overeenstemming tussen deskundigen, en niet als objectieve maat. Voor het valideren van een kennissysteem wordt daarom meestal gebruik gemaakt van één of meer van de volgende validatietechnieken.

- Bij een *informele validatie* vergelijken de in de bouw van het kennissysteem participerende deskundigen de uitkomsten en het gedrag van het systeem met hun eigen gedrag. De deskundigen maken daarbij gebruik van gekozen concrete probleemsituaties; deze probleemsituaties kunnen reëel zijn, maar ook gefingeerd.



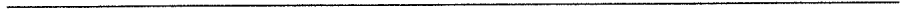
- Bij een *retrospectieve validatie* wordt het gedrag van het kennisstelsel bij in de praktijk voorgekomen en goed gedocumenteerde probleemsituaties geanalyseerd; de uitkomsten van het stelsel worden hierbij vergeleken met de werkelijke oplossingen van de gegeven probleemsituaties.
- Bij *cross checking* worden zorgvuldig gekozen probleemsituaties aan zowel het kennisstelsel als een groep deskundigen voorgelegd. Het kennisstelsel mag geen essentieel van de participerende deskundigen afwijkend gedrag vertonen.
- Bij een *veldtest* wordt het kennisstelsel in de dagelijkse praktijk door de beoogde eindgebruikers geëvalueerd.

Hoewel de drie laatstgenoemde validatietechnieken verre te prefereren zijn boven een informele validatie, zijn deze technieken in de praktijk vaak moeilijk realiseerbaar. Zo is voor een retrospectieve validatie een omvangrijke verzameling van goed gedocumenteerde historische gegevens noodzakelijk; juist in probleemdomen waarvoor kennisstelsels worden ontwikkeld blijken dergelijke gegevens te ontbreken of onvoldoende gedocumenteerd te zijn. *Cross checking* vereist een niet gering aantal domeindeskundigen; zoveel deskundigen zijn zelden beschikbaar voor dat doel. Het uitvoeren van een veldtest stuit vaak op weerstand bij de eindgebruikers. Het een en ander heeft ertoe geleid dat kennisstelsels meestal alleen informeel gevalideerd worden.

#### **Literatuur**

Een algemene inleiding in de kunstmatige intelligentie, met enige nadruk op kennisstelsels, geven Luger en Stubblefield (1988). Jackson (1986) geeft een overzicht van het vakgebied der kennisstelsels. Voor een meer technische grondslag van de principes van kennisstelsels wordt verwezen naar Lucas en Van der Gaag (1988). De bundel van Guida en Tasso (1989) heeft het ontwerpen, implementeren en evalueren van kennisstelsels als onderwerp.

---



---

# II

## De interface

*Leerlingen beginnen niet aan het leren van breuken 'omdat dat nuttig is voor later': ze leren breuken omdat ze 'het op school krijgen'. Deze extrinsieke motivatie is, voor zover aanwezig, niet sterk genoeg om het traject van het breuken leren met succes te doorlopen. Veel hangt af van de intrinsieke motivatie: als een leerling eenmaal begonnen is met de breuken, moet het leren hem voldoende uitdagen door te gaan.*

*Deel II gaat over Eerlijk Verdelen, een computerprogramma voor het leren van breuken. Eerlijk Verdelen is het zichtbare deel van het ITS-breuken. Het programma wordt vanuit twee verschillende perspectieven belicht. Hoofdstuk 4 behandelt Eerlijk Verdelen zoals het door de leerling gezien wordt; hoofdstuk 5 gaat over het lerarendeel.*

*Er is veel aandacht besteed aan de interface van Eerlijk Verdelen, vooral aan het deel voor de leerling. Elke handeling moet natuurlijk aanvoelen, elk scherm moet voor zichzelf spreken, elke situatie moet logisch leiden tot de volgende stap. De beschrijving van de interface is telkens geïllustreerd met schermafdrukken, om de lezer een impressie te geven van het programma. Beschrijvingen van computerprogramma's geven echter maar gedeeltelijk de kracht ervan weer. Als iemand zich ècht op de hoogte wil stellen van hoe Eerlijk Verdelen op een leerling overkomt, dan kan dat door de COO-versie zelf uit te proberen.*

<b>4</b>	<b>Eerlijk Verdelen: voor de leerling</b>	<b>37</b>
	<i>Johan Zuidema</i>	
<b>5</b>	<b>Eerlijk Verdelen: voor de leraar</b>	<b>55</b>
	<i>Johan Zuidema</i>	

---

---

## Hoofdstuk 4

# Eerlijk Verdelen: voor de leerling

Johan Zuidema

'Eerlijk Verdelen' is een educatief computerprogramma, dat een realistische invulling biedt voor het eerlijk verdelen als breukvoortbrengende activiteit. Het is direct voortgekomen uit langlopend onderzoek voor de ontwikkeling van een breukenleergang binnen de realistische rekendidactiek. Het eerlijk verdelen van allerlei etenswaar is heel natuurlijk voor basisschoolleerlingen, en sluit goed aan bij hun ervaringswereld. Bij het verdelen van een aantal voorwerpen (dat niet een veelvoud is van het aantal personen waarover verdeeld wordt), is eerlijk verdelen een breukvoortbrengende activiteit. Deze activiteit vormt een uitstekende voorbereiding op het inzichtelijk manipuleren van breukformules. Als kinderen bijvoorbeeld drie chocoladerepen mogen verdelen met hun vieren, kan dat op veel manieren. Ze kunnen eerst alledrie de repen in vieren breken, en dan uitdelen; ze kunnen er allemaal halve repen van maken, aan ieder een halve uitdelen, de resterende twee stukken opnieuw halveren en uitdelen; drie kinderen kunnen een hele reep nemen, en er ieder een stuk van afbreken voor het vierde kind; enzovoort. Deze drie voorbeelden leiden tot een formele, wiskundige omschrijving: '3 chocoladerepen verdelen over 4 kinderen' levert bij een eerlijke verdeling respectievelijk ' $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ', ' $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ' of ' $1 - \frac{1}{4}$ ' reep op.

Dit ontwikkelingsonderzoek is de inspiratie geweest voor een, vanwege de gebruikersvriendelijkheid in eerste instantie voor de *Macintosh* ontwikkeld, prototype van Eerlijk Verdelen. Inmiddels is het programma omgezet naar het voor Nederlandse basisscholen recentelijk standaard geworden *MS-DOS*-computersysteem met *Windows*. Eerlijk Verdelen is bij deze gelegenheid geheel opnieuw ontworpen, niet alleen technisch, maar ook didactisch. Eerlijk Verdelen is inmiddels beschikbaar als handelsversie<sup>1</sup>. Het programma is voorts de basis voor het ITS-breuken, dat nog in een experimenteel stadium verkeert, en niet wordt uitgegeven.

Dit hoofdstuk beschrijft Eerlijk Verdelen, zoals het zich presenteert aan leerlingen. De interface met de leraar is het onderwerp van hoofdstuk 5. Het ITS-breuken voegt aan het programma een kunstmatig intelligent redenerend deel toe, dat voor adaptiviteit van het systeem aan individuele leerlingen zorgt. De structuur en de inhoudelijke vulling van dat ITS-deel en de koppeling ervan met het basisprogramma, worden in deel III besproken.

---

1. Eerlijk Verdelen wordt uitgegeven door Zwijsen te Tilburg, als onderdeel van het Reken-drieluik.

## 1 De opbouw

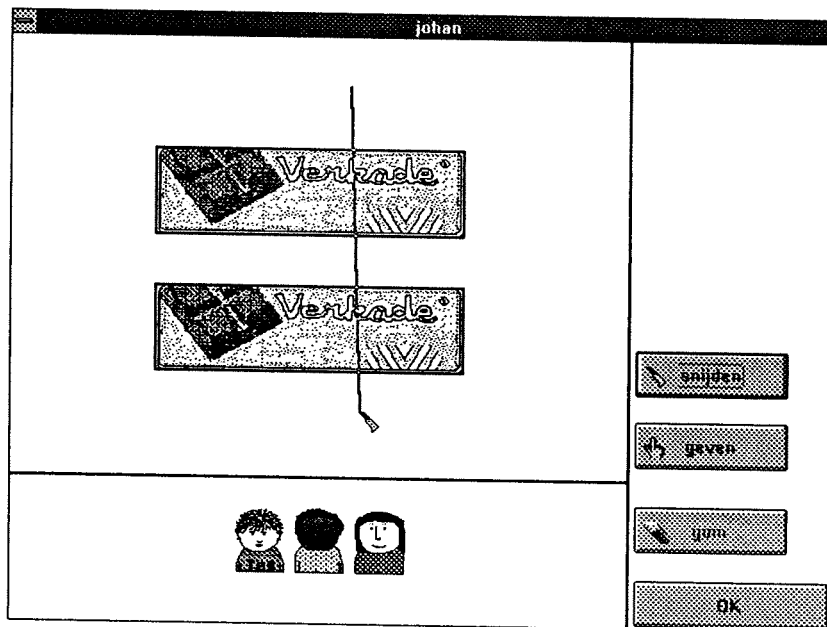
Het realistisch rekenonderwijs kent drie fasen tijdens het leren. In de eerste fase manipuleert de leerling concreet materiaal — een activiteit die direct aansluit bij zijn ervaringswereld. Deze fase wordt in Eerlijk Verdelen begeleid met het onderdeel ‘Snijden & Geven’. Tijdens de tweede leerfase gaan leerlingen schematischer te werk; ze werken met modellen. Hier vinden de eerste verkortingen van het handelen plaats. De uitvoeriger handelingen van het oorspronkelijke eerlijk verdelen zijn echter nog volledig herkenbaar voor de leerlingen. Deze tweede fase is binnen Eerlijk Verdelen gerealiseerd met het onderdeel ‘Snijmachines’. De derde en laatste fase wordt gekarakteriseerd door het werken met formele notaties, en door sterk verkorte handelingen. Eerlijk Verdelen biedt op dit niveau ‘Kleuren & Benoemen’. In alle fasen is Eerlijk Verdelen eenvoudig met de muis te bedienen.

Het steeds krachtiger worden van het gereedschap dat leerlingen tot hun beschikking hebben, loopt als een rode draad door het hele programma. Aanvankelijk moet een leerling een flink aantal keer klikken met de muis en gesneden stukken voorwerp ‘verslepen’, voordat hij (eerlijk) heeft verdeeld. Dat kan na verloop van tijd met steeds minder handelingen, en uiteindelijk is een eerlijke verdeling met een minimale inspanning te verwezenlijken. Dat komt niet alleen omdat het beschikbare gereedschap krachtiger wordt, maar ook omdat leerlingen handiger worden met het verdelen. Steeds meer hangt af van mentale planningsactiviteit; het uitvoeren van de verdeling wordt het afwerken van een plan. Uit de praktijk blijkt, dat leerlingen zonder speciale instructie de gecomprimeerde betekenis van de tot hun beschikking staande gereedschappen gemakkelijk verwerven. Ze kijken er als het ware naar uit, hoe ze met minder uitvoerend handelen snel kunnen komen tot de realisatie van hun telkens sterker planmatig gevormde oplossing.

Bij het onderzoek naar de ontwikkeling van een breukenleergang bleek echter keer op keer dat leerlingen de neiging hebben om de concrete verdeelhandeling als basis *te* snel te verlaten. Premature verkortingen leiden tot een labiel breukenbegrip. Er moet daarom, eerder dan speciale uitleg te geven over de versnellingen in het programma, voor gewaakt worden dat de oefeningen niet op te korte termijn van een abstract niveau worden.

## 2 Snijden & Geven

Tijdens het eerste onderdeel van Eerlijk Verdelen ziet een scherm er voor de leerlingen uit zoals in figuur 4.1 (maar dan in sprekende kleuren).



figuur 4.1 Snijden & Geven: de eerste snede wordt gemaakt

Het eerste dat opvalt aan dit scherm is, dat er bijna niets op staat. Bij elk object op het scherm is door de ontwerpers nagedacht of het ook zonder zou kunnen. Leerlingen hebben de verwachting dat alle gereedschap op het scherm nuttig is, dat ze het moeten en veilig kunnen gebruiken. Alle overbodige franje is achterwege gelaten: geen statusbalken, geen oefeningnummer, geen helpknop, niets dat niet direct gebruikt hoeft te worden. Die werkwijze heeft uiteindelijk geleid tot een zeer krachtige interface voor de leerlingen. De aangeboden omgeving dient volledig voor zichzelf te spreken, en blijkt dat ook te doen.

Bij Eerlijk Verdelen is de onderlinge positie op het scherm van voorwerpen en kinderen met opzet zo gekozen, dat ook in grafische zin voorbereid wordt op de uiteindelijke, formele breuknotatie. Een verdeelsituatie verschilt weliswaar van de breuk die eruit voortvloeit, maar de teller heeft veel te maken met het aantal te verdelen voorwerpen, en de noemer met het aantal kinderen waarover verdeeld moet worden. Derhalve staan de voorwerpen bovenaan het scherm, en de kinderen onderaan.

De voorwerpen kunnen de vorm hebben van taarten, chocoladerepen, wafels en zuurstokken. De aantallen variëren van minimaal 1 tot maximaal 3 repen, 4 taarten, 4 wafels of 5 zuurstokken. Het aantal kinderen varieert van 2 tot en met 20.

De bedoeling is dat de leerling met het mes dat op het rechterpaneel beschikbaar is de voorwerpen doorsnijdt, en met het handje uitdeelt. De cursor verandert in een mes



als er op de knop geklikt wordt met het plaatje van een mes en de tekst 'snijden' erop. Bij een voorwerp de muisknop indrukken betekent nu: begin van een snede; de muisknop loslaten betekent: einde van die snede. Snijden kan in willekeurige richtingen. Het is ook mogelijk om bijvoorbeeld tot halverwege een voorwerp te snijden, en dan vanaf een andere kant het partje af te maken. Om niet teveel te laten afhangen van de fijnmotorische vaardigheden van leerlingen, denkt Eerlijk Verdelen bij Snijden & Geven een beetje mee over wat de bedoeling van het snijden is. Bijvoorbeeld, als een snede net niet helemaal door een voorwerp gaat, trekt het programma de snede door tot de rand. Bij de heel smalle zuurstokken tekent het programma de sneden telkens loodrecht op de lengterichting, ook al zijn ze door leerlingen schuin getrokken. Bij de langwerpige zuurstokken is de lengte namelijk eerder dan de oppervlakte het criterium voor een eerlijke verdeling.

Na het snijden deelt de leerling de ontstane stukken uit aan de kinderen die onderaan op het scherm staan. Dat kan door de stukken te verslepen met de hand die eveneens op het rechterpaneel staat; de cursor verandert in een hand als er op de knop met de hand en 'geven' wordt geklikt. Elk uitgedeeld stuk krijgt automatisch dezelfde kleur en hetzelfde patroon als de trui van het kind aan wie het is uitgedeeld. Alle kinderen hebben onderling verschillende kleuren truien aan, met onderling verschillende patronen erop. De leerling moet alles uitdelen aan de kinderen, en dit moet eerlijk gebeuren. Als er door het snijden 'kruimels' zijn ontstaan, hoeven die niet te worden uitgedeeld — Eerlijk Verdelen ziet dat door de vingers.

Als een leerling spijt heeft van een snijhandeling, of hij heeft een stuk verkeerd gegeven, dan kan hij dat ongedaan maken door op de knop met het gum te klikken. Nog een keer gummen heeft tot gevolg dat de voorlaatste handeling teniet wordt gedaan, enzovoort, eventueel totdat de oorspronkelijke verdeelsituatie weer ontstaan is.

Als een leerling vindt dat hij klaar is, drukt hij op de knop 'OK', en Eerlijk Verdelen evalueert het resultaat. Criterium voor een eerlijke verdeling is, dat elk kind evenveel ontvangt, afgemeten aan de oppervlakte van de uitgedeelde stukken. Het oppervlaktecriterium is door de leraar instelbaar qua strengheid. Als de verdeling nauwkeurig genoeg uitgevoerd is, verschijnt 'Het is eerlijk' in een spreekwolk. Als er niet eerlijk is verdeeld, verschijnt een spreekwolk 'Ik vind het niet eerlijk', uitgesproken door de kinderen die te weinig kregen.

Als een opgave niet correct is uitgevoerd, krijgt een leerling dezelfde opgave opnieuw, als herkansing. Lukt het in tweede instantie nog niet, dan krijgt hij de volgende opgave. Mocht een leerling een bepaalde opgave van Eerlijk Verdelen te lastig vinden, dan kan hij die overslaan zonder met het programma te stoppen. Als hij op 'OK' drukt, terwijl er nog niets uitgevoerd is, meldt het programma 'Je hebt nog niets gedaan' (interpretatie: de leerling drukt, wellicht per abuis, te vroeg op 'OK'); als de leerling vervolgens weer op 'OK' drukt, verschijnt de volgende opgave (interpretatie: de leerling wil deze opgave niet uitvoeren).

Eerlijk Verdelen biedt vooral bij Snijden & Geven een realistische microwereld voor leerlingen. Hoewel — de realiteit wordt al vanaf deze eerste aanblik van het programma een beetje geweld aangedaan. In een alledaagse verdeelsituatie zal een leerling zelf meestal ook meedelen in de op te maken etenswaar; bij Eerlijk Verdelen verdeelt hij telkens over een aantal kinderen zonder zelf mee te doen. De kinderen waarover verdeeld wordt kijken op het scherm niet naar de etenswaar die ze toegestopt krijgen, en bemoeien zich niet met de manier van verdelen totdat de leerling op de knop 'OK' drukt. In de praktijk gaat het er meestal wat geëmotioneerder aan toe als er iets lekkers verdeeld wordt. Verder zijn er in het dagelijks leven ook eerlijke verdelingen mogelijk waarbij niet alles in één keer wordt opgemaakt, zoals bijvoorbeeld bij het snijden van een cake; het programma keurt dat af — alles moet op.

Een doel van Snijden & Geven is, dat leerlingen kennis maken met de microwereld Eerlijk Verdelen, dat ze zich het 'script' eigen maken waaraan een verdeling moet voldoen om eerlijk te zijn.

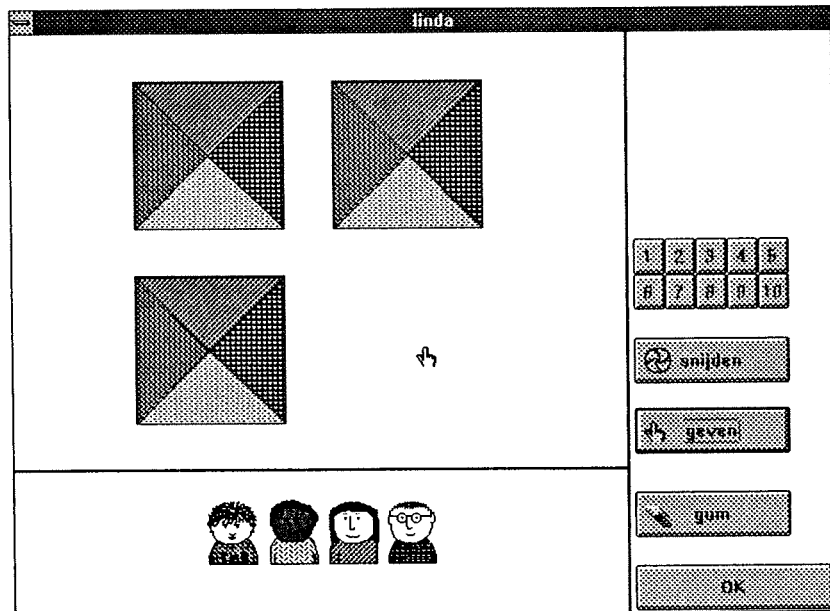
Na een tijd oefenen met dit onderdeel van het programma krijgen leerlingen er in het algemeen genoeg van om telkens weer alle sneden heel precies uit te moeten voeren, en alle stukken te moeten verslepen. De uitvoerigheid van het werk remt dan de begripsvorming. Dan is het moment aangebroken om over te stappen naar het tweede onderdeel van Eerlijk Verdelen, Snijmachines.

### 3 Snijmachines

De eerste aanblik van het tweede onderdeel van het programma is nagenoeg gelijk aan die van het eerste, hetgeen te zien is in figuur 4.2. Toch zijn er aanzienlijke functionele veranderingen. De voorwerpen staan op dezelfde positie, bovenaan het scherm, maar zijn nu gestyleerde, geometrische vormen. Alle basisvormen blijven echter beschikbaar: strook, cirkel, vierkant en rechthoek. Ze vervangen, respectievelijk, de zuurstok, taart, wafel en reep. Het maximaal aantal voorwerpen is nu 12, voor elk van de vormen. Daarmee wordt het mogelijk ingewikkelder verdeelsituaties op het scherm te representeren. Het programma past de grootte van de voorwerpen automatisch aan, teneinde een gunstige vlakverdeling van het scherm te krijgen. Niet-uitgedeelde voorwerpen zijn rood<sup>1</sup>, de meest afwijkende kleur ten opzichte van de truien van de kinderen op het scherm, en hebben geen patroon. De bedoeling van het onderdeel Snijmachines is weer om te komen tot een eerlijke verdeling van de voorwerpen over de kinderen onderaan het scherm.

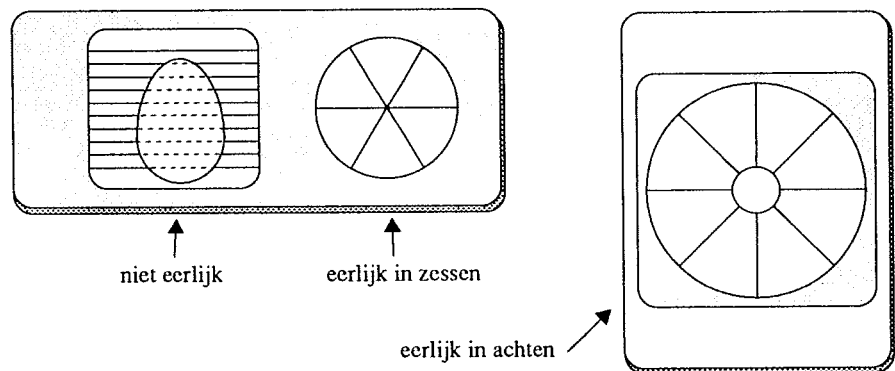
---

1. In dit boek zijn rode, niet-uitgedeelde voorwerpen of stukken daarvan weergegeven in wit, omdat dat in zwart-wit het sterkst afwijkt van de kleuren van de truien.



figuur 4.2 Snijmachines: alles is gesneden en eerlijk uitgedeeld

Het snijden van de voorwerpen gaat bij Snijmachines anders dan bij Snijden & Geven: de leerling krijgt de beschikking over 'snijmachines'. Het effect van snijmachines kan klassikaal gedemonstreerd worden met eenvoudig huishoudelijk gereedschap: een eiersnijder en een appelsnijder, zoals te zien is in figuur 4.3.



figuur 4.3 Een eiersnijder en een appelsnijder uit de keuken, als voorbeeld van snijmachines voor Eerlijk Verdelen

## Snijmachines

Bij Eerlijk Verdelen kan een snijmachine gekozen worden door op de knop ‘snijden’ te klikken, die weer op dezelfde positie staat als het mes bij Snijden & Geven. Vervolgens moet een getal aangeklikt worden, dat overeenkomt met het aantal stukken waarin een leerling een voorwerp wil snijden.

De winst van het werken met snijmachines wordt duidelijk als de leerling ermee klikt boven een voorwerp. Het voorwerp wordt dan automatisch en onmiddellijk verdeeld in gelijke stukken; het aantal stukken dat ontstaat correspondeert met de gekozen snijmachine. Er hoeft in tegenstelling tot bij het mes niet precies op een bepaalde positie gesneden te worden; als er maar ergens in het voorwerp geklikt wordt gaat het goed. Een tweede keer klikken zorgt ervoor, dat het deel waar de snijmachine dan boven staat nog eens in gelijke stukken wordt verdeeld. Als bijvoorbeeld een ‘4-snijdende’ machine is gekozen, dan ontstaan er na één keer klikken 4 stukken van  $\frac{1}{4}$  voorwerp; bij de tweede keer klikken wordt een partje van  $\frac{1}{4}$  voorwerp nog eens verdeeld in 4 stukken, elk ter grootte van  $\frac{1}{16}$  voorwerp.

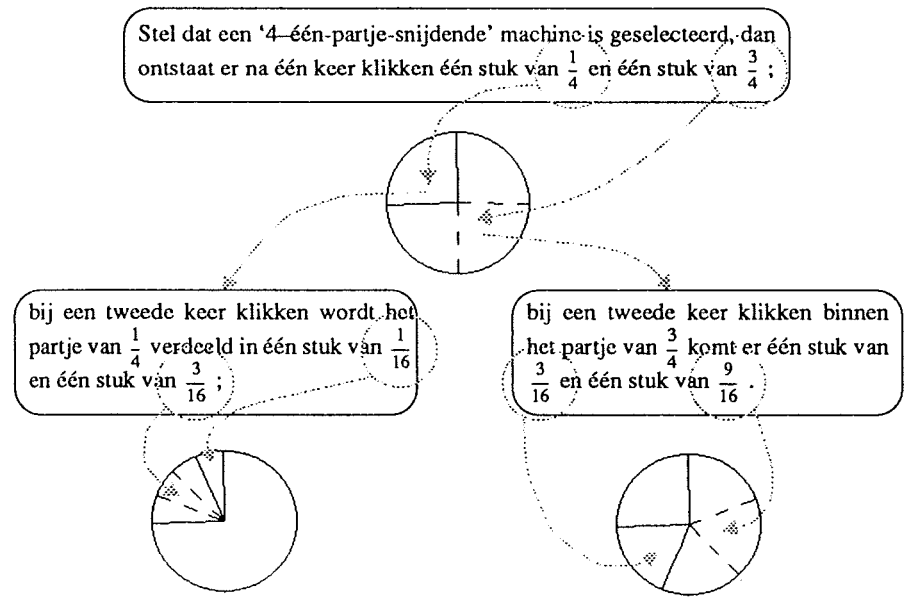
De snijmachines die gebruikt kunnen worden, gaan van 2 tot en met 10 en van 11 tot en met 20. De eerste serie is bij alle opgaven beschikbaar; de tweede alleen bij opgaven waarbij dat is gespecificeerd. Leerlingen kunnen in het laatste geval kiezen tussen de eerste en de tweede serie met een extra knop die op het scherm verschijnt naast het blok getallen, zoals geïllustreerd in figuur 4.4. Het is verstandig dat de leraar niet onmiddellijk het gebruik van de tweede serie machines toestaat, maar dat hij eerst enkele opgaven laat maken met snijmachines tot en met 10.



figuur 4.4 Wisseling van ‘2 - 10-snijdende’ machines naar ‘11 - 20-snijdende’ machines en terug

Als leerlingen na enige tijd vertrouwd geraakt zijn met het snijden met deze snijmachines, kan een tweede type snijmachine worden geïntroduceerd. Dit tweede type snijdt voorwerpen niet in gelijke delen — het haalt er slechts één partje af en laat de rest van het voorwerp ongemoeid. Bij dit type snijmachines is het moeilijker voor leerlingen om te voorspellen hoe er precies gesneden gaat worden. Daarom zijn deze snijmachines uitsluitend beschikbaar als dat door de leraar bij een opgave is gespecificeerd.

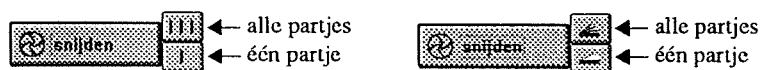
Stel dat een ‘4-één-partje-snijdende’ machine is geselecteerd, dan ontstaat er na één keer klikken één stuk van  $\frac{1}{4}$  en één stuk van  $\frac{3}{4}$ ; bij een tweede keer klikken wordt het partje van  $\frac{1}{4}$  verdeeld in één stuk van  $\frac{1}{16}$  en één stuk van  $\frac{3}{16}$ ; bij een tweede keer klikken binnen het partje van  $\frac{3}{4}$  komt er één stuk van  $\frac{3}{16}$  en één stuk van  $\frac{9}{16}$ .



figuur 4.5 Feedforward bij de snijmachines die één partje snijden

Als er een snede wordt gemaakt met een ‘één-partje-snijdende’ machine, laat Eerlijk Verdelen door middel van stippelijnen eerst zien hoe de verdeling is gepland. De stippelijnen blijven enige seconden zichtbaar, als feedforward voor de leerling over hoe de computer aan de verdeling komt. Als vervolgens de stippelijnen verdwijnen, blijft het gesneden stuk zichtbaar. Juist bij de tweede keer snijden helpen de tijdelijk aanwezige stippelijnen om te begrijpen hoe de sneden zijn ontstaan. Het gebruik van de ‘één-partje-snijdende’ machine bereidt direct voor op de equivalentierelatie ‘ $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$ ’. Een klasgesprek ter voorbereiding van het gebruik van de ‘één-partje-snijdende’ machines is nuttig.

Als het gebruik van de ‘één-partje-snijdende’ machines is toegestaan, dan kan een keuze gemaakt worden tussen ‘één partje’ en ‘alle partjes’, door de knop te bedienen die dan rechts naast de knop met ‘snijden’ verschijnt. Figuur 4.6 geeft dit weer. Als een leerling niet kiest, staan de snijmachines altijd vanzelf op alle partjes snijden.



figuur 4.6 Snijmachines, voorzien van een keuzetoets voor één of alle partjes (links: rechthoeken, vierkanten en stroken; rechts: cirkels)

























Het maakt voor het aantal stukken dat ontstaat door snijden met een snijmachine niet uit waar er in het voorwerp geklikt wordt, noch voor de grootte ervan. De vorm van die stukken kan afhankelijk van de plaats van klikken wèl anders worden. De positie van de snijmachine binnen een voorwerp bepaalt de richting van snijden. De snijmachines kunnen op vrijwel alle manieren snijden die leerlingen in de praktijk met het mes van Snijden & Geven blijken uit te voeren.

Afhankelijk van het type snijmachine dat is gekozen, en de positie van de cursor binnen een voorwerp, verandert de cursor in één van de mogelijkheden die weergegeven zijn in figuur 4.7. Op die manier fungeert de vorm van de cursor als feedforward ten aanzien van de vorm van de stukken die gesneden zullen worden als er op die specifieke plek daadwerkelijk wordt geklikt. Als een leerling wil weten hoe er gesneden zal worden, is de gedaante van de cursor een indicatie op welke manier dat zal gebeuren. Hij hoeft echter geen aandacht te schenken aan de vorm van de cursor, als hij de vorm van een stuk niet belangrijk vindt (en uiteindelijk is die niet belangrijk). Overigens kan hij ook eerst snijden, en als het resultaat hem tegenvalt gummen.

Na het snijden deelt de leerling de ontstane stukken uit aan de kinderen die onderaan op het scherm staan, net zo als bij Snijden & Geven. Een uitgedeeld stuk krijgt ook nu automatisch dezelfde kleur en hetzelfde patroon als de trui van het kind aan wie het is uitgedeeld. Het uitdelen aan de kinderen moet vanzelfsprekend weer eerlijk. Bij Snijmachines hoeft niet alles meer te worden uitgedeeld: het is voldoende als tenminste één van de kinderen zijn eerlijke deel krijgt.

De functie van het gum is niet veranderd. Hetzelfde geldt voor de knop 'OK'. Het criterium voor een correcte verdeling is weer de oppervlakte van de uitgedeelde stukken, die nu exact moet kloppen.

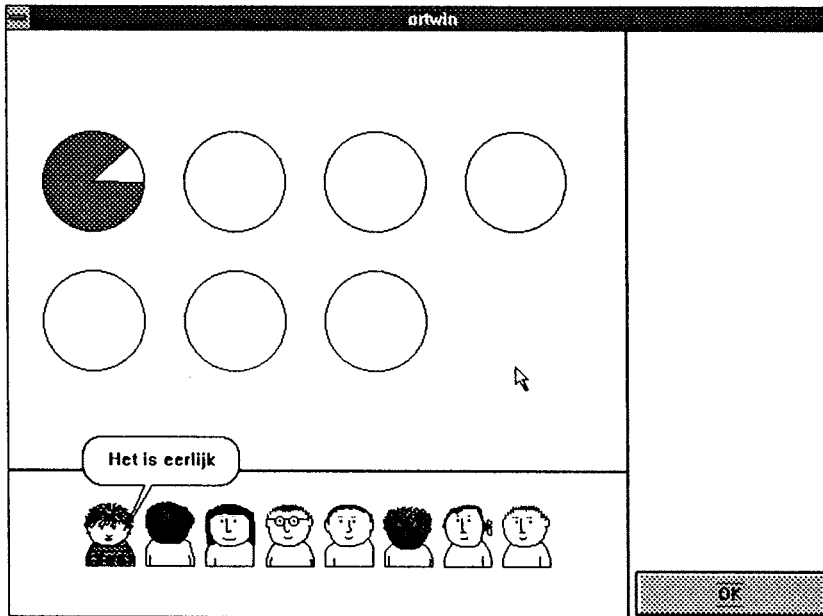
De doelen van het onderdeel Snijmachines zijn, dat leerlingen het snijden leren plannen, en dat ze gaan inzien dat eerlijke verdelingen op heel verschillende, maar equivalente wijzen tot stand kunnen komen. De variatie in verdelingen is in het derde onderdeel van Eerlijk Verdelen, Kleuren & Benocmen, de basis voor het werken met equivalentierelaties tussen breuken. Het op verschillende manieren verdelen is een goede voorbereiding op het inzichtelijk manipuleren met breuken.

Cirkel, 1 <sup>e</sup> .. n <sup>e</sup> keer snijden		Strook, 1 <sup>e</sup> .. n <sup>e</sup> keer snijden	
alle partjes	één partje	alle partjes	één partje
1 <sup>e</sup> keer snijden 			
2 <sup>e</sup> .. n <sup>e</sup> keer snijden 			
Rechthoek of vierkant, 1 <sup>e</sup> keer snijden			
alle partjes		één partje	
gewoon	bijzonder		gewoon
 vanuit boven- of onderkant	 2, vanuit hoek	 vanuit boven- of onderkant	
 vanuit zijkant	 2, vanuit hoek	 vanuit zijkant	
	 2, vanuit boven- of onderkant		
	 2, vanuit zijkant		
	 4, vanuit midden	 4, vanuit linksboven	
	 8, vanuit midden	 4, vanuit rechtsboven	
		 4, vanuit linksonder	
		 4, vanuit rechtsonder	
Rechthoek of vierkant, 2 <sup>e</sup> .. n <sup>e</sup> keer snijden			
boven ontstane rechthoek of vierkant: alle mogelijkheden als bij de eerste keer snijden			
boven ontstane driehoek werkt de machine in de richting van de dichtstbijzijnde zwaartelij			
 alle partjes	 één partje		
boven ontstane L-vorm (het grote stuk na snijden met bijzondere 4-machine) is opnieuw snijden niet mogelijk, de cursor verandert in een teken dat er niet gesneden kan worden			
			
Alle voorwerpen, n <sup>e</sup> snede			
ook als de te snijden stukken kleiner dreigen te worden dan de kleinst toegestane 'kruimel', verschijnt het teken dat er niet gesneden kan worden			
			

figuur 4.7 Vormen en functies van een snijmachine boven een voorwerp

## 4 Kleuren & Benoemen

Kleuren & Benoemen, het derde en laatste onderdeel van Eerlijk Verdelen, lijkt aan de buitenkant weer veel op het tweede onderdeel, Snijmachines.



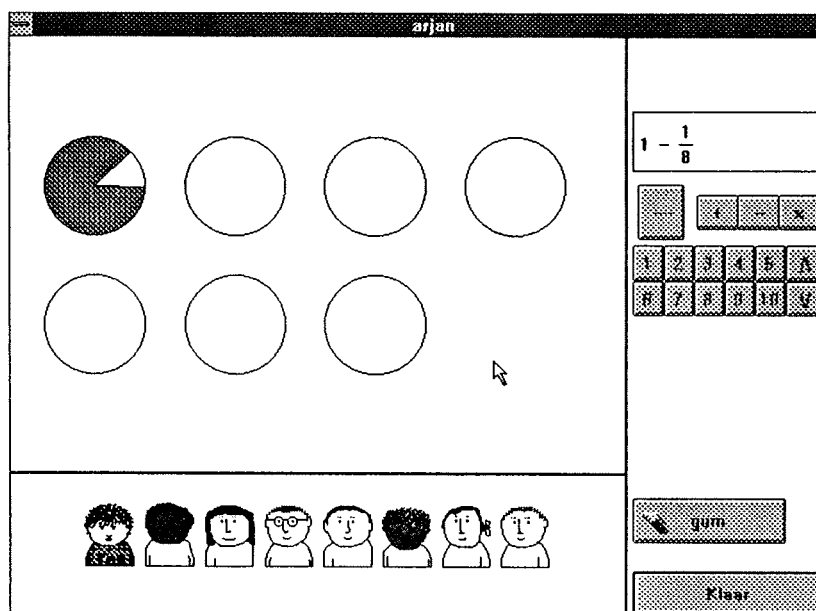
figuur 4.8 Kleuren & Benoemen: verdelen op het hoogste niveau

Het snijden gebeurt bij Kleuren & Benoemen ook met snijmachines. Bij vierkanten en rechthoeken kunnen de snijmachines nu echter uitsluitend nog horizontaal en verticaal snijden. De bedoeling van deze inperking is, dat leerlingen een stap verder doen in het modelmatig werken met de verdeelsituatie. Het snijden in segmenten van de cirkels en het verticaal snijden van stroken blijft onveranderd. Wat het snijden betreft is nu het hoogste niveau bereikt.

Aan het scherm valt op, dat nog maar één kind gekleurd is: dat is Tes. De bedoeling is, dat alleen nog maar de portie van Tes wordt ingekleurd. Bovendien hoeven geen stukken meer over het scherm te worden verslept: de hand op het bedieningspaneel is vervangen door een potlood. Dit is de kortste vorm van 'geven'.

Als eenmaal de portie van Tes is gesneden en gekleurd, verschijnt na 'OK' de vertrouwde feedback 'Het is eerlijk' of 'Het is niet eerlijk', zie figuur 4.8. Als er eerlijk is verdeeld, geeft het programma de leerling een geheel nieuwe taak: hij moet de grootte van de portie van Tes weergeven in formele breuknotatie. Hier moet een klassikale introductie aan voorafgaan.

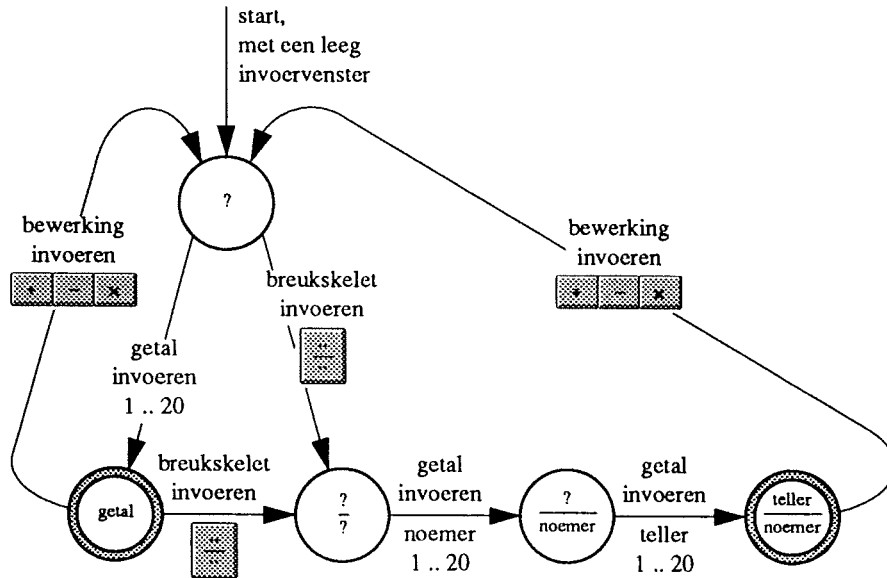




figuur 4.9 Kleuren & Benoemen: het benoemen van één eerlijke portie

Het invoeren van de breuk door de leerling gebeurt op het bedieningspaneel, met hetzelfde getallenblok als bij de snijmachines en met nieuwe knoppen voor de bewerkingen '+', '-' en '×', en een knop voor het breukskelet, zie figuur 4.9. Bij het ontwerp van het invoermechanisme voor de breuken is speciale aandacht besteed aan de interface: een goed idee van een leerling mag niet mislukken doordat hij twijfelt over de bediening van het invoermechanisme voor de breuken. Om leerlingen daarbij van dienst te zijn, maakt Eerlijk Verdelen het onmogelijk om een syntactisch onjuiste sequentie van symbolen in te voeren. Als bijvoorbeeld een breuk is ingevoerd, kan er niet een getal of een breukskelet worden ingevoerd; uitsluitend een bewerking kan volgen. Twee bewerkingen achter elkaar zijn eveneens verboden. Een schematische weergave van het invoermechanisme is weergegeven in figuur 4.10. De afscherming is geïmplementeerd volgens de *Windows*-standaard: de verboden bedieningsknoppen zijn grijs, en reageren niet op het klikken van de muis.

De semantiek van de ingevoerde breukformule wordt door Eerlijk Verdelen geëvalueerd, en is 'goed' of 'fout'. Er wordt de leerling niet gevraagd de breuken te vereenvoudigen. Na een foute invoer krijgt een leerling nog eenmaal de kans om zijn antwoord te herzien.



Opmerkingen:

- (1) De hulp die geboden wordt is, dat er niet 'tegen de pijlen in' kan worden gewerkt.
- (2) De werking van het invoermechanisme voor de breuken is weergegeven als een eindige automaat: dubbele cirkels indiceren legale eindtoestanden; hier stoppen betekent een syntactisch correcte expressie (hetgeen niet automatisch een correct antwoord impliceert).
- (3) Als een leerling 'OK' klikt terwijl er in het invoerscherm nog een vraagteken staat (bij enkele cirkels), dan is de expressie nog niet af, en dus is het antwoord fout.

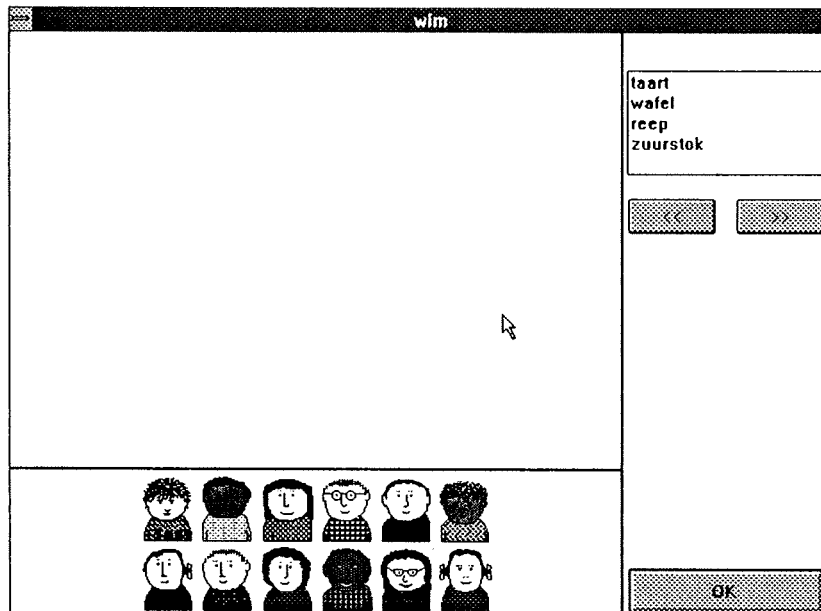
figuur 4.10 Structuur van mogelijke invoersequenties bij het benoemen van een uitgedeelde portie in de formele breuknotatie

## 5 Opgaven en eigen producties

Een belangrijk aspect van de opbouw van Eerlijk Verdelen is gelegen in de volgorde waarin de opgaven aan de leerlingen worden aangeboden. Het blijkt niet eenvoudig om in formele regels weer te geven welke moeilijkheidsgraad een opgave heeft voor een leerling. Dat komt doordat bij breuken veranderingen van de teller en van de noemer en van hun onderlinge verhouding van belang zijn voor de moeilijkheid. Voor de corresponderende verdeelsituaties geldt een analoge redenering. Het grootste obstakel voor een indeling in moeilijkheidsgraad schuilt echter niet in opgavenkenmerken, maar in het vaststellen van kenmerken van het vorderend leerproces van individuele leerlingen. Afhankelijk van iemands begripsniveau is een bepaalde op-

gave moeilijk of niet. Er is geen eenvoudig verband tussen die twee. Of '4 repen verdelen over 8 kinderen' gemakkelijk of moeilijk is, hangt sterk af van of een leerling inziet dat deze situatie is op te vatten als '1 reep met z'n tweeën, en dat 4 keer'. In bepaalde gevallen kan er toch, onafhankelijk van het niveau van individuele leerlingen, iets gezegd worden over het verschil in moeilijkheid van opgaven. Bijvoorbeeld is '1 reep verdelen over 2 kinderen' gemakkelijker uit te voeren dan '6 repen verdelen over 5 kinderen'. De leraar die opgaven klaarzet voor zijn leerlingen moet hiermee zo goed mogelijk rekening houden. Hij kan naar eigen inzicht oefeningen klaarzetten voor de leerling als er wordt gewerkt met de COO-versie. Hier wordt in het volgende hoofdstuk aandacht aan besteed. Als er met de ITS-versie wordt gewerkt, komen de opgaven automatisch, en wordt de moeilijkheidsgraad bepaald door de vorderingen van de leerling.

Eén van de pijlers van het realistisch rekenonderwijs is, dat leerlingen voldoende vrijheid hebben om eigen producties te maken. Dat houdt ten eerste in, dat leerlingen op hun eigen wijze een opgave oplossen, en dat variatie daarin wordt goedgekeurd en zelfs toegejuicht. Er zijn reeds enkele voorbeelden van dergelijke alternatieven de revue gepasseerd. In de tweede plaats worden leerlingen in staat gesteld om hun eigen verdeelsituatie te componeren. Ook dit is bij Eerlijk Verdelen mogelijk, zie figuur 4.11.



figuur 4.11 Een leerling mag zelf weten hoeveel voorwerpen van een nader te bepalen soort hij verdeelt over 12 kinderen

Bij een vrije opgave mag een leerling zelf bepalen hoeveel voorwerpen van welk soort hij verdeelt over een vrij aantal kinderen. Het is ook mogelijk de vrijheid in te perken: een leerling mag bijvoorbeeld zelf het soort en aantal voorwerpen kiezen, of alleen het aantal kinderen waarover verdeeld wordt. Het componeren van eigen verdeelsituaties is mogelijk in alle drie de fasen van het programma.


Met de knoppen rechts naast de plaats van de voorwerpen kan een leerling voorwerpen 'bijklikken' en weer 'wegklikken'; als ook het aantal kinderen vrij is, staat ter hoogte van de kinderen rechts nog zo'n stel knoppen. Als de leerling klaar is met het componeren van een verdeelsituatie, drukt hij op 'OK'. Dan verschijnt de verdeelsituatie als opgave, qua presentatie identiek aan de eerder door hem gemaakte opgaven.


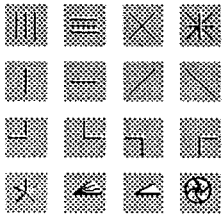
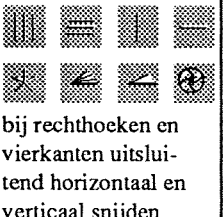


Het is mogelijk om leerlingen opgaven te laten samenstellen die ze vervolgens zelf oplossen. Het is in het geval er duo's aan het werk zijn (zie paragraaf 7) ook mogelijk om de één een opgave te laten maken voor de ander. Leerlingen leren op deze manier te reflecteren over wat gemakkelijke en moeilijke opgaven zijn. Als hun collega'tje de opgave vervolgens oplost, komt de opsteller van de opgave menigmaal voor verrassingen te staan. Beschouw de opgave 'verdeel 5 repen over 18 kinderen', die door een leerling bedacht werd voor zijn medeleerling. Het lijkt in eerste instantie vrijwel ondoenlijk om een dergelijke opgave snel op te lossen. Maar niet meer toen de leerling het probleem splitste in 'verdeel 3 repen over 18 kinderen' (gemakkelijk: in zessen), en dan nog eens 'verdeel 2 repen over 18 kinderen' (ook gemakkelijk: in negen stukken). Uit dit voorbeeld zal overigens ook nog eens duidelijk worden, dat Eerlijk Verdelen een heel andere kijk biedt op het ontstaan van breuken. Het veronderstelt — niet in de laatste plaats voor leraren — een nieuwe manier van denken over dit onderwerp.

## 6 Overzicht van Eerlijk Verdelen

Na deze beschrijving van Eerlijk Verdelen per onderdeel volgt nu een kort overzicht van het hele programma. In figuur 4.12 is nog eens al het gereedschap weergegeven dat leerlingen tot hun beschikking staat. De ontwikkeling bij de voorwerpen loopt van een bescheiden aantal realistische afbeeldingen van etenswaar (3, 4 of 5) naar maximaal 12 geometrische vormen. Het snijden begint op uitvoerige wijze met een mes, wordt dan modelmatiger door het gebruik van snijmachines, en is op het hoogste niveau beperkt tot verticaal en horizontaal machinaal, 'één partje' of 'alle partjes' snijdend, ten hoogste tot 10 of tot 20 partjes. Het geven gebeurt aanvankelijk door alle stukken met de hand te verslepen, vervolgens hoeft het alleen voor één of een paar van de kinderen te gebeuren en tenslotte is het alleen nodig om één portie te kleuren. Het maximaal aantal kinderen op het scherm is onveranderd 20. De kleur

van hun truien is tijdens het laatste onderdeel beperkt tot één gekleurde, in verband met het beperkte uitdelen. Het benoemen van de uitgedeelde porties gebeurt alleen in het laatste onderdeel. De beoordeling van de verdeling is in het begin 'bij benadering eerlijk'; later moet het 'exact' zijn.

Er zijn ook onveranderlijke elementen in Eerlijk Verdelen: het gum maakt altijd de laatste handeling ongedaan, of het nu een gemaakte snede is, het uitdelen van een stuk, of het invoeren van een breuk. De vorm van de feedback is constant, net als de standaard *Windows*-knop  om het programma te verlaten. Op alle niveaus worden leerlingen in de gelegenheid gesteld om zelf opgaven te formuleren.

	Snijden & Geven	Snijmachines	Kleuren & Benoemen
<i>snijden</i>	<p>Mes:</p>  <p>Snijden in willekeurige richting, grootte ligt niet vast</p>	<p>Machines:</p>  <p>bij rechthoeken en vierkanten uitsluitend horizontaal en verticaal snijden</p> <p>voor de functie van machines: zie figuur 4.7 2 – 10 partjes → 2 – 20 partjes snijdend 'alle partjes' → 'alle partjes' of 'één partje'</p>	<p>Machines:</p>  <p>bij rechthoeken en vierkanten uitsluitend horizontaal en verticaal snijden</p>
<i>geven</i>	 <p>slepen van alle stukken, die de kleur en het patroon van de truien krijgen</p>	 <p>slepen van minimaal één portie; kleur + patroon van trui(en)</p>	 <p>aanklikken van één portie; krijgt kleur van trui van Tes</p>
<i>voorwerpen</i>	maximaal: 5 zuurstokken, 4 taarten, 3 repen, 4 wafels realistische plaatjes	maximaal 12 geometrische figuren: stroken, cirkels, rechthoeken of vierkanten niet-uitgedeelde stukken: rood zonder patroon	
<i>kinderen</i>	2 – 20, allen gekleurd + patroon		2 – 20, Tes gekleurd
<i>benoemen</i>	niet van toepassing		na correcte verdeling
<i>beoordeling</i>	bij benadering eerlijk verdeeld	exact eerlijk verdeeld	exact eerlijk verdeeld; correcte benoeming
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- gum: ongedaan maken van handelingen (snijden, geven en breuken invoeren)</li> <li>- beurten: keuze tussen (1) in duo's werken (2) individueel (3) beurtensysteem uit</li> <li>- stoppen: als een leerling Eerlijk Verdelen verlaat met de standaard <i>Windows</i>-knop, dan onthoudt het programma waar hij is gebleven</li> <li>- vrije opgaven</li> </ul>		

figuur 4.12 Veranderingen in het gereedschap waarover leerlingen bij Eerlijk Verdelen kunnen beschikken

## 7 Eerlijk Verdelen in de lessituatie

Eerlijk Verdelen beschikt over een automatisch beurtensysteem. Leerlingen worden in een te voren door de leraar opgegeven volgorde door de computer uitgenodigd om te komen oefenen. Ook als het beurtensysteem uitgeschakeld is, kunnen leerlingen oefenen. Dan moeten ze eerst hun naam intypen, opdat de computer opzoekt welke oefeningen er voor hen op het programma staan. Eerlijk Verdelen is geschikt voor individueel werkende leerlingen of voor duo's. Het programma geeft twee samenwerkende leerlingen in principe telkens dezelfde opgaven, en zorgt ervoor, dat leerlingen beurtelings het eerst een opgave maken.

Het werken in duo's is niet alleen ingegeven door de beperkte beschikbaarheid van hardware op basisscholen. Als leerlingen met z'n tweeën werken, neemt de gelegenheid om te reflecteren over het eigen werk, en dat van de medeleerling, aanzienlijk toe: ze gaan vanzelf praten over elkaars oplossingen en de handigheid daarvan. Zelfs als het niveau van de twee onderling enigszins uiteenloopt, is het werken in duo's aan te bevelen. Uit de praktijk blijkt, dat de beste leerling in zo'n situatie met opzet op een andere manier verdeelt, en extra nadenkt over een slimme oplossing of juist een heel ingewikkelde variant. De zwakkere leerling trekt zich op aan het voorbeeld van zijn collegaatje. Afkijken impliceert hier geen passiviteit — het onthouden van de procedure om in een bepaalde situatie eerlijk te verdelen vergt een mentale verwerking op een voor zo'n zwakkere leerling hoog niveau.

Eerlijk Verdelen vervangt niet het klassikale breukenonderwijs. Het kan vooral goede diensten bewijzen bij het praktisch oefenen met verdeelsituaties. Van tijd tot tijd zal ook één en ander klassikaal moeten worden behandeld. In het voorafgaande is een enkele keer — zeker niet uitputtend — aangegeven waar dat nuttig is. Naast klassikale instructie kunnen originele oplossingswijzen van individuele leerlingen interessante onderwerpen vormen voor een klasgesprek.

### **Literatuur**

Streefland (1988) rapporteert over het langlopende onderzoek naar de verbetering van de breukendidactiek. De literatuurlijst van deze dissertatie geeft ingang tot de uitvoerige wetenschappelijke literatuur die beschikbaar is over de breukendidactiek. Andere relevante literatuur over de didactische uitgangspunten van Eerlijk Verdelen is vermeld bij hoofdstuk 2. Het *Macintosh*-prototype van Eerlijk Verdelen is ontwikkeld door Jonker, Van Galen en Grave-meijer (1988), op basis van Streeflands werk.



---

## Hoofdstuk 5

### Eerlijk Verdelen: voor de leraar

Johan Zuidema

Vaak wordt bij educatieve computerprogramma's achter de schermen allerlei informatie bijgehouden: welke leerlingen er toegang hebben tot het programma, welke opgaven er gemaakt zijn en hoe goed de leerlingen daarbij gepresteerd hebben. Een lerarendeel maakt deze gegevens toegankelijk voor de leraar. Bovendien biedt het lerarendeel de mogelijkheid om opgaven voor leerlingen klaar te zetten.

Het lerarendeel wordt maar al te vaak 'het ondergeschoven kindje' van een ontwikkelproject. Op het laatst moet er nog snel een module geprogrammeerd worden voor de leraar, waarmee hij het programma geschikt kan maken voor gebruik in zijn klas. Het is begrijpelijk dat er aan een lerarendeel in eerste instantie minder aandacht besteed wordt. Ontwerpers van educatieve software hebben tijdens het maken van een programma de leerling in gedachte — die moet er immers mee werken. Vanuit didactisch oogpunt lijkt het lerarendeel van minder belang.

Het wordt echter hoe langer hoe duidelijker, dat de toegankelijkheid tot een computerprogramma voor leraren heel belangrijk is, willen ze het daadwerkelijk in hun klas gebruiken. Als het leraren veel tijd kost om hun leerlingen uiteindelijk achter het apparaat aan het werk te krijgen en te houden, zullen ze weinig gebruik maken van het programma. Als het lerarendeel heel simpel te bedienen is, maar daardoor beperkt in zijn mogelijkheden, dan is dit voor veel leraren evenmin acceptabel. Overigens is er niet altijd een lerarendeel bij educatieve software. Als een programma alleen gebruikt wordt om bijvoorbeeld animaties op het scherm te tonen, dan is een lerarendeel niet nodig. Als er opgaven gegeven worden aan leerlingen, dan heeft een leraar daar wèl weer behoefte aan.

Bij Eerlijk Verdelen is een lerarendeel zeker gewenst. Ook bij dit project dreigde het lerarendeel de sluitpost te worden. Uiteindelijk is er echter ruime aandacht aan besteed. De grondgedachte bij het ontwerp van het lerarendeel van Eerlijk Verdelen is geweest, dat een leraar liefst onmiddellijk moet kunnen beginnen met het gebruik van het programma, in een standaardvorm. Het lerarendeel wordt dan ook 'gevuld' aangeleverd. Pas als de leraar speciale wensen heeft, wordt het tijd voor hem om zich in de betreffende aspecten van het lerarendeel te verdiepen. Het lerarendeel van Eerlijk Verdelen blijft op deze manier simpel te bedienen, maar is vrijwel niet beperkt qua mogelijkheden. De bespreking van het lerarendeel van Eerlijk Verdelen wordt gevoerd aan de hand van de implementatie voor het COO-programma, waarvan het leerlingendeel is beschreven in hoofdstuk 4.



## 1 Het hoofdmenu

De functionaliteit van het lerarendeel is direct af te leiden uit het hoofdmenu, dat bij het opstarten van het lerarendeel verschijnt. Er kan gekozen worden uit de volgende opties:

- gemaakte oefeningen
- te maken oefeningen
- groepen & beurten
- oefeningenbibliotheek
- standaardinstellingen

De opties zijn gerangschikt in de volgorde waarin een leraar ër naar verwachting het frequentst gebruik van zal maken. Als alles eenmaal draait, is hij voornamelijk nog geïnteresseerd in de prestaties van de leerlingen. ‘Gemaakte oefeningen’ verschaft hem toegang tot deze gegevens. Bovendien moet hij regelmatig nieuwe oefeningen klaarzetten voor de leerlingen: dat kan met ‘te maken oefeningen’. Af en toe zal een nieuwe groep gebruik gaan maken van Eerlijk Verdelen; die moet eerst worden ingevoerd bij ‘groepen & beurten’. Hier wordt ook de volgorde van het automatisch beurten geven bepaald, en wie met wie eventueel samenwerkt. In de ‘oefeningenbibliotheek’ kan een leraar zelf nieuwe oefeningen maken, of reeds bestaande aanpassen aan eigen wensen. Met behulp van de laatste optie van het hoofdmenu, ‘standaardinstellingen’, kan de leraar Eerlijk Verdelen op sommige punten aanpassen.

De details van de vijf opties worden in de volgende paragrafen puntsgewijs behandeld, zij het, vanwege de onderlinge afhankelijkheden tussen de opties, in omgekeerde volgorde.

## 2 Standaardinstellingen

Met standaardinstellingen kan de werking van Eerlijk Verdelen worden beïnvloed. De instellingen gelden voor het hele programma, en zijn voor alle leerlingen gelijk.

### ***Beveiliging met wachtwoord***

Het lerarendeel van Eerlijk Verdelen kan voor leerlingen worden afgesloten met een wachtwoord. De wachtwoordbeveiliging kan ook worden uitgeschakeld.

### ***Beperking registratie***

Als de geregistreerde gegevens niet van tijd tot tijd worden opgeruimd, zou het registratiebestand op den duur ontoelaatbaar veel ruimte in beslag nemen. Om dit te voorkomen houdt Eerlijk Verdelen bij hoe lang geleden de registratiegegevens zijn ge-

nereerd, en hoeveel ruimte die innemen. Het programma verwijdert automatisch de oudste leerlinggegevens, die het door de leraar tevoren ingestelde tijdstip overschrijden, of die de ingestelde omvang te boven gaan.

#### ***Grootte van kruimels***

In de drie onderdelen van Eerlijk Verdelen kunnen na veelvuldig snijden heel kleine stukjes ontstaan; deze stukjes worden kruimels genoemd. Een leraar kan de grootte van de kruimels die niet meer hoeven te worden uitgedeeld, instellen. Zo kan hij voorkomen dat er te priegelig gewerkt wordt.

#### ***Strengheid van beoordeling bij Snijden & Geven***

In het eerste onderdeel van Eerlijk Verdelen, Snijden & Geven, kan de leraar de strengheid van beoordeling van een uitgevoerde verdeling instellen: de ingestelde waarde geeft aan hoe zorgvuldig een leerling moet snijden om een verdeling als eerlijk beoordeeld te krijgen. Leraren die te maken hebben met motorisch iets minder begaafde leerlingen kunnen Eerlijk Verdelen zo iets coulanter laten beoordelen.

#### ***Hulp bij snijden bij Snijden & Geven***

Eveneens in Snijden & Geven kan de leraar de mate van hulp bij het snijden instellen. In het vorige hoofdstuk is reeds naar voren gekomen, dat Eerlijk Verdelen een snede die nèt niet helemaal door een voorwerp gaat als een iets langere snede beschouwt. De mate van hulp kan verhoogd worden, als leerlingen niet in staat blijken om heel zorgvuldig te snijden. Opgemerkt zij, dat als de waarde te hoog wordt ingesteld, Eerlijk Verdelen echt bedoelde inkepingen als doorsnijdingen interpreteert.

#### ***Toestaan van schuine sneden bij Snijmachines***

Bij het tweede onderdeel van Eerlijk Verdelen, Snijmachines, kan de leraar instellen of hij bij rechthoeken of vierkanten de schuine sneden vanuit de hoekpunten ('2-snijdende' machine), de bijzondere sneden vanuit het midden ('4-' en '8-snijdende' machines) en een-hoek-eruit-snijden ('4-één-partje-snijdende' machine) toelaat (zie figuur 4.7). Sommigen vinden dat deze sneden de aandacht te ver afleiden van de eigenlijke verdeling, en dat het werken met Eerlijk Verdelen dan te meetkundig wordt; zij zullen besluiten om de knop 'schuine sneden' uit te zetten. Anderen merken op, dat diagonale sneden door leerlingen zelf ook vaak gemaakt worden, en laten de schuine sneden wèl toe.

### **3 Oefeningenbibliotheek**

De oefeningenbibliotheek van Eerlijk Verdelen is gevuld met oefeningen, zodat een leraar onmiddellijk kan starten met het programma. Een leraar kan kiezen om:

- de bestaande oefeningen aan te passen,
- varianten te genereren aan de hand van een kopie van één van de reeds bestaande oefeningen,
- geheel nieuwe oefeningen te genereren.

De interface van de oefeningenbibliotheek controleert of een ingevoerde specificatie uitvoerbaar is binnen de fase van Eerlijk Verdelen waarvoor de oefening is bedoeld. Het is zo niet mogelijk om specificaties in te voeren die Eerlijk Verdelen niet kan verwerken. De opgavekenmerken die de leraar niet specificceert, zijn vrij te kiezen door de leerling. Als een leraar bij een opgave niets specificceert, kan de leerling die opgave dus geheel naar eigen inzicht inrichten.

Een oefening beslaat een (willekeurig) aantal opgaven, die alle van één fase van Eerlijk Verdelen zijn. Het is niet mogelijk om in één oefening opgaven van bijvoorbeeld Snijden & Geven en Kleuren & Benoemen af te wisselen. Hoewel er geen beperkingen zijn aan het aantal opgaven per oefening, zou een leraar bij voorkeur niet al te lange oefeningen moeten genereren — het is praktischer om een flink aantal kortere oefeningen in de bibliotheek te hebben, met varianten voor aanpassingen aan individuele behoeften.

Er is geen eenvoudig recept voor de bepaling van wat de beste oefeningen zijn. Een leraar moet zelf de oefeningen aanpassen voor zijn specifieke gebruik. Hij kan daarbij uitgaan van de bestaande inhoud van de oefeningenbibliotheek, en dan varianten van oefeningen aanmaken. Als daar behoefte aan is, kan de oefeningenbibliotheek ook geheel opnieuw worden opgezet.

## 4 Groepen & beurten

Met behulp van de optie ‘groepen & beurten’ kan een leraar lijsten met leerlingnamen invoeren. Het is hierbij mogelijk om leerlingen in groepen in te delen. Dit is handig voor het onderscheid van bijvoorbeeld groep zes en groep zeven. Het is ook handig voor de indeling in subgroepen als een leraar onderscheid wenst te maken in groepen leerlingen van een bepaald niveau, bijvoorbeeld zwak, gemiddeld en goed. Zoals zal blijken in paragraaf 5, gaat het klaarzetten van oefeningen voor die subgroepen dan veel efficiënter. Het aantal groepen is niet gebonden aan een maximum, evenmin als het aantal leerlingen per groep. Met deze zelfde optie kan een leraar kiezen welke groep er met Eerlijk Verdelen aan de slag gaat. Hij kan daarbij ook nog kiezen om het automatische beurtensysteem in te stellen, waarbij de opties zijn:

- werken in duo’s,
- individueel werken,
- beurtensysteem uitschakelen.

Als het beurtensysteem aanstaat, vult Eerlijk Verdelen zelf de leerlingnamen in op het openingsscherm; als het uitstaat moet een leerling zichzelf bekend maken door zijn naam in te typen, waarna het hele programma weer met de muis wordt bediend. Het beurtensysteem kan altijd tijdelijk worden uitgeschakeld zonder het leerlingen-deel van Eerlijk Verdelen te verlaten, namelijk door de naam van de opgeroepen leerling te overschrijven met die van een andere leerling.

Het laatste aspect van 'groepen & beurten' betreft de duur van een beurt. De leraar stelt in hoelang een leerling achter het scherm zit. Een beurt duurt dus meestal niet tot alle oefeningen die klaarstaan voor de leerling afgemaakt zijn, maar totdat de tevoren ingestelde tijd is verstreken. Eerlijk Verdelen houdt bij wat de laatst gemaakte oefening is, en gaat bij de volgende beurt van de leerling op dat punt verder. Als een leraar één of enkele leerlingen tijdelijk niet met het programma wil laten werken, bijvoorbeeld vanwege ziekte, dan markeert hij die leerlingen op de leerlingenlijst: Eerlijk Verdelen slaat hun beurt dan vanzelf over.

## 5 Te maken oefeningen

Als er een gevulde oefeningenbibliotheek beschikbaar is, en er is tenminste één groepslijst gevuld met namen, dan kan een leraar takenlijsten samenstellen. Op een takenlijst komen alle oefeningen te staan die hij door een leerling of een groep leerlingen wil laten maken. Takenlijsten samenstellen kan op verschillende manieren.

- *oefeningen toekennen aan individuele leerlingen*  
Een geselecteerde oefening wordt toegevoegd aan de takenlijst van één geselecteerde leerling; dat kan op elk gewenst punt. Een oefening kan ook uit een takenlijst worden verwijderd. Het toevoegen of verwijderen van oefeningen bij één leerling heeft geen invloed op de takenlijsten van anderen.
- *oefeningen toekennen aan alle leerlingen van een groep*  
Een geselecteerde oefening wordt toegevoegd aan de takenlijst van een groep leerlingen. Een oefening kan ook weer uit een takenlijst worden verwijderd. Het toevoegen of verwijderen van oefeningen bij één groep heeft geen invloed op de takenlijsten van andere groepen.
- *mengvorm*  
Het is eveneens mogelijk om de beide mogelijkheden van oefeningen klaarzetten door elkaar te gebruiken.

De eerste twee manieren om takenlijsten samen te stellen zijn het meest gebruikelijk. In de praktijk blijkt het bij de mengvorm echter niet zo gemakkelijk om nog het overzicht te houden van voor wie welke oefeningen zijn klaargezet. De mengvorm kan echter wel handig zijn, als één of een paar leerlingen in principe dezelfde oefeningen krijgen als de rest van de groep, terwijl voor dezen enkele oefeningen vervangen worden door aangepaste oefeningen.

## 6 Gemaakte oefeningen

Een leraar kan nagaan hoe goed zijn leerlingen de door hem opgedragen oefeningen hebben gemaakt, door voor de optie 'gemaakte oefeningen' van het hoofdmenu te kiezen. Hij krijgt hierbij per leerling te zien hoeveel opgaven gemaakt zijn, hoeveel er goed zijn opgelost en hoeveel opgaven de gemaakte oefeningen bevatten. Tevens krijgt hij te zien hoelang de leerling erover gedaan heeft.

Een leraar kan de inspectie van de registratiegegevens inperken door te kiezen voor de informatie uitsluitend van een bepaalde dag, of uitsluitend van een bepaalde leerling, of uitsluitend van een bepaalde oefening. Alle combinaties van inperkingen zijn eveneens mogelijk: de leraar kan bijvoorbeeld van één leerling de resultaten van één oefening opvragen, die op één bepaalde dag gemaakt is. Desgewenst kan het gegenereerde overzicht worden geprint.

---

# III

## Redeneren achter de schermen

*In deel III worden de componenten gepresenteerd die deel uitmaken van het ITS-breuken. In hoofdstuk 6 wordt eerst vastgesteld welke componenten vanuit didactisch oogpunt gewenst zijn: de didactische expert, de opgavengenerator, de diagnostische expert en het leerlingmodel. De didactische expert is als het ware de 'motor' van het programma, die de taak van de andere componenten in hoge mate bepaalt. In hoofdstuk 6 wordt verder de onderlinge samenhang van de componenten duidelijk gemaakt en hun relatie tot het basisprogramma Eerlijk Verdelen.*

*In de hoofdstukken 7, 8, 10 en 11 komen de afzonderlijke ITS-componenten aan de orde. De uitwerking van de componenten blijft grotendeels beperkt tot het tweede onderdeel van Eerlijk Verdelen, Snijmachines. Hoofdstuk 9 gaat over het informatica-technisch raamwerk waarbinnen de didactische expert en de opgavengenerator functioneren.*

<b>6</b>	<b>Architectuur van het ITS-breuken</b>	<b>65</b>
	<i>Johan Zuidema en Linda van der Gaag</i>	
<b>7</b>	<b>De didactische expert: onderwijsinhoudelijke realisatie</b>	<b>73</b>
	<i>Eveline Helsper</i>	
<b>8</b>	<b>De opgavengenerator: concretisering van didactische plannen</b>	<b>85</b>
	<i>Mijndert Streefkerk</i>	
<b>9</b>	<b>Het blackboard: raamwerk voor didactische plangeneratie</b>	<b>101</b>
	<i>Marc du Chatinier</i>	
<b>10</b>	<b>De diagnostische expert</b>	<b>115</b>
	<i>Arjan van Hienen</i>	
<b>11</b>	<b>Het leerlingmodel</b>	<b>129</b>
	<i>Ortwin Hutten</i>	

---

---

## Hoofdstuk 6

# Architectuur van het ITS-breuken

Johan Zuidema  
Linda van der Gaag

*Het lijkt aantrekkelijk om bij automatisering met verschillende specialisten te werken. Specialististen kennen echter één probleem: hun specialisme. Daardoor is het moeilijk verantwoordelijkheden te bepalen.<sup>1</sup>*

In deel II van dit boek is Eerlijk Verdelen besproken, een computerprogramma voor het leren van breuken. Hoewel dit programma een open karakter heeft, is het niet gemakkelijk om Eerlijk Verdelen te laten voldoen aan de in hoofdstuk 2 geformuleerde didactische wens van een gemengd initiatief van leerling en computer. Een gemengd initiatief is één van de didactische uitgangspunten van het realistisch rekenonderwijs: een leerling bouwt het best begrip op van het systeem der rationale getallen als hij weliswaar gerichte instructie krijgt, maar tegelijkertijd voldoende vrijheid heeft om eigen oplossingsstrategieën te ontdekken en te construeren.

Een gemengd initiatief van leerling en computer kan met Eerlijk Verdelen alleen bereikt worden als de leraar de vorderingen van de individuele leerling op de voet volgt en op passende momenten in het programma ingrijpt om nieuwe opgaven voor de leerling te specificeren; en dat voor alle leerlingen afzonderlijk. Het is onrealistisch om te veronderstellen dat een leraar Eerlijk Verdelen op deze manier zal gebruiken, want dat zou hem teveel tijd kosten. De verwachting is eerder, dat hij het programma inzet met gebruikmaking van vaste rijtjes opgaven, al dan niet uit de meegeleverde oefeningenbibliotheek. Zo wordt al wel geprofiteerd van het open karakter van het programma, en van de realistische en dynamische presentatie van de leerstof, maar wordt de potentiële didactische kracht van het ontwerp van Eerlijk Verdelen nog niet ten volle benut.

Om gemakkelijker aan de in hoofdstuk 2 geformuleerde didactische wensen te kunnen voldoen, is Eerlijk Verdelen ingebed in een kennissysteem: het ITS-breuken. Dit kennissysteem bevat een aantal componenten, die elk specifieke kennis bevatten over het breukenonderwijs en die deze kennis in een concrete didactische situatie kunnen toepassen om de instructie aan te passen aan de individuele leerling.

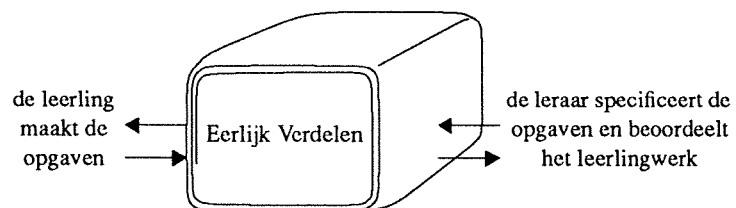
---

1. Uit: *Automatiseren hoort een feest te zijn*. Advertentie van ICL Nederland B.V., NRC Handelsblad 14-10-1992.



## 1 Motivatie voor de globale opzet van het ITS-breuken

Als Eerlijk Verdelen als zelfstandig COO-programma wordt gebruikt, maakt een leerling (of een duo leerlingen) aan de computer de opgaven die zijn klaargezet door de leraar. Als de leerling al deze opgaven heeft gemaakt, moet de leraar de resultaten beoordelen die de leerling bij het maken van deze opgaven heeft behaald en op basis hiervan nieuwe opgaven voor de leerling klaarzetten. Deze situatie is weergegeven in figuur 6.1.



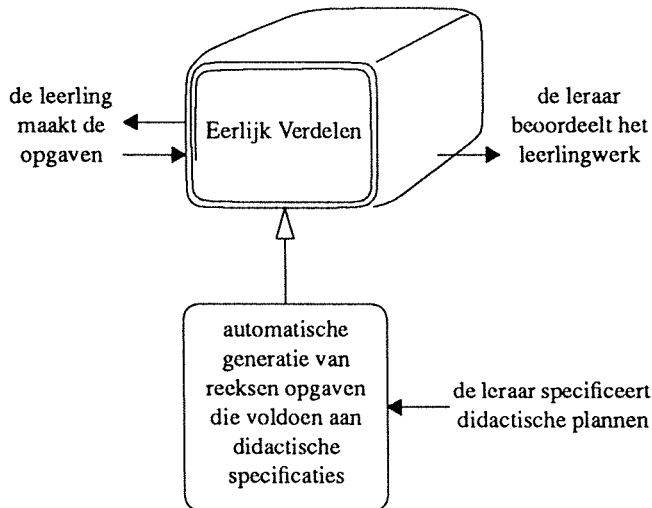
figuur 6.1 Eerlijk Verdelen in COO-opstelling

De leraar moet in principe voor elke leerling afzonderlijk een didactisch verantwoord plan opstellen op grond van de vorderingen van de leerling, gebruikmakend van zijn didactische kennis en ervaring. Hij moet bedenken aan welk onderdeel hij de leerling laat werken, Snijden & Geven, Snijmachines of Kleuren & Benoemen, en wat hij door middel van de op te stellen opgaven wil bereiken; verder moet hij bedenken hoe lang hij de leerling wil laten doorwerken voordat hij hem opnieuw beoordeelt; enzovoort. Hierbij spelen overwegingen op zowel korte als lange termijn een rol. Vervolgens moet de leraar het didactische plan vertalen in termen van concrete opgaven voor de leerling. Overigens zal zo'n didactisch plan meestal niet eerst expliciet geformuleerd worden: een leraar is immers eerder gewend om direct door middel van concrete opgaven te voldoen aan een didactisch voornemen. Een didactisch plan blijft in de conventionele schoolpraktijk daarom meestentijds impliciet; door de introductie van COO verandert dat niet.

Het samenstellen van reeksen opgaven voor leerlingen is niet gemakkelijk: het moet zorgvuldig gebeuren en is zeer tijdrovend. De leraar zou het zich hierbij gemakkelijk kunnen maken, door in één keer een groot aantal oefeningen voor alle leerlingen uit zijn groep klaar te zetten, en zich verder niet meer te bekommeren om de individuele vorderingen van de leerlingen. Een dergelijk gebruik van Eerlijk Verdelen is vanuit didactisch oogpunt echter niet gewenst.

Het samenstellen van een reeks opgaven voor een leerling kan ten dele geautomatiseerd worden, als de leraar in staat is om een didactisch plan voor die leerling expliciet te maken en in één of andere geformaliseerde vorm aan de computer kenbaar te

maken. De computer is dan in principe in staat om automatisch een adequate, volledig uitgewerkte invulling van het plan te genereren, die vervolgens direct door Eerlijk Verdelen in de vorm van concrete opgaven aan de leerling kan worden aangeboden. De resulterende, nieuwe lessituatie is weergegeven in figuur .

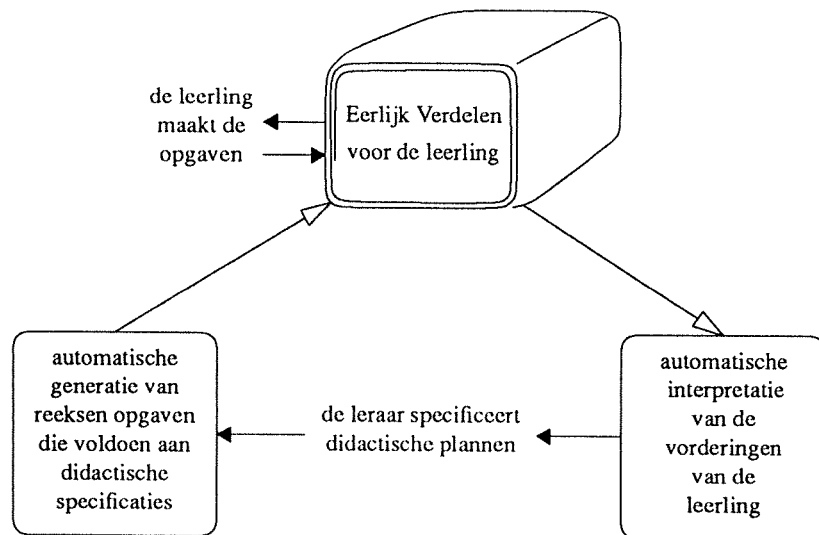


figuur 6.2 Eerlijk Verdelen, met hulp voor de leraar bij het samenstellen van reeksen opgaven

Met deze gedeeltelijke automatisering van de opgavengeneratie heeft de leraar een onderdeel van zijn werk aan de computer overgedragen. Het meest essentiële aspect van het samenstellen van reeksen opgaven wordt nu het opstellen van didactische plannen: de leraar moet zijn plannen expliciet maken. Dat vereist nadenken over didactiek op een hoger niveau dan voordien noodzakelijk was. Het voordeel van deze aanpak is, dat de leraar zich nu niet meer hoeft te concentreren op gedetailleerde opgavespecificatie, maar zijn aandacht kan richten op krachtiger principes van de didactiek.

Nu de generatie van concrete opgaven is overgedragen aan de computer, is het accent van de taken van de leraar verschoven naar de beoordeling van leerlingwerk en het maken van didactische plannen. Bij de beoordeling van leerlingwerk speelt een aantal aspecten een rol. De leraar evalueert bij elke gemaakte opgave de door de leerling gegeven oplossing: het resultaat is goed of fout. De leraar zal niet alleen naar het eindresultaat kijken, maar ook naar de manier waarop de leerling tot dit resultaat is gekomen: de door de leerling toegepaste oplossingsstrategie geeft immers inzicht in zijn mentale activiteiten. De leraar combineert zijn bevindingen tenslotte met de eerder geconstateerde vorderingen van de leerling, en vormt zich zo een beeld van de leerling.

De beoordeling van het leerlingwerk kan in principe ook aan de computer worden overgedragen: de computer analyseert de oplossing die een leerling voor een gegeven opgave heeft geconstrueerd en integreert het resultaat van deze analyse in een voor dit doel opgesteld model van de leerling. Zo'n leerlingmodel wordt voor elke leerling afzonderlijk automatisch opgebouwd en dynamisch bijgehouden. Figuur 6.3 geeft de nieuwe situatie weer.



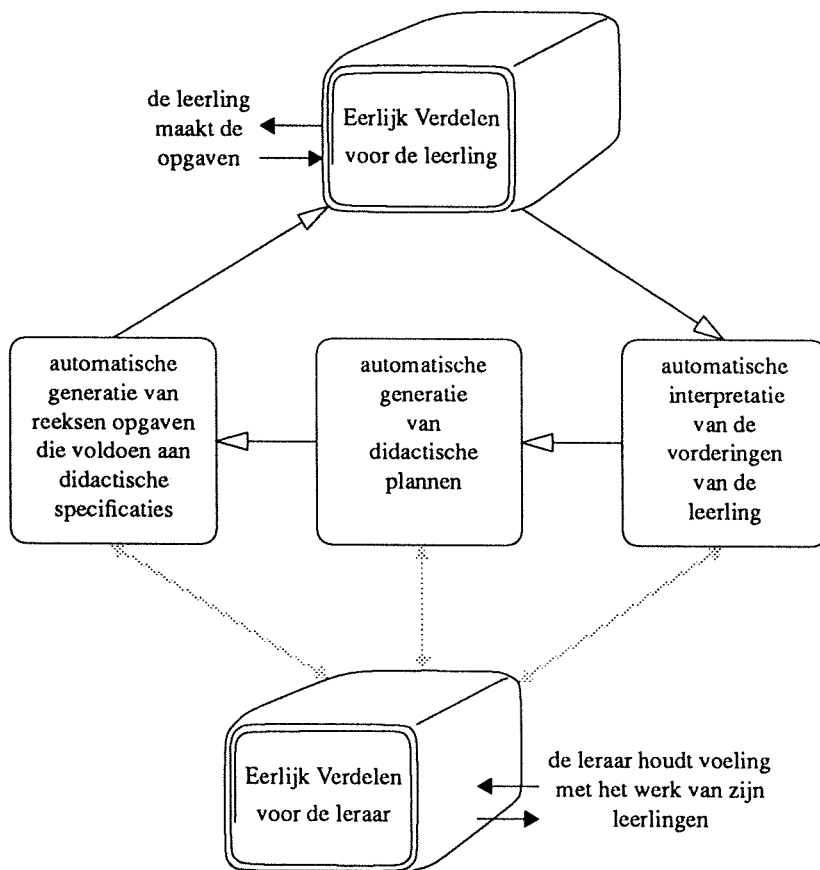
figuur 6.3 Eerlijk Verdelen, met hulp voor de leraar bij het samenstellen van reeksen opgaven en bij het beoordelen van leerlingwerk

In het proces van het automatiseren dat hier wordt voorgesteld, is de volgende logische stap, dat ook het opstellen van didactische plannen voor individuele leerlingen aan de computer wordt overgedragen. Als de didactische kennis en de ervaringsfeiten van de leraar in een voor de computer bruikbare vorm kunnen worden vastgelegd, dan kan deze het opstellen van didactische plannen voor zijn rekening nemen.

Een leraar hoeft in de resulterende opzet niet meer te interveniëren: de leerling maakt de door Eerlijk Verdelen gepresenteerde opgaven, de computer beoordeelt het leerlingwerk, stelt een nieuw didactisch plan op en werkt dat uit tot concrete opgaven die vervolgens weer aan de leerling worden gepresenteerd. Het resultaat is een autonoom systeem, dat inspeelt op leerlinggedrag.

In de praktijk is een volledig autonoom systeem waarin niet ingegrepen kan worden onwenselijk. Een leraar zal voeling willen houden met het werk van zijn leerlingen: de leraar ziet zijn leerlingen immers niet alleen bij het rekenonderwijs. Een leraar wil zich bijvoorbeeld op de hoogte stellen van de vorderingen van afzonderlijke leerlin-

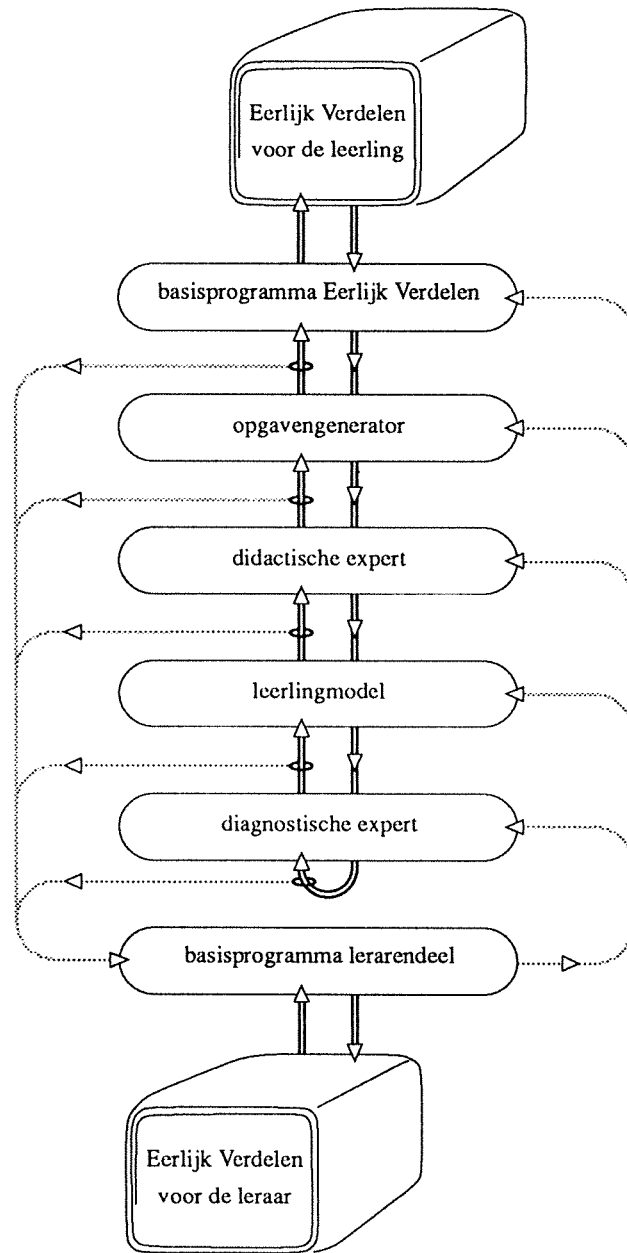
gen. Bovendien wil een leraar in het programma kunnen ingrijpen als hij reden ziet om de didactische aanpak van het systeem (tijdelijk) aan te passen voor een specifieke leerling. In de opzet van het ITS-breuken is daarom een interface voor de leraar opgenomen. Het ITS-breuken werkt onder normale omstandigheden autonoom, maar een leraar heeft voortdurend de mogelijkheid om de gang van zaken te beïnvloeden en het leerlingwerk te bekijken. De resulterende globale opzet van het systeem is getoond in figuur 6.4.



figuur 6.4 Het ITS-breuken: Eerlijk Verdelen als autonoom systeem, consulteerbaar en beïnvloedbaar door de leraar

## 2 De architectuur van het ITS-breuken

De in de voorgaande paragraaf beargumenteerde globale opzet van het ITS-breuken is het uitgangspunt geweest voor het ontwerp van de meer gedetailleerde systeemarchitectuur die is weergegeven in figuur 6.5 (op de volgende pagina).



figuur 6.5 Architectuur van het ITS-breuken

De automatische generatie van reeksen opgaven wordt verzorgd door twee componenten: de *didactische expert* en de *opgavengenerator*. De didactische expert verzorgt de generatie van didactische plannen. Een didactisch plan is een rij van formele specificaties van de kenmerken waaraan te genereren opgaven moeten voldoen. Deze specificaties worden door de opgavengenerator verder uitgewerkt tot concrete opgaven; de concrete opgaven worden vervolgens door het *basisprogramma* van Eerlijk Verdelen aan de leerling gepresenteerd, zoals beschreven in hoofdstuk 4. Als de leerling een oplossing voor een opgave heeft geconstrueerd, maakt het basisprogramma op lokaal niveau reeds een eerste beoordeling van het resultaat: er wordt bijvoorbeeld vastgesteld of alle partjes zijn uitgedeeld en of de verdeling eerlijk is. De *diagnostische expert* bepaalt welke oplossingsstrategieën de leerling gebruikt heeft. Met de resultaten van de analyse van de diagnostische expert vormt het *leerlingmodel* zich een beeld van de leerling. De beschreven componenten geven elkaar in één richting informatie door, en vormen zo tezamen de hoofdcyclus van het ITS. De communicatie tussen de componenten vindt uitsluitend plaats in zinvol samenhangende boodschappen.

In de architectuur van het ITS is bovendien nog een interface voor de leraar voorzien. Het is de bedoeling dat alle componenten van het ITS relevante informatie aan het lerarendeel doorgeven. Het lerarendeel is echter niet specifiek voor het ITS geïmplementeerd.

Elk van de componenten is een gespecialiseerd kennissysteem, dat kennis over een specifiek onderdeel van de breukendidactiek bevat en daarop een geschikte inferentievorm toepast. De didactische expert is het thema van de hoofdstukken 7 en 9; de opgavengenerator is beschreven in hoofdstuk 8. Hoofdstuk 10 heeft de diagnostische expert als onderwerp; het leerlingmodel wordt uiteengezet in hoofdstuk 11. In deze hoofdstukken wordt telkens de uiteindelijke realisatie van de besproken component toegelicht. Bij de implementatie van de componenten van het ITS speelt een aantal belangrijke overwegingen een rol. Zo heeft elke component een specifieke didactische invulling die met zorg gekozen is: deze invulling is immers sterk bepalend voor de kwaliteit van het uiteindelijke systeem. De motivatie voor de didactische invulling van de componenten en de wijze waarop deze verkregen is, worden toegelicht in deel IV. In een complex project als dit is het voorts van belang om bij de systeemontwikkeling gestructureerd te werk te gaan om herzieningen in het oorspronkelijk ontwerp, en de daarmee gepaard gaande wijzigingen in reeds ontwikkelde programmatuur, zoveel mogelijk te voorkomen. Het uitdrukkelijke perspectief dat het systeem op redelijke termijn op school zou moeten kunnen functioneren is hierbij een extra complicatie, omdat reeds bij de opzet van het systeem rekening gehouden moet worden met de beperkingen van de beschikbare hardware. In deel V van dit boek wordt ingegaan op de gekozen methoden van systeemontwikkeling en op de technische ontwikkelomgeving waarmee het systeem gerealiseerd is.



---

## Hoofdstuk 7

### De didactische expert

*Onderwijsinhoudelijke realisatie*

Eveline Helsper

De kern van het ITS-breuken wordt gevormd door de didactische expert. De rol van deze component is het opstellen van een didactisch plan op grond van de vorderingen van een individuele leerling. Zo'n didactisch plan heeft de vorm van een reeks specificaties van kenmerken waaraan de vervolggaven voor die leerling moeten voldoen. De didactische expert krijgt hiertoe informatie van een andere systeemcomponent, het leerlingmodel. Het leerlingmodel houdt dynamisch een beeld van de leerling bij, en is derhalve op ieder moment van het leerproces in staat om de didactische expert op de hoogte te stellen van de vorderingen van de leerling. Als de didactische expert eenmaal een plan heeft opgesteld, wordt dit door de opgavengenerator verder uitgewerkt tot concrete opgaven. Deze worden vervolgens door Eerlijk Verdelen aan de leerling aangeboden.

#### 1 Uitgangspunten voor de inrichting van de didactische expert

De inrichting van de didactische expert wordt in belangrijke mate bepaald door het gekozen didactisch uitgangspunt voor het ITS-breuken: het realistisch reken-wis-kunde-onderwijs. Dit uitgangspunt leidt tot de noodzaak van 'omzichtig sturen'. Door kennisacquisitie is informatie vergaard over hoe dit gestalte kan krijgen.

##### 1.1 Omzichtig sturen

Eén van de leerprincipes van de realistische didactiek is, dat de sturing bij voorkeur de vorm heeft van een gemengd initiatief. Leerlingen moeten bij het werken met het ITS-breuken veel vrijheid krijgen, om actief de leerstof te verwerven. Leerlingen kunnen echter ook weer niet geheel vrijgelaten worden, want het werken met het programma gebeurt met een vooraf gesteld, vastomlijnd didactisch doel: zij moeten zich op inzichtelijke wijze de formele breuknotatie eigen maken, en daarmee ook nog enigermate kunnen manipuleren. Om dat doel te bereiken zal er dus toch gestuurd moeten worden door de computer. Deze dualiteit is in belangrijke mate bepalend voor de inrichting van de didactische expert: het ITS-breuken moet met fluwelen handschoenen sturen — het denken van leerlingen moet door de sturing op een nieuw spoor gebracht worden, maar mag er niet door worden geremd of belemmerd.



De didactische expert is permissief, en grijpt alleen in als er iets uitdrukkelijk niet volgens plan verloopt.

Het sturen gebeurt uitsluitend door de specifieke inrichting van vervolgoopgaven. Alternatieven zijn bijvoorbeeld: het voordoen van bepaalde opgaven en het geven van uitleg in tekstvorm. Hiervan is geen gebruik gemaakt bij het ITS. Het gaat bij het sturen om het uitlokken en het bestendigen van gewenst gedrag, niet om voorzegen.

Niet bij alle onderdelen van Eerlijk Verdelen wordt op dezelfde wijze gestuurd. Bij het eerste onderdeel, Snijden & Geven, is de volgorde waarin opgaven worden aangeboden door de computer tevoren vastgelegd. De opgaven worden niet aangepast aan de vorderingen van de leerling. Zoals reeds in hoofdstuk 4 is aangegeven, is het doel van dit eerste onderdeel voornamelijk het laten kennismaken van leerlingen met de microwereld van Eerlijk Verdelen. Het is zeker denkbaar dat ook bij Snijden & Geven enigerlei sturing op grond van het leerlinggedrag, zin heeft. Het gaat dan echter om een vrij grote investering in het vaststellen van de onderliggende didactische kennis en het maken van goede diagnoses van het leerlinggedrag, terwijl daar een geringe verwachte leerwinst tegenover staat: experimenten op school wijzen uit dat leerlingen geen speciale moeite hebben met dit onderdeel. Adaptief maken van Snijden & Geven heeft dan ook geen prioriteit binnen het ITS-project.

Bij Snijmachines, het tweede onderdeel, is er wél reden om actief te sturen. Het doel van dit onderdeel is immers dat leerlingen het snijden leren plannen, en dat ze gaan inzien dat eerlijke verdelingen op heel verschillende, maar equivalente wijzen tot stand kunnen komen. Voor sturing in dit onderdeel blijken bovendien geschikte mogelijkheden te bestaan. De uitwerking van de sturing voor het onderdeel Snijmachines wordt gegeven in dit hoofdstuk.

Het derde onderdeel van Eerlijk Verdelen, Kleuren & Benoemen, geeft eveneens reden tot zorgvuldige sturing. De sturing in dit onderdeel is nog onvoldoende uitgewerkt. In de toekomst zal hieraan de nodige aandacht besteed moeten worden, wil het ITS-breuken als volledig zelfstandig systeem zijn weg vinden in het onderwijs.

## 1.2 Didactische kennis

In het ITS-project is op verschillende manieren informatie vergaard om een zo verantwoord mogelijke didactische invulling van de verschillende systeemcomponenten te verkrijgen. Met betrekking tot de didactische expert heeft kennisacquisitie plaatsgevonden met didactici die ruime ervaring hebben in het ontwikkelen van leeropgaven voor realistisch (breuken)onderwijs. Kennis die door middel van interviews verworven is, laat zich moeilijk in een vorm gieten die direct door een computer toepasbaar is. Wel is een interview de meest directe vorm van kennisvergaring. De didactische adviezen van de deskundigen zijn dan ook als leidraad genomen voor de inrichting van de didactische expert. Hoofdstuk 13 is gewijd aan de manier waarop deze vorm van kennisacquisitie is uitgevoerd.

Een andere bron van didactische kennis vindt zijn oorsprong in statistisch onderzoek naar de opbouw van rekenboeken die in het basisonderwijs worden gebruikt. Voor dit onderzoek is een op formele kenmerken gebaseerde classificatie van breuken opgesteld. Aan de hand van deze classificatie is vastgesteld welke categorieën verdeel-situaties de rekenboeken als opgave zouden toestaan: het blijkt namelijk, dat lang niet alle categorieën breuken voorkomen in rekenboeken. Het uitgevoerde onderzoek leidt niet tot het inzicht waarom bepaalde breuken al dan niet voorkomen, of waarom een bepaalde volgorde van opgaven wordt gehanteerd. De uit het onderzoek resulterende conclusies kunnen om deze reden niet direct richting geven aan de invulling van de didactische expert. Daar staat tegenover dat de resultaten van nut zijn om achteraf een controle uit te voeren op een voor een leerling opgesteld plan. Voor dit doel is aan de didactische expert een opgavenfilter toegevoegd. Hoofdstuk 14 gaat over de analyse van de rekenboeken; in dat hoofdstuk is tevens het door het rekenboekenonderzoek gemotiveerde opgavenfilter beschreven.

## 2 Doelen voor didactische planning bij Snijmachines

Uit de interviews met de didactici is naar voren gekomen, dat met het onderdeel Snijmachines tegelijkertijd verscheidene doelen worden nagestreefd. Vijf hiervan zijn aangewezen als mogelijk te behalen door een specifieke inrichting van vervolgo-pgaven. Deze doelen tezamen garanderen, dat een leerling, na succesvol doorwerken van het onderdeel Snijmachines, beschikt over een verscheidenheid aan oplossings-strategieën voor verdeelproblemen, zodat hij goed voorbereid is op het derde onder-deel van Eerlijk Verdelen, Kleuren & Benoemen. Puntsgewijs weergegeven zijn de didactische doelen die bij Snijmachines worden nagestreefd, de volgende:

- leerlingen zouden spontaan verschillende manieren van verdelen moeten afwis-selen — dit doel wordt in het vervolg aangegeven met ‘Afwisseling’;
- leerlingen zouden de verschillende verdeelmanieren in redelijk gelijke mate moeten gebruiken, als verdeelsituaties zich daarvoor lenen — ‘Gelijkmatigheid’;
- leerlingen zouden er blijk van moeten geven dat bepaalde verdeelsituaties ‘te vereenvoudigen zijn’, dat wil zeggen, op te vatten zijn als series identieke ver-deelsituaties van een eenvoudiger soort — ‘Vereenvoudiging’;
- leerlingen zouden voor elk van de verdeelmanieren een behoorlijk vaardigheids-niveau moeten ontwikkelen — ‘Vaardigheid’;
- leerlingen zouden in staat moeten zijn verdeelsituaties te beoordelen vanuit een ander perspectief, namelijk door ze zelf te componeren — ‘Blikwisseling’<sup>1</sup>.

---

1. Het gaat voorlopig slechts om één aspect van blikwisseling. In Freudenthals (1979) op-vatting zou een leerling niet volledig vrij gelaten moeten worden bij de inrichting van een verdeelsituatie, maar gevraagd worden om een situatie in te richten onder conditie van een bepaalde portie.

Deze doelen zijn niet altijd onderling verenigbaar. Stel bijvoorbeeld, dat het gebruik van een bepaalde verdeelmanier bij een leerling sterk achterblijft ten opzichte van andere. Dat is in strijd met het tweede doel, Gelijkmaticheid. Een didactisch kennis-systeem zal er dan er op moeten aansturen dat de leerling de achterblijvende verdeel-maniem extra gaat toepassen. Maar dat levert na enige tijd een conflict op met het eerstgenoemde doel, Afwisseling. Het vijfde doel, Blikwisseling, wordt hierbij noodgedwongen ook buiten spel gezet. Het optreden van frictie tussen de didactische doelen kan niet worden voorkomen door andere specificatie — deze eigenschap is inherent aan het domein. Het blijkt niet altijd mogelijk vijf heren tegelijk te dienen. De vijf didactische doelen kennen bovendien geen absolute onderlinge orde-ning op grond waarvan de volgorde van afhandeling vastligt: afhankelijk van de vor-deringen van de individuele leerling veranderen de prioriteiten van de doelen.

Een leraar heeft er geen moeite mee om mogelijk tegenstrijdige, elkaar deels over-lappende doelen simultaan na te streven: voor hem vormen ze een betekenisvol ge-heel. Voor een computer daarentegen is het manipuleren van zulke doelen een niet triviaal probleem, dat slechts met geavanceerde informatica-technieken kan worden opgelost.

In de didactische expert is voor elk van de onderscheiden doelen een aparte *module* gecreëerd. Deze modulen zijn autonoom: elke module is in staat om, zonder inbreng of raadpleging van andere modulen, een volledig didactisch plan op te stellen con-form het doel dat de module nastreeft. Voor de samenwerking tussen de modulen on-derling is gebruik gemaakt van de zogenaamde blackboard-methodologie, die in hoofdstuk 9 zal worden uiteengezet.

### 3 De generatie van een didactisch plan

Elke module in de didactische expert is in staat om een didactisch plan voor een in-dividuele leerling te formeren op basis van het beeld dat het ITS-breuken zich ge-vormd heeft van de vorderingen van de leerling. In deze paragraaf richt de bespre-king zich op de plangeneratie door één module; in de volgende paragraaf komt de samenwerking tussen de modulen aan de orde.

#### 3.1 De vorm van een plan

In het ITS-breuken wordt een didactisch doel nagestreefd door de specifieke inrich-ting van vervolggpgaven voor een leerling. De invulling van opgaven is binnen het ITS-breuken namelijk de enige *manipuleerbare* factor voor de didactische expert. Een didactisch plan heeft daarom de vorm van een reeks specificaties van opgaven.

De vrijheidsgraden die de didactische expert heeft bij het genereren van een didac-tisch plan betreffen het aantal opgaven dat het plan omvat en, per opgave, de aantal-

len voorwerpen en kinderen, het soort voorwerpen, de positionering van de voorwerpen op het scherm en de aangeboden snijmachines. De beperkingen die de didactische expert daarbij per opgave in acht moet nemen zijn gepresenteerd in figuur 7.1; in deze figuur zijn ook nog eens de mogelijkheden van het basisprogramma Eerlijk Verdelen weergegeven. Gedetailleerde uitleg van deze kenmerken is te vinden in hoofdstuk 4.

ITS-versie Eerlijk Verdelen	Basisprogramma Eerlijk Verdelen
soort voorwerpen: stroken, cirkels, rechthoeken of vierkanten	soort voorwerpen: stroken, cirkels, rechthoeken of vierkanten
aantal voorwerpen: 1 .. 12	aantal voorwerpen: 1 .. 12
aantal kinderen: 2 .. 20	aantal kinderen: 2 .. 20
alle snijmachines zijn afzonderlijk te specificeren	1-10-snijdende machines òf 1-20
	één partje òf alle partjes snijdend
vrije positionering van de voorwerpen op het scherm	uitsluitend vaste posities

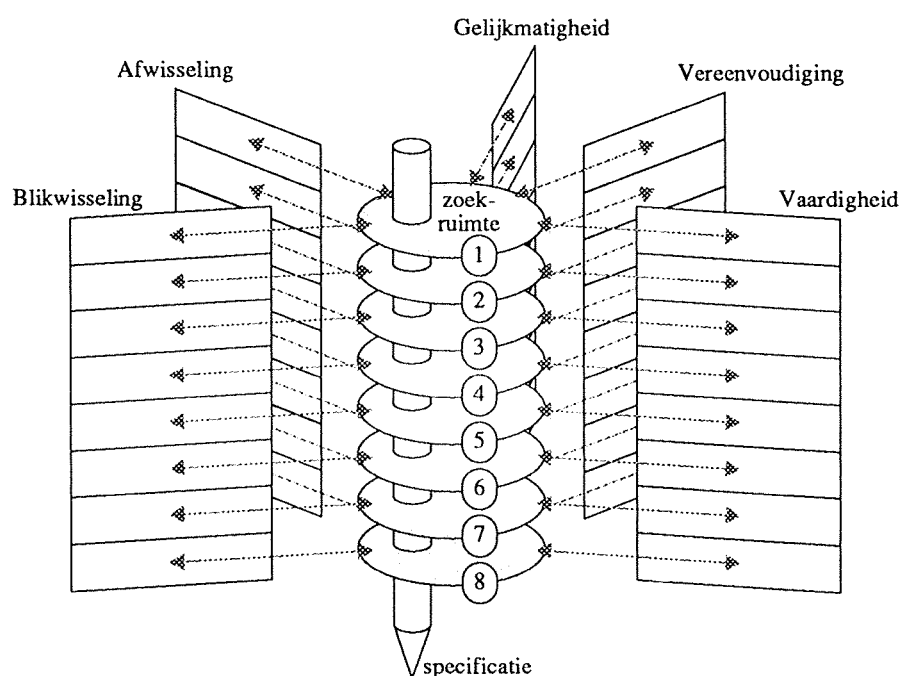
*figuur 7.1* Overzicht van de variabele kenmerken per opgave, voor het basisprogramma Eerlijk Verdelen en voor de ITS-versie (onderdeel: Snijmachines)

### 3.2 Het invullen van een plan

Voor het invullen van een plan met specificaties van opgavekenmerken moet de didactische expert de relatie kennen tussen enerzijds de middelen die er voor sturing binnen het ITS-breken beschikbaar zijn en anderzijds een didactisch doel. Uit de kennisacquisitie die ten behoeve van de invulling van de didactische expert is verricht, is informatie over deze relatie naar voren gekomen, voornamelijk in de vorm van voorbeelden. Met deze informatie als leidraad is een karakterisering opgesteld van welke combinatie van opgavekenmerken leidt tot welke mate van sturing en in welke richting — en dit alles in het perspectief van de eerdere vorderingen van een leerling.

Het betreft hier een karakterisering, niet een uitputtende opsomming van alle mogelijkheden. Een dergelijke opsomming is fundamenteel onmogelijk, gezien het enorme aantal denkbare combinaties van opgavekenmerken en leerlingeigenschappen. Daar komt nog bij dat er geen eenduidig verband bestaat tussen het (door de computer) observeerbare gedrag van een leerling en zijn mentale toestand. Het automatisch genereren van een didactisch plan zal vanwege het ontbreken van een uitputtende opsomming van combinaties dus altijd op basis van onvolledige, onzekere informatie moeten gebeuren.

De karakterisering van de relatie tussen de middelen voor sturing en de na te streven doelen wordt gebruikt om de computer te doen redeneren over mogelijke planinvullingen. Dit redeneren houdt in dat de zoekruimte van mogelijke planinvullingen ingeperkt wordt, zonder daarbij de mogelijkheden één voor één te onderzoeken — het inperken van de zoekruimte gebeurt stapsgewijs, door het opleggen van steeds strengere eisen aan de gewenste planinvulling. Hiertoe is de zoekruimte van alle mogelijke planinvullingen in acht afzonderlijke lagen ingedeeld. Elke laag correspondeert met een aspect van de invulling van een didactisch plan. De gelaagdheid van de zoekruimte is schematisch weergegeven in figuur 7.2.



*laag 1:* de te suggereren verdeelmanier

*laag 2:* het aantal opgaven dat het didactische plan omvat

*laag 3:* de kwalitatieve specificatie van de suggestie, op planniveau

*laag 4:* de kwantitatieve specificatie van de suggestie, op opgaveniveau

*laag 5:* de aantallen voorwerpen en kinderen + opgavenfilter

*laag 6:* de vorm van de voorwerpen

*laag 7:* de positionering van de voorwerpen

*laag 8:* de toegestane snijmachines

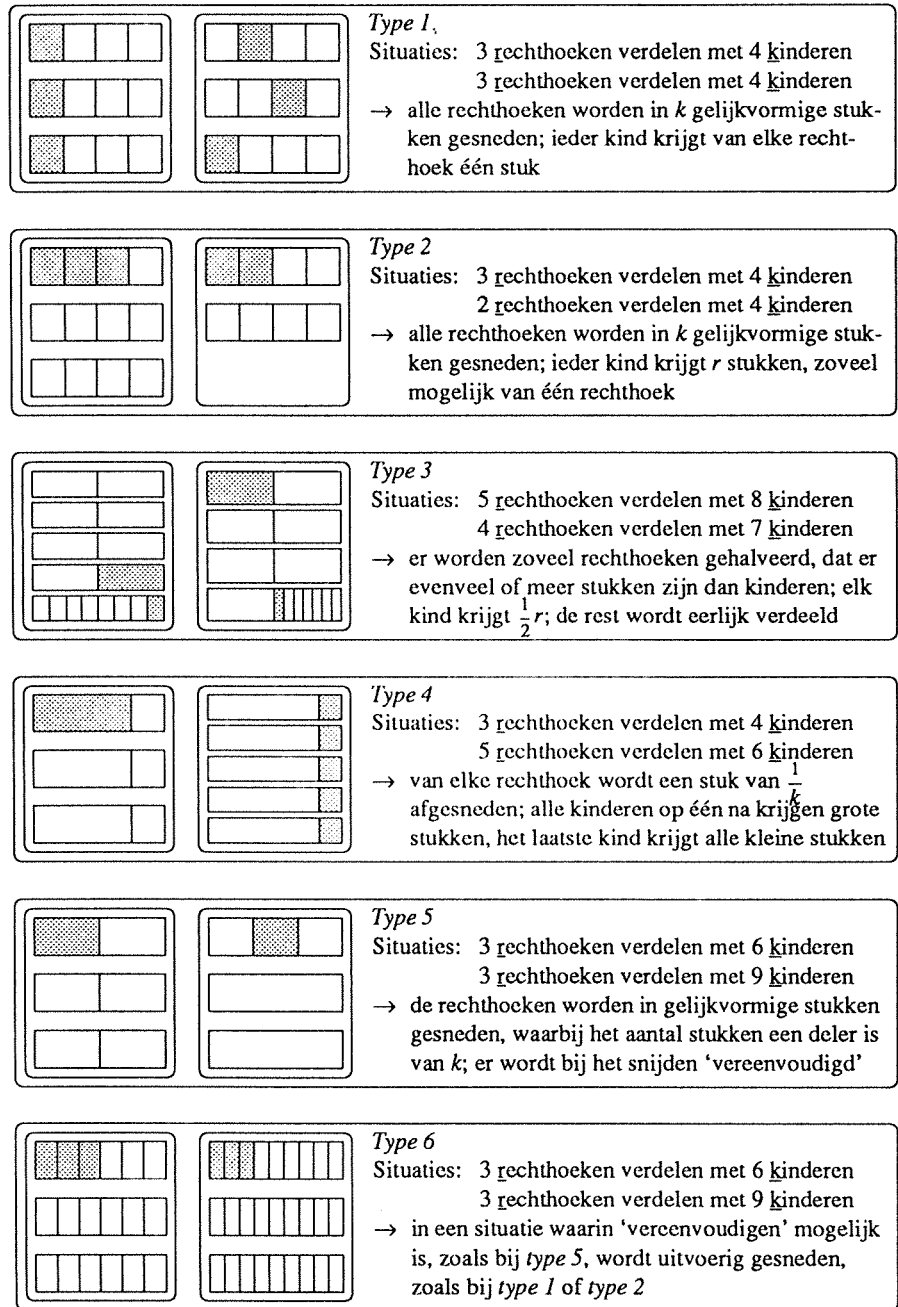
*figuur 7.2* Het proces van didactische specificatie, uitgevoerd door samenwerkende, gelaagde modules die gelijktijdig verschillende didactische doelen nastreven

Laag 1 van de zoekruimte bevat de verdeelmanieren waaruit gekozen moet worden bij het automatisch genereren van een didactisch plan voor een individuele leerling. Om een keuze te maken voor één of meer te stimuleren verdeelmanieren hanteert een module een typering van verdeelmanieren, zoals weergegeven in figuur 7.3 (op de volgende pagina). De module beschikt daarnaast over informatie van het leerling-model, over de maten waarin de leerling de onderscheiden verdeelmanieren beheerst. Op grond hiervan bepaalt de module de verdeelmanieren die het beste met het plan gestimuleerd kunnen worden. De module Gelijkmaticheid, bijvoorbeeld, zal de verdeelmanier selecteren die de leerling het minst beheerst. De module legt nu zodanige restricties op aan de zoekruimte, dat alleen planinvullingen die de geselecteerde verdeelmanieren stimuleren, overblijven.

Laag 2 van de zoekruimte betreft het aantal opgaven dat het te genereren plan zal omvatten. Een module bepaalt, mede afhankelijk van de mate waarin het met de module corresponderende doel is behaald, grenzen aan het gewenste aantal opgaven. De module legt door middel van een onder- en een bovengrens aan de planlengte restricties op aan de zoekruimte. Binnen deze grenzen wordt vervolgens het definitieve aantal opgaven geselecteerd.

De lagen 3 en 4 betreffen de sterkten van de suggesties die voor een geselecteerde verdeelmanier in de opgaven van het te genereren didactische plan gegeven zullen worden. Bij de kennisacquisitie is naar voren gekomen dat voor het stimuleren van een bepaalde verdeelmanier in het ITS-breuken verschillende didactische middelen beschikbaar zijn. Deze middelen verschillen onderling in de sterkte van de suggestie die ermee bereikt wordt. Laag 3 van de zoekruimte betreft het globale verloop van de sterkte van de suggestie in het plan. Een module bepaalt, onder andere op grond van informatie over het succes van eventuele eerdere suggestie van de te stimuleren verdeelmanier, een gewenst planprofiel. Zo'n profiel deelt een plan op in een aantal fasen en schrijft voor elke fase een sterkte van suggestie voor. Aan de hand van het bepaalde planprofiel legt de module nieuwe restricties op aan de zoekruimte van planinvullingen.

De lagen 1 tot en met 3 hebben betrekking op een didactisch plan als geheel: de restricties die in deze lagen op de zoekruimte worden gelegd bepalen het onderlinge verband tussen de opgaven binnen het op te stellen plan. De lagen 5 tot en met 8 hebben betrekking op de afzonderlijke opgaven waaruit een plan bestaat. Laag 4 vervult de rol van intermediair: de restricties die in de lagen 1 tot en met 3 aan de zoekruimte zijn opgelegd worden hier vertaald naar restricties per opgave. Het resultaat is een blauwdruk van het plan in termen van opgaven. Het nader invullen van deze blauwdruk gebeurt opnieuw door stapsgewijs inperken van de zoekruimte, in de lagen 5 tot en met 8, nu door het opleggen van restricties per opgave. Samen vormen deze lagen de opgavengenerator, die in hoofdstuk 8 verder wordt toegelicht.



figuur 7.3 Typering van verdeelmanieren (kopie van figuur 13.2)

In laag 5 van de zoekruimte legt een module voor elke opgave uit de blauwdruk van het plan restricties op aan de aantallen voorwerpen en kinderen. De module bepaalt zulke restricties op grond van de te stimuleren verdeelmannieren en de voor de opgave gewenste sterkte van suggestie; de module heeft hiertoe kennis over verhoudingen van aantallen voorwerpen en kinderen, en over de sterkte van de suggestie die met zo'n verhouding per verdeelmanier bereikt wordt. Voor elke opgave in de blauwdruk van het plan resulteert nu een verzameling combinaties van aantallen voorwerpen en kinderen. Hieruit wordt telkens één combinatie geselecteerd. Bij deze selectie wordt rekening gehouden met de opgaven die de leerling voor wie het plan wordt opgesteld al gehad heeft.

Voordat de geselecteerde combinaties definitief in de blauwdruk worden ingevuld, treedt het opgavenfilter in werking: didactisch ongewenste combinaties worden geschrapt. Als het opgavenfilter een combinatie afkeurt, wordt voor die opgave een nieuwe combinatie geselecteerd uit de verzameling overgebleven combinaties, net zo lang tot een geschikte combinatie gevonden is. De aantallen voorwerpen en kinderen liggen nu voor elke opgave in het plan vast.

Laag 6 van de zoekruimte bevat de vormen van de voorwerpen. In deze laag legt een module voor elke opgave in het plan restricties op aan de vorm van de voorwerpen. In de praktijk zullen alleen voor een opgave waarin sterke of zeer sterke suggestie gewenst is, stringente restricties aan de zoekruimte opgelegd worden. Voor elke opgave resulteert, voor wat betreft de vorm van de voorwerpen, een aantal mogelijkheden waaruit er één geselecteerd wordt. Bij de selectie wordt ook hier rekening gehouden met de opgaven die een leerling al gehad heeft: er wordt naar gestreefd om voorwerpen variërend naar vorm aan te bieden.

Laag 7 van de zoekruimte betreft de positionering van de voorwerpen op het scherm. Voor de positionering van de voorwerpen bestaan er twee mogelijkheden: een standaardpositionering en een bijzondere positionering. In het basisprogramma Eerlijk Verdelen zijn de posities van voorwerpen zo gekozen, dat er een mooie schermindeling ontstaat: de standaardpositionering. In de ITS-versie van het programma is door bijzondere positionering een subtiele vorm van didactische sturing te bereiken: door de positie van voorwerpen zo te kiezen dat er als het ware twee groepen ontstaan, wordt een opdeling van de verdeelsituatie in twee eenvoudiger situaties gesuggereerd. Voor details wordt verwezen naar de bespreking in hoofdstuk 8.

Laag 8 van de zoekruimte, tenslotte, bevat de snijmachines. Bij de kennisacquisitie is naar voren gekomen dat sturing door het uitsluiten van bepaalde snijmachines als didactisch middel in het algemeen ongewenst is. Slechts bij een enkele opgave in een plan waarin zeer sterke suggestie beoogd wordt, zal een module van dit middel gebruik maken. Als een module voor een opgave geen enkele restrictie aan de zoekruimte heeft opgelegd ten aanzien van het toestaan van snijmachines, dan worden in die opgave alle snijmachines aan de leerling beschikbaar gesteld.



Na het doorlopen van de acht lagen van de zoekruimte van mogelijke planinvullingen is een volledig gespecificeerd didactisch plan verkregen.

## 4 De samenwerking tussen de modules

Voor de didactische expert zijn voor het onderdeel Snijmachines vijf doelen onderscheiden. Voor elk van deze doelen is een module gecreëerd, die zelfstandig in staat is om een volledig gespecificeerd didactisch plan op te stellen. Omdat het wenselijk is, dat bij het genereren van een didactisch plan met zoveel mogelijk doelen rekening gehouden wordt, is het van belang dat de modules samenwerken: in elke laag in de zoekruimte moeten de modules tot overeenstemming zien te komen. Dit basisidee is weergegeven in figuur 7.2.

De onderscheiden didactische doelen zijn echter onderling niet altijd even goed verenigbaar. Het is zelfs mogelijk dat de met de doelen corresponderende modules zulke tegenstrijdige restricties aan de zoekruimte van planinvullingen opleggen, dat alle mogelijke planinvullingen verworpen worden, ofwel, dat de resulterende zoekruimte leeg is. Automatische opgavengeneratie is zo onmogelijk geworden. Om deze impasse te doorbreken ‘onderhandelen’ de vijf modules over de invulling van het didactische plan, op elke laag in de zoekruimte. Om in het geval van een stagnerende onderhandeling toch een beslissing af te kunnen dwingen, krijgt elke module een prioriteit toegewezen. Er is geen vaste, algemeen geldende volgorde in belang van de didactische doelen aan te wijzen. De didactische expert bepaalt daarom vóór de aanvang van de plangeneratie voor een individuele leerling zo’n prioritering, op basis van informatie uit het leerlingmodel.

Als zich bij de onderhandelingen tussen de modules in een bepaalde laag in de zoekruimte een conflictueuze situatie voordoet, dan wordt de module met de laagste prioriteit buiten werking gesteld. Eventueel wordt ook de module met de op één na laagste prioriteit uitgesloten, enzovoort; net zo lang tot er weer planinvullingen mogelijk zijn. Als een module eenmaal buiten werking is gesteld, dan vindt geen nieuwe activatie van deze module meer plaats in de rest van de plangeneratie. Door modules, en daarmee didactische doelen, pas uit te sluiten op het moment dat het nodig is, wordt in het resulterende plan met zoveel mogelijk doelen rekening gehouden.

Het is formeel niet volledig uit te sluiten, dat er een plan is, dat, naar oordeel van didactici, toch nog net iets passender is voor die bepaalde leerling, op dat moment. Stel bijvoorbeeld, dat in de onderhandelingen in laag 5 van de zoekruimte een conflictsituatie ontstaat bij het vaststellen van de aantallen voorwerpen en kinderen op het scherm, waardoor twee modules buiten werking worden gesteld. Veronderstel voorts, dat er op de volgende lagen geen enkele uitsluiting hoeft plaats te vinden, ook niet als alle modules bij de onderhandeling zouden worden betrokken. Het is dan

niet ondenkbaar dat er, met een *beetje* water in de wijn in laag 5, een compromis ontstaat waardoor het totale didactische plan superieur is aan het plan dat bij de besproken benadering wordt gegenereerd.

Toch is er uitdrukkelijk voor gekozen om geen lagen ‘vooruit te kijken’. Als uit het redeneren van de didactische expert naar voren komt, dat een bepaald doel tijdelijk niet kan worden nagestreefd, omdat een ander, concurrerend doel voorrang verdient, dan moet het uitgesloten doel niet via de achterdeur alsnog invloed kunnen uitoefenen op de plangeneratie: in dat geval zou immers een halfslachtig plan ontstaan. Het is beter om een zuiver plan uit te voeren, en het vervullen van eventueel resterende doelen uit te stellen tot een volgende ronde.

### **Literatuur**

De Leeuw en Beukhof (1987) concluderen dat de ‘tutoriële component’ (de didactische expert) de achilleshiel van ITS'en vormt.



---

## Hoofdstuk 8

### De opgavengenerator

*Concretisering van didactische plannen*

Mijndert Streefkerk

De rol van de opgavengenerator is het concretiseren van een didactisch plan tot een reeks opgaven. Zo'n plan krijgt de opgavengenerator van de didactische expert. Als een plan tot concrete opgaven is uitgewerkt, worden deze één voor één door het basisprogramma Eerlijk Verdelen aan de leerling gepresenteerd.

Voor het opstellen van een didactisch plan redeneert de didactische expert over mogelijke planinvullingen. Dit redeneren houdt in, dat de zoekruimte van planinvullingen stapsgewijs ingeperkt wordt door het opleggen van restricties aan de gewenste planinvulling. De zoekruimte is hiertoe ingedeeld in acht lagen, zoals reeds is weergegeven in figuur 7.2 in hoofdstuk 7. Deze acht lagen betreffen:

*laag 1:* de te suggereren verdeelmanier

*laag 2:* het aantal opgaven dat het didactische plan omvat

*laag 3:* de kwalitatieve specificatie van de suggestie, op planniveau

*laag 4:* de kwantitatieve specificatie van de suggestie, op opgaveniveau

*laag 5:* de aantallen voorwerpen en kinderen + opgavenfilter

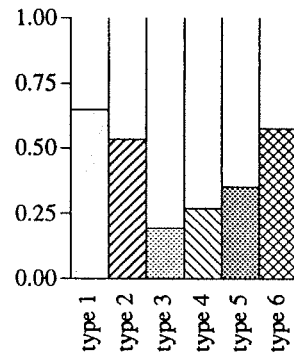
*laag 6:* de vorm van de voorwerpen

*laag 7:* de positionering van de voorwerpen

*laag 8:* de toegestane snijmachines

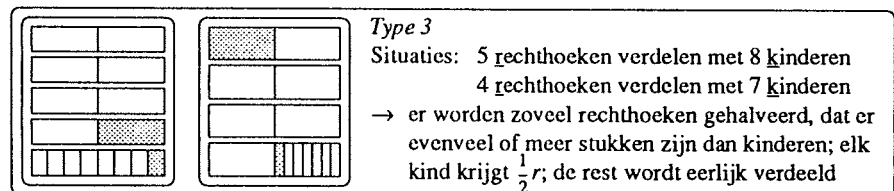
De lagen 1 tot en met 4 leveren een blauwdruk van het beoogde plan op. Het concretiseren van de afzonderlijke opgaven van het plan gebeurt in de lagen 5 tot en met 8. Deze laatste vier lagen vormen samen de opgavengenerator. Het proces van opgavengeneratie wordt in dit hoofdstuk duidelijk gemaakt aan de hand van een uitgewerkt voorbeeld.

Het uitgangspunt voor de didactische expert is het beeld dat het leerlingmodel gevormd heeft van een individuele leerling. Het leerlingmodel verzamelt gegevens over het gebruik van de afzonderlijke oplossingsstrategieën door een leerling; de mate van het beschikbaar hebben van een bepaald type verdeelmanier wordt relatief bepaald ten opzichte van de vorderingen bij de andere typen verdeelmannieren, en wordt mede bepaald door de tijd die verstreken is sinds die verdeelmanier het laatst toegepast is. Stel, dat het leerlingmodel van een leerling een beeld heeft gevormd, zoals is weergegeven in figuur 8.1 (op de volgende pagina).



figuur 8.1 Profiel van een leerling (die relatief weinig volgens type 3 verdeelt)

Uit de figuur wordt duidelijk, dat de verdeelmethoden niet heel gelijkmatig door de leerling worden gebruikt. Meer in het bijzonder blijkt, dat het verdelen volgens type 3 het sterkst achterblijft — het verdelen waarbij eerst halven worden gesneden en eventueel al uitgedeeld, en dan pas de rest (zie figuur 8.2).



figuur 8.2 Verdelen volgens type 3 (zie figuur 7.3 voor andere verdeelmethoden)

De module Gelijkmaticheid van de didactische expert stelt in laag 1 voor, dat de leerling nu het beste een plan kan krijgen dat het verdelen volgens type 3 stimuleert. De module Blickwisseling zorgt ervoor dat het plan tevens één geheel vrije opgave omvat. In het nu uitgewerkte voorbeeld wordt vanaf dit punt uitsluitend nog rekening gehouden met de inbreng van de modules Gelijkmaticheid en Blickwisseling, en niet meer met Afwisseling, Vereenvoudiging en Vaardigheid. Dit is gedaan vanwege de overzichtelijkheid van de presentatie. Het betekent echter een aanzienlijke versimpeling van het didactisch specificatieproces.

Het aantal opgaven dat het didactische plan zal omvatten, wordt in laag 2 beslist. De lengte van een plan hangt af van de grootte van de achterstand die de geselecteerde verdeelwijze heeft ten opzichte van de andere manieren. Dat is bij onze leerling een middelgrote achterstand, hetgeen resulteert in een plan van zes opgaven.

Eén van de opgaven is door Blickwisseling bepaald: een vrije opgave. Mede om implementatie-technische redenen mag de leerling de laatste opgave van een plan altijd geheel naar eigen inzicht inrichten. De eerste vijf opgaven moeten nog verder gespecificeerd worden.

In de lagen 3 en 4 worden de sterkten van sturing bepaald, waarmee type 3 door de afzonderlijke opgaven wordt gestimuleerd. Deze sterkte neemt af in het verloop van het plan. In het geval van onze leerling worden de waarden ‘zeer sterk’, ‘sterk’, ‘gemiddeld’, ‘matig’ en ‘zwak’ vastgesteld voor de eerste vijf opgaven van het plan, en tenslotte de waarde ‘geen’ voor de vrije opgave.

Door het opleggen van restricties aan de zoekruimte van mogelijke planinvullingen in de lagen 1 tot en met 4 is de volgende blauwdruk van het beoogde didactische plan verkregen:

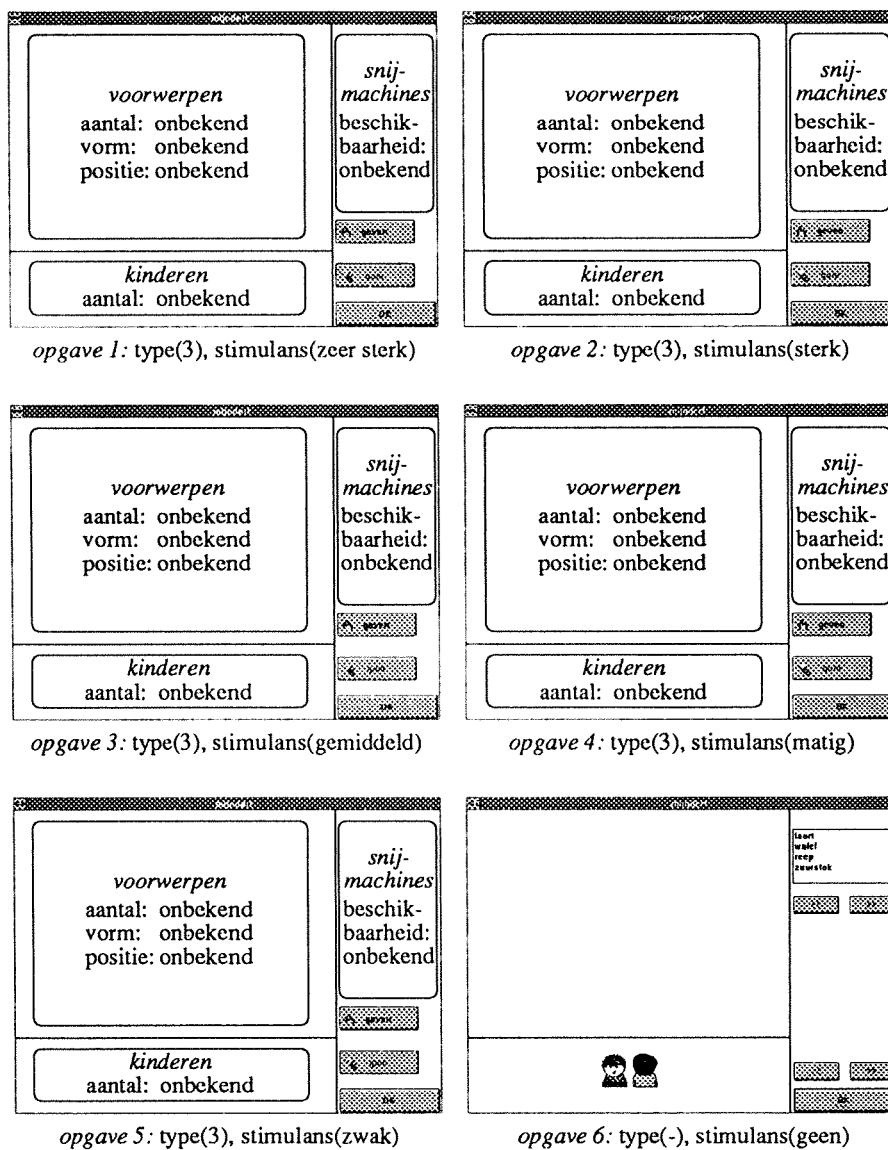
- opgave 1*: type(3), stimulans(zeer sterk)
- opgave 2*: type(3), stimulans(sterk)
- opgave 3*: type(3), stimulans(gemiddeld)
- opgave 4*: type(3), stimulans(matig)
- opgave 5*: type(3), stimulans(zwak)
- opgave 6*: type(-), stimulans(geen)

De opgavengenerator zet op basis van het plan dus zes opgaven klaar, zoals gevisualiseerd is in figuur 8.3 (op de volgende pagina).

Per opgave moeten nu de aantallen voorwerpen en kinderen, de vorm van de voorwerpen, de positionering van de voorwerpen op het scherm en de beschikbaarheid van de snijmachines worden bepaald. De vrijheidsgraden die de opgavengenerator hierbij heeft, zijn reeds opgesomd in hoofdstuk 7, in het overzicht van de variabele kenmerken per opgave (zie figuur 7.1); voor de kenmerken ‘aantal voorwerpen’ en ‘aantal kinderen’ is dit overzicht aangevuld met extra restricties, die tijdens de kennisacquisitie zijn aangegeven door de didactici. Puntsgewijs:

- het aantal voorwerpen is te kiezen uit  $v \in \{2, \dots, 12\}$ ;
- de vorm van de voorwerpen is te kiezen uit  $vorm \in \{\text{cirkel, strook, vierkant, rechthoek}\}$ , bij de vrije opgave voor de leerlingen aangeduid als respectievelijk ‘taart’, ‘zuurstok’, ‘wafel’ en ‘reep’;
- de positie van de voorwerpen is te kiezen uit  $positie \in \{\text{standaardpositionering, bijzondere positionering}\}$ ;
- het aantal kinderen is te kiezen uit  $k \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20\}$ , waarbij wordt aangetekend, dat als  $k$  groter gekozen wordt dan 12, het verdeelprobleem van de opgave op te splitsen moet zijn in twee of meer identieke subproblemen, hetgeen impliceert dat de grootste gemene deler  $\text{ggd}(v, k)$  van  $v$  en  $k$  groter dan 1 moet zijn;
- de verzameling beschikbaar te stellen snijmachines is te kiezen als deelverzameling van  $\text{snijmachines} \subseteq \{2\text{-één-partje-snijdend, } 3\text{-één-partje-snijdend, } \dots, 20\text{-één-partje-snijdend, } 2\text{-alle-partjes-snijdend, } 3\text{-alle-partjes-snijdend, } \dots, 20\text{-alle-partjes-snijdend}\}$ .

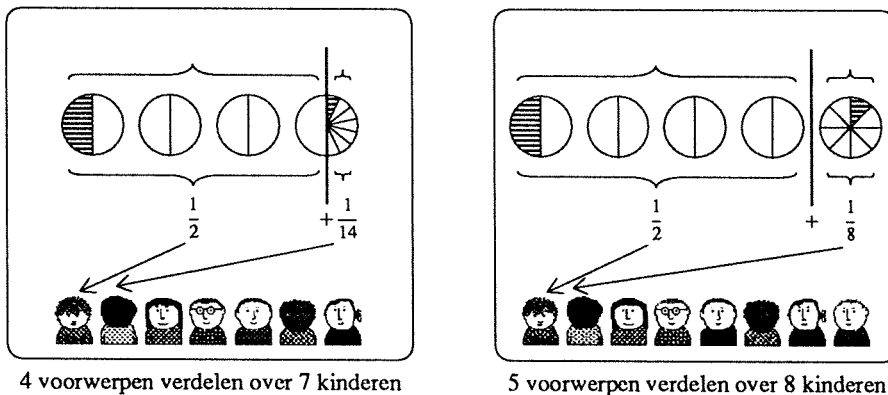
Met uitsluitend deze vrijheidsgraden staat de opgavengenerator nu voor de taak om het verdelen volgens type 3, met afnemende mate van sturing, te stimuleren.



figuur 8.3 Het didactisch plan, gespecificeerd tot en met laag 4: de lengte van het plan is vastgesteld, en de richting en de sterkte van stimuleren

De eerstvolgende stap in het proces van didactische specificatie betreft het per opgave vaststellen van de aantallen voorwerpen en kinderen. Dit gebeurt in laag 5 van de zoekruimte van mogelijke planinvullingen.

Het grondidee van het verdelen volgens type 3 is, dat verdeelsituaties soms op te splitsen zijn in twee nieuwe verdeelsituaties van een eenvoudiger soort. Leerlingen blijken dit inzicht te verwerven als ze gebruik kunnen maken van natuurlijke referentiepunten; vooral  $\frac{1}{2}$  is zo'n punt. Als een verdeelsituatie ertoe leidt dat één eerlijke portie in de buurt van  $\frac{1}{2}$  ligt, refereert een leerling aan deze portie als: 'net iets meer / iets minder dan een half'. Dit gegeven is de eerste sleutel tot de bepaling van de geschikte aantallen voorwerpen en kinderen per opgave: het aantal voorwerpen moet in de buurt liggen van de helft van het aantal kinderen. Bij voorkeur moet het aantal voorwerpen net iets gróter zijn dan de helft van het aantal kinderen, want het rekenen met tekorten vinden leerlingen moeilijker dan het rekenen met een rest. Als zo'n rest bovendien een héél voorwerp is, dan springt het verdelen volgens type 3 het meest in het oog. Bij de verdeelsituatie '4 voorwerpen verdelen over 7 kinderen' is verdelen volgens type 3 mogelijk. Dit is echter niet zo gemakkelijk vooraf in te zien; pas tijdens het uitvoeren van de verdeling komt het zo uit. Bij '5 voorwerpen verdelen over 8 kinderen' is het verdelen volgens type 3 gemakkelijker te plannen. Het verschil tussen deze situaties ontstaat doordat in het eerste geval het aantal kinderen oneven is, en in het tweede geval even. Dit wordt geïllustreerd in figuur 8.4.



figuur 8.4 Twee situaties van het verdelen volgens type 3

Niet alleen de verhouding van de aantallen voorwerpen en kinderen is belangrijk, ook de aantallen zèlf doen ertoe. Die aantallen mogen in principe niet al te groot zijn, maar ook weer niet te klein. Bij grote aantallen verliest een leerling al snel het overzicht over de verdeelsituatie; bij kleine aantallen is er geen voordeel meer te behalen door het splitsen van de verdeelsituatie in tweeën.

In sommige verdeelsituaties leiden grote aantallen echter niet tot verlies van overzicht. Het gaat ten eerste om verdeelsituaties die op te splitsen zijn in onderling identieke situaties die alle bovengenoemde kenmerken hebben waaraan opgaven voor het stimuleren van type 3 voldoen. Ten tweede gaat het om verdeelsituaties met meer



voorwerpen dan kinderen, mits na het uitdelen van hele voorwerpen aan de kinderen opnieuw een verdeelsituatie ontstaat die alle bovengenoemde kenmerken heeft. Die situaties zijn dan ook toelaatbaar als opgave.

Om sterk te sturen in de richting van het verdelen volgens type 3 moet het gebruik van 'concurrerende' typen (zie figuur 13.2 of 7.3) zoveel mogelijk worden tegengegaan. De typen 1 en 2 zijn bij alle verdeelsituaties toepasbaar, en kunnen alleen maar worden tegengegaan door uitsluiting van de 'alle-partjes-snijdende' machines, hetgeen door didactici als niet gewenst wordt beschouwd. Type 4 gaat uit van een heel andere verhouding van aantallen voorwerpen en kinderen, en is dus niet concurrerend met type 3. Type 5 is toepasbaar op dezelfde verdeelsituaties als die waarop type 6 toepasbaar is. Bij sommige van deze verdeelsituaties is ook het verdelen volgens type 3 mogelijk. Voor die verdeelsituaties zijn de typen 5 en 6 concurrerend met type 3. Deze situaties moeten daarom worden uitgesloten als type 3 wordt gestimuleerd, hetgeen het uitsluiten van 'vereenvoudigbare' verdeelsituaties impliceert.

Na deze inventarisatie kan per opgave vastgesteld worden welke combinatie van didactische middelen nu concreet wordt ingezet ter stimulering van het verdelen volgens type 3. Het inzetten van didactische middelen wordt geëffectueerd door het opleggen van restricties aan de zoekruimte per opgave. Door de afnemende mate van sturing in het verloop van het plan, gelden er steeds minder restricties. Er mag dan ook worden verwacht, dat de verzameling van geschikte verdeelsituaties ruimer wordt naarmate het plan vordert. Voor de eerste drie opgaven van het plan worden ten aanzien van de aantallen voorwerpen en kinderen strengere restricties aan de zoekruimte opgelegd dan voor de overige opgaven.

### ***opgave 1, 2 en 3***

Bij de eerste drie opgaven worden ten aanzien van de aantallen voorwerpen en kinderen alle beschikbare didactische middelen ingezet om een relatief sterke sturing te krijgen. Dit komt neer op het opleggen van de volgende restricties aan de zoekruimte van mogelijke planinvullingen:

- het aantal kinderen is 8 of groter;
- de verdeelsituatie is niet 'vereenvoudigbaar';
- het aantal voorwerpen is één groter dan de helft van het aantal kinderen, dit aantal voorwerpen kan met een veelvoud van het aantal kinderen worden vergroot;
- het aantal kinderen is even;
- als het aantal kinderen groter is dan 12, dan moet de verdeelsituatie 'vereenvoudigbaar' zijn<sup>1</sup>.

---

1. Deze laatste restrictie heeft nu niet het effect dat er 'vereenvoudigbare' verdeelsituaties in de zoekruimte overblijven, maar dat alleen situaties met 12 of minder kinderen resteren. Pas als bij opgave 5 de — tamelijk strenge — tweede restrictie vervalt, worden verdeelsituaties met grotere aantallen mogelijk.

De geldende restricties laten zich als volgt vertalen in formele notatie:

$$\begin{aligned} \text{restricties: } & k \geq 8 \\ & \text{ggd}(v, k) = 1 \\ & v \bmod k = \frac{1}{2}k + 1 \\ & k \bmod 2 = 0 \\ & k \leq 12 \text{ of } \text{ggd}(v, k) > 1 \end{aligned}$$

De opgavengenerator vindt slechts twee verdeelsituaties die aan alle restricties voldoen, namelijk:

- situaties: 5 voorwerpen verdelen over 8 kinderen  
7 voorwerpen verdelen over 12 kinderen

#### **opgave 4**

Aan de vierde opgave worden dezelfde eisen gesteld als aan de eerste drie, met dien verstande dat de strengste restrictie, met betrekking tot het minimaal aantal kinderen, vervalt. De geldende restricties laten zich als volgt vertalen in formele notatie:

$$\begin{aligned} \text{restricties: } & \text{ggd}(v, k) = 1 \\ & v \bmod k = \frac{1}{2}k + 1 \\ & k \bmod 2 = 0 \\ & k \leq 12 \text{ of } \text{ggd}(v, k) > 1 \end{aligned}$$

De opgavengenerator vindt nu vijf verdeelsituaties die aan deze restricties voldoen, namelijk:

- situaties: 3 voorwerpen verdelen over 4 kinderen  
5 voorwerpen verdelen over 8 kinderen  
7 voorwerpen verdelen over 4 kinderen  
7 voorwerpen verdelen over 12 kinderen  
11 voorwerpen verdelen over 4 kinderen

#### **opgave 5**

Bij de vijfde opgave vervalt opnieuw de strengste restrictie, die inhoudt dat de verdeelsituatie niet 'vereenvoudigbaar' mag zijn. Bovendien wordt de eis afgezwakt, dat het aantal voorwerpen 'nèt iets groter' is dan de helft van het aantal kinderen; het is nu voldoende als het aantal voorwerpen groter is dan de helft van het aantal kinderen. De geldende restricties laten zich als volgt vertalen in formele notatie:

$$\begin{aligned} \text{restricties: } & v \bmod k > \frac{1}{2}k \\ & k \bmod 2 = 0 \\ & k \leq 12 \text{ of } \text{ggd}(v, k) > 1 \end{aligned}$$

De opgavengenerator vindt vierentwintig verdeelsituaties die aan de restricties voldoen:

situaties: 3 voorwerpen verdelen over 4 kinderen  
4 voorwerpen verdelen over 6 kinderen  
5 voorwerpen verdelen over 6 kinderen  
5 voorwerpen verdelen over 8 kinderen  
6 voorwerpen verdelen over 8 kinderen  
6 voorwerpen verdelen over 10 kinderen  
7 voorwerpen verdelen over 4 kinderen  
7 voorwerpen verdelen over 8 kinderen  
7 voorwerpen verdelen over 10 kinderen  
7 voorwerpen verdelen over 12 kinderen  
8 voorwerpen verdelen over 10 kinderen  
8 voorwerpen verdelen over 12 kinderen  
9 voorwerpen verdelen over 10 kinderen  
9 voorwerpen verdelen over 12 kinderen  
10 voorwerpen verdelen over 6 kinderen  
10 voorwerpen verdelen over 12 kinderen  
10 voorwerpen verdelen over 16 kinderen  
10 voorwerpen verdelen over 18 kinderen  
11 voorwerpen verdelen over 4 kinderen  
11 voorwerpen verdelen over 6 kinderen  
11 voorwerpen verdelen over 12 kinderen  
12 voorwerpen verdelen over 16 kinderen  
12 voorwerpen verdelen over 18 kinderen  
12 voorwerpen verdelen over 20 kinderen

### ***opgave 6***

Voor de zesde en laatste opgave van de reeks gelden geen restricties ten aanzien van de aantallen voorwerpen en kinderen.

restricties: –

Alle 228 combinaties van aantallen voorwerpen en kinderen die de vrijheidsgraden van het basisprogramma Eerlijk Verdelen toestaan, voldoen aan deze eis:

situaties:  $v$  voorwerpen verdelen over  $k$  kinderen,  
 $v \in \{1, \dots, 12\}, k \in \{2, \dots, 20\}$

Bij het selecteren van opgaven uit de verzamelingen van toegestane combinaties van aantallen voorwerpen en kinderen hanteert de opgavengenerator de volgende werkwijze: de eerst gespecificeerde combinatie uit zo'n verzameling is het eerst aan de beurt, dan de tweede, enzovoort, totdat alle combinaties uit de verzameling geweest

zijn. Als er nog meer combinaties nodig zijn uit deze verzameling, dan wordt weer bij de eerste begonnen. Hierbij wordt nog aangetekend, dat combinaties van aantallen voorwerpen en kinderen, die kort tevoren reeds zijn aangeboden aan de leerling — ook als dat in een eerder plan is — in eerste instantie worden overgeslagen.

De invulling per opgave van de aantallen voorwerpen en kinderen door de opgavengenerator is nu als volgt:

- opgave 1: 5 voorwerpen verdelen over 8 kinderen*
- opgave 2: 7 voorwerpen verdelen over 12 kinderen*
- opgave 3: 5 voorwerpen verdelen over 8 kinderen*
- opgave 4: 7 voorwerpen verdelen over 4 kinderen*
- opgave 5: 4 voorwerpen verdelen over 6 kinderen*
- opgave 6: ? voorwerpen verdelen over ? kinderen*

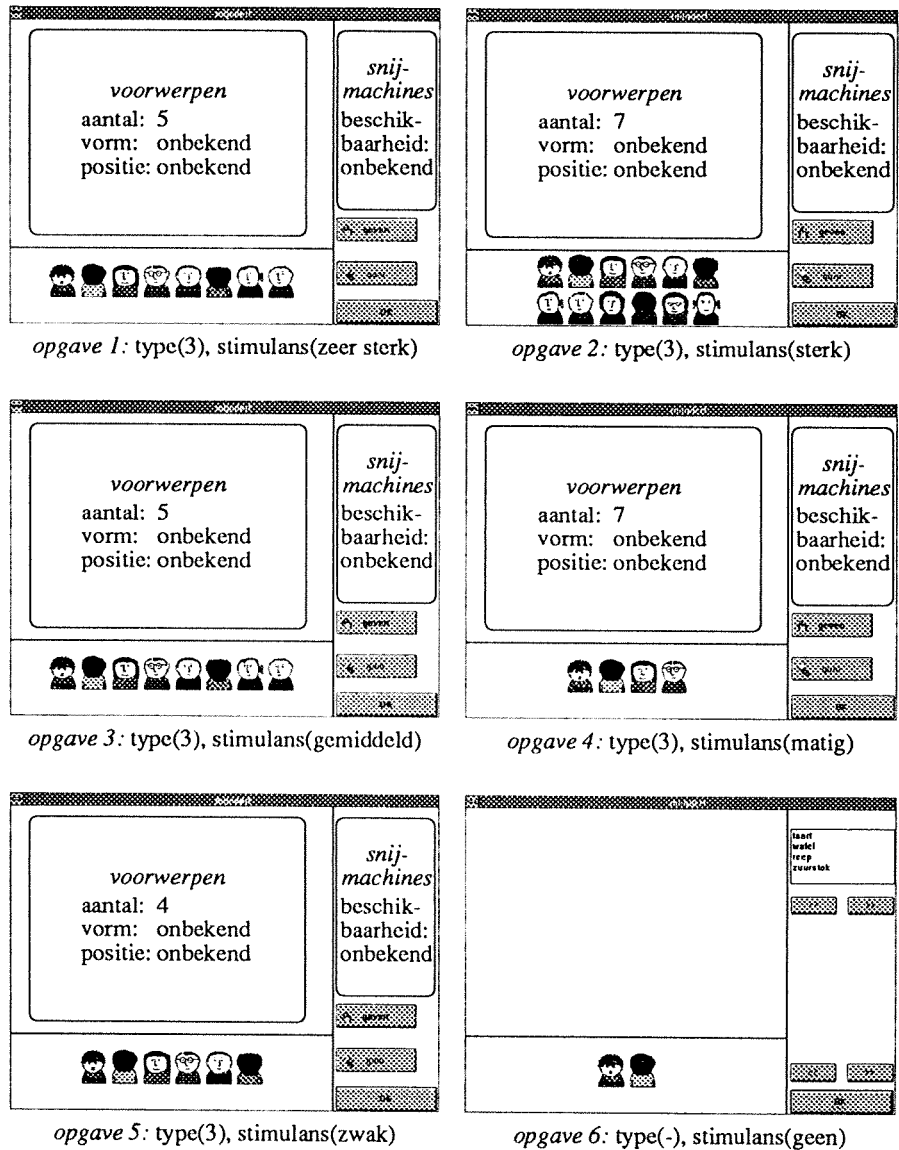
De invulling van de opgaven 1 en 2 is zoals verwacht. Bij de derde opgave zijn alle combinaties uit de eerste verzameling van toegestane verdeelsituaties gebruikt; daarom wordt opnieuw de eerst gespecificeerde combinatie gekozen. Bij de vierde opgave is '3 voorwerpen verdelen over 4 kinderen' te verwachten. Dat deze combinatie niet wordt klaargezet door de opgavengenerator vindt zijn oorsprong in het feit dat deze in het voorafgaande plan reeds in een opgave aan de leerling is aangeboden. Dezelfde observatie geldt voor de vijfde opgave. De zesde opgave is vrij te kiezen door de leerling.

Voordat de aantallen voorwerpen en kinderen daadwerkelijk ingevuld worden in het didactisch plan, worden deze eerst nog eens gecontroleerd door het opgavenfilter. Dit filter verwijdert opgaven die voldoen aan de in eerste instantie opgestelde didactische eisen, maar die bij nader inzien toch niet zo heel geschikt zijn. De werking van het opgavenfilter wordt besproken in hoofdstuk 14. In het hier gevolgde specificatieproces verwijdert het filter geen opgaven.





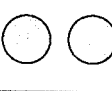
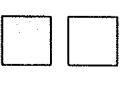


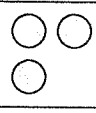
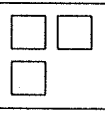
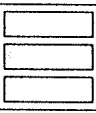

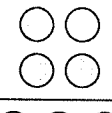
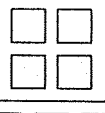
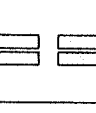

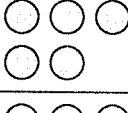
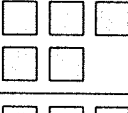
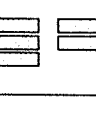

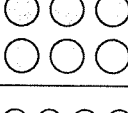
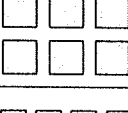
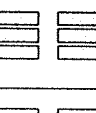

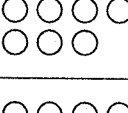
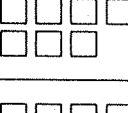


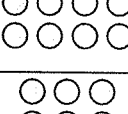
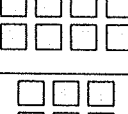
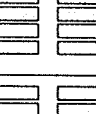

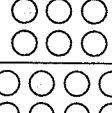
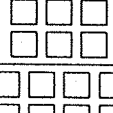
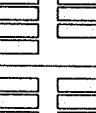

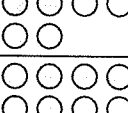
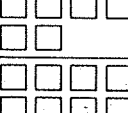
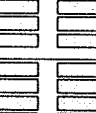

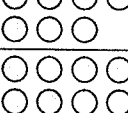

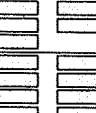

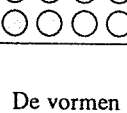
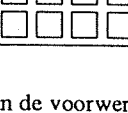
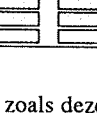

De uiteindelijke invulling is weergegeven in figuur 8.3 (op de volgende pagina).

Nadat de aantallen voorwerpen en kinderen zijn vastgesteld, worden in laag 6 de vormen van de voorwerpen in de afzonderlijke opgaven bepaald. Voor de vorm van de voorwerpen is er de keuze tussen 'cirkel', 'strook', 'vierkant' en 'rechthoek'. In het algemeen geldt, dat de keuze voor een vorm niet als een sterk sturend didactisch middel wordt beschouwd. Het is echter wenselijk dat leerlingen met alle vormen ervaring opdoen, omdat die later in verschillende breukvoortbrengende situaties als model kunnen dienen.

Binnen één opgave is er telkens slechts één soort voorwerpen. De bepaling van de grootte van de voorwerpen gebeurt door het basisprogramma, en vormt geen vrijheidsgraad van de opgavengenerator. Figuur 8.6 geeft een uitputtend overzicht van de vormen van de voorwerpen zoals deze door het basisprogramma op het scherm worden afgebeeld.



figuur 8.5 Het didactisch plan, gespecificeerd tot en met laag 5: de aantallen voorwerpen en kinderen zijn vastgesteld

	Cirkel	Vierkant	Rechthoek	Strook	
					1
					2
					3
					4
					5
					6
					7
					8
					9
					10
					11
					12

aantal voorwerpen

figuur 8.6 De vormen van de voorwerpen zoals deze door het basisprogramma op het scherm worden afgebeeld

In het proces van didactische specificatie in het voorbeeld is er geen aanleiding om door middel van de vorm van de voorwerpen te sturen.

**opgave 1, 2, 3, 4, 5 en 6**

Voor geen van de opgaven van de reeks gelden restricties ten aanzien van de vorm van de voorwerpen.

restricties: –

Alle vier vormen die de vrijheidsgraden van het basisprogramma Eerlijk Verdelen toestaan, voldoen:

situaties: *vorm*,  
 $vorm \in \{\text{cirkel, strook, vierkant, rechthoek}\}$


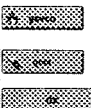
Bij het selecteren van opgaven uit de verzameling van toegestane vormen hanteert de opgavengenerator weer dezelfde werkwijze als voorheen: de eerst gespecificeerde vorm uit de verzameling is het eerst aan de beurt, dan de tweede, enzovoort. Het effect is in dit geval dat de opgavengenerator de vormen afwisselt.

De invulling per opgave van de vormen van de voorwerpen door de opgavengenerator is nu als volgt:


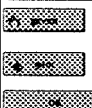
*opgave 1: cirkel*  
*opgave 2: strook*  
*opgave 3: vierkant*  
*opgave 4: rechthoek*  
*opgave 5: cirkel*  
*opgave 6: zelf te kiezen*

Het resultaat is weergegeven in figuur 8.9.



Bij de volgende specificatiestap, in laag 7, wordt de positie van de voorwerpen bepaald. Voor de positionering van de voorwerpen is er de keuze tussen ‘standaardpositionering’ en ‘bijzondere positionering’. In hoofdstuk 4 is bij de bespreking van het basisprogramma Eerlijk Verdelen geen speciale aandacht besteed aan de manier waarop voorwerpen over het scherm verdeeld worden. De positionering van voorwerpen is daar niet beïnvloedbaar vanuit het lerarendeel; de positionering is zo gekozen, dat er een mooie schermindeling ontstaat. Deze standaardpositionering is getoond in figuur 8.6.

<p style="text-align: center;"><i>Voorwerpen</i></p> <p>aantal: 5 vorm: cirkel positie: onbekend</p>	<p style="text-align: center;"><i>Snij- machines</i></p> <p>beschikbaarheid: onbekend</p>
	


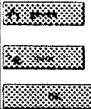
*opgave 1: type(3), stimulans(zeer sterk)*

<p style="text-align: center;"><i>Voorwerpen</i></p> <p>aantal: 7 vorm: strook positie: onbekend</p>	<p style="text-align: center;"><i>Snij- machines</i></p> <p>beschikbaarheid: onbekend</p>
	


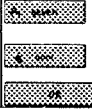
*opgave 2: type(3), stimulans(sterk)*

<p style="text-align: center;"><i>Voorwerpen</i></p> <p>aantal: 5 vorm: vierkant positie: onbekend</p>	<p style="text-align: center;"><i>Snij- machines</i></p> <p>beschikbaarheid: onbekend</p>
	



*opgave 3: type(3), stimulans(gemiddeld)*

<p style="text-align: center;"><i>Voorwerpen</i></p> <p>aantal: 7 vorm: rechthoek positie: onbekend</p>	<p style="text-align: center;"><i>Snij- machines</i></p> <p>beschikbaarheid: onbekend</p>
	

*opgave 4: type(3), stimulans(matig)*

<p style="text-align: center;"><i>Voorwerpen</i></p> <p>aantal: 4 vorm: cirkel positie: onbekend</p>	<p style="text-align: center;"><i>Snij- machines</i></p> <p>beschikbaarheid: onbekend</p>
	

*opgave 5: type(3), stimulans(zwak)*

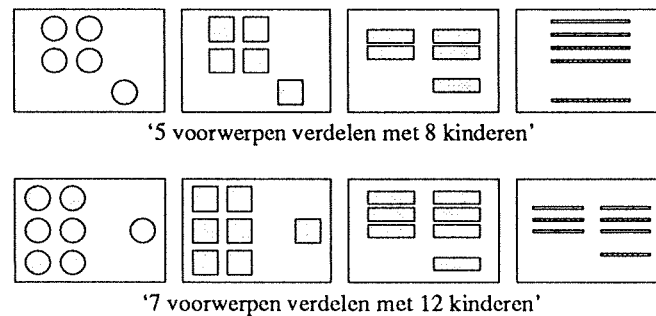
<p style="text-align: center;"><i>Voorwerpen</i></p> <p>aantal: 2 vorm: onbekend positie: onbekend</p>	<p style="text-align: center;"><i>Snij- machines</i></p> <p>beschikbaarheid: onbekend</p>
	

*opgave 6: type(-), stimulans(geen)*

*figuur 8.7* Het didactisch plan, gespecificeerd tot en met laag 6: de vorm van de voorwerpen is vastgesteld



Binnen het ITS-breuken is gerichte positionering van de voorwerpen één van de didactische hulpmiddelen voor sturing. Hiervan wordt gebruik gemaakt bij opgaven ter stimulering van verdelen volgens type 3, vooral als er sprake is van een sterke stimulans. In figuur 8.8 is weergegeven hoe de bijzondere positionering is voor '5 voorwerpen verdelen met 8 kinderen' en voor '7 voorwerpen verdelen met 12 kinderen'.



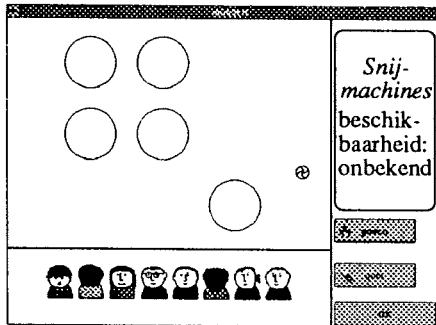
figuur 8.8 Bijzondere positionering van voorwerpen, ter stimulering van type 3

Het concept van het positioneren maakt nog eens duidelijk hoezeer het breukenbegrip verweven is met verhoudingen. Positioneren zoals dat binnen het ITS-breuken is vormgegeven is op te vatten als een didactische knipoog naar het idee van het tafelschikken, dat in het tweede hoofdstuk gepresenteerd is.

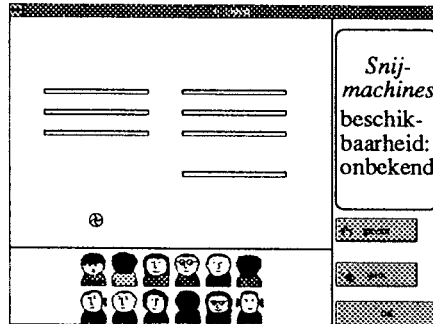
De opgavengenerator bepaalt voor de eerste twee opgaven van het plan een bijzondere positionering van de voorwerpen; voor de resterende opgaven geldt de standaardpositionering. Het resultaat is te zien in figuur 8.9.

De concretisering van de opgaven in het plan is nu vrijwel geheel voltooid: alleen de beschikbaarheid van de snijmachines moet nog worden bepaald. In de opgavenreeks voor onze leerling wordt vanaf de tweede opgave telkens het complete arsenaal van snijmachines beschikbaar gesteld. Alleen bij de eerste opgave — de opgave met de sterkste sturing — wordt aan de leerling een beperkte verzameling snijmachines beschikbaar gesteld: de leerling kan uitsluitend de snijmachines '2-alle-partjes-snijdend' en '8-alle-partjes-snijdend' gebruiken. Het resulterende, nu volledig uitgewerkte plan ter stimulering van het verdelen volgens type 3 is weergegeven in figuur 8.10<sup>1</sup>. Opgemerkt zij, dat de gehele uitwerking van het plan inderdaad door het ITS-breuken is geschied, zonder ingrepen van buitenaf.

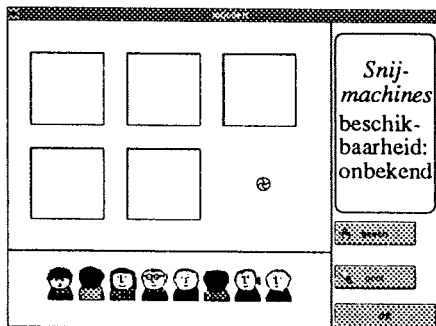
1. De weergave is niet geheel in overeenstemming met de manier waarop Eerlijk Verdelen een beperking in snijmachines weergeeft. Terwille van de duidelijkheid is in de figuur met kruisjes aangegeven welke machines niet gebruikt kunnen worden. In het programma zijn deze knoppen grijs, dus niet selecteerbaar.



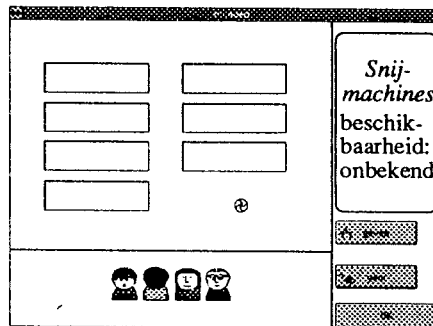
opgave 1: type(3), stimulans(zeer sterk)



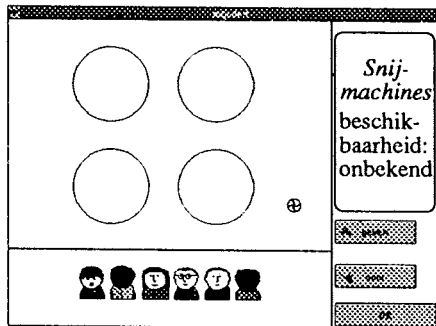
opgave 2: type(3), stimulans(sterk)



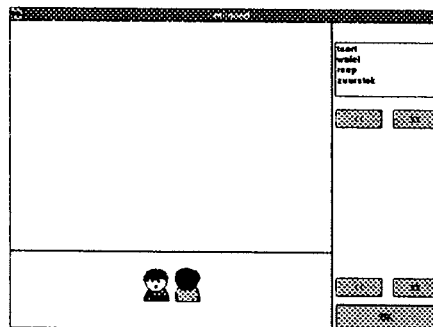
opgave 3: type(3), stimulans(gemiddeld)



opgave 4: type(3), stimulans(matig)

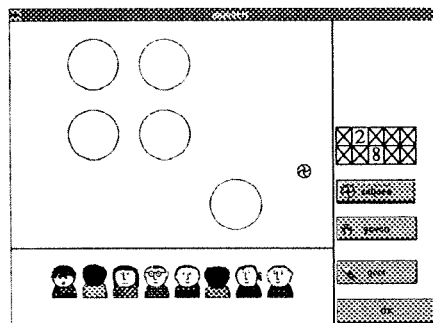


opgave 5: type(3), stimulans(zwak)

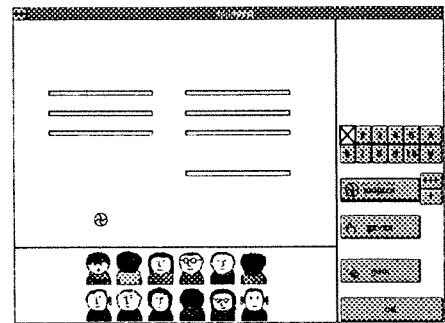


opgave 6: type(-), stimulans(geen)

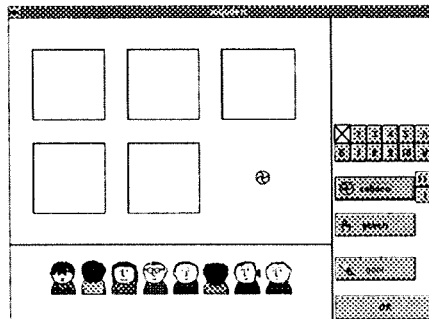
figuur 8.9 Het didactisch plan, gespecificeerd tot en met laag 7: de positionering van de voorwerpen is vastgesteld



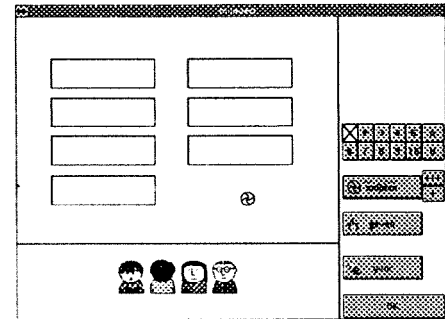
opgave 1: type(3), stimulans(zeer sterk)



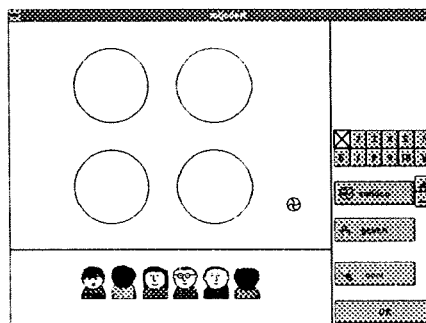
opgave 2: type(3), stimulans(sterk)



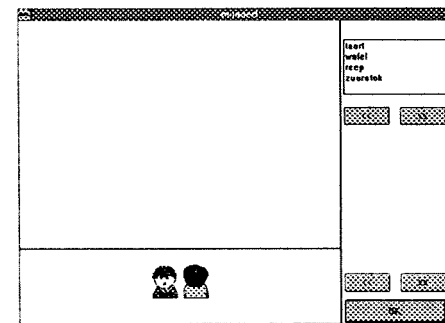
opgave 3: type(3), stimulans(gemiddeld)



opgave 4: type(3), stimulans(matig)



opgave 5: type(3), stimulans(zwak)



opgave 6: type(-), stimulans(geen)

figuur 8.10 Het didactisch plan, geheel gespecificeerd

---

## Hoofdstuk 9

### Het blackboard

*Raamwerk voor didactische plangeneratie*

Marc du Chatinier

*In een schoolklas buigt een groepje mensen zich over een probleem, onder leiding van een meester. Het probleem dat ze samen proberen op te lossen staat op het zwarte schoolbord. Het probleem is zó moeilijk, dat geen van de aanwezigen in staat is om het alleen op te lossen. Enkelen zien al wel stukjes van de oplossing. Zij melden daarom aan de meester dat zij een bijdrage aan de oplossing van het probleem willen leveren. De meester bepaalt wie als eerste iets op het bord mag schrijven. Zodra er deeloplossingen op het bord verschijnen, merken anderen dat zij op hun beurt een bijdrage kunnen leveren. Uiteindelijk evolueren de bijdragen naar de definitieve oplossing van het probleem.*

De rol van de didactische expert binnen het ITS-breuken is het opstellen van didactische plannen, telkens afgestemd op de vorderingen van een individuele leerling. Met dergelijke plannen worden tegelijkertijd verscheidene didactische doelen nagestreefd, die tezamen moeten garanderen, dat de leerling gaat beschikken over een variëteit aan oplossingsstrategieën voor verdeelsituaties. Een probleem bij het opstellen van zo'n plan is, dat de didactische doelen soms onverenigbaar zijn; bovendien is er geen absolute ordening aan te wijzen van het onderlinge belang van de didactische doelen. Dit probleem is bij de technische realisatie van de didactische expert opgelost met behulp van de blackboard-methodologie.

De blackboard-methodologie is domeinonafhankelijk en er zijn vele varianten in de toepassing ervan mogelijk. Alvorens de didactische expert van het ITS-breuken volgens deze methodologie te kunnen opzetten, moeten daarom domeinspecifieke keuzen gemaakt worden. Om de gemaakte keuzen te onderbouwen volgt nu eerst een korte uiteenzetting van de blackboard-methodologie; deze introductie streeft niet naar volledigheid, en is waar nodig toegespitst op de toepassing binnen het ITS-breuken.

#### 1 De blackboard-methodologie

De blackboard-methodologie ondersteunt het idee van afzonderlijke kennissystemen die samen, elk vanuit hun eigen perspectief, aan de oplossing van één probleem werken. De methodologie biedt een raamwerk voor de samenwerking van autonome kennissystemen.

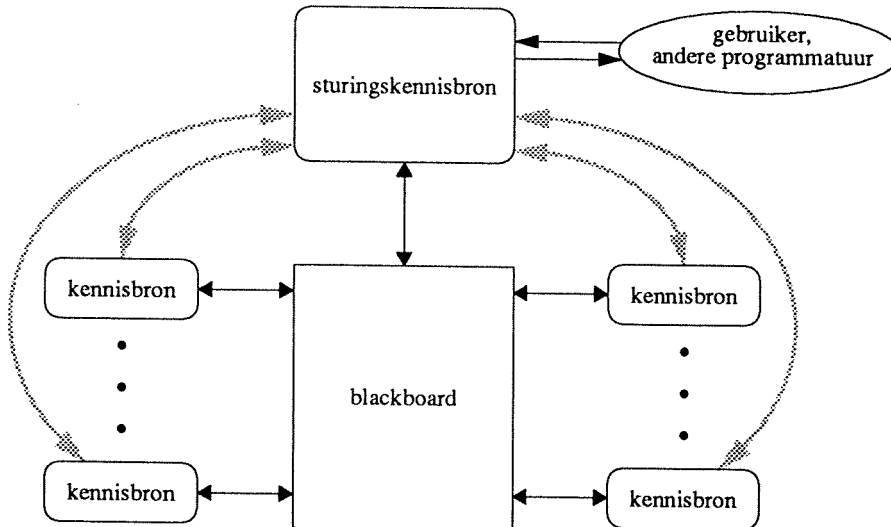
### 1.1 Samenwerkende kennissystemen

In een kennissysteem wordt een expliciete scheiding nagestreefd van de domeinafhankelijke kennis en de domeinonafhankelijke methoden om deze kennis toe te passen. Deze expliciete scheiding is terug te vinden in de architectuur van een kennissysteem, waarin twee fysiek gescheiden onderdelen voorkomen: een kennisbank waarin de specifieke kennis van het betreffende probleemdomein is vastgelegd, en een inferentiemachine waarin de methoden om de in de kennisbank vastgelegde kennis te manipuleren, zijn opgenomen. In deze systeemarchitectuur is alle domeinkennis in één kennisbank ondergebracht en is met deze kennisbank één inferentiemachine geassocieerd.

Soms is het onnatuurlijk om alle kennis van een probleemdomein in één kennisbank onder te brengen. Vooral als het gaat om domeinen waarbinnen verschillende aandachtsgebieden te onderscheiden zijn, is de kennis vaak op een zinvolle wijze opsplitsbaar. Aan de hand van dergelijke aandachtsgebieden is het mogelijk om de kennis in *clusters* in te delen, zodat alle kennis binnen één zo'n cluster een zo sterk mogelijke onderlinge samenhang vertoont, terwijl er tussen de onderscheiden clusters een veel zwakkere samenhang bestaat. Zo kan de kennis die in de didactische expert van het ITS-breuken moet worden vastgelegd, op een natuurlijke wijze geclusterd worden per na te streven didactisch doel.

Als de kennis voor een probleemdomein opsplitsbaar is in clusters, ligt het voor de hand om dit in het kennissysteem ook expliciet tot uitdrukking te brengen, namelijk door de kennis op te splitsen en onder te brengen in gescheiden kennisbanken. Als de kennis inderdaad in gescheiden kennisbanken wordt ondergebracht, is het mogelijk om voor elke afzonderlijke kennisbank het meest geschikte kennisrepresentatiefomalisme te kiezen en een toegespitste inferentiemachine in te schakelen. In feite zijn hiermee aparte kennissystemen verkregen.

De blackboard-methodologie biedt een raamwerk voor de samenwerking van afzonderlijke kennissystemen: de *blackboard-architectuur*. In de blackboard-architectuur zijn verschillende onderdelen te onderscheiden, zoals is weergegeven in figuur 9.1. Centraal in de architectuur staat het *blackboard*, dat fungeert als werkgeheugen. Daarnaast zijn er de afzonderlijke kennissystemen die binnen de blackboard-architectuur samenwerken; deze kennissystemen worden *kennisbronnen* genoemd (in het Engels *knowledge sources*). Een prominente plaats in de blackboard-architectuur wordt tenslotte ingenomen door de *sturingskennisbron*, die de samenwerking tussen alle andere kennisbronnen regelt.



figuur 9.1 De blackboard-architectuur

## 1.2 Het blackboard

De afzonderlijke kennissystemen die binnen de blackboard-architectuur samenwerken hebben onderling verschillende expertise, op een beperkt aandachtsgebied van het probleemdomein. Ze hebben echter geen kennis van elkaars expertise. De feitelijke samenwerking kan derhalve niet door de kennisbronnen zelf geregeld worden: hiervoor is de sturingskennisbron nodig. De kennisbronnen dienen ten behoeve van de samenwerking echter wel informatie met elkaar uit te wisselen. Dat gebeurt in de blackboard-architectuur met behulp van het blackboard, hetgeen een voor alle kennisbronnen toegankelijk (globaal) werkgeheugen is.

Het blackboard is het enige communicatiemedium voor de kennisbronnen in de blackboard-architectuur. Elke kennisbron kan de informatie op het blackboard lezen; het is daarvoor nodig dat alle informatie op het blackboard wordt vastgelegd in een formaat dat alle kennisbronnen kunnen interpreteren. De informatie-elementen die op het blackboard staan, worden *blackboard-objecten* genoemd. Elke kennisbron kan informatie op het blackboard schrijven of informatie op het blackboard wijzigen; de nieuwe informatie is daarmee direct toegankelijk voor andere kennisbronnen. Het wijzigen of toevoegen van informatie op het blackboard wordt een *blackboard-gebeurtenis* genoemd.

Omdat het blackboard het globale werkgeheugen is voor de afzonderlijke kennisbronnen, zal op het blackboard informatie van verschillende aard komen te staan: zo worden initiële gegevens op het blackboard geschreven, maar ook partiële oplossingen van het op te lossen probleem en eventuele alternatieven. Deze informatie kan

kriskras door elkaar op het blackboard geschreven worden. Vaak wordt er vooraf echter enige structuur op het blackboard aangebracht, om het zoeken naar bepaalde informatie voor de kennisbronnen te vergemakkelijken. Het blackboard wordt dan ingedeeld in *panelen*, die elk bij een specifiek aspect van het probleem behoren; per paneel wordt dan weer een aantal *lagen* onderscheiden, die informatie op verschillende abstractieniveaus bevatten.

### 1.3 De kennisbronnen

De kennisbronnen bevatten tezamen de kennis die nodig is om een gegeven probleem op te lossen, maar elke kennisbron afzonderlijk beschikt slechts over een deel van de benodigde kennis. Hoewel de kennisbronnen geen overzicht hebben over het hele probleemdomein, weet elke kennisbron wel onder welke voorwaarden hij zijn kennis voor de oplossing van het totale probleem kan aanwenden. Deze voorwaarden betreffen de aanwezigheid van bepaalde blackboard-objecten op het blackboard. De voorwaarden zijn vastgelegd in het zogenaamde *activatiedeel* van de kennisbron; de domeinkennis waarover de kennisbron beschikt is vastgelegd in zijn *actiedeel*.

Iedere kennisbron speurt voortdurend het blackboard af op zoek naar blackboard-objecten die voor hem relevant zijn: na elke blackboard-gebeurtenis onderzoekt iedere kennisbron of hij een zinvolle bijdrage aan de oplossing van het gegeven probleem kan leveren. De kennisbron verifieert hiertoe telkens of aan de voorwaarden van zijn activatiedeel is voldaan. Als blijkt dat inderdaad aan deze voorwaarden is voldaan, dan mag hij echter nog niet zomaar aan de slag gaan. Kennisbronnen hebben immers geen overzicht over het totale probleem, en kunnen dus niet beoordelen of hun bijdrage op dat moment het snelste tot een oplossing zal leiden. Een geactiveerde kennisbron meldt daarom aan de sturingskennisbron dat hij een bijdrage aan de oplossing van het probleem wil leveren, en wacht. De sturingskennisbron heeft in tegenstelling tot de afzonderlijke kennisbronnen wél een globaal overzicht over het hele probleemdomein, en selecteert op grond van zijn kennis een wachtende kennisbron, die vervolgens aan de slag mag gaan. De geselecteerde kennisbron past de kennis uit zijn actiedeel toe, en schrijft de uitkomst van zijn redeneren op het blackboard. Dit betekent een nieuwe blackboard-gebeurtenis, waarop het gehele proces herhaald wordt.

Het aantal kennisbronnen binnen de blackboard-architectuur ligt van tevoren niet vast, maar wordt bepaald door de opsplitsbaarheid van de kennis op het betreffende domein: de mate waarin de kennis in clusters in te delen is, bepaalt het aantal kennisbronnen. Binnen de architectuur kunnen kennisbronnen van sterk uiteenlopende aard samenwerken. Sommige kennisbronnen maken bijvoorbeeld gebruik van productieregels met doelgestuurde inferentie, andere kennisbronnen zijn eenvoudige, conventionele programma's.

#### 1.4 De sturingskennisbron

De sturingskennisbron regelt de samenwerking tussen de andere kennisbronnen, en bevat hiertoe kennis over het probleemdomein als geheel. De kennis van de sturingskennisbron is veel minder specialistisch van aard dan die van de andere kennisbronnen: de kennis van de sturingskennisbron is van een meta-niveau, en bestaat voornamelijk uit strategieën om een gegeven probleem op een zo handig mogelijke wijze op te lossen. Bovendien herkent de sturingskennisbron oplossingen, zodra deze voorkomen in de toestand van het blackboard.

Na elke blackboard-gebeurtenis krijgt de sturingskennisbron meldingen binnen van kennisbronnen die een bijdrage willen leveren aan de oplossing van het gegeven probleem. De sturingskennisbron bepaalt op grond van zijn strategische kennis de kennisbron die het eerste aan de slag mag gaan.

## 2 De opzet van de didactische blackboard-architectuur

In de technische realisatie van de didactische expert van het ITS-breuken is voor elk van de onderscheiden didactische doelen een aparte module gecreëerd, die in staat is om autonoom een volledig didactisch plan op te stellen, conform het doel dat de module nastreeft. Voor de samenwerking tussen deze modules is gebruik gemaakt van de blackboard-methodologie.

In de blackboard-architectuur is het blackboard het globale werkgeheugen: het bevat op elk moment informatie, die voor verscheidene kennisbronnen toegankelijk moet zijn. Voor de didactische expert geldt, dat voor de samenwerking tussen de modules informatie met betrekking tot de plangeneratie globaal beschikbaar moet zijn. Het blackboard van de didactische expert moet bijvoorbeeld op elk moment tijdens de plangeneratie alle tot dan toe gegenereerde, deels ingevulde plannen bevatten. Om de informatie die afkomstig is van de verschillende modules van elkaar te kunnen onderscheiden, is het blackboard ingedeeld in vijf panelen: met elke module correspondeert een paneel dat uitsluitend informatie bevat die afkomstig is van die module. Elk paneel is bovendien in acht lagen ingedeeld, om de stratificatie van de zoekruimte van mogelijke planinvullingen te weerspiegelen.

Een module genereert, door het opleggen van steeds specifiekere eisen aan de gewenste planinvulling, in acht opeenvolgende stappen een didactisch plan. Voor elke laag van de zoekruimte formuleert de module restricties met betrekking tot één aspect van de planinvulling. Voor het formuleren van deze restricties maakt de module gebruik van didactische kennis. Binnen de didactische blackboard-architectuur zijn voor elke module acht kennisbronnen opgezet, waarin deze kennis is vastgelegd; deze kennisbronnen worden *module-kennisbronnen* genoemd. In totaal zijn er binnen de didactische blackboard-architectuur dus veertig module-kennisbronnen.



De modules moeten tezamen komen tot een didactisch plan waarin zoveel mogelijk doelen zijn weerspiegeld. In het kader van deze samenwerking ‘onderhandelen’ de vijf modules op elke laag van de zoekruimte over de aan de planinvulling op te leggen restricties. Hiervoor zijn binnen de blackboard-architectuur acht *consistentie-kennisbronnen* aanwezig. Zo’n consistentie-kennisbron is met een laag van de zoekruimte geassocieerd, en betreft zijn informatie van de verschillende modules. Elke consistentie-kennisbron vergelijkt de restricties die de afzonderlijke modules in een bepaalde laag aan de zoekruimte opleggen. Meer in het bijzonder onderzoekt een consistentie-kennisbron of er een conflict tussen de modules is. Als hij een conflictueuze situatie signaleert, sluit een consistentie-kennisbron één of meer modules van participatie in de verdere plangeneratie uit.

Tenslotte is binnen de didactische blackboard-architectuur een sturingskennisbron aanwezig. De sturingskennisbron regelt de volgorde van executie van de overige kennisbronnen. Bovendien bepaalt hij dynamisch een prioritering voor de verschillende didactische doelen die de wenselijkheid van nastreving aangeeft; deze prioritering wordt aan de consistentie-kennisbronnen doorgegeven en vervult daar een rol bij het uitsluiten van modules.

De volgende paragrafen geven een nadere uitwerking van respectievelijk de module-kennisbronnen, de consistentie-kennisbronnen en de sturingskennisbron.

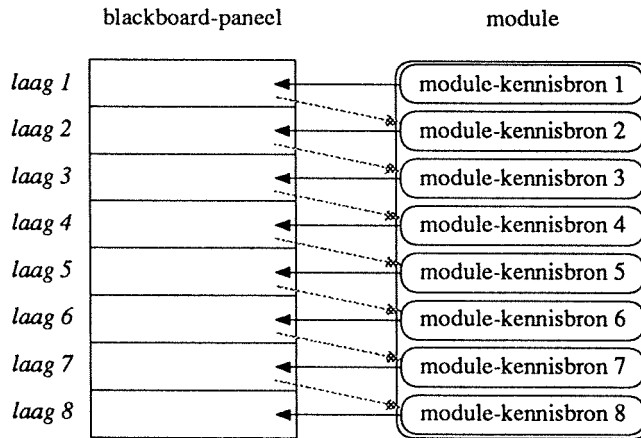
### 3 De module-kennisbronnen

Binnen de didactische blackboard-architectuur van het ITS-breken is elke module opgebouwd uit acht module-kennisbronnen. Elke module-kennisbron behartigt een specifiek aspect van de plangeneratie. De module-kennisbronnen zijn geassocieerd met de afzonderlijke lagen van het paneel op het blackboard dat voor de module is gedefinieerd. De eerste vier kennisbronnen van een module leveren een blauwdruk van het beoogde didactische plan op; de laatste vier kennisbronnen van een module vullen deze blauwdruk in met concrete opgaven.

Een module-kennisbron heeft een activatiedeel en een actiedeel. In het activatiedeel van een module-kennisbron is de voorwaarde gespecificeerd waaronder hij zijn kennis kan aanwenden: deze voorwaarde is het verschijnen van een deels ingevuld didactisch plan, in de laag die voorafgaat aan de laag waarmee de kennisbron is geassocieerd. De eerste module-kennisbron heeft geen voorwaarden in zijn activatiedeel staan — die kan altijd zijn kennis aanwenden. In het actiedeel van een module-kennisbron is de kennis vastgelegd over de restricties die hij aan de planinvulling wil opleggen.

Als een module-kennisbron van de sturingskennisbron groen licht krijgt voor executie, bepaalt de kennisbron de aan de zoekruimte op te leggen restricties, en plaatst

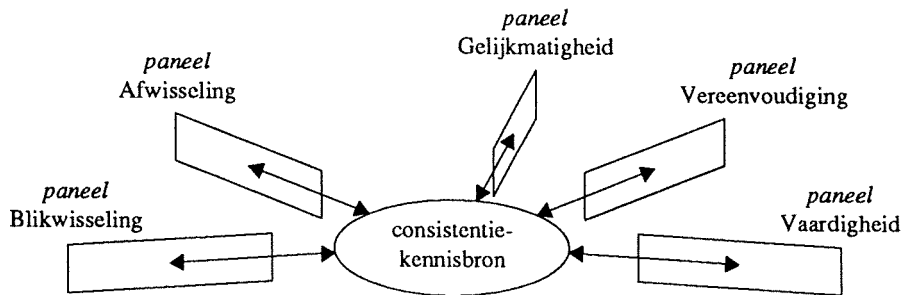
deze in de vorm van een nieuw blackboard-object in de juiste laag op het blackboard. In figuur 9.2 is de opbouw van één module schematisch weergegeven.



figuur 9.2 De opbouw van één module uit zijn acht module-kennisbronnen

#### 4 De consistentie-kennisbronnen

Omdat het wenselijk is, dat bij het genereren van een didactisch plan met zoveel mogelijk doelen tegelijkertijd rekening gehouden wordt, is het van belang dat de afzonderlijke modules van de didactische expert samenwerken tijdens de plangeneratie. Hiertoe zijn binnen de didactische blackboard-architectuur de consistentie-kennisbronnen opgezet. Een consistentie-kennisbron is met een specifieke laag van de zoekruimte geassocieerd en betreft zijn informatie van de verschillende panelen van het blackboard. In figuur 9.3 is de plaats van één zo'n consistentie-kennisbron weergegeven.



figuur 9.3 De plaats van een consistentie-kennisbron

Een consistentie-kennisbron heeft, net zo als een module-kennisbron, een activatiedeel en een actiedeel. In het activatiedeel van een consistentie-kennisbron is de voorwaarde voor executie van die kennisbron beschreven. Deze voorwaarde is het verschijnen van restricties op de panelen van de modulen die nog aan de plangeneratie deelnemen, in de laag waarmee de consistentie-kennisbron is geassocieerd. Immers, pas wanneer alle participerende modulen hun restricties aan de betreffende laag van de zoekruimte van mogelijke planinvullingen hebben opgelegd, heeft het zin om de restricties onderling met elkaar te vergelijken.

Bij executie van het actiedeel van een consistentie-kennisbron onderzoekt deze de restricties die alle nog participerende modulen tezamen aan de betreffende laag van de zoekruimte opleggen. Als er planinvullingen zijn die aan al deze restricties voldoen, kiest de consistentie-kennisbron zo'n gedeeltelijke planinvulling, en plaatst deze op de relevante panelen in de juiste laag op het blackboard. Als daarentegen de restricties die de modulen aan de zoekruimte opleggen, zó tegenstrijdig zijn dat er dientengevolge helemaal geen concrete planinvullingen meer mogelijk zijn binnen de vrijheidsgraden van de didactische expert, dan zijn de didactische doelen die tegelijkertijd worden nagestreefd in conflict. In een dergelijke situatie sluit de consistentie-kennisbron één van de in de plangeneratie participerende modulen van verdere deelname uit, gebruik makend van een prioritering van de participerende modulen, die hem verschaft is door de sturingskennisbron: de module met de laagste prioriteit wordt uitgesloten. De kennisbron meldt de uitsluiting aan de sturingskennisbron, en herhaalt het proces met de overgebleven modulen, net zolang totdat het conflict is geëlimineerd.

In de rest van deze paragraaf worden de afzonderlijke consistentie-kennisbronnen verder toegelicht.

### ***De consistentie-kennisbron voor de te stimuleren verdeelmanier***

Het didactisch specificatieproces begint met het bepalen van de verdeelmanieren die het beste kunnen worden gestimuleerd bij een individuele leerling. De eerste laag van de zoekruimte bevat de verdeelmanieren waaruit gekozen moet worden bij het automatisch genereren van een didactisch plan. Elk van de vijf modulen maakt op grond van informatie van het leerlingmodel een keuze voor één of meer te stimuleren verdeelmanieren. Zelfs als de modulen verschillende wensen ten aanzien van te stimuleren verdeelmanieren hebben, hoeven deze wensen nog niet tegenstrijdig te zijn: het is zeer wel mogelijk dat het stimuleren van verschillende verdeelmanieren in één reeks opgaven tot uitdrukking te brengen is. De consistentie-kennisbron die met deze laag van de zoekruimte is geassocieerd zal daarom geen modulen uitsluiten. Als een module één verdeelmanier wenst te stimuleren, dan plaatst de consistentie-kennisbron deze verdeelmanier eenvoudigweg terug op het juiste paneel in laag 1 op het blackboard. Als een module meer dan één verdeelmanier adequaat vindt, dan kiest

de consistentie-kennisbron er één van, zo goed mogelijk in overeenstemming met de wensen van de andere modules, en zet hem op de juiste plaats op het blackboard. Dit betekent dat elke module vanuit zijn eigen perspectief aan de verdere plangeneratie deelneemt.

### ***De consistentie-kennisbron voor het aantal opgaven van een plan***

Laag 2 van de zoekruimte van mogelijke planinvullingen betreft het aantal opgaven dat het te genereren didactische plan zal omvatten. Elk van de vijf modules legt door middel van een onder- en een bovengrens aan het gewenste aantal opgaven restricties op aan de zoekruimte. Omdat de vijf modules samen tot één didactisch plan moeten komen, is het van belang dat de modules onderling overeenstemming bereiken over het concrete aantal opgaven dat het plan moet omvatten. Voor deze laag van de zoekruimte is daarom een consistentie-kennisbron gedefinieerd die de onderlinge verenigbaarheid van de restricties van de vijf modules onderzoekt, en indien nodig modules van verdere participatie in de plangeneratie uitsluit.

Voor het vergelijken van de restricties die de afzonderlijke modules aan het aantal opgaven van het didactisch plan opleggen, bepaalt de consistentie-kennisbron het maximum van alle opgegeven ondergrenzen en het minimum van de bovengrenzen. Indien mogelijk, wordt binnen deze gemeenschappelijke grenzen het definitieve aantal opgaven geselecteerd: de consistentie-kennisbron kiest hierbij voor de gemeenschappelijke ondergrens. Het geselecteerde aantal wordt in elk van de panelen van de participerende modules in laag 2 op het blackboard geplaatst.

Er is sprake van een conflict tussen de modules als het minimum van de bovengrenzen die de afzonderlijke modules aan het aantal opgaven in het plan opleggen, kleiner is dan het maximum van de opgelegde ondergrenzen. In een dergelijke conflict-situatie sluit de consistentie-kennisbron de module met de laagste prioriteit uit, zoals in het voorgaande is beschreven, waarna hij de restricties van de nog participerende modules opnieuw vergelijkt.

### ***De consistentie-kennisbronnen voor de specificatie van suggestie***

De lagen 3 en 4 van de zoekruimte betreffen de kwalitatieve en kwantitatieve specificatie van de suggesties die voor de geselecteerde verdeelmannieren in de opgaven van het te genereren plan zullen worden gegeven. Voor deze lagen is eenzelfde observatie op zijn plaats als voor laag 1 van de zoekruimte: het is zeer wel mogelijk dat de verschillende planprofielen die de modules met betrekking tot het verloop van de sterkte van de suggesties voorstellen in één reeks opgaven geëffectueerd kunnen worden. De consistentie-kennisbronnen die met de lagen 3 en 4 zijn geassocieerd, sluiten daarom geen modules van verdere participatie in de plangeneratie uit: ze maken een keuze op grond van didactische overwegingen, en zetten op de juiste plaatsen op het blackboard hoe de sterkte van suggereren verloopt.

***De consistentie-kennisbron voor de aantallen voorwerpen en kinderen***

In de lagen 5 tot en met 8 van de zoekruimte worden de afzonderlijke opgaven van het didactisch plan geconcretiseerd: deze lagen samen vormen de opgavengenerator.

Laag 5 betreft de aantallen voorwerpen en kinderen in een opgave. Elke nog in de plangeneratie participerende module legt in deze laag een aantal restricties op aan de zoekruimte van mogelijke planinvullingen. De consistentie-kennisbron die met deze laag is geassocieerd onderzoekt of deze restricties onderling verenigbaar zijn, en sluit eventueel modules van plangeneratie uit.

Als er combinaties van aantallen voorwerpen en kinderen zijn die voldoen aan alle door de modules opgelegde restricties tezamen, maakt de consistentie-kennisbron hieruit een keuze. Bij deze keuze houdt de kennisbron rekening met de opgaven die de leerling voor wie het plan gegenereerd wordt, reeds eerder gehad heeft: de kennisbron kiest uit de mogelijke combinaties er één die niet in de laatste tien aan de leerling gegeven opgaven is voorgekomen. Als alle combinaties van aantallen voorwerpen en kinderen, die voldoen aan de opgelegde restricties, bij de laatste tien opgaven zijn gebruikt, dan wordt de combinatie gekozen die het langst geleden gegeven is. De gekozen combinatie wordt op de panelen van de nog participerende modules in laag 5 op het blackboard gezet.

De restricties die de verschillende modules in deze laag aan de zoekruimte van planinvullingen opleggen, kunnen zo tegenstrijdig zijn dat alle mogelijke combinaties van aantallen voorwerpen en kinderen verworpen worden. In een dergelijke situatie sluit de consistentie-kennisbron tenminste één module van verdere participatie in de plangeneratie uit. Hierbij wordt niet alleen naar de prioriteiten van de modules gekeken, maar ook naar de restricties die de afzonderlijke modules aan de zoekruimte opleggen. In principe wordt de module met de laagste prioriteit uitgesloten; als er echter verscheidene modules zijn met dezelfde lage prioriteit, wordt van deze modules degene uitgesloten die het sterkste samenstel van restricties aan de zoekruimte oplegt. Als heuristische maat voor de sterkte van een samenstel van restricties wordt het *aantal* restricties in dat samenstel gehanteerd — in het algemeen zal gelden dat naarmate een module meer restricties aan de aantallen voorwerpen en kinderen in een opgave oplegt, het aantal combinaties dat aan deze restricties voldoet afneemt.

***De consistentie-kennisbron voor de vorm van de voorwerpen***

Laag 6 van de zoekruimte bevat de vormen van de voorwerpen. Elke nog in de plangeneratie participerende module legt restricties op aan de gewenste vorm van de voorwerpen in een opgave. Omdat de afzonderlijke modules overeenstemming moeten zien te bereiken ten aanzien van de vorm van de voorwerpen, is voor deze laag van de zoekruimte een consistentie-kennisbron gedefinieerd die de verschillende restricties van de modules onderling vergelijkt.

Aan de vorm van de voorwerpen kan een module één van drie mogelijke restricties opleggen:

- de voorwerpen moeten cirkels zijn;
- de voorwerpen mogen geen stroken zijn;
- de voorwerpen mogen cirkels, stroken, vierkanten of rechthoeken zijn.

Deze drie restricties zijn niet onafhankelijk van elkaar: een vorm die voldoet aan de eerstgenoemde restrictie voldoet ook aan de laatste twee restricties; een vorm die voldoet aan de tweede restrictie voldoet ook aan de laatstgenoemde restrictie. Er bestaat derhalve een ordening met betrekking tot de sterkte van deze restricties.

Als gevolg van de onderlinge ordening van de mogelijke restricties die aan de vorm van de voorwerpen kunnen worden opgelegd, kunnen er geen conflicten tussen de modulen ontstaan. De consistentie-kennisbron voor de vorm van de voorwerpen zal derhalve geen modulen van verdere participatie in de plangeneratie uitsluiten.

Voor de keuze van de vorm van de voorwerpen maakt de consistentie-kennisbron expliciet gebruik van de ordening van de restricties: de consistentie-kennisbron bepaalt de sterkste restrictie die aan de vorm van de voorwerpen is opgelegd en maakt zijn keuze aan de hand van deze restrictie. Als door tenminste één van de modulen de restrictie is opgelegd dat de voorwerpen cirkels moeten zijn, dan wordt de cirkel als vorm gekozen. Als de sterkste restrictie is, dat de voorwerpen geen stroken mogen zijn, dan wordt één van de vormen cirkel, vierkant of rechthoek gekozen. Als alle nog participerende modulen de zwakste van de drie restricties opleggen, dan wordt een keuze uit de vier mogelijke vormen gemaakt. Bij deze keuze houdt de consistentie-kennisbron weer rekening met de opgaven die de leerling reeds heeft gehad. Het resultaat is dat de voorwerpen variërend van vorm worden aangeboden. De consistentie-kennisbron zet de gekozen vorm op de juiste plaatsen op het blackboard.

### ***De consistentie-kennisbron voor de positionering van de voorwerpen***

Laag 7 van de zoekruimte betreft de positionering van de voorwerpen op het scherm. Elke nog in de plangeneratie participerende module legt restricties aan de zoekruimte op betreffende de positionering. Omdat de afzonderlijke modulen ook hier weer overeenstemming moeten zien te bereiken, is er voor deze laag eveneens een consistentie-kennisbron gedefinieerd die de verschillende restricties van de modulen vergelijkt en eventueel modulen uitsluit.

Evenals voor de vorm van de voorwerpen zijn er voor de positionering van de voorwerpen drie restricties mogelijk:

- de voorwerpen moeten in standaardpositionering op het scherm komen;
- de voorwerpen moeten in een bijzondere positionering op het scherm komen;
- de positionering van de voorwerpen is vrij te kiezen.

De eerste twee restricties zijn uiteraard sterker dan de laatstgenoemde restrictie. Ze zijn onderling echter onvergelijkbaar: de ene is niet sterker dan de andere.

Alleen als de eerste twee restricties tegelijk aan de zoekruimte worden opgelegd, is er een conflict tussen de onderscheiden didactische doelen, en zal de consistentie-kennisbron één of meer modules van participatie in de verdere plangeneratie moeten uitsluiten. Bij elk ander samenstel van restricties kan de consistentie-kennisbron een positionering kiezen die aan alle opgelegde restricties voldoet. Als de restrictie van standaardpositionering wordt opgelegd, kiest de consistentie-kennisbron voor standaardpositionering; als de eis voor een bijzondere positionering wordt geponeerd, kiest de kennisbron voor de bijzondere positionering. In het geval dat alle participerende modules aangeven dat de positionering van de voorwerpen vrij te kiezen is, selecteert de consistentie-kennisbron de standaardpositionering. De gekozen wijze van positionering van de voorwerpen op het scherm wordt weer op de juiste plaatsen op het blackboard gezet.

#### ***De consistentie-kennisbron voor de toegestane snijmachines***

Laag 8 van de zoekruimte bepaalt de snijmachines die aan de leerling in een opgave ter beschikking zullen worden gesteld door Eerlijk Verdelen. Elke nog in de plangeneratie participerende module legt restricties op aan de beschikbaarheid van de snijmachines. Met behulp van deze restricties specificceert een module in feite de verzameling van snijmachines die aan de leerling mag worden aangeboden. De consistentie-kennisbron die met deze laag is geassocieerd, vergelijkt de door de afzonderlijke modules voorgestelde verzamelingen van snijmachines. Als twee modules verschillende verzamelingen snijmachines voorstellen is er sprake van een conflict, en zal de consistentie-kennisbron tot uitsluiting van één of meer modules overgaan. Pas als alle resterende modules dezelfde verzameling van snijmachines naar voren brengen, wordt deze verzameling op de juiste plaatsen op het blackboard gezet.

## **5 De sturingskennisbron**

De sturingskennisbron heeft binnen de didactische blackboard-architectuur twee taken: ten eerste bepaalt hij vóór aanvang van de plangeneratie een prioritering van de onderscheiden didactische doelen die de wenselijkheid van nastreving aangeeft; ten tweede regelt hij de volgorde van executie van module- en consistentie-kennisbronnen tijdens de plangeneratie.

De prioritering van de afzonderlijke didactische doelen beredeneert de sturingskennisbron gebruik makend van informatie uit het leerlingmodel: voor elk van de doelen bepaalt hij in hoeverre dat doel is bereikt. Een doel dat nagenoeg bereikt is, krijgt een lage prioriteit.

Voor het bepalen van de volgorde van executie van kennisbronnen tijdens de plan-generatie is het van belang, dat de modulen in hetzelfde tempo hun plan opbouwen: er moet voor *synchronisatie* van de modulen gezorgd worden. Deze synchronisatie wordt echter al in belangrijke mate afgedwongen door de inrichting van de activatiedelen van de module- en consistentie-kennisbronnen, waardoor de taak van de sturingskennisbron hierin beperkt van omvang is.

**Literatuur**

Engelmore en Morgan (1988) geven een introductie in de blackboard-methodologie en bespreken verschillende toepassingen ervan.





---

# Hoofdstuk 10

## De diagnostische expert

Arjan van Hienen

De diagnostische expert is binnen het ITS-breken verantwoordelijk voor de analyse van leerlingwerk. Als een leerling een oplossing voor een gegeven opgave heeft geconstrueerd, maakt het basisprogramma Eerlijk Verdelen een eerste beoordeling van het resultaat. De diagnostische expert voert een nadere analyse van het werk van de leerling uit, die ondersteunend is aan de didactiek: de diagnostische expert bepaalt welke oplossingsstrategieën de leerling gebruikt heeft. De resultaten van deze analyse worden doorgegeven aan het leerlingmodel, opdat deze zich een accuraat beeld van de leerling vorme.

### 1 Diversiteit in 'goed' en 'fout'

Bij veel van de inspanningen op het gebied van ITS-onderzoek heeft de diagnostiek van leerlingwerk een centrale plaats ingenomen, al dan niet in combinatie met een leerlingmodel. Met name heeft veel onderzoek zich gericht op het diagnostiseren van het denkniveau van leerlingen op grond van de *fouten* die zij maken. Deze aandacht voor fouten is niet zo verwonderlijk, want aan foute antwoorden valt in eerste instantie meer te ontdekken dan aan goede antwoorden. Bovendien is er een historische reden aan te voeren, namelijk de in de begintijd van het ITS-onderzoek algemeen geldende opvattingen over didactiek. Een leerling die fouten maakt, geeft er blijk van af te wijken van het juiste denkspoor, en moet door toegesneden instructie weer op het rechte pad worden geholpen. 'Fout' kan in deze opvatting op verschillende manieren 'fout' zijn, maar 'goed' is gewoon 'goed'. De bedoeling van het op fouten gerichte onderzoek is om een bibliotheek aan te leggen van alle mogelijke fouten in het leerlingwerk, en daaraan didactische therapieën te koppelen. Afhankelijk van welke fout een leerling maakt, leidt de craan gekoppelde therapie tot reparatie van de afwijking in zijn denken.

Het realistisch rekenonderwijs propageert een andere opvatting over het karakter van goede en foute antwoorden. Binnen deze stroming wordt bestreden dat oplossingen maar op één manier 'goed' zijn: een goede oplossing kan voortkomen uit zeer uiteenlopende denkstrategieën. Er is niet op voorhand één oplossing de beste; de kwaliteit van de oplossing is gerelateerd aan de leergeschiedenis van een leerling. Ten behoeve van individuele differentiatie moet de instructie dan ook reeds op het

niveau van diversiteit van goede oplossingen aangrijpen, en niet uitgesteld worden totdat er fouten optreden in het leerlingwerk. Een probleem bij deze vorm van instructie is, dat de herkomst van goede oplossingen minder direct toegankelijk is voor observatie dan die van foute oplossingen. Als een leraar zich voor dit probleem gesteld ziet bij het diagnostiseren van het denkniveau van leerlingen, dan kan hij extra informatie krijgen door middel van een klasgesprek, door leerlingen direct te vragen hoe ze aan de oplossing komen, of door het klad van de oplossing te analyseren. Een geautomatiseerde diagnosticus kan deze extra informatie echter niet altijd achterhalen, en heeft dus minder houvast bij het stellen van diagnoses dan een leraar.

Vanuit het perspectief van het ontwikkelingsonderzoek is het interessant om straks te kunnen constateren, dat automatische herkenning van significant van elkaar verschillend correct leerlinggedrag toch *mogelijk* is, zelfs in de context van een open leeromgeving als Eerlijk Verdelen.

## 2 Uitgangspunten voor de inrichting van de diagnostische expert

De inrichting van de diagnostische expert wordt in belangrijke mate bepaald door de samenwerking met de andere componenten binnen het ITS-breuken. Niet de gehele diagnose van het leerlingwerk hoeft te worden behartigd door de diagnostische expert; het basisprogramma kan ook een gedeelte van de diagnose voor zijn rekening nemen. Evenmin hoeft de diagnose uitputtend te zijn; niet alle afleidbare informatie kan elders in het programma gebruikt worden.

### 2.1 Diagnose ten behoeve van didactische differentiatie

Bij de start van het ITS-project werd de diagnose gezien als de meest centrale component van het programma: op basis van de voortdurende diagnose van de leerlingactiviteit zou telkens opnieuw een beetje bijsturing van de instructie kunnen worden gedefinieerd. Inmiddels is het inzicht gegroeid dat de didactische expert het initiatief heeft, en dat de diagnostische expert dientengevolge alleen informatie hoeft af te leiden die de didactische expert kan verwerken tot manipulaties binnen de vrijheidsgraden van Eerlijk Verdelen. Het is verleidelijk om de computer nog veel meer gegevens te laten registreren — dat kunnen computers immers heel gemakkelijk. Met het verzamelen van gegevens die niets kunnen bijdragen aan de één of andere gecomputeriseerde vorm van didactische differentiatie, zou de diagnostische expert van het ITS-breuken echter zijn doel voorbij schieten.

De omvang van de informatie die de diagnostische expert verzamelt, is daarom beperkt: niet alle mogelijke gegevens over leerlingen worden ingewonnen, maar uitsluitend die informatie die de didactische expert kan gebruiken voor het opstellen van nieuwe plannen.

## 2.2 Diagnose temidden van conflicterende signalen en ruis

Binnen het ITS-breuken staat de diagnostische expert voor de taak om uit het observeerbare gedrag van een leerling conclusies te trekken over de kwaliteit van diens denken. De diagnostische expert moet hiertoe de informatie die de leerling verschaft in de vorm van bewegingen en klikken met de muis, interpreteren. Deze interpretatie vindt plaats op grond van onvolledige en onzekere informatie, zodat de diagnostische expert hierbij potentieel inschattingfouten maakt.

Ten eerste is het *a priori* onmogelijk om alle mogelijke oplossingsstrategieën van leerlingen op te sommen. Het is nooit uit te sluiten dat een leerling een onvoorzienne, maar correcte aanpak hanteert. In een dergelijk geval kan een automatische diagnosticus de gebruikte strategie niet thuisbrengen of beoordeelt deze verkeerd. Het is met de huidige stand van de informatica niet mogelijk dat een computer op een geheel nieuwe wijze betekenis toekent aan het leerlinggedrag. Een mens is op dit gebied duidelijk superieur; hij ziet onmiddellijk allerlei nieuwe verbanden en betekenissen. Beoordeling van leerlingwerk heeft bij een automatische diagnose daarom altijd het karakter van een *classificatie* van handelingen.

Maar zelfs als een leerling een opgave wél oplost op een bij de diagnosticus bekende manier, is het niet zeker dat het werk van de leerling correct wordt geclassificeerd: bij complexe handelingen is het vaak niet mogelijk om op basis van slechts één opgave te differentiëren tussen mogelijke categorieën oplossingsstrategieën. Het heeft geen zin om de leerling in zulke gevallen specifieke toetsopgaven te geven, uitsluitend ter vaststelling van de door hem gehanteerde strategie, omdat hij voortdurend bijleert. Op het moment dat de leerling voldoende toetsopgaven gemaakt zou hebben om in principe te kunnen vaststellen in welke categorie zijn oplossingsstrategie geclassificeerd zou moeten worden, kan hij al overgestapt zijn op een nieuwe manier van verdelen. Bovendien kan het zo zijn dat leerlingen binnen één opgave van oplossingsstrategie wisselen. De diagnostische expert schrijft daarom geen toetsopgaven voor en beïnvloedt de loop van een didactisch plan dus niet.

Tenslotte is het mogelijk dat leerlingen hun oplossing mogelijk iets anders uitvoeren dan hun bedoeling was. Bij het onderdeel Snijden & Geven, bijvoorbeeld, kan een leerling door onervarenheid met de muis onnauwkeurig zijn bij het snijden van voorwerpen. Deze onnauwkeurigheden zijn op te vatten als verstoringen van het door de leerling bedoelde signaal door *ruis*. De diagnostische expert kan door het optreden van ruis niet altijd een juiste keuze maken tussen enerzijds een correcte aanpak, die slordig is uitgevoerd, en anderzijds een incorrecte aanpak.

Al deze onzekerheden tezamen maken, dat er bij het stellen van diagnoses rekening gehouden moet worden met mogelijk conflicterende signalen en met ruis. De complicatie van het optreden van ruis is een uniek probleem bij de diagnose; conflicterende informatie komt ook elders voor binnen het ITS-breuken.

### 2.3 Taakverdeling tussen het basisprogramma en de diagnostische expert

Binnen het ITS-breuken wordt ruis waar mogelijk lokaal afgehandeld door het basisprogramma Eerlijk Verdelen. De motivatie hiervoor is, dat ruis vooral betrekking heeft op geïsoleerde handelingen, en veel minder op een opgave in z'n geheel. De didactische differentiatie die met het ITS-breuken wordt nagestreefd is georganiseerd op het niveau van (reeksen van) opgaven, en niet op handelingen binnen een opgave; de aspecten van de diagnose die betrekking hebben op ruis zijn dus niet relevant voor andere componenten van het programma. Als gevolg van deze lokale afhandeling van ruis hoeft de diagnostische expert er geen rekening mee te houden.

De diagnostische expert hoeft evenmin rekening te houden met foute antwoorden; deze worden eveneens door het basisprogramma gedetecteerd. Van het basisprogramma krijgt de leerling onmiddellijk te weten of zijn oplossing correct is of niet.

## 3 Diagnose bij Snijden & Geven

Bij de inleiding tot deel III is vermeld, dat de uitwerking van de afzonderlijke componenten van het ITS-breuken grotendeels beperkt is tot het tweede onderdeel van Eerlijk Verdelen, Snijmachines. Bij de ontwikkeling van de diagnostische expert is er echter juist vrij veel aandacht besteed aan de diagnose bij Snijden & Geven.

### 3.1 Diagnose en therapie door het basisprogramma

Het basisprogramma Eerlijk Verdelen elimineert zoveel mogelijk ruis, ofte wel onnauwkeurigheden in de uitvoering van een verdeling door een leerling. Ruis doet zich het sterkst voor bij Snijden & Geven, waar leerlingen met een mes sneden maken. De vrijheid is hierbij nagenoeg onbegrensd: een leerling kan een snede op een willekeurig punt op het scherm beginnen en op een willekeurig punt eindigen. Deze vrijheid is gewenst, omdat Snijden & Geven als eerste onderdeel van Eerlijk Verdelen zo dicht mogelijk bij de realistische context van het eerlijke verdelen staat. Maar, juist door deze vrijheid is het moeilijk om op basis van het gedrag van een leerling te achterhalen wat zijn bedoeling is bij het snijden.

Bij observatie van leerlingen die aan het werk waren met eerdere versies van Eerlijk Verdelen zijn enkele soorten uitvoeringsfouten gesignaleerd. De voornaamste uitvoeringsfout is, dat leerlingen voorwerpen soms niet helemaal tot de rand snijden; de fout doet zich juist voor als een leerling van plan is om heel precies te snijden. Het gevolg is, dat bij 'geven' de twee stukken aan elkaar blijven kleven. Leerlingen die dat overkomt begrijpen daar niets van, en denken dat het een fout in het programma is.

Ten tweede lukt het leerlingen die vanuit de hoekpunten van een rechthoekig voorwerp willen snijden soms niet om dat redelijk nauwkeurig te doen; leerlingen snijden

vaak door hoeken om een mooie verdeling in tweeën of in vieren te maken. Maar, leerlingen blijken hierbij soms niet goed in te kunnen schatten hoe het mes snijdt — het mes snijdt met de punt; de *hot spot* van de cursor is bij het mes de positie uiterst linksboven. Het gevolg is dat de verdelingen als ‘fout’ worden beoordeeld door Eerlijk Verdelen, terwijl de bedoeling van de leerlingen correct is.

In de derde plaats is geobserveerd, dat leerlingen zuurstokken soms in de lengterichting of diagonaal proberen te snijden, naar analogie van het verdelen van rechthoekige voorwerpen. Het is bij zuurstokken echter vrijwel onmogelijk om de verdeling met deze aanpak eerlijk te maken.

Tenslotte is geobserveerd dat een leerling soms niet alle gesneden stukken uitdeelt, terwijl hij toch meldt dat hij klaar is; deze fout doet zich voor als na veelvuldig snijden kruimels zijn ontstaan. De leerling weet wel dat hij alle stukken moet uitdelen, maar de kruimels zijn soms zó klein dat het hem teveel moeite kost om ze met het handje te pakken.

De overeenkomst tussen deze uitvoeringsfouten is, dat de aandacht van een leerling ten onrechte wordt gericht op het verwerven van een hoog niveau van handvaardigheid. Het huidige basisprogramma Eerlijk Verdelen kan bovengenoemde uitvoeringsfouten inmiddels redelijk goed opvangen. De eerste uitvoeringsfout, het niet goed doortrekken van sneden tot de rand, ondervangt het programma door sneden ‘in gedachte’ telkens iets langer te maken. Als de zo verlengde snede een rand van een voorwerp of een reeds eerder gemaakte snede bereikt, wordt de verlengde snede als zodanig op het scherm afgebeeld; anders blijft het een inkeping. Deze automatische correctie vindt uitsluitend plaats binnen een bepaalde marge. Deze marge is instelbaar door de leraar. De marge mag niet al te groot zijn, want dan zouden bedoelde inkepingen in voorwerpen door Eerlijk Verdelen worden opgevat als volledige sneden. Sneden in voorwerpen blijven niet staan als ze niet tenminste ergens over een rand van een voorwerp gaan of over een eerder gemaakte snede. De techniek van het doortrekken van lijnen is bekend als ‘zwaartekracht’ (*gravity*), en wordt bijvoorbeeld toegepast in geavanceerde grafische pakketten voor de computer.

De tweede uitvoeringsfout, aangaande het diagonaal snijden, wordt eveneens ondervangen door de zwaartekrachttechniek: schuine sneden worden vanzelf naar de hoekpunten van een voorwerp getrokken, weer met inachtneming van een vooraf ingestelde marge.<sup>1</sup>

Schuin aangebrachte sneden in zuurstokken worden door Eerlijk Verdelen telkens omgezet in verticale sneden, die ook als zodanig op het scherm worden getoond. Kruimels tenslotte, worden bij de beoordeling van het resultaat van een verdeling

---

1. In de versie van Eerlijk Verdelen zoals die wordt uitgegeven is deze optie voorlopig uitgeschakeld; als gevolg van tijdgebrek kon de zwaartekrachttechniek voor schuine sneden niet tot een volledig betrouwbare implementatie worden uitgewerkt.

door het programma genegeerd. Bij zuurstokken verschijnen kruimels zelfs niet op het scherm; doordat sneden uitsluitend verticaal gezet worden kunnen kruimels hier gemakkelijk worden vermeden.

Door de hierboven genoemde corrigerende maatregelen is het handelen van leerlingen gevrijwaard van de belangrijkste bronnen van ruis. De correcties worden onmiddellijk doorgevoerd, zonder overleg met de leerling en zonder hem expliciet mededelingen te doen. Wat er op het scherm getoond wordt na het snijden, is wat geldt. Als de leerling toch iets anders bedoeld heeft, kan hij altijd nog gummen en opnieuw beginnen. De motivatie voor deze wijze van afhandeling van ruis is, dat adaptiviteit van het programma bij voorkeur tot uitdrukking moet komen in hoe de micro-wereld reageert, en niet in berichten in een 'meta-taal'. Het gebruik van meta-taal verstoort namelijk te sterk.

Het basisprogramma handelt niet alleen ruis af, maar onderscheidt bovendien zelfstandig goede en foute verdelingen van elkaar. Een foute verdeling wordt in een spreekwolkje van commentaar voorzien: "Het is niet eerlijk" of "Ik heb teveel"; bij een goede verdeling verschijnt: "Ik vind het eerlijk". Fouten die meer met de bediening van het programma te maken hebben worden op dezelfde manier aan de leerling gemeld, bijvoorbeeld: "Je hebt nog niets gedaan", "Je moet nog geven!" of "Alles moet op!". Overigens wordt nog eens benadrukt dat leerlingen de verdelingen in het algemeen correct uitvoeren; maar ook als dat niet het geval is, is de genoemde feedback meestal redundant — leerlingen zien zelf ook al wel aankomen hoe de beoordeling van hun verdeelactiviteit zal uitpakken.

### 3.2 Classificatie van verdeelmanieren door de diagnostische expert

De diagnostische expert verzorgt een nadere analyse van het werk van een leerling en bepaalt welke oplossingsstrategieën er gebruikt zijn. In de huidige versie van het ITS-breuken is de automatische herkenning van oplossingsstrategieën behalve voor het onderdeel Snijmachines ook voor Snijden & Geven geïmplementeerd. De andere componenten zijn echter niet uitgewerkt voor dit onderdeel, zodat het ITS-breuken niet operationeel is voor Snijden & Geven. Het is overigens niet zeker of de kosten van het ontwikkelen van een differentiërende didactiek voor dit onderdeel opwegen tegen de eventuele baten, en daarom heeft het verder ontwikkelen van het ITS-breuken op dit niveau niet de hoogste prioriteit. De voor Snijden & Geven onderscheiden oplossingsstrategieën worden hierna toch kort gepresenteerd, omdat ze de grondslag vormen voor de diagnose van de oplossingsstrategieën bij Snijmachines en bij Kleuren & Benoemen.

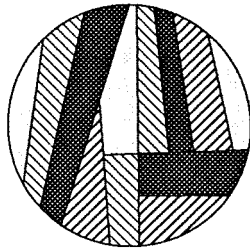
De herkenning door de diagnostische expert van de verschillende oplossingsstrategieën bij het gebruik van een mes als snijgereedschap is lang niet triviaal. De belangrijkste oplossingsstrategieën zijn hieronder archetypisch weergegeven — in de praktijk zijn oplossingen van leerlingen niet absoluut bij de ene of de andere strategie in

te delen. De meeste kenmerken van een oplossingsstrategie zijn niet discreet evalueerbaar in termen van 'afwezig' of 'aanwezig'; kenmerken zijn in meer of mindere mate aanwezig.

Het voornaamste criterium bij het opstellen van de classificatie van archetypen, die de diagnostische expert gebruikt, is de planningscapaciteit waarvan de leerling blijkt geeft bij het snijden en geven. Bepaalde verdeelmannieren zijn er een indicatie van dat een leerling gewoon maar begonnen is met snijden en geven, totdat het verdeelprobleem gereduceerd is tot een door hem gemakkelijk te overzien probleem. Andere verdeelmannieren kunnen alleen worden toegepast als een leerling de verdeling eerst mentaal plant, en pas daarna met de muis uitvoert. De volgorde waarin de verdeelmannieren hierna worden gepresenteerd, komt zo goed mogelijk overeen met de toenemende mate waarin leerlingen worden verondersteld te plannen. Naast de zeven archetypen die hier worden gepresenteerd zijn nog enkele varianten bekend; die worden hier echter niet gepresenteerd vanwege het voorlopige karakter van de inrichting van de diagnostische expert voor Snijden & Geven.

#### **Verdeelmanier A**

Beginnende leerlingen kunnen veelal nog niet planmatig te werk gaan bij het verdelen: zij beginnen vaak elk voorwerp naar willekeur in kleine stukken te snijden, om vervolgens de stukken aan de kinderen uit te delen, telkens op het rijtje af. Een voorbeeld van deze manier van verdelen is gegeven in figuur 10.1.



*figuur 10.1* Verdeelmanier A, toegepast op '1 taart verdelen over 4 kinderen'

De kenmerken van deze verdeelmanier zijn:

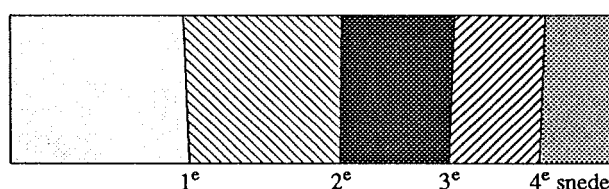
- de voorwerpen worden elk in veel kleine stukken gesneden;
- de gesneden stukken hebben een tamelijk willekeurige vorm;
- de kinderen krijgen ongeveer evenveel stukken.

#### **Verdeelmanier B**

Sommige leerlingen zien al direct de analogie met het eerlijke verdelen uit het dagelijks leven. Ze proberen per voorwerp net zoveel stukken te snijden als er kinderen



zijn om over te verdelen, maar hebben daar nog niet een heel handige strategie voor. Het gaat dan zoals vaak bij het snijden van cake: de plakken worden steeds dunner als er dichtbij het einde van de cake nog veel plakken nodig zijn. De leerlingen snijden telkens een portie af voor één kind, en na elke snede beschouwen ze het verdeelprobleem als het ware opnieuw. Het nieuwe verdeelprobleem is: verdeel het grootste onversneden stuk van het voorwerp over het aantal kinderen min één. Het resultaat is dat de porties steeds een beetje groter worden, of juist steeds een beetje kleiner. Een voorbeeld van deze manier van verdelen is gegeven in figuur 10.3.



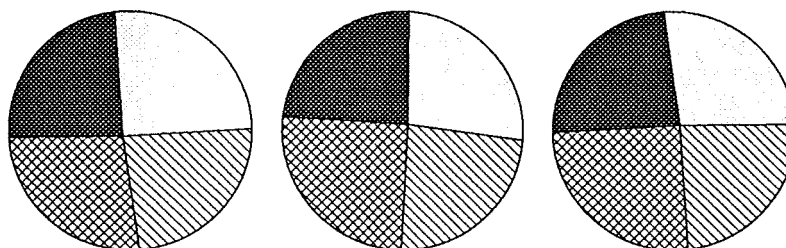
figuur 10.2 Verdeelmanier B, toegepast op '1 reep verdelen over 5 kinderen'

De kenmerken zijn:

- de voorwerpen worden één voor één in zoveel stukken gesneden als er kinderen zijn om over te verdelen;
- de gesneden stukken zijn onderling verschillend van grootte, afnemend of juist toenemend in de volgorde van het snijden;
- de kinderen krijgen evenveel stukken als er voorwerpen zijn om te verdelen.

### Verdeelmanier C

Bij de derde manier van verdelen beschouwt een leerling de verdeelsituatie per voorwerp, net als bij de verdeelmannieren A en B. Hij geeft er nu blijk van in te zien hoe hij zo'n voorwerp eerlijk kan verdelen. De oplossing die hij construeert voor de verdeling van één voorwerp past hij achtereenvolgens toe op alle overige voorwerpen. Het resultaat is uiteindelijk een eerlijke verdeling. Een voorbeeld van deze manier van verdelen is gegeven in figuur 10.3.



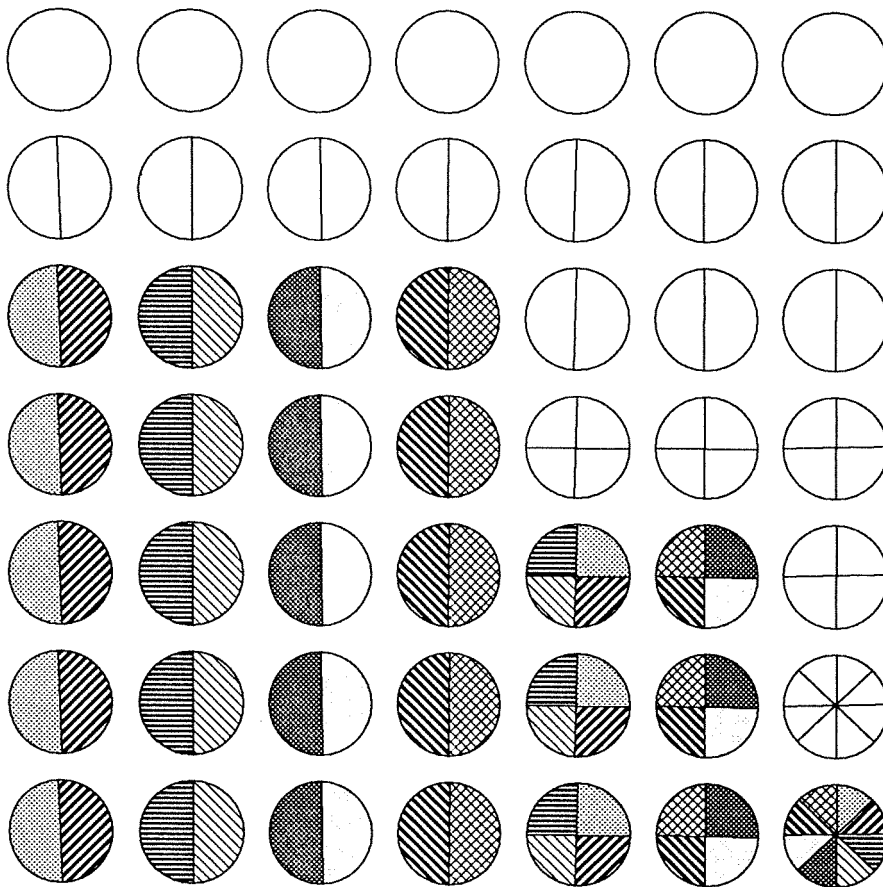
figuur 10.3 Verdeelmanier C, toegepast op '3 taarten verdelen over 4 kinderen'

De kenmerken van verdeelmanier C zijn:

- de voorwerpen worden één voor één in zoveel stukken gesneden als er kinderen zijn om over te verdelen;
- de gesneden stukken zijn gelijkvormig;
- de kinderen krijgen evenveel stukken als er voorwerpen zijn om te verdelen.

**Verdeelmanier D**

Andere leerlingen verdelen door herhaald te halveren. Als er meer kinderen zijn dan voorwerpen om te verdelen, dan snijden ze alle voorwerpen in tweeën; anders delen ze eerst zoveel mogelijk hele voorwerpen uit. Als er na het halveren meer stukken zijn dan kinderen, dan delen ze aan elk kind één stuk uit; anders snijden ze alle halve voorwerpen opnieuw in tweeën. Dit proces van snijden en geven gaat door totdat er (nagenoeg) niets meer over is. Een voorbeeld van deze manier van verdelen is stapsgewijs weergegeven in figuur 10.3.



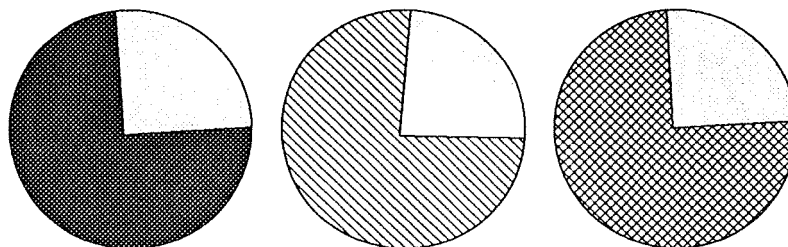
figuur 10.4 Verdeelmanier D, toegepast op '7 taarten verdelen over 8 kinderen'

De kenmerken van verdeelmanier D zijn:

- de voorwerpen of stukken worden uitsluitend in tweeën gesneden;
- als het aantal ontstane stukken groter is dan het aantal kinderen, dan wordt er eerst uitgedeeld;
- het proces itereert totdat er (nagenoeg) niets meer over is;
- alle kinderen krijgen uiteindelijk evenveel stukken, die mogelijk niet gelijkvormig zijn.

**Verdeelmanier E**

Bij de vijfde manier van verdelen laat de leerling zien, dat hij oog heeft voor de verdeelsituatie als geheel. Hij doorziet bijvoorbeeld, dat bij de verdeelsituatie ‘3 taarten verdelen over 4 kinderen’ alle kinderen op één na een hele taart krijgen, op voorwaarde dat zij één stuk afstaan aan het laatste kind. Deze aanpak komt alleen voor bij verdeelsituaties waarbij het aantal kinderen één groter is dan het aantal voorwerpen. Een voorbeeld van deze manier van verdelen is gegeven in figuur 10.3.



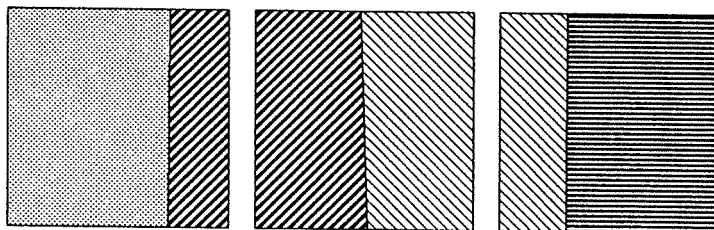
figuur 10.5 Verdeelmanier E, toegepast op ‘3 taarten verdelen over 4 kinderen’

De kenmerken van deze manier van verdelen zijn:

- bij een verdeelsituatie waarin het aantal voorwerpen slechts één kleiner is dan het aantal kinderen, wordt van elk voorwerp een klein stuk afgesneden;
- de grote stukken zijn onderling gelijkvormig, de kleine ook;
- elk kind op één na krijgt een groot stuk, alle kleine stukken zijn voor het laatste kind.

**Verdeelmanier F**

Bij de zesde manier van verdelen toont de leerling op een andere wijze inzicht in de verdeelsituatie als geheel. Hij ziet in een situatie als ‘3 wafels verdelen over 4 kinderen’ de drie wafels als vormen ze één groot object dat hij in vieren deelt. Een voorbeeld van deze manier van verdelen is gegeven in figuur 10.3.



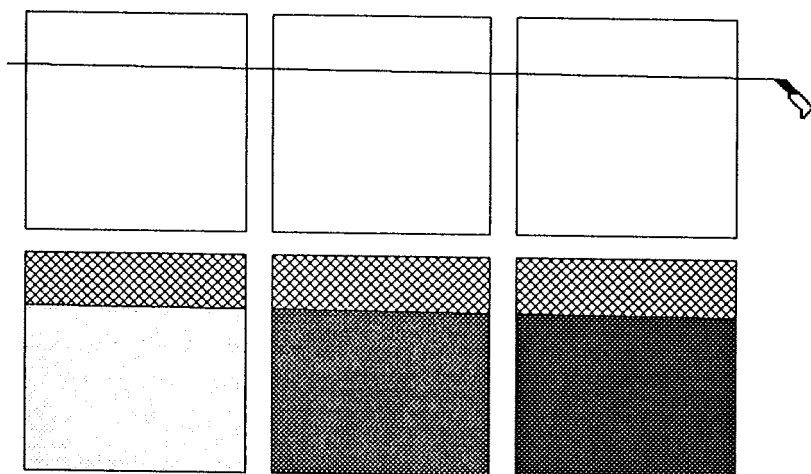
figuur 10.6 Verdeelmanier F, toegepast op '3 taarten verdelen over 4 kinderen'

De kenmerken van deze manier van verdelen zijn:

- de eerste portie die gesneden wordt is de eerlijke portie voor één kind; de volgende portie bestaat uit het stuk dat over is van het laatst aangesneden voorwerp, eventueel aangevuld met een stuk van het volgende voorwerp;
- de gesneden stukken zijn onderling niet gelijkvormig;
- de kinderen krijgen niet allemaal evenveel stukken.

### **Verdeelmanier G**

Bij de zevende en laatste manier van verdelen die hier wordt gepresenteerd komt het overzicht dat de leerling heeft over de verdeelsituatie het sterkst tot uiting. Hij lost bijvoorbeeld de verdeelsituatie '3 wafels verdelen over 4 kinderen' met slechts één snede op. Theoretisch kan verdeelmanier G ook toegepast worden bij situaties als '3 wafels verdelen over 5 kinderen', maar dat is in de praktijk niet geconstateerd. Een voorbeeld van deze manier van verdelen is in twee stappen weergegeven in figuur 10.3.



figuur 10.7 Verdeelmanier G, toegepast op '3 wafels verdelen over 4 kinderen'

Kenmerkend voor deze manier van verdelen is:

- er wordt slechts één snede gemaakt, die tegelijkertijd over alle voorwerpen gaat;
- de gesneden stukken zijn onderling niet gelijkvormig;
- de kinderen krijgen niet allemaal evenveel stukken.

## 4 Diagnose bij Snijmachines en bij Kleuren & Benoemen

Voor de onderdelen Snijmachines en Kleuren & Benoemen wordt de diagnostische expert minder uitgebreid gepresenteerd dan voor Snijden & Geven. Het heeft geen zin om hier uit te weiden over de diagnose bij Snijmachines, daar deze afgestemd is op de huidige invulling van de didactische expert; wanneer de didactische expert tot een fijnmaziger systeem wordt ontwikkeld, leidt dit tot een nieuwe specificatie van de diagnostische expert. Ten aanzien van het onderdeel Kleuren & Benoemen geldt, dat de diagnose onvoldoende uitgewerkt is, om hier een uitgebreide behandeling te rechtvaardigen.

Bij Snijmachines doet zich het probleem van ruis minder voor dan bij Snijden & Geven; ruis is afgevangen met snijmachines, die altijd precieze sneden maken. Bij de 'één-partje-snijdende' machines is een voorspelbare bedieningsfout voorkomen, door in de vorm van stippellijnen tijdelijk te tonen hoe het afgesneden stuk is ontstaan (zie figuur 4.5). Omdat bij het onderdeel Snijmachines nu, voor zover bekend, geen sprake is van ruis, kan de diagnostische expert intern rekenen met echte breuken. Een 'goede' verdeling is vanaf het tweede onderdeel 'exact goed'. De classificatie van oplossingsstrategieën die de diagnostische expert hanteert bij Snijmachines, is reeds behandeld bij de bespreking van de didactische expert, in hoofdstuk 7.

Verdelingen uitvoeren gaat bij Kleuren & Benoemen op vrijwel dezelfde wijze als bij Snijmachines, en voor de diagnostiek van gemaakte verdelingen hoeft niets aan het voorgaande te worden toegevoegd. Bij Kleuren & Benoemen vormt de invoer van de formele breuknotatie een potentiële bron van ruis. Ook hier is gekozen voor een subtiele inperking van de vrijheid van de leerlingen binnen de micro-wereld Eerlijk Verdelen: de invoer van breuken door de leerlingen is zodanig afgeschermd, dat syntactisch incorrecte expressies eenvoudigweg niet kunnen worden ingevoerd (zie figuur 4.10). Dit mechanisme is ook weer in het basisprogramma ingebouwd. Het basisprogramma is in staat om de ingevoerde breuk te evalueren. Leerlingen hoeven niet te vereenvoudigen of gelijknamig te maken, het programma herkent alle invoer. De feedback die leerlingen wordt gegeven luidt eenvoudig 'goed' of 'fout'.

Over de diagnose van de breuken die leerlingen invoeren kan op dit moment nog weinig gemeld worden, omdat er binnen het onderzoek in het kader van de ontwikkeling van het ITS-breuken nog weinig tijd aan is besteed, en er dientengevolge weinig resultaten zijn geboekt. Er is discussie gaande of in de formeel genoteerde breuk

## Diagnose bij Snijmachines en bij Kleuren & Benoemen

tot uitdrukking moet komen hoe de verdeling door de leerling is gemaakt. Door de representatie die de diagnostische expert intern gebruikt voor de stukken die tijdens het verdelen ontstaan — in breuken — kan met het verband tussen de manier van verdelen en de manier van noteren gemakkelijk rekening worden gehouden, als de discussie onder didactici daartoe aanleiding geeft.



---

# Hoofdstuk 11

## Het leerlingmodel

Ortwin Hutten

Het leerlingmodel<sup>1</sup> van het ITS-breuken houdt voor elke leerling afzonderlijk een beeld van diens vorderingen bij. De adaptiviteit van het ITS-breuken vindt in belangrijke mate zijn oorsprong in deze modellering: bij het genereren van een didactisch plan voor een individuele leerling baseert de didactische expert zich op het beeld dat het leerlingmodel van die leerling heeft gevormd. Binnen het ITS-breuken zijn het leerlingmodel en de diagnostische expert nauw met elkaar verbonden. Het leerlingmodel verhoudt zich hierbij tot de diagnostische expert zoals de didactische expert tot de opgavengenerator. Het beeld dat van een leerling wordt opgebouwd, is op te vatten als een diagnose van het leerlinggedrag over een sequentie van opgaven. Het leerlingmodel abstraheert van incidenteel succes of falen, en beoordeelt elke gemaakte opgave in het licht van reeds eerder verworven vaardigheden.

Het leerlingmodel is sterker domeinonafhankelijk dan de andere componenten van het ITS-breuken. Daarom is het voor een ontwerp van het leerlingmodel relevant om eerst beproefde technieken voor leerlingmodellering in andere domeinen te bestuderen. Bij de uiteindelijke ontwerpkeuze voor het ITS-breuken spelen twee criteria een rol: ten eerste moet een voorgestelde techniek stroken met de ideologie van het realistisch reken-wiskunde-onderwijs en ten tweede moet die techniek een redelijke garantie bieden om in een beperkte tijd tot een werkend systeem te leiden.

### 1 Technieken voor leerlingmodellering

Voor de laatste twee decennia is er op uitgebreide schaal onderzoek verricht naar technieken voor de modellering van het gedrag van mensen die werken met een bepaald computerprogramma. Het doel waarvoor dit gebeurt heeft niet altijd te maken met onderwijs — modellering vindt plaats voor uiteenlopende toepassingen (voor niet-onderwijstoepassingen spreekt men meer in het algemeen over een gebruikersmodel). Er zijn uit dit onderzoek inmiddels verschillende modelleringstechnieken

- 
1. In de literatuur wordt de term 'leerlingmodel' in twee betekenissen gebruikt, enerzijds ter aanduiding van een systeemcomponent die een beeld van de vorderingen van een leerling opstelt en dynamisch bijhoudt, anderzijds ter aanduiding van zo'n beeld zelf. Ter vermijding van verwarring wordt de term 'leerlingmodel' in dit hoofdstuk gereserveerd voor de betreffende component van het ITS-breuken; de andere betekenis wordt verder omschreven als 'het beeld van de leerling' of 'de vorderingen van de leerling'.



voortgekomen, die echter zelden zijn uitgewerkt tot volwaardige systeemcomponenten. Hierna volgt een korte opsomming van de belangrijkste basistechnieken. Recentelijk richt de aandacht van ontwikkelaars van leerlingmodellen zich overigens steeds vaker op een synthese van deze technieken.

De eenvoudigste techniek voor leerlingmodellering biedt het *parametermodel*. Deze techniek stamt uit de begintijd van het computerondersteund onderwijs. Van een leerling wordt een aantal kenmerken bijgehouden, die parameters worden genoemd. Afhankelijk van de behaalde resultaten bij één of enkele opgaven krijgen deze parameters beginwaarden; de parameterwaarden worden telkens in overeenstemming met de daarna behaalde resultaten bijgesteld. In de klassieke aanpak houden de parameters doorgaans zeer beperkte, weinig specifieke informatie bij, zoals bijvoorbeeld percentages goed en fout gemaakte opgaven — meestal heeft educatieve software met een parametermodel geen intelligente pretenties.

Een tweede type model, het *deelverzamelingmodel* (in het Engels *overlay model*), relateert het leerlinggedrag aan een geïdealiseerd model van expertgedrag. Voor een individuele leerling wordt aan elk kenniselement uit het geïdealiseerde model een waarde gekoppeld, die aangeeft of de leerling het betreffende kenniselement beheerst of niet. De kennis van de leerling wordt hierbij beschouwd als een deelverzameling van de 'ideale' expertkennis. Wanneer het gedrag van een leerling in abstractere zin met dat van een gemodelleerde expert wordt vergeleken, spreekt men van een *verschilmodel* (in het Engels *differential model*). Bij zo'n model worden op grond van geobserveerde verschillen in gedrag conclusies getrokken over het niveau dat de leerling bereikt heeft.

Met de hierboven geschetste technieken wordt geen onderscheid gemaakt tussen ontbrekende kennis en verkeerd aangeleerde kennis: 'niet goed' is altijd 'fout'. *Verstoringsmodellen* (in het Engels *perturbation model*) daarentegen zijn wél in staat om het verschil tussen ontbrekende kennis en verkeerd aangeleerde kennis te onderkennen. Verstoringsmodellen herkennen de nuances in verkeerd aangeleerde kennis op basis van empirisch verworven gegevens over vaak voorkomende fouten van leerlingen. Er zijn drie typen verstoringsmodellen. Het eerste model is het *enumeratiefoutenmodel*. Bij de leerlingmodellering wordt gebruik gemaakt van een van tevoren opgestelde foutencatalogus. Voor het opstellen van zo'n foutencatalogus wordt de te onderwijzen kennis gerepresenteerd in een hiërarchie van kenniselementen. Fouten worden gerepresenteerd als varianten van kenniselementen en heten *bugs*, naar analogie van fouten in computerprogramma's. Het beeld van een leerling omvat voor het leerlingmodel herkenbare fouten die bij de leerling gesignaleerd zijn.

Het tweede type verstoringsmodel is het *reconstructieve foutenmodel*. Het idee van deze techniek is, dat het beeld van een leerling wordt opgebouwd door diens gedrag te reconstrueren uit gedragselementen. Hiertoe worden binnen het te onderwijzen domein primitieven onderscheiden, die bij de reconstructie van het leerlinggedrag

worden gecombineerd. Het reconstructieve foutenmodel is fijnkorreliger dan het enumeratieve foutenmodel. Fouten zijn binnen het reconstructieve foutenmodel incorrecte combinaties van gedragselementen, die op zich niet fout hoeven te zijn.

Het derde type verstoringsmodel, het *generatieve foutenmodel*, is gebaseerd op psychologisch onderzoek naar de architectuur van het menselijke cognitieve systeem. Naast primitieve gedragselementen bevat het generatieve foutenmodel ook procedurele kennis over hoe fouten ontstaan. Het leerlingmodel kan met deze kennis het ontstaan van fouten verklaren door ze zelf te genereren uit de primitieven.

In domeinen waarin geen empirische gegevens over leerlinggedrag voorhanden zijn, is recent een ontwikkeling gaande waarbij de computer en de leerling tegelijkertijd leren; het gaat hier om *zelflerende systemen*. Een zelflerend computersysteem is hiertoe initieel uitgerust met kennis over hoe leerlingen in het algemeen leren, en beschikt over methoden om deze kennis aan te wenden.

## 2 Uitgangspunten voor de inrichting van het leerlingmodel

De belangrijkste technieken voor leerlingmodellering zijn in de vorige paragraaf de revue gepasseerd. Van elk van deze technieken is de toepasbaarheid binnen het ITS-breuken beoordeeld voordat een ontwerp van het leerlingmodel is gemaakt.

### 2.1 Keuze voor een verrijkt parametermodel

Voor de beoordeling van de toepasbaarheid van een modelleringstechniek binnen het ITS-breuken is gekeken naar de compatibiliteit met het didactisch uitgangspunt en naar de implementeerbaarheid.

Het parametermodel lijkt in eerste instantie niet in aanmerking te komen voor toepassing binnen het ITS-breuken, vanwege de rigiditeit van deze techniek. De parametermodellen zoals die in de literatuur zijn gepresenteerd houden slechts globale kenmerken bij, en representeren de structuur van het te instrueren domein niet. Toepassing van deze techniek binnen het ITS-breuken zou een invulling van parameters vereisen die meer kennisgebaseerd is dan de parametermodellen in hun oorspronkelijke vorm beogen. Daar staat tegenover, dat het parametermodel technisch eenvoudig is, en een implementatie in beperkte tijd waarborgt.

Het deelverzamelingmodel en het verschilmodel verhouden zich slecht met de grondgedachte van het realistisch reken-wiskunde-onderwijs, vanwege het uitgangspunt van geïdealiseerd expertgedrag. Een leerling moet volledig vrij zijn in zijn denken — er is geen sprake van één ideale denkstrategie. Het enumeratieve foutenmodel komt evenmin in aanmerking voor toepassing binnen het ITS-breuken, omdat bij deze techniek leerlingen uitsluitend worden gemodelleerd op grond van hun foutengedrag. Het is bovendien de vraag of een foutencatalogus wel enigszins volledig opgesomd kan worden voor het domein van het breukenonderwijs.

De meest geavanceerde, generatieve technieken voor leerlingmodellering sluiten het beste aan bij de realistische reken-wiskunde-traditie. Het probleem van deze recent ontwikkelde technieken is evenwel, dat ze voor het ITS-breuken te weinig zekerheid bieden om binnen het tijdsbestek van het project tot een volwaardige component te kunnen worden uitgewerkt.

Op grond van deze beschouwingen is voor het leerlingmodel van het ITS-breuken een *verrijkt parametermodel* ontworpen. In het leerlingmodel wordt elke individuele leerling gemodelleerd met parameters — een bewezen, maar oudere techniek. Het parametermodel is echter verrijkt met kennis. Met behulp van deze kennis worden nieuwe waarden van de parameters beredeneerd, onder gebruikmaking van informatie over de leerling die in de rest van het systeem ontstaat. Het aldus verrijkte parametermodel is een hybride techniek voor leerlingmodellering.

De keuze voor het verrijkte parametermodel staat toe, dat het leerlingmodel al in een vroeg stadium van de ontwikkeling van het ITS-breuken klein en bescheiden kan starten. Het leerlingmodel kan in deze opzet bovendien eenvoudig uitgebreid worden, door, telkens als daar behoefte aan is, de kennis die leidt tot de invulling van de parameters stapsgewijs te verfijnen, of door nieuwe parameters toe te voegen. Het verrijkte parametermodel biedt bovendien de mogelijkheid tot integratie met andere modelleringstechnieken: het is bijvoorbeeld mogelijk om door empirisch onderzoek bekende, frequent voorkomende fouten in een (bescheiden) catalogus op te nemen. Overigens hoeft de nadruk bij een parametermodel niet te liggen op het verwerken van fouten: in tegenstelling tot veel andere technieken voor leerlingmodellering kan met dit model de verscheidenheid aan goede antwoorden probleemloos worden gemodelleerd.

## 2.2 Parameterkeuze

Met behulp van parameters kunnen verscheidene kenmerken van een leerling bijgehouden worden. Net als voor de diagnostische expert van het ITS-breuken geldt voor het leerlingmodel, dat het alleen zinvol is om informatie af te leiden en bij te houden die de didactische expert kan exploiteren voor didactische differentiatie. De omvang van de informatie die het leerlingmodel bijhoudt is daarom beperkt.

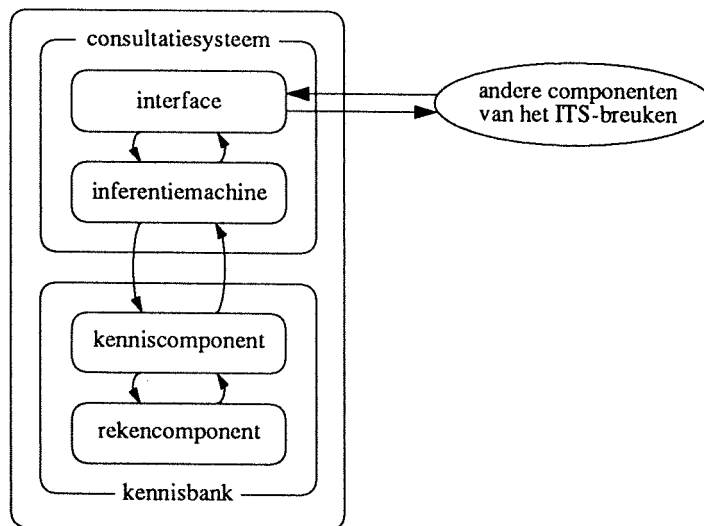
Bij de onderscheiden doelen van de didactische expert staat de verscheidenheid aan verdeelmanieren die leerlingen kunnen hanteren centraal. Daarom is voor elke verdeelmanier een parameter gecreëerd. Voor elk van deze parameters houdt het leerlingmodel dynamisch bij in welke mate een leerling die verdeelmanier beheerst. De parameterwaarden tezamen geven een beeld van hoe goed hij een afzonderlijke verdeelmanier beheerst ten opzichte van de andere.

Beheersing van een verdeelmanier is niet het enige leerlingkenmerk dat is opgenomen in het actuele leerlingmodel. Het tweede kenmerk dat is gemodelleerd, betreft het aantal handelingen dat een leerling nodig heeft om een verdeling uit te voeren.

Een verdeling uitvoeren met relatief weinig handelingen is er een indicatie van dat de leerling een goed overzicht heeft over de verdeling. Reeds tijdens het uitvoeren van eerlijke verdelingen zijn allerlei vereenvoudigingen mogelijk, die later bij het opereren met breuken in formele notatie goed van pas komen voor het inzicht in equivalenties tussen breuken.

### 2.3 Interne organisatie van het leerlingmodel

Het leerlingmodel van het ITS-breuken is, net als de andere componenten, opgezet als kennissysteem. Het leerlingmodel beschikt enerzijds over domeinafhankelijke kennis over het modelleren van leerlingen en anderzijds over een domeinonafhankelijke methode om deze kennis toe te passen voor een individuele leerling. De kennis in de kennisbank van het leerlingmodel betreft de betekenis van de parameters en de relatie ertussen; maar ook de rekenregels voor het daadwerkelijk verwerken van nieuwe observaties tot parameterwaarden behoren tot de domeinafhankelijke kennis. Deze twee soorten kennis zijn in de kennisbank gescheiden ondergebracht, zodat deze onafhankelijk van elkaar kunnen worden verfijnd. De interne organisatie van het leerlingmodel als kennissysteem is weergegeven in figuur 11.1.



figuur 11.1 De interne organisatie van het leerlingmodel als kennissysteem

## 3 Gegevens verwerken: onthouden en geleidelijk vergeten

De waarden van de parameters waarmee een individuele leerling gemodelleerd wordt, moeten te allen tijde een actueel beeld van die leerling geven. Daarom wor-

den de parameterwaarden na elke opgave bijgesteld op grond van de informatie die over de opgave en de door de leerling geconstrueerde oplossing beschikbaar komt. Het bijstellen van een parameterwaarde gaat in twee stappen. Op basis van de informatie over de meest recent gemaakte opgave bepaalt het leerlingmodel een *score*. Vervolgens combineert het leerlingmodel de score met de dan geldende parameterwaarde tot een nieuwe, actuele waarde. Dit gebeurt voor elke parameter apart.

### 3.1 Bepaling van scores per opgave

Voor de parameters die bijhouden in welke mate een leerling het verdelen volgens de typen 1 tot en met 6 beheerst, baseert het leerlingmodel zich voor de berekening van scores voor de laatst gemaakte opgave vooral op de volgende informatie:

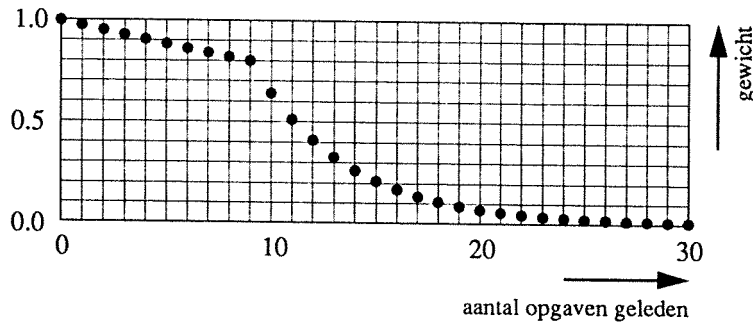
- de verdeelmanieren die met de inrichting van deze opgave gesuggereerd zijn — deze informatie wordt beschikbaar gesteld door de didactische expert;
- de verdeelmanieren die door de leerling zijn gevolgd bij de uitvoering van de verdeling — beschikbaar gesteld door de diagnostische expert;
- het resultaat ('goed' of 'fout') van de oplossing — beschikbaar gesteld door het basisprogramma Eerlijk Verdelen.

Op grond van de met deze informatie bepaalde scores stelt het leerlingmodel de parameterwaarden bij.

### 3.2 Verwerking van scores in parameterwaarden

Hoewel de parameters uitsluitend gevoed worden met scores, is de aldus verkregen informatie niet de enige factor die het beeld van de vorderingen van een leerling beïnvloedt. Naarmate de tijd verstrijkt wordt reeds verwerkte informatie minder representatief voor het niveau van een leerling, en zou daarom minder zwaar moeten wegen in het actuele beeld van de leerling. Als oudere informatie na verloop van tijd niet verdwijnt uit het leerlingmodel, blijft een leerling beoordeeld worden op een niveau dat hij mogelijk al lang ontgroeid is: lang voorbij resultaten werken zo stigmatiserend op de beoordeling van het latere werk. Het leerlingmodel moet dus niet alleen *onthouden*, maar ook *vergeten*. Na verloop van tijd vervalt het belang van de informatie in toenemende mate, om tenslotte volledig uit te doven. Het leerlingmodel mag de informatie over de meest recente opgaven ook weer niet te snel vergeten, en zeker niet binnen één sessie van oefenen.

Het leerlingmodel van het ITS-breuken past bij het verwerken van de scores van de meest recent gemaakte opgave een *onthoud-en-vergeetproces* toe. In dit proces wordt aan de scores van alle reeds gemaakte opgaven een gewicht toegekend dat aangeeft hoe zwaar zo'n score meeweegt in de nieuwe parameterwaarden. Figuur 11.2 geeft deze gewichten weer: de onthoud-en-vergeetfunctie. Uit deze figuur is af te lezen, dat de laatste tien opgaven beduidend zwaarder meetellen dan de eerder gemaakte opgaven.



figuur 11.2 Onthoud-en-vergeetfunctie voor de bepaling van het gewicht van afzonderlijke scores voor een parameter

De rest van dit hoofdstuk is een uitwerking van de wiskundige achtergrond van dit onthoud-en-vergeetproces.

### 3.3 Wiskundige achtergrond van het onthoud-en-vergeetproces<sup>1</sup>

Na elke opgave wordt de actuele waarde van een parameter bepaald door de nieuw beschikbare informatie te combineren met de geldende parameterwaarde. Van elke eerder gemaakte opgave wordt de score vermenigvuldigd met het gewicht dat deze opgave dan nog heeft; de resultaten hiervan worden bij elkaar opgeteld.

De bijdrage van een opgave aan de nieuwe parameterwaarde is:

$$\text{bijdrage} = \text{gewicht} \times \text{score}$$

De berekende parameterwaarde is:

$$\begin{aligned} \text{parameterwaarde} = & \text{bijdrage van de laatste opgave} + \\ & \text{bijdrage van de op één na laatste opgave} + \\ & \text{bijdrage van de op twee na laatste opgave} + \\ & \dots + \\ & \text{bijdrage van de eerst gemaakte opgave} \end{aligned}$$

Zonder beperkingen ten aanzien van de keuze van de gewichten die aan de afzonderlijke scores worden toegekend, is het onthoud-en-vergeetproces op den duur erg bewerkelijk. De computer moet immers van alle ooit gemaakte opgaven de ongewogen scores bijhouden, om hieruit telkens opnieuw de bijdragen per opgave te berekenen. Na verloop van tijd zou het leerlingmodel hierdoor onaanvaardbaar traag worden. Door voor de onthoud-en-vergeetfunctie een exponentiële functie te kiezen, wordt dit probleem vermeden, zonder concessies te doen aan het didactisch uitgangspunt van het onthoud-en-vergeetproces.

1. Bij de totstandkoming van de onthoud-en-vergeetfunctie heeft Jan de Jong een belangrijke inbreng gehad.

Stel, dat de functie  $f$  de onthoud-en-vergeetfunctie is, en dat deze als volgt is gedefinieerd:

$$f(x) = a^x$$

waarin  $x \in \mathbb{N}$ , en  $a$  een constante is, met  $0 < a < 1$ .

Voor de scores wordt een functie  $s$  gedefinieerd, waarvoor geldt dat  $s(i)$  de score van de  $i+1$ -ste opgave is —  $s(0)$  is dus de score van de *eerst* gemaakte opgave.

Stel nu, dat de parameter wordt weergegeven als een functie  $p$ , gedefinieerd als:

$$\begin{aligned} p(x) &= f(0) \cdot s(x) + f(1) \cdot s(x-1) + \dots + f(x) \cdot s(0) \\ &= \sum_{i=0}^x f(i) \cdot s(x-i) \end{aligned}$$

Door substitutie van de functiewaarden  $f(i)$  in de laatste expressie wordt de volgende expressie voor de functie  $p$  verkregen:

$$p(x) = a^0 \cdot s(x) + a^1 \cdot s(x-1) + \dots + a^x \cdot s(0)$$

Beschouw nu de specifieke parameterwaarde  $p(i)$  na de  $i+1$ -ste gemaakte opgave:

$$p(i) = a^0 \cdot s(i) + a^1 \cdot s(i-1) + \dots + a^i \cdot s(0)$$

Na het verwerken van de score van de volgende opgave geldt dat:

$$p(i+1) = a^0 \cdot s(i+1) + a^1 \cdot s(i) + \dots + a^{i+1} \cdot s(0)$$

Deze parameterwaarde kan direct uit de oude parameterwaarde  $p(i)$  en de score  $s(i+1)$  worden berekend, immers:

$$\begin{aligned} p(i+1) &= a^0 \cdot s(i+1) + a^1 \cdot (a^0 \cdot s(i) + \dots + a^i \cdot s(0)) \\ &= s(i+1) + a \cdot p(i) \end{aligned}$$

In plaats van telkens de bijdragen van alle opgaven opnieuw te moeten berekenen, kan het leerlingmodel volstaan met het vermenigvuldigen van de bestaande parameterwaarde met de constante factor  $a$ , en bij het resultaat eenvoudigweg de nieuwe score op te tellen. De hoeveelheid berekeningen neemt nu niet meer toe naarmate een leerling meer opgaven maakt.

Hoewel de eenvoud van de gepresenteerde berekening van parameterwaarden de werkwijze siert, is deze niet helemaal probleemloos. De prijs die betaald wordt voor de toepassing van een exponentiële functie is, dat deze functie ofwel al vroeg te veel daalt, en daardoor vrij recente scores ten onrechte een laag gewicht krijgen, ofwel te weinig daalt, en daardoor hoge gewichten aan minder recente scores worden toegekend.

Dit probleem is opgelost door voor de gewichten van de meest recent gemaakte opgaven een andere functie te gebruiken, dan voor de gewichten van de opgaven die langer tevoren gemaakt zijn. Voor dit doel is de notie van een *venster* aan het onthoud-en-vergeetproces toegevoegd. Het venster omvat telkens de  $\nu$  meest recente scores. De scores binnen het venster tellen zwaar mee bij de berekening van de actuele parameterwaarde. De scores buiten het venster tellen telkens minder zwaar mee: het vergeten gaat dan veel sneller. Het idee van een venster van  $\nu$  scores kan weer efficiënt worden geëffectueerd met behulp van exponentiële functies.

Stel, dat de onthoud-en-vergeetfunctie de volgende samengestelde functie is:

$$f(x) = \begin{cases} a^x & , 0 \leq x \leq \nu - 1 \\ a^{cx} & , x \geq \nu \end{cases}$$

waarin  $a$  weer een constante is met  $0 < a < 1$  en  $c$  een nieuwe constante is met  $c \geq 1$ ;  $\nu$  is het aantal scores binnen het venster.

Bij toepassing van deze onthoud-en-vergeetfunctie voor de scores binnen het venster geldt, dat het gewicht van zo'n score bij iedere stap in de tijd kleiner wordt als gevolg van de vermenigvuldiging met de constante factor  $a$  — voor  $a$  geldt immers dat  $a < 1$ . De versnelling van het vergeetproces voor de scores buiten het venster wordt bereikt door het gewicht van een score bij iedere stap *een aantal malen* met  $a$  te vermenigvuldigen. Dit houdt in, dat een afname in gewicht, die binnen het venster pas na een paar opgaven wordt bereikt, buiten het venster al na één opgave wordt bereikt.

De versnelde afname in gewicht voor de scores buiten het venster is gemodelleerd met de constante  $c$  in de onthoud-en-vergeetfunctie. Als voor  $c$  de waarde 1 gekozen wordt, resulteert een functie zonder knik — er is dan immers geen verschil meer in behandeling van scores binnen en buiten het venster. Bij toenemende  $c$  wordt de knik scherper — het vergeten gaat dan sneller.

In het ITS-breuken is gekozen voor een venster van tien scores, zodat  $\nu = 10$ . Voor de constante  $c$  is de waarde 9 genomen. De constante  $a$  is zo gekozen, dat een score nog voor 80% meetelt aan het einde van het venster, zodat:

$$f(9) = a^9 = 0.80$$

Hieruit kan gemakkelijk  $a$  worden bepaald:  $a = \sqrt[9]{0.8}$ . De resulterende onthoud-en-vergeetfunctie is, ingevuld:

$$f(x) = \begin{cases} (\sqrt[9]{0.8})^x & , 0 \leq x \leq 9 \\ 0.8^x & , x \geq 10 \end{cases}$$



Figuur 11.2 geeft een beeld van de onthoud-en-vergeetfunctie van het leerlingmodel van het ITS-breuken.

De functie  $p$  die de parameter representeert is opnieuw gedefinieerd als:

$$p(x) = \sum_{i=0}^x f(i) \cdot s(x-i)$$

Voor deze functie is het mogelijk om naar aanleiding van een gemaakte opgave een nieuwe parameterwaarde direct te berekenen uit de oude waarde van de parameter, de nieuwe score en de op tien na laatste score. Het valt echter buiten het bestek van dit boek om deze berekening verder in detail uit te werken.

### **Literatuur**

Een gedetailleerde beschrijving van technieken voor leerlingmodellering wordt gegeven door Wenger (1987). In veel werken op het gebied van intelligent computerondersteund onderwijs zijn bijdragen over leerlingmodellering opgenomen: Sleeman en Brown (1982), Kearsley (1987), Lawler en Yazdani (1987), Polson en Richardson (1988), Self (1988), Elsom-Cook (1990) en Mandl, De Corte, Benett en Friedrich (1990). Het vaak gebruikte deelverzameling-model is geïntroduceerd door Carr en Goldstein (1977), en is ondermeer toegepast in het op het expertsysteem MYCIN gebouwde GUIDON (Clancey, 1987). Van de foutenmodellen zijn BUGGY van Brown en Burton (1978) en de daarop volgende REPAIR-theorie van Brown en VanLehn (1980) het bekendst. Fernández de Castro (1989) en Vassileva (1990) passen hybride technieken toe bij het modelleren van leerlingen. Nwana en Coxhead (1988) stellen vast dat het waarschijnlijk onmogelijk is om een zinvolle foutencatalogus op te stellen voor het breukendomein, vanwege het grote aantal vrijheidsgraden voor de leerling binnen dit domein.

---



---

# IV

## Kennis vergaren

*Elk van de componenten van het ITS-breuken vervult zijn rol in het geheel op basis van veel specialistische kennis over telkens een ander aspect van de breukendidactiek. Ook voor de keuze van de globale opzet van het systeem is didactische kennis nodig. Deel IV gaat over de manier waarop een groot deel van deze kennis in kaart is gebracht: de kennisacquisitie. Het gericht eliciteren, structureren en formaliseren van kennis is een essentieel onderdeel van het ontwerp en de ontwikkeling van een kennissysteem, aangezien de geëliciteerde kennis in belangrijke mate de kwaliteit van het resulterende systeem bepaalt.*

*Hoofdstuk 12 doet verslag van een rollenspel, dat door het ontwerpteam is uitgevoerd om de initiële opzet van het ITS-breuken te toetsen. Hoofdstuk 13 rapporteert over interviews met deskundigen op het gebied van breukendidactiek. Hoofdstuk 14 toont weer een andere vorm van kennisacquisitie, namelijk het analyseren van rekenboeken. In het laatste hoofdstuk van dit deel wordt verslag gedaan van ervaringen op school met prototypen van het basisprogramma Eerlijk Verdelen en verschillende ITS-versies.*

<b>12</b>	<b>Rollenspel</b>	<b>143</b>
	<i>Johan Zuidema</i>	
<b>13</b>	<b>Kennis maken met didactici</b>	<b>149</b>
	<i>Eveline Helsper</i>	
<b>14</b>	<b>Kennis uit schoolboeken</b>	<b>167</b>
	<i>Mijndert Streefkerk</i>	
<b>15</b>	<b>Leerlingen maken kennis met Eerlijk Verdelen</b>	<b>177</b>
	<i>Johan Zuidema</i>	



---

## Hoofdstuk 12

### Rollenspel

Johan Zuidema

In de beginperiode van het project is er geruime tijd aandacht besteed aan de architectuur van het te ontwikkelen ITS-breuken: het systeem moest de didactische uitgangspunten van het realistisch reken-wiskunde-onderwijs reflecteren en het conceptuele ontwerp moest technisch realiseerbaar zijn. Dit heeft geresulteerd in de architectuur die in hoofdstuk 6 is gepresenteerd. Daarmee was een blauwdruk van het ITS-breuken verkregen en waren de functies van de onderscheiden componenten in grote lijnen bekend. Voordat een precieze invulling van de componenten onderzocht kon worden, moest enige zekerheid verkregen worden over de doelmatigheid van de gekozen architectuur. Daartoe is de architectuur van het ITS-breuken 'met de hand' nagespeeld in een *rollenspel*. Het rollenspel is opgezet met het doel om de geschiktheid van de architectuur van het ITS-breuken en de invulling van de afzonderlijke componenten exploratief te onderzoeken, niet om een betrouwbare systeemtest te doen in de vorm van een strak gecontroleerde simulatie.

Rollenspelen komen voort uit de praktijk van de 'softe' klinische psychologie. Het uitvoeren van een rollenspel is in de context van 'harde' software-ontwikkeling niet gebruikelijk. Een rollenspel biedt echter de mogelijkheid, zelfs bij zo'n complex systeem als het ITS-breuken, om met betrekkelijk bescheiden middelen in een heel vroeg stadium in het project inzicht te krijgen in de bruikbaarheid van de gekozen uitgangspunten. Het rollenspel legt zwakke plekken in de opzet van het systeem onmiddellijk bloot. Een bijkomend voordeel is, dat de betrokkenen bij het project een beter idee krijgen van de obstakels die bij de ontwikkeling van het project moeten worden geslecht.<sup>1</sup> Het denken en praten over de functie van een component in de architectuur van het systeem houdt iets vrijblijvends — het spelen van de rol van één van die componenten dwingt de participanten voortdurend tot het maken van keuzen. Het ongemak dat die keuzen soms veroorzaken kan snel duidelijk maken welke moeilijkheden rijzen bij de ontwikkeling van een ITS binnen gestelde randvoorwaarden.

---

1. Het rollenspel is tijdens het geven van een minicursus op het Nationaal Informatica Onderwijs Congres 1992 te Maastricht een geschikt communicatiemiddel gebleken om ook buitenstaanders te laten ervaren wat de problemen zijn waarmee een ontwerpteam wordt geconfronteerd bij de ontwikkeling van een ITS.

## 1 De uitvoering van het rollenspel

Het rollenspel is uitgevoerd door medewerkers van het Freudenthal Instituut, die daartoe uitgenodigd waren omdat ze op de één of andere manier betrokken waren bij het project. Elke component van de architectuur van het beoogde ITS-breuken werd vertegenwoordigd door twee of drie personen, die qua deskundigheid het beste pasten bij de door hen uit te voeren rollen. Daarnaast waren nog enkele belangstellenden aanwezig, zonder dat ze een rol kregen toegewezen.

In de ruimte waar het rollenspel werd uitgevoerd waren net zoveel tafels opgesteld als componenten in de architectuur van het ITS-breuken waren voorzien. De tafels waren verbonden met rood lint, waarmee de informatiestroom werd weergegeven. Op de plaats van het basisprogramma Eerlijk Verdelen waren een overheadprojector en een scherm opgesteld, waardoor voor iedereen zichtbaar was hoe de 'leerling' de opgaven oploste. Op alle tafels lagen gesloten enveloppen gereed, met instructies en kaarten voor het bijhouden van gegevens en voor de communicatie tussen de componenten.

Er zijn twee rondes gespeeld, één voor Snijden & Geven en één voor Snijmachines. Bij de eerste ronde was alleen de functie van een component omschreven, zonder voorschrift voor de uitvoering ervan. De instructies luiden in de eerste ronde, dat de spelers van een component, telkens als ze aan de beurt waren, hardop denkend hun taak moesten uitvoeren; het resultaat moesten ze op papier samenvatten en doorgeven aan de volgende component. Iedere component moest erop toezien, dat anderen zich niet op zijn gebied begaven; in dat geval moest door de spelers van de 'benadeelde' component zelf ingegrepen worden, en het eigen gebied geclaimd worden.

Bij de tweede ronde bleven de functies van de componenten inhoudelijk hetzelfde, maar was de uitvoering ervan voorgestructureerd. Elke component beschikte in deze ronde over een lijst met voor zijn specifieke functie relevante geachte kenmerken van het didactisch specificatieproces. Zo'n lijst kon voor een component functioneren als check-list, waarop alleen nog waarden moesten worden ingevuld of aangekruist. Op de lijsten was ook plaats voor opmerkingen, die niet te categoriseren waren bij één van de aangegeven kenmerken.

Omdat het bij het rollenspel ging om exploratief onderzoek, was de setting informeel; iedereen kon elkaar aan het werk zien, en openlijke discussie werd niet tegengegaan. De spelers werden voortdurend aangemoedigd om hardop te delibereren over de invulling van hun component.

Het hele rollenspel is ten behoeve van latere verwerking op geluidsband opgenomen, en er zijn aantekeningen gemaakt. Het rollenspel duurde ongeveer tweeënehalf uur. Er zijn in die tijd overigens slechts enkele opgaven doorlopen; het beredeneren en verwoorden van besluiten door de vertegenwoordigers van de componenten bleek veel tijd te vergen.

## 2 De invloed op de ontwikkeling van het ITS-breuken

De opbrengst van het rollenspel voor het ITS-breuken is inzicht in de doelmatigheid van de gekozen architectuur en in de functies die de afzonderlijke componenten binnen die architectuur moeten vervullen. Naar aanleiding van het rollenspel heeft uiteindelijk geen bijstelling van de architectuur plaatsgevonden.

Tijdens het rollenspel zijn enkele heel concrete discussiepunten te berde gebracht, die hun stempel gedrukt hebben op de loop van de ontwikkelingen in het kader van het ITS-breuken. Die discussiepunten zijn hierna per thema weergegeven.

### ***De centrale rol van de didactische expert***

In de architectuur van het ITS-breuken komt niet naar voren wat het relatieve belang is van de componenten. Tijdens het rollenspel werd de didactische expert onbetwist de belangrijkste component van het systeem. Er vond, al denkend en pratend, een verschuiving plaats van het uitgangspunt “Welke rol kan een ITS-breuken vervullen in de beginfase van het huidige breukenonderwijs?” naar “Hoe kan het aanvankelijk breukenonderwijs zo gunstig mogelijk worden ingericht, rekening houdend met het bestaan van een ITS-breuken?”, waarmee het belang van de didactische expert toenam ten koste van die van de diagnostische expert.

Voorgesteld werd, om de didactische expert op te laten treden als een centrale, sturende eenheid, die als een spin in een web alle andere, perifere componenten regeerde. Bovendien werd het radicale standpunt verdedigd, dat er naast een uitgebreide, intelligente didactische component nog slechts zeer bescheiden andere onderdelen nodig zouden zijn. Er is meermalen twijfel geuit over de noodzaak van een intelligente invulling van sommige van de componenten. In reactie op dit standpunt dient een waarschuwing uit de historie van de psychologie ter harte genomen te worden. Er moet voor gewaakt worden dat binnen de didactische expert niet het complete ITS-breuken zelf weer functioneel aanwezig zou zijn — het spook van de *homunculus* — dit is slechts het verschuiven van problemen.

Uit de uitwerking van de componenten van het ITS-breuken, zoals gepresenteerd in deel III van dit boek, blijkt dat het centrale karakter van de didactische expert inmiddels in de implementatie van het systeem tot uitdrukking is gebracht. De inrichting van de overige componenten is telkens geschied met de informatiebehoefte van de didactische expert als leidraad.

### ***De scheiding tussen de componenten***

De spelers van het rollenspel konden niet altijd even gemakkelijk tot een precieze afbakening van hun functies komen. Met name bleek de grens tussen de verantwoordelijkheden van de didactische expert en die van de opgavengenerator niet scherp te



trekken. De didactische expert gaf aanvankelijk zijn oordelen direct in termen van opgavekenmerken. Na verloop van tijd werd duidelijk, dat de didactische expert door een zorgvuldige samenstelling van een *reeks* opgaven in staat was om verdeelmannieren van leerlingen te bestendigen of om de leerling verschillende verdeelmannieren met elkaar in verband te laten brengen. Het systeem moet niet te sterk willen sturen, en zeker niet naar aanleiding van één enkele opgave.

Uit deze observaties vloeit het idee voort, om de didactische expert alle aspecten van didactische specificatie te laten uitvoeren die het niveau van één opgave overstijgen, en het specificatieproces op opgaveniveau te laten behartigen door de opgavengenerator. In de implementatie van het ITS-breuken stelt de didactische expert plannen op; de opgavengenerator concretiseert die plannen.

De redeneerprocessen die door het ITS-breuken moeten worden uitgevoerd, kunnen bij volledige invulling van de componenten nogal tijdrovend zijn. De tijd die een leerling maximaal zou mogen wachten op een reactie van de computer na een door hem gemaakte opgave, bedraagt zo'n drie seconden. In die tijd kan het ITS-breuken onmogelijk alle oordelen door de respectieve componenten laten vellen: het intelligente oordeel over de uitvoering van een opgave zou als mosterd na de maaltijd komen, pak-weg een minuut later. Hierop wachten is niet acceptabel; leerlingen moeten steeds iets te doen blijven houden. Er zijn verschillende oplossingen voor dit probleem geopperd. In de uiteindelijke implementatie is ervoor gekozen om een deel van de diagnose uit te besteden aan Eerlijk Verdelen: het basisprogramma vangt ruis af, en meldt de leerling onmiddellijk of de door hem gemaakte verdeling eerlijk is. Voorts krijgen leerlingen periodiek een geheel vrije opgave. De tijd die gemoeid is met de constructie en de oplossing van deze opgave wordt gebruikt om het systeem een nieuw didactisch plan te laten beredeneren.

Tenslotte wordt nog vermeld, dat het ITS-breuken naar het inzicht van de aanwezigen niet zou mogen ingrijpen ten nadele van het ontwerp van het basisprogramma Eerlijk Verdelen. Bijvoorbeeld rapporteerde de diagnostische expert op een gegeven moment, dat hij heel moeilijk een oordeel kon vellen over de verdeelmanier van een leerling, omdat er (bij Snijmachines) maar aan één kind werd uitgedeeld; de diagnosticus zou meer houvast hebben als er aan alle kinderen zou worden uitgedeeld. De algemeen heersende mening was echter, dat de optie bij Snijmachines om aan een beperkt aantal kinderen te geven, niet mocht worden opgecofferd ten behoeve van de diagnostische expert. Ook de ontwerpbeslissing om de diagnostische expert geen specifieke toetsopgaven te laten opstellen, is in overeenstemming met dit standpunt.

### ***Het berichtenverkeer tussen de componenten***

Tijdens de voorbereidingen van het rollenspel werd reeds sterk de behoefte aan gestandaardiseerd berichtenverkeer voorvoeld, maar op dat moment kon nog geen standaard worden gesteld. Vanwege de uiteenlopende competenties van de onder-

scheiden componenten van het ITS-breuken bleek ook inderdaad, dat het van het grootste belang was dat elke component wist in welke vorm hij berichten kon verwachten, en in welke vorm van hem de berichten werden verlangd. Tijdens het rollenspel bleek het voor de spelers soms moeilijk precies af te bakenen welke uitkomsten van hun redeneringen publiek gemaakt moesten worden. Er is daarom gekozen voor volledige parametrisering van al het berichtenverkeer.

### ***Didactische ideeën***

Door de spelers werden tijdens het rollenspel verscheidene didactische ideeën geuit. Concreet is bijvoorbeeld het idee ontstaan, dat de positionering van voorwerpen op het scherm van invloed kan zijn op de manier waarop leerlingen een verdeling zouden kunnen aanpakken; dit idee heeft zijn neerslag gevonden in de optie 'bijzondere positionering' naast 'standaardpositionering' (zie hoofdstuk 8). Er werden tijdens het rollenspel echter zo weinig cycli van didactische specificatie doorlopen, dat direct duidelijk werd, dat er aan het vergaren van kennis ten behoeve van de componenten later nog ruime aandacht besteed zou moeten worden. Dit heeft zijn beslag gevonden in de kennisacquisitie waarover de andere hoofdstukken van dit deel gaan.

### ***Twijfels over de meerwaarde van het ITS-breuken***

Enkele deelnemers aan het rollenspel merkten op, dat er door het opsplitsen van de functies van het geheel over afzonderlijke experts, en door het lokale karakter van het redeneren, voortdurend informatie verloren ging. Inderdaad leiden de componenten van het systeem meer informatie af dan ze publiekelijk kenbaar maken. Het enige dat ze kenbaar maken is informatie die voor didactische differentiatie aangevend kan worden door een andere component. Extra afgeleide informatie kan het ITS-breuken dus niet exploiteren, dit in tegenstelling tot een leraar. Bij een leraar zijn allerlei extra weetjes over de leerling steeds latent aanwezig, die op een gegeven moment onverwachts als de stukjes van een puzzel in elkaar passen. Als bij de ontwikkeling van het ITS-breuken blijkt, dat teveel informatie verloren gaat, dan is dat een indicatie van het feit dat het ITS-breuken essentiële kennis tekort komt.

Enkele opmerkingen die tijdens het rollenspel gemaakt werden, betroffen het onderwijseffect van het ITS-breuken ten opzichte van Eerlijk Verdelen als zelfstandig COO-programma, en meer in het bijzonder de effectiviteit van de door het ITS-breuken gegenereerde opgavensequentie ten opzichte van vaste, vooraf bepaalde reeksen opgaven. Het is nu nog te vroeg om een vergelijkende effectmeting uit te voeren. Bovendien zitten daaraan nogal wat sociaal-wetenschappelijke onderzoeksmethodologische haken en ogen aangaande de natuurlijke schoolomstandigheden waarin beide varianten van het programma een eerlijke kans zouden krijgen.

**Literatuur**

Van Linschoten (1964, p.409 en verder) typeert treffend het probleem van de *homunculus*. Goffree (1992) stelt een rollenspel voor als onderdeel van een nieuwe vorm van eindexamen voor Pabo-studenten.

---

## Hoofdstuk 13

### Kennis maken met didactici

Eveline Helsper

Eén van de meest toegepaste vormen van kennisacquisitie is het afnemen van gestructureerde interviews bij domeindeskundigen. Ook in het ITS-project is voor de invulling van de afzonderlijke systeemcomponenten van deze vorm van kennisacquisitie gebruik gemaakt. De bedoeling van de interviews is om te komen tot een specificatie van didactische planning voor Eerlijk Verdelen: meer in het bijzonder gaat het er om aanwijzingen te verwerven over de inrichting van vervolggopgaven in ovèrecnstemming met het niveau van individuele leerlingen.

Er zijn vier deskundigen in de breukendidactiek gevraagd en bereid gevonden aan deze vorm van kennisacquisitie mee te werken: Drs. Frans van Galen, Drs. Koeno Gravemeijer, Dr. Leen Streefland en Prof. Dr. Adri Treffers. Allen zijn verbonden aan het Freudenthal Instituut, en allen kennen het basisprogramma Eerlijk Verdelen. Van Galen en Gravemeijer hebben meegewerkt aan het ontwerp van het eerste prototype van Eerlijk Verdelen.

Er zijn drie gespreksronden geweest, twee individuele en één gezamenlijke, waarin gezocht is naar specificaties van:

- welk onderdeel van Eerlijk Verdelen het meest geschikt is voor welke leerlingen;
- wat het aantal voorwerpen is waarin gesneden mag worden;
- welke vorm de voorwerpen mogen hebben: rechthoeken, vierkanten, stroken of cirkels;
- hoe de positie moet zijn van de voorwerpen op het scherm;
- over hoeveel kinderen verdeeld mag worden;
- welke snijmachines beschikbaar dienen te zijn: er is bij Eerlijk Verdelen keuze tussen één partje of alle partjes snijden en er kan een selectie gemaakt worden uit alle snijmachines van 2 tot en met 20.

Alle interviews zijn toegespitst op het tweede onderdeel van Eerlijk Verdelen, Snijmachines. De uitspraken van de didactici zijn uiteindelijk verwerkt in de concrete invullingen van de didactische expert en de opgavengenerator.

In de paragrafen 1 en 2 zijn de resultaten van de interviews gepresenteerd in een vorm die dicht staat bij de ruwe data, opdat de lezer zich een beeld vorme van het type kennis dat is geëliciteerd. Paragraaf 3 is een verdere uitwerking van de ingewonnen informatie.

## 1 Eerste en tweede gespreksronde

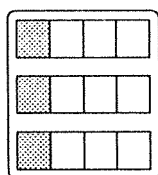
De doelen van het onderdeel Snijmachines zijn, dat leerlingen het snijden leren plannen, en dat ze gaan inzien dat eerlijke verdelingen op heel verschillende, maar qua uitkomst equivalente wijzen tot stand komen. Bij Snijmachines is het dus van belang dat leerlingen op allerlei manieren kunnen verdelen.

Uitgaande van enkele verschillende verdeelmethoden die reeds eerder tijdens het ITS-project naar voren zijn gekomen, is het de bedoeling dat de eerste ronde interviews een typering oplevert van relevante onderscheidingen in wijzen van verdelen. De interviews zijn deels oriënterend van aard, zodat aan de voorgenomen gespreksstructuur niet altijd strikt gehouden wordt als een wending van het gesprek het wenselijk maakt om op andere zaken dieper in te gaan.

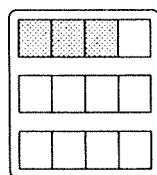
### 1.1 Materiaal

De eerste gespreksronde is gevoerd aan de hand van een tevoren opgestelde vragenlijst:

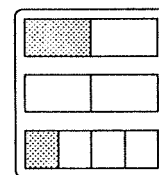
- Wat is het doel van Eerlijk Verdelen?
- Wat zijn de doelen van de verschillende onderdelen van Eerlijk Verdelen?
- Wat zijn relevante manieren van verdelen en waarom zijn deze belangrijk? Hierbij is een aantal voorbeelden gegeven (zie figuur 13.1).



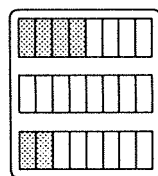
*Verdeelmanier I*  
3 rechthoeken  
met 4 kinderen



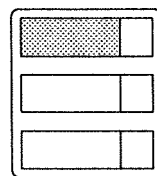
*Verdeelmanier II*  
3 rechthoeken  
met 4 kinderen



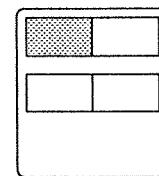
*Verdeelmanier III*  
3 rechthoeken  
met 4 kinderen



*Verdeelmanier IV*  
3 rechthoeken  
met 4 kinderen



*Verdeelmanier V*  
3 rechthoeken  
met 4 kinderen



*Verdeelmanier VI*  
2 rechthoeken  
met 4 kinderen

*figuur 13.1 Zes manieren om eerlijk te verdelen*

- Wat is de relatie tussen deze manieren van verdelen, wat betreft het inzicht dat ervoor nodig is?
- Zijn al deze manieren op elk moment even belangrijk?
- Wat zegt het over een leerling als hij een verdeelsituatie kan vereenvoudigen?
- Wanneer een leerling bepaalde manieren van verdelen niet gebruikt, wat moet er dan gebeuren? In hoeverre is dit afhankelijk van de tijd die hij al bezig is met het programma?
- Is het belangrijk dat een leerling eerlijk verdeelt?
- Kan er iets gezegd worden over de opbouw van een reeks opgaven? Heeft dit iets te maken met de moeilijkheid van de opgaven?
- Wat maakt een opgave moeilijk? Bijvoorbeeld: het gebruiken van grote getallen, onvereenvoudigbare verdeelsituaties, het verdelen van meer dan één voorwerp.
- Zijn er opgaven die beter niet gegeven kunnen worden?

Aan de vier deskundigen is in de eerste gespreksronde bovendien een specifieke gevalsbeschrijving voorgelegd. Deze (geconstrueerde) gevalsbeschrijving luidt als volgt:

*Een leerling is nog niet lang bezig met Snijmachines; hij heeft vijf opgaven gemaakt. Hij gebruikt uit zichzelf allerlei manieren van verdelen door elkaar, en in de laatste twee opgaven heeft hij één bepaalde verdeelmanier gebruikt. Hierbij heeft hij weinig gegumd. Zijn verdelingen zijn altijd eerlijk. De opgaven die gegeven zijn, zijn allemaal eenvoudig geweest.*

Bij de gevalsbeschrijving is een aantal vragen gesteld. Bij elk antwoord is gevraagd naar een motivatie en is gevraagd of er eventueel gegevens ontbreken.

- Moeten er nu moeilijker opgaven worden gegeven?
- Is het nu gewenst dat een bepaalde verdeelmanier gestimuleerd wordt?
- Moeten er sterke suggesties gegeven worden om het gebruik van een verdeelmanier uit te lokken?
- Hoeveel opgaven moeten er ongeveer gegeven worden voordat het leerlingwerk beoordeeld kan worden teneinde opnieuw de balans op te maken?

## 1.2 Procedure

In de eerste gespreksronde is, bij iedere deskundige afzonderlijk, telkens op dezelfde manier een interview afgenomen. Dit is gebeurd aan de hand van een vragenlijst en een gevalsbeschrijving. De interviews duurden alle ongeveer een uur. Omwille van de verwerking van de interviews zijn de gesprekken op geluidsband opgenomen, en zijn er ook aantekeningen gemaakt.

Bij het werken met meer dan één deskundige komen soms nogal uiteenlopende meningen voor. Het is in het geval van conflicterende informatie niet altijd mogelijk om een verantwoorde keuze te maken, zonder opnieuw de hulp van de experts in te roepen. Vaak bevatten tegenstrijdige meningen alle waardevolle didactische aspecten. Na de eerste gespreksronde is daarom een (anonieme) samenvatting van de verwerkte gesprekken ter beoordeling aan de deskundigen voorgelegd, en zijn de verschil-

punten in een gezamenlijk overleg besproken: de tweede gespreksronde. Aan deze gezamenlijke gespreksronde hebben naast de vier didactici van de eerste ronde enkele leden van het ITS-ontwerpteam deelgenomen. Dit gesprek duurde eveneens een uur. Het gesprek is weer op band opgenomen, terwijl er ook aantekeningen zijn gemaakt.

### 1.3 Resultaten van de eerste twee rondes

De resultaten van de eerste twee gespreksrondes zijn hieronder deels door representatieve citaten weergegeven (*cursief*). De oordelen van de didactici zijn samengevat en puntsgewijs opgesomd, gebundeld per onderwerp. Er is hierbij niet aangegeven of de informatie in de eerste of in de tweede ronde naar voren is gekomen.

#### **Doel van het computerprogramma Eerlijk Verdelen**

*Het ging ons om een paar dingen. Eerlijk Verdelen is een deel van een groter geheel. Je hebt een hele leergang en bij een paar facetten daarvan kun je Eerlijk Verdelen gebruiken. Het gaat er daarbij enerzijds om relaties te ontdekken tussen bijvoorbeeld: als je die stukjes twee keer zo klein maakt, geef je er twee keer zoveel. Wat handige strategieën. Maar vooral om een relatienetwerk op te bouwen tussen eenvoudige breuken, halven en kwarten en dat soort dingen. Dat kun je uitbreiden zoveel je wilt, maar je begint in principe met verwante breuken, relaties daartussen, en dat is eigenlijk wat je in het dagelijks leven nodig hebt. De kans dat je  $\frac{11}{17}$  bij  $\frac{3}{21}$  op moet tellen is niet zo gek groot. Dus het bassidee was, dat je eerst voor een brede oriëntering zorgt, met allerlei activiteiten.*

*Je moet het zien vanuit een realistische context. De breuken zijn niet zo belangrijk. Het doel is het mathematiseren van relaties. Breuken kun je daarvoor gebruiken, en met dat materiaal kun je vooruit gaan.*

- Bij het eerlijk verdelen merken leerlingen allerlei regelmaat op, die ze kunnen gebruiken bij breuken. Niveauverhoging betekent, dat het verdelen als handeling op de achtergrond raakt. Het niveau is dan de afstand tot de concrete bronnen.
- Met behulp van de opgebouwde basis kunnen bij het werken met in symbolen genoteerde breuken ook de moeilijke breuken aangepakt worden.

#### **Doel van Snijden & Geven**

- Bij Snijden & Geven gaat het om het handig snijden van voorwerpen, waarbij de relatie tussen het gesneden en het oorspronkelijke stuk geleerd wordt. Het verdelen is een breukvoortbrengende activiteit. Hierbij zijn drie breukenfamilies van belang:
  - de familie van  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$ ;
  - de familie van  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{12}$ ;
  - de familie van  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{10}$ .

Breuken behoren tot een familie wanneer de noemer overeenkomt met een noemer uit die familie. Noemers als 7 en 11 mogen niet voorkomen. Het aantal kinderen waarover verdeeld mag worden varieert van 2 tot 'niet al te veel'.

- In het eerste onderdeel kan begonnen worden met een vaste reeks opgaven. Deze reeks opgaven hoeft niet afhankelijk van de vorderingen van individuele leerlingen te worden opgesteld. De bedoeling van Snijden & Geven is dat leerlingen een tijdje van alles kunnen uitproberen.
- Het gaat om een denkmodel — leerlingen weten wel wat eerlijk is. Er moet daarom niet te streng beoordeeld worden bij Snijden & Geven.

### **Doel van Snijmachines**

*Welke variëteit van strategieën [verdeelmanieren] heeft hij tot zijn beschikking. Dat lijkt mij de hoofdvraag. Een tweede hoofdvraag is: welk relatienetwerk heeft hij intussen opgebouwd?*

- Een leerling moet een verdeling op verschillende manieren kunnen maken. Hierdoor worden, wanneer hij te zijner tijd gaat benoemen, de relaties tussen de breuken duidelijk. Bij Snijmachines gaat het om de relaties tussen breuken op concreet niveau.
- De verdeelmanieren moeten hier met elkaar in verband gebracht worden: dit mag niet aan het toeval overgelaten worden.
- Het is belangrijk dat de leerling op verschillende manieren kan verdelen, maar het verband hoeft hier niet expliciet gelegd te worden.
- Er kan wél expliciet gemaakt worden, dat, als een kind bij de ene verdeling meer stukken krijgt dan bij de andere, het totaal uiteindelijk toch dezelfde hoeveelheid kan zijn.

### **Doel van Kleuren & Benoemen**

- Er moet een relatie gelegd worden tussen enerzijds de stukken voorwerp die ontstaan bij het snijden en anderzijds het beschrijven van de stukken in termen van breuken.

### **Manieren om te verdelen**

*Zoiets als het 'Frans verdelen'<sup>1</sup>, daar is natuurlijk een context voor waar je dat zou kunnen ontwikkelen. Dat geldt natuurlijk ook voor de andere strategieën. Als je bijvoorbeeld bepaalde typen als handig verdelen wilt, dan is het handig dat de leerling weet wat de bedoeling is. En dan kun je van daaruit de strategieën aanduiden. Eén van de strategieën daarin is natuurlijk beginnen met zo groot mogelijke happen uit te delen. Omdat ze dat in de praktijk ook zo doen. Een triviaal geval is vijf met zijn vieren, waarbij je eerst ieder één geeft en niet alles in vieren hoeft te delen. Iets dergelijks doe je ook met halven. Een uitbreiding daarbij is dat je  $1$  en  $\frac{1}{2}$  als referentiepunten gebruikt. Als je bijvoorbeeld vijf met zijn zessen moet verdelen, dan kan het logisch zijn om iedereen iets minder dan één te geven. En zo kun je ook met een half vergelijken. Dus dat zijn twee strategieën die wel belangrijk zijn, omdat je natuurlijk ook aftrekken erbij wilt hebben. Daar past ook iets als schatten bij: wat komt er ongeveer uit. Dat zou je ook willen stimuleren. Je kunt ook denken aan een strategie als herhaald halveren. Maar er zijn ook strategieën die meer liggen op het niveau van: de ene schuilnaam uit de andere afleiden. Want het idee van*

---

1. Term uit Streefland (1988); komt overeen met manier I van figuur 13.1.



*schuilnamen is, dat leerlingen bij één breuk zoveel mogelijk variaties bedenken en daarmee in feite een relatienet ontwikkelen van dingen die bij elkaar horen: drie kwarten, driekwart, één min een kwart, een half en een kwart, enzovoorts. Maar ook zes achtste.*

- Aan de hand van de voorgelegde indeling van verdeelmanieren (figuur 13.1) typeert één deskundige de manieren als volgt:
  - Manier I en II: het uitgebreid verdelen.
  - Manier III en IV: het handig verdelen in de zin van zo groot mogelijk beginnen, waarbij leerlingen eerder manier III dan manier IV zullen gebruiken.
  - Manier V: het aftrekken.
  - Manier VI: dit is geen relevante verdeelmanier.
 Eén verdeelmanier werd toegevoegd:
  - Manier VII: het gebruiken van een referentiepunt, zoals '1 + ...', ' $\frac{1}{2}$  + ...'.
- Een ander maakt de volgende indeling bij de gegeven verdeelmanieren:
  - Manier I: het uitgebreid verdelen, de situatie weergeven in stambreuken.
  - Manier II: de verdeelsituatie in één klap weergeven in een echte breuk; als variant geldt: alle voorwerpen zijn gesneden als bij manier I, terwijl meer dan één, maar niet alle stukken uit één voorwerp komen.
  - Manier III en IV: de situatie met ongelijknamige breuken weergeven.
  - Manier V: het complement maken: aftrekken, asymmetrie in de verdeling.
  - Manier VI: dit is geen relevante verdeelmanier.
- Derde indeling van verdeelmanieren:
  - Manier I en II: opbouw uit stambreuken.
  - Manier III en VI: weten dat er een halve of meer gegeven kan worden, dus de halve alvast geven; verkorting van de manieren I en II.
  - Manier IV: dit is geen relevante verdeelmanier.
  - Manier V: in de buurt van een hele.
- Vierde indeling van verdeelmanieren:
  - Manier I: dit is een relevante verdeelmanier [zonder verdere toelichting].
  - Manier II: dit is een relevante verdeelmanier [zonder verdere toelichting].
  - Manier III: maar dan ook kwarten en derden in plaats van alleen halven; de leerling deelt alvast grote stukken uit.
  - Manier IV: dit is geen relevante verdeelmanier.
  - Manier V: dit is een relevante verdeelmanier [zonder verdere toelichting].
  - Manier VI: vereenvoudigen; verhoudingsprobleem.
- Manieren I en II zijn verschillend, op uitdeelniveau en op symbolisch niveau.
- Voor de manieren I en II zijn geen specifieke oefeningen nodig.
- Er kan onderscheid gemaakt worden tussen enerzijds de verdeelmanieren I, II, III en V en anderzijds het verhoudingsprobleem.
- Manier I wordt door leerlingen het eerst gebruikt, omdat daar weinig inzicht voor nodig is. Voor de manieren III en VI is meer inzicht nodig: er moet worden geanticipeerd op de uitkomst.
- Het gebruik van verdeelmanier II toont meer inzicht dan gebruik van manier I: de leerling ziet in dat bij uitdelen aan Tes niet alles gesneden hoeft te worden.

- Manier III: de mentale handelingsstructuur die achter het gebruik van deze manier zit kan zijn, dat de leerling alvast halven uitdeelt, en dan wel verder ziet. Het kan ook zijn dat de leerling van te voren al ziet hoe de verdeling wordt.
- Manier V: de leerling heeft het overzicht over het totale verdeelprobleem en anticipeert op de uitkomst.
- Manier VI: vereenvoudigen is het opsplitsen van een probleem in meer dan één identiek subprobleem, waarbij zowel het aantal kinderen als het aantal voorwerpen opgesplitst wordt.
- Niet alleen wèl vereenvoudigen is van belang, maar ook níet vereenvoudigen.
- Het alvast uitdelen van grote stukken zal het eerst gebeuren, omdat dit ook in het dagelijks leven gebeurt.
- Het gebruik van referentiepunten ( $\frac{1}{2} + \dots$ ) is belangrijk.
- Van de voorgelegde verdeelmanieren zijn er drie of vier ècht relevant, die moeten dus worden uitgebuit.

### **Belang van de verdeelmanieren ten opzichte van elkaar**

*Ze moeten met al die dingen wat doen, het zou prettig zijn als ze wat van dit en wat van dat zouden gebruiken. Het gaat vervolgens om het beschrijven van de breuken, van de breuksituaties. En dan moet je gewoon verschillende dingen hebben. En als je dat een aantal keren laat doen, dan komen ze vanzelf wel met verschillende dingen. Daar hoef je ook niets aan te sturen, eerlijk gezegd.*

*Ik denk dat je niet hoeft te zoeken naar wat eerder komt. Als ze het ene gebruiken, moet je ervoor zorgen dat ze het andere doen, als ze met het andere komen moet je ervoor zorgen dat ze het ene doen.*

- De ene verdeelmanier is niet belangrijker dan de andere: de manieren worden aan elkaar gerelateerd en zijn dus allemaal nodig.
- De manieren hoeven niet allemaal precies even vaak gebruikt te worden, als de leerling de verschillende manieren maar tot zijn beschikking heeft.
- Als een leerling een manier van verdelen twee maal gebruikt heeft is dat nog te weinig. Een keer of vijf is voldoende.
- Het is van belang eerst een globale leergang op te zetten, met daarin subdoelen, die op verschillende manieren bereikt kunnen worden.
- Als een verdeelmanier niet gebruikt wordt, dan moet die gestimuleerd worden.
- De scheiding in breukenfamilies moet bij het opstellen van opgaven niet te strikt gehanteerd worden.
- Als alle verdeelmanieren even vaak gebruikt zijn, mag er niet gestuurd worden; ook de laatst gebruikte verdeelmanier is dan niet richtinggevend.

### **Didactische middelen ter stimulering van een verdeelmanier**

*In bepaalde gevallen zou je willen dat ze bepaalde strategieën gebruiken en in bepaalde gevallen is het helemaal niet logisch om bepaalde strategieën te gebruiken. Dus je hebt te maken met een combinatie van opgavekenmerken en de strategie die gebruikt moet worden en de bedoeling die je hebt met het stimuleren van die strategieën. Dus je kunt dat niet los van de opgavenset zien.*

*Enerzijds leerlingen natuurlijke dingen laten doen, anderzijds sturen met opdienen om zo verschillende varianten te krijgen.*

*In feite weet ik dus niet of leerlingen het vanzelf doen. Ik heb wel allerlei ideeën over wat leerlingen waarschijnlijk gaan doen, bijvoorbeeld dat er behoorlijk wat variatie zal komen, maar ik weet dat niet echt. Want ik heb dus nooit een aantal dingen gezien die de leerlingen achter elkaar deden en of ze niet bijvoorbeeld altijd bleven steken in bijvoorbeeld manier 1.*

- Bij het stimuleren van één bepaalde verdeelmanier mogen niet alle andere manieren verboden worden: dan zou er te veel geforceerd worden.
- Als een leerling zeer ongestructureerd te werk gaat, moet er bij voorkeur een opgave met een sterk suggererend karakter worden gegeven, die één specifieke verdeelmanier ontlokt; dat type opgave moet dan vaak herhaald worden.
- Voor het laten oppikken van een verdeelmanier is de keuze van aantallen voorwerpen en kinderen belangrijk.
- De opgave 'drie met z'n vieren' is erg productief: hierbij kunnen vrijwel alle verdeelmannieren met succes worden toegepast.
- Slechts bij een beperkte verzameling verdeelproblemen wordt het werken met halven uitgelokt.
- De kans dat leerlingen met halven werken is vrij groot bij 'drie met z'n vieren'.
- Wanneer het aantal kinderen in een opgave groot is, zal er eerder vereenvoudigd worden.
- De vorm van een voorwerp kan een bepaalde oplossingsstrategie stimuleren.
- Het feit dat bij Snijmachines niet alles gesneden en uitgedeeld hoeft te worden, heeft invloed op de verdeelmanier die een leerling volgt.
- Bepaalde opgaven zouden bij herhaling kunnen worden aangeboden, met de opdracht: 'doe het nu op een andere manier'.
- Leerlingen in duo's laten werken, en daarbij tweemaal dezelfde opgave geven, zal voor reflectie zorgen.
- Om een didactisch doel te bereiken moet een reeks gerelateerde opgaven worden gegeven.
- Het geven van een reeks opgaven laat de leerling ruimte om zelf verdeelmannieren te ontdekken, zonder dat het didactisch plan wordt verstoord.
- Als een leerling veel gumt, maar uiteindelijk wel tot een correct resultaat komt, is het verstandig om nog enkele vergelijkbare opgaven te geven, om na te gaan of de leerling het echt wel door heeft.
- Het is belangrijk om vormen van voorwerpen af te wisselen: dit zorgt voor variatie.

#### ***Toegestane en niet toegestane opgaven***

- Noemers als 14 en 17 mogen niet voorkomen.
- Noemers als 7 en 11 mogen niet voorkomen.
- De noemer 15 is te groot.
- Het aantal kinderen in een verdeelsituatie mag niet te groot zijn; twaalf kan nog net.
- Achttien kinderen is al heel veel.

- Alleen noemers uit het dagelijks leven mogen voorkomen: bij de opgave moet een realistische context te vinden zijn.
- Het is zinvol om ook opgaven met meer voorwerpen dan kinderen te geven. Zo realiseert een leerling zich wat hij aan het doen is en, bij in symbolen genoteerde breuken, hoe aantallen kinderen en voorwerpen zich verhouden tot tellers en noemers.
- Als er meer dan één voorwerp is, mag het aantal kinderen nog iets groter zijn dan twaalf, omdat de situatie dan vaak vereenvoudigd kan worden.
- Bij Snijmachines dient er meer dan één voorwerp aangeboden te worden, omdat het verdeelprobleem anders maar op één manier kan worden opgelost.
- Opgaven moeten afkomstig zijn uit de  $\frac{1}{2}$ -,  $\frac{1}{3}$ - of  $\frac{1}{5}$ -familie.

### **Volgorde van opgaven**

*De families hoeven niet gescheiden gegeven te worden. Makkelijke en moeilijke sommen ook niet. Maar ik weet niet of leerlingen in verwarring zullen raken, dat verwacht ik eerlijk gezegd helemaal niet. (...) Ik weet niet hoe leerlingen op die taakjes reageren, ik heb nooit zelf geëxperimenteerd met Snijmachines.*

*Makkelijke opgaven hoeven niet vóór de moeilijke gegeven te worden. Zo moeilijk zijn die opgaven allemaal niet. Je kunt gummen en opnieuw proberen. Ze kunnen dus redelijk door elkaar.*

*Eerst de families geven en vereenvoudigbare broertjes als  $\frac{2}{4}$  en  $\frac{4}{8}$ . Daarna de lastigere, niet vereenvoudigbare.*

*Eerst halven en kwarten geven omdat die ook in het dagelijks taalgebruik voorkomen. Daarna met herhaald delen uitbreiden naar rangtelwoorden. Achtsien zijn halve kwarten, dus hiermee kun je beginnen uit te breiden.*

- Eerst moeten er opgaven uit de  $\frac{1}{2}$ -familie gegeven worden, met tussendoor wat opgaven uit de  $\frac{1}{3}$ -familie.
- Eerst komen opgaven met  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ , dan met  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{9}$ . De verbinding tussen de  $\frac{1}{2}$ - en  $\frac{1}{3}$ -familie wordt vervolgens uitgelokt door opgaven met  $\frac{1}{12}$ .
- De moeilijkheidsgraad van een opgave wordt niet bepaald door het aantal stukken dat gesneden moet worden.

## **2 Derde gespreksronde**

Het doel van de derde gespreksronde is het verkrijgen van inzicht in de didactische middelen waarmee een gegeven verdeelmanier gesuggereerd kan worden. Er zijn daartoe bij de participerende didactici weer gestructureerde interviews afgenomen. De interviews boden evenwel voldoende ruimte om op andere zaken in te gaan.

### **2.1 Materiaal**

Ter ondersteuning van de derde gespreksronde zijn er enkele kaarten gemaakt, met daarop verschillende didactische middelen om verdeelmanieren te suggereren. Als

de didactiek gericht is op één concrete verdeelwijze, dan zijn er bijvoorbeeld de volgende mogelijkheden:

- Een opgave geheel voordoen, op de bedoelde wijze.
- De wijze suggereren door een zorgvuldig gekozen verhouding tussen de aantallen voorwerpen en kinderen.
- De verdeelwijze suggereren door het aanbieden van een beperkte, specifieke combinatie van snijmachines.
- Alle andere verdeelwijzen afschermen door het aanbieden van een beperkte, specifieke combinatie van snijmachines.

Hierbij is gebruik gemaakt van een vragenlijst:

- Hoe kunnen deze kaarten geordend worden, en op grond van welk criterium?
- Mogen snijmachines uitgesloten worden?
- Mogen wijzen van verdelen afgeschermd worden?
- Welke didactische middelen hebben de voorkeur?
- Welke middelen mogen absoluut niet gebruikt worden?
- Ontbreken er middelen op de kaarten? Zo ja, welke?

In deze derde gespreksronde zijn voorts twee gevalbeschrijvingen besproken. De eerste luidt:

*Een leerling heeft vijftien opgaven gemaakt en daarbij vaak, uit zichzelf, alles uitgebreid verdeeld, waarbij de kinderen afwisselend alle stukjes uit één voorwerp kregen of uit elk voorwerp één stukje (de wijzen I en II). Ook heeft hij een aantal malen één partij uit een voorwerp gesneden (wijze IV), maar hiervoor heeft hij veel suggestie nodig gehad. Hij heeft niet gegumd bij het maken van deze opgaven. Hij heeft nog nooit stukken van verschillende grootte uitgedeeld (wijze III). Dat is nu wel gewenst. — Aanpak: er worden zes opgaven gegeven. Deze suggereren wijze III, door de keuze van de aantallen voorwerpen en kinderen, en door de plaatsing van de voorwerpen op het scherm. Bijvoorbeeld: 5 repen met 8 kinderen, waarbij 4 repen in een groepje staan en één apart. — Resultaat: wijze III is ondanks de suggestie toch nog niet gebruikt, allerlei andere wijzen van verdelen wel.*

De tweede gevalbeschrijving luidt:

*Het gaat om dezelfde leerling als in het eerste geval. Er is, na zwakke suggestie, sterke suggestie toegepast, die succes had: de leerling deelde halven uit. Nu wordt de suggestie afgezwakt, om te kijken of hij ook uit zichzelf wijze III gebruikt. — Aanpak: er worden zes opgaven gegeven, waarbij weer, net als in het eerste geval, alleen met getalsverhoudingen en positionering van de voorwerpen op het scherm gesuggereerd wordt. — Resultaat: de leerling gebruikt weer allerlei wijzen van verdelen, maar wijze III niet meer.*

Bij de gevalsbeschrijvingen zijn enkele vragen gesteld:

- Hoeveel opgaven moeten er gegeven worden om het didactisch plan kans van slagen te geven?
- Wordt er ook gekeken naar het aantal opgaven dat de leerling al gemaakt heeft?
- Maakt het iets uit of de manier van verdelen nog niet, of ooit al wel gebruikt is?
- Welke opgaven kunnen nu het beste gegeven worden?
- Wordt er zwak of sterk gesuggereerd?
- Maakt het iets uit of er sterke suggestie nodig is geweest om het gebruik van andere verdeelmannieren te ontlokken?
- Als er informatie mist, welke is dat dan?

Er zijn daarnaast nog enkele vragen gesteld van algemene aard:

- Wanneer is een leerling aan Kleuren & Benoemen toe?
- Moet het uitdelen van de eerlijke porties eerst beperkt worden tot uitsluitend de portie van Tes, voordat met het benoemen kan worden gestart, of kan het benoemen al eerder?
- Moet de gemaakte verdeling bij het benoemen tot uitdrukking gebracht worden in de breuk?

## 2.2 Procedure

Er is in deze gespreksronde gebruik gemaakt van kaarten met voorstellen voor middelen om bepaalde oplossingsstrategieën voor verdeelsituaties uit te lokken. Aan de hand van deze kaarten is een vragenlijst afgewerkt. Vervolgens is gediscussieerd naar aanleiding van twee gevalsbeschrijvingen en de daarbij horende vragen.

Ook in de derde gespreksronde is, net als in de eerste ronde, bij iedere deskundige op dezelfde manier een individueel interview afgenomen. De interviews duurden alle weer ongeveer een uur en werden opgenomen op geluidsband, terwijl ook aantekeningen zijn gemaakt.

Hoewel de uitspraken van de experts niet altijd onderling overeenkwamen, was duidelijk wat de oorzaak van deze verschillen was. Er heeft daarom geen gezamenlijk nagesprek plaatsgevonden.

## 2.3 Resultaten

De weergave van de resultaten gebeurt op dezelfde manier als voorheen, namelijk aan de hand van representatieve citaten (*cursief*), en door oordelen van didactici samengevat en puntsgewijs per onderwerp op te sommen.

### ***Volgorde van het gebruik van didactische middelen***

*Ja, ik ben een voorstander van ruimte voor leerlingen. (...) Die geef je ze dus eerst wel steeds, maar als die te ruim blijkt te zijn, ga je hem verkrappen als het ware.*

*Ja kijk, het kan op ... (stilte). Wat je er niet bij hebt [bij de kaarten] is gewoon tekst, waarop staat van: probeer het eens op deze manier. Wat je wel hebt, is dat snijmachines wor-*

*den uitgeschakeld. Nou ja, dat kan. Maar misschien zou je wat eerder kunnen zeggen: probeer het eens met die snijmachine.*

- Aanvankelijk moesten er subtiele middelen worden ingezet. Als dat niet effectief is, dan mag er sterker gestuurd worden.
- Stimuleren is te prefereren boven afschermen.
- Het afschermen van de door de leerling meest gebruikte verdeelmanier is te prefereren boven het suggereren van een achterblijvende verdeelmanier, als het didactisch middel van suggereren het uitsluiten van snijmachines is.
- De volgorde van het inzetten van didactische middelen is bij voorkeur: de keuze van de aantallen voorwerpen en kinderen, de keuze van de vorm van de voorwerpen, de positionering van de voorwerpen op het scherm, en tenslotte de beperking van de beschikbaarheid van snijmachines.
- Als het ontlocken van manier III niet lukt met verdeelsituaties als ‘vijf met z’n achten’ of ‘zeven met z’n twaalfen’, en evenmin met positioneringen, kunnen aan de leerling gerichte schattingsvragen worden gesteld, bijvoorbeeld: “Krijgt elk kind meer of minder dan een half?”. Als ook dat niet lukt, is voordoen nog het enig beschikbare didactische middel dat door het programma kan worden aangewend.
- Als alle didactische middelen van het programma zijn uitgeput, en geen effect hebben gehad, dan moet de leerling met de leraar gaan praten.
- Of voor andere manieren veel suggestie nodig is geweest, is niet van belang bij het bepalen van de sterkte van de te geven suggestie.

#### **Gerelateerde opgaven**

- De kans dat leerlingen de relatie tussen opgaven niet zien is groot, omdat de opgaven niet tegelijkertijd op het scherm staan.
- Het is het proberen waard om twee aan elkaar gerelateerde opgaven direct na elkaar te geven.
- Twee dezelfde opgaven na elkaar op een andere manier maken is vervelend voor de leerling.
- Dezelfde opgave die enkele malen achter elkaar op een andere manier gemaakt moet worden, kan op zich een uitdaging vormen voor de leerling.
- Wanneer er een bepaalde manier van verdelen gesuggereerd wordt, moet er aan het begin van een didactisch plan sterkere suggestie gegeven worden dan aan het eind.

#### **Lengte van een opgavenreeks**

*Mijn gevoel gaat dus naar een lange sequentie opgaven, zodat leerlingen eerst een tijdje aan kunnen modderen, voor je in feite gaat ingrijpen.*

*Stel, je geeft tien opgaven en de leerlingen doen dat tien keer op dezelfde manier, de volgende keer doe je er twee, de beginopgaven of zoiets, die geven dan extra hints. Nou, dan kijk je wat er verder gebeurt. En blijkt dat ze na die twee opgaven weer terugvallen op hun oude manier, nou, dan doe je de volgende keer weer twee opgaven. En als daarna de variatie vanzelf optreedt, dan hoef je dat dus niet te doen.*

- De reeksen opgaven moeten kort zijn en niet boven de vijf à zes opgaven uitgaan. Anders wordt te lang de nadruk op één bepaalde manier van verdelen gelegd.
- Veel herhalen kan op den duur vervelend zijn voor de leerling.
- Herhalen valt niet te vermijden, bovendien zien leerlingen elke opgave als een nieuwe.
- In één sessie van ongeveer zes opgaven moet het te doen zijn om een didactische doelstelling te realiseren.

### **Aantallen voorwerpen en kinderen op het scherm**

*Getalsverhoudingen waarmee een bepaalde manier van verdelen wordt uitgesloten. Ik kan me hier heel vaag iets bij voorstellen, ik vind het al als het boven de één is, zullen we maar zeggen, als het boven de één is, eh, maar een half ... (stilte). Ik probeer het me voor te stellen ... (stilte).*

- Het manipuleren van aantallen voorwerpen en kinderen is een heel krachtig middel, dat uitgebuit moet worden om didactische doelen te verwezenlijken.
- Tegelijkertijd is dit een subtiel middel, dat zeer geschikt is en niet dwingt.
- Uit de keuze van de aantallen voorwerpen en kinderen door een leerling bij het componeren van vrije opgaven, blijkt welke getalsverhoudingen die leerling aanspreken.
- De opgave '5 voorwerpen met 6 kinderen' suggereert verdeelmanier V sterker dan '3 voorwerpen met 4 kinderen'.
- De opgave '11 voorwerpen met 12 kinderen' suggereert manier V.
- Bij een verhoudingsprobleem moet eerst de opgave '3 voorwerpen met 4 kinderen' gegeven worden, en vervolgens '6 voorwerpen met 8 kinderen'.
- Om verdeelmanier III te ontlokken moeten opgaven gegeven worden met meer voorwerpen dan kinderen.
- Voor manier III moet het aantal voorwerpen net groter zijn dan de helft van het aantal kinderen; '7 voorwerpen met 12 kinderen' is dus heel geschikt.

### **Vorm van de voorwerpen**

*De vorm van het voorwerp: ja, in zoverre dat je er dus voor zorgt dat je er zowel een cirkel in hebt als een rechthoek. Kijk, die 'hap' [gevolg van één-partje-machine] is vooral hiervoor [cirkel] handig. Als je met stroken werkt komt het er van zijn levensdagen niet in, dus voor de één-partje-machine moet je er vierkanten, cirkels, rechthoeken neerzetten.*

- Variëren met de vorm van het voorwerp is erg belangrijk, om breuken niet met één enkel voorwerp te laten associëren.
- Suggesteren van verdeelmannieren door middel van vormen is subtiel, en daarom heel goed.

### **Positionering van de voorwerpen op het scherm**

- Bij positionering (door een deel van de voorwerpen te groeperen op het scherm, zie hoofdstuk 8) wordt het probleem als het ware opgesplitst in twee (eenvoudiger) deelproblemen.



- Suggesteren door middel van positionering van de voorwerpen op het scherm is buitengewoon belangrijk: het stuurt de verdeelmanier.
- Positionering moet met mate worden toegepast, anders onttaardt het tot een trucje.

### ***Snijmachines***

- Het aanbieden van een beperkte verzameling snijmachines moet omzichtig gebeuren; het kan frustrerend werken voor leerlingen.
- Snijmachines uitsluiten is beter dan het geven van een hint dat die snijmachines niet gebruikt mogen worden.
- Snijmachines uitsluiten ligt op hetzelfde niveau als het geven van een hint om ze niet te gebruiken.
- Het werken met 'één-partje-machines' is lastig.
- Het aanbieden van 'één-partje-machines' ontlokt gebruik van verdeelmanier V.
- Om het gebruik van de 'één-partje-machines' te stimuleren mogen de 'alle-partjes-machines' uitgesloten worden.
- Als de voorwerpen cirkelvormig zijn ligt gebruik van een 'één-partje-machine' voor de hand.

### ***Werkvorm***

- In klasseverband is het nuttig om twee leerlingen samen achter de computer te laten werken.
- Klassegesprekken zijn belangrijk.
- Het is van belang om begeleidend materiaal te gebruiken, met daarin suggesties.
- Een leerling die duidelijk problemen heeft met Eerlijk Verdelen, kan beter even stoppen met het programma om met de leraar te gaan praten.

### ***Overgang van Snijmachines naar een ander onderdeel van Eerlijk Verdelen***

- Als een leerling volhardt in het uitvoerig snijden, kan eventueel besloten worden om terug te grijpen naar Snijden & Geven: daar moet de leerling zelf snijden en zal hij zich gaan realiseren dat het zin heeft om te bezuinigen op sneden.
- Het werken met Snijmachines moet niet te lang doorgaan, omdat het uiteindelijk om de breukbeschrijvingen gaat.
- Leerlingen hoeven de 'één-partje-machines' nog niet gebruikt te hebben om aan Kleuren & Benoemen te kunnen beginnen.
- Voordat overgegaan mag worden naar Kleuren & Benoemen moet de leerling eerst leren alleen aan Tes uit te delen.
- Als een leerling geleerd heeft om alleen de portie van Tes te snijden en te geven, moet hij direct overgaan naar Kleuren & Benoemen.
- Een leerling kan overgaan naar een volgend onderdeel als hij niet teveel fouten maakt.

### 3 Uitwerking

De informatie die van de didactici verkregen is in de drie gespreksronden kan niet direct als invulling voor de systeemcomponenten van het ITS-breuken dienen: de informatie moet eerst nog geanalyseerd en vervolgens geformaliseerd worden. Een dergelijke analyse vergt een interpretatie van de gedane uitspraken, waarbij niet elk detail exact, en met wetenschappelijke zekerheid afgeleid kan worden uit de letterlijke interviews. Het is moeilijk om scherp te scheiden wat er direct geconcludeerd mag worden, en wat er — in de geest van hetgeen te berde is gebracht — redelijkerwijs bijgedacht kan worden. Methodologisch hoeft dit geen probleem te zijn, op voorwaarde dat de betrokken didactici geconfronteerd worden met de (gecomputeriseerde consequenties van de) uitwerking.

De meewerkende didactici rapporteerden het als een gemis te ervaren geen of onvoldoende praktische ervaring te hebben met het computerprogramma Eerlijk Verdelen. Dit leidt op sommige momenten tot onzekerheden met betrekking tot de bruikbaarheid van de voorgestelde didactische richtlijnen — een complicatie bij de analyse. De uitwerking die nu gepresenteerd wordt moet dan ook uitdrukkelijk gezien worden als een eerste benadering, die nog gevalideerd moet worden.

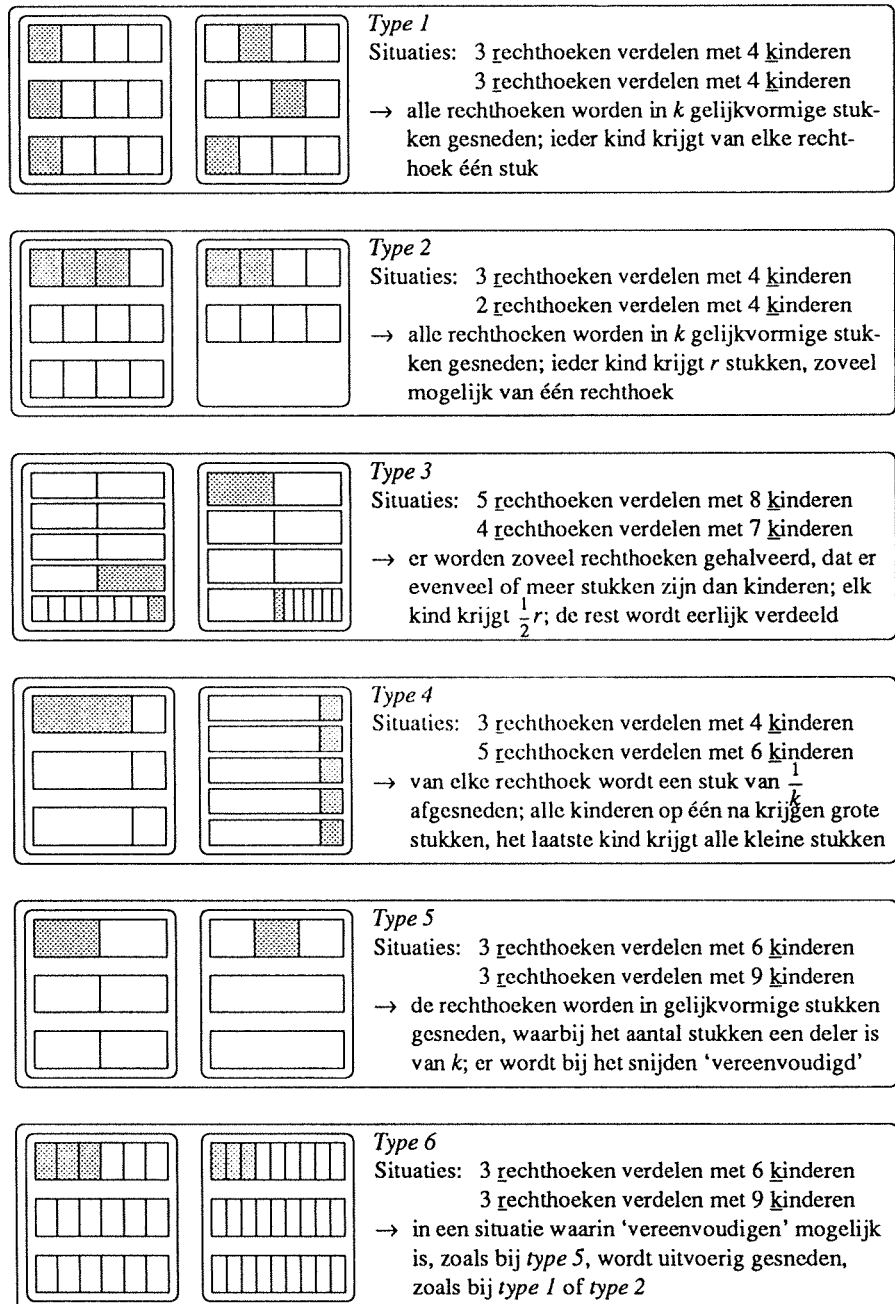
Het programma Eerlijk Verdelen speelt een rol bij de weg die leerlingen afleggen van concrete verdeelactiviteit, via modellen, naar het abstracte breukrekenen. Het is de bedoeling dat leerlingen verbanden gaan zien tussen breuken en breukenfamilies. Het gaat hierbij om drie families:

- de familie van  $\frac{?}{2}, \frac{?}{4}, \frac{?}{8}, \frac{?}{16}$  (een willekeurige teller, gedeeld door 2, etc.);
- de familie van  $\frac{?}{3}, \frac{?}{6}, \frac{?}{9}, \frac{?}{12}$ ;
- de familie van  $\frac{?}{5}, \frac{?}{10}$ .

Een breuk behoort tot een breukenfamilie als de noemer van de breuk overeenkomt met één van de noemers van de familie.

Opgaven waarbij over meer dan 18 kinderen verdeeld wordt, moeten bij voorkeur vermeden worden bij het specificeren van opgaven. Aantallen kinderen die niet overeenkomen met één van de noemers van een breukenfamilie, passen niet in didactisch verantwoorde opgaven.

Met de verdeelmannieren van figuur 13.1 als uitgangspunt, is een indeling gemaakt van de te onderscheiden relevante manieren. Deze indeling is weergegeven in figuur 13.2.



figuur 13.2 Typering van verdeelmannieren

Bij het samenstellen van een oefening moet planmatig gedacht worden: een reeks opgaven moet onderling verband hebben. Het resultaat dat een leerling haalt met één losse opgave verschaft niet zoveel inzicht in zijn begrip van het verdelen. Pas na het doorwerken van een reeks onderling gerelateerde opgaven kan een conclusie getrokken worden ten aanzien van de vorderingen van de leerling. Zo'n didactisch plan omvat ongeveer zes opgaven. Als een leerling veel gumt tijdens het uitwerken van de verdelingen, is dat een reden om het onderhavige plan te verlengen met enkele opgaven met overeenkomstige kenmerken.

Binnen zo'n plan worden de sterkst sturende opgaven aan het begin gezet; de sterkte van de sturing daalt vervolgens. Sterke sturing wordt bereikt door het uitsluiten van bepaalde snijmachines. De zwakste sturing wordt bereikt door positionering van voorwerpen op het scherm.

De typen 1 en 2 (zie figuur 13.2) zijn te suggereren met de volgende getalskenmerken: het aantal kinderen is zo mogelijk oneven, en bij voorkeur klein; het aantal voorwerpen kan het beste kleiner zijn dan het aantal kinderen. Een voorbeeld van een geschikte opgave is '3 voorwerpen verdelen met 5 kinderen'. Type 3 kan worden gesuggereerd met behulp van de volgende kenmerken: één eerlijke portie is groter dan een half voorwerp; het aantal kinderen kan het beste even zijn en bij voorkeur groot; het aantal voorwerpen is liefst één groter dan de helft van het aantal kinderen; de grootste gemene deler van het aantal voorwerpen en het aantal kinderen is gelijk aan 1. Voorbeelden zijn '5 voorwerpen met 8 kinderen' en '7 voorwerpen met 12 kinderen'. Type 4 kan gesuggereerd worden met deze kenmerken: het aantal voorwerpen kan het beste gelijk zijn aan 'aantal kinderen - 1'; het aantal kinderen is bij voorkeur groot. Voorbeeld: '11 voorwerpen met 12 kinderen'. Type 5 kan gesuggereerd worden met de volgende getalskenmerken: de grootste gemene deler van het aantal voorwerpen en het aantal kinderen is groter dan 1; het aantal voorwerpen mag eventueel groter zijn dan het aantal kinderen; het aantal kinderen is bij voorkeur groot, en zou even kunnen zijn; het aantal kinderen kan een veelvoud zijn van het aantal voorwerpen. Voorbeeld: '5 voorwerpen met 10 kinderen'. Opgaven die type 6 suggereren, tenslotte, hebben de volgende kenmerken: het aantal voorwerpen kan het beste kleiner zijn dan het aantal kinderen; het aantal kinderen is klein en kan beter geen veelvoud zijn van het aantal voorwerpen. Voorbeeld: '2 voorwerpen met 3 kinderen'.

### **Literatuur**

Voor meer informatie over kennisacquisitie wordt verwezen naar McGraw en Harbison-Briggs (1989). Burton, Shadbolt, Rugg en Hedgecock (1988) bespreken enkele elicitatietechnieken. Breuker en Wielinga (1987) schrijven een modelmatige benadering van de kennisacquisitie voor. Het *International Journal of Educational Research* (1988) wijdde een themanummer aan "Knowledge Acquisition in Intelligent Learning Environments".



---

# Hoofdstuk 14

## Kennis uit schoolboeken

Mijndert Streefkerk

In het vorige hoofdstuk is al een deel van de voor het ITS-breuken benodigde didactische kennis in kaart gebracht door het afnemen van gestructureerde interviews bij ervaren didactici. In dit hoofdstuk worden op basisscholen veel gebruikte rekenmethoden onder de loep genomen, om inzicht te krijgen in de specifieke eigenschappen van breuken die in schoolboeken voorkomen.

Veel van de kennis die didactici, leergangontwikkelaars en leraren toepassen in hun dagelijkse praktijk, is voor hen eerder beschikbaar in de vorm van intuïties dan als expliciete definities, axioma's of stellingen. Deze kennis is dientengevolge moeilijk toegankelijk voor derden. Uiteraard kunnen didactici communiceren over hun kennis, maar hun *Fingerspitzengefühl* is niet direct overdraagbaar. Daarom is ter aanvulling van kennisacquisitie door middel van interviews gezocht naar alternatieve, indirecte onderzoeksmethoden voor het in kaart brengen van de didactische intuïties.

Vanzelfsprekend maken leergangontwikkelaars bij het schrijven van rekenboeken gebruik van expliciete richtlijnen, die dan vaak in het voorwoord van het rekenboek worden vermeld; bovendien conformeren ze zich aan een bepaalde didactische theorie. Maar alleen op basis hiervan kan er geen didactisch verantwoord rekenboek worden samengesteld. Daarvoor is tenminste ook nog uitgebreide didactische ervaring nodig. Deze ervaringskennis is van groot praktisch belang bij het opstellen van didactisch verantwoorde reeksen van opgaven, en is dus ook van essentieel belang voor het genereren van opgaven door het ITS-breuken.

Binnen het ITS-project zijn statistische analyses van rekenboeken uitgevoerd, met het doel de systematische — maar niet volledig geëxpliciteerde — keuzen die didactici maken bij het samenstellen van opgaven te achterhalen. De kennis die op deze wijze is verworven, wordt ingezet door de opgavengenerator van het ITS-breuken. De analyses zijn in eerste instantie uitgevoerd ten behoeve van de inrichting van het derde onderdeel van Eerlijk Verdelen, Kleuren & Benoemen, waar leerlingen werken met in symbolen genoteerde breuken. Van de resultaten is voorlopig alleen gebruik gemaakt bij het tweede onderdeel, Snijmachines.

### 1 Classificatie van breuken op grond van formele kenmerken

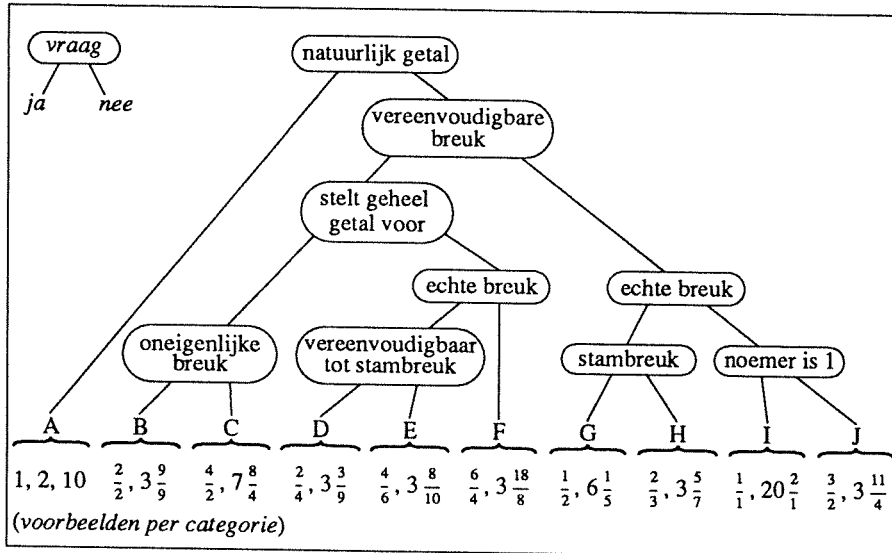
Alvorens de systematiek in de distributie van kenmerken van breuken in schoolboeken te kunnen analyseren, moeten die kenmerken eerst eenduidig gedefinieerd wor-

den. Er bestaat op dit gebied namelijk geen algemeen geaccepteerde terminologie. In figuur 14.1 is een overzicht gegeven van de termen zoals ze in de onderhavige studie zijn gebruikt. Uitgangspunt is de breuk  $\frac{v}{k}$ , met  $v, k \in \mathbb{N}^+$ , alvast vooruitlopend op de breuk als resultaat van de verdeling van een aantal voorwerpen over een aantal kinderen.

Term	Voorbeeld	Omschrijving
natuurlijk getal	1, 2, 3, 4	getal $\in \mathbb{N}^+$ ; dit zijn geen breuken; deze getallen zijn opgenomen in het overzicht vanwege sommen van het type ' $2 + 3\frac{1}{2} = \dots$ '
vereenvoudigbare breuk	$\frac{2}{2}, \frac{3}{6}, \frac{15}{5}$	de grootste gemene deler van $v$ en $k$ is groter dan 1
niet-vereenvoudigbare breuk	$\frac{3}{10}, \frac{2}{7}, \frac{5}{3}$	zie: vereenvoudigbare breuk
breuk stelt een geheel getal voor	$\frac{2}{2}, \frac{6}{3}, \frac{12}{4}$	$v$ is een echt veelvoud van $k$ , of $v$ en $k$ zijn gelijk ( $v$ is een echt veelvoud van $k$ als geldt dat $v$ een geheel aantal ( $> 1$ ) keren zo groot is als $k$ )
oneigenlijke breuk	$\frac{2}{2}, \frac{6}{6}, \frac{8}{8}$	$v$ en $k$ zijn aan elkaar gelijk
echte breuk	$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{7}{11}$	$v$ is kleiner dan $k$
onechte breuk	$\frac{2}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{2}$	zie: echte breuk
stambreuk	$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$	$v$ is gelijk aan 1
gemengd getal	$2\frac{3}{10}, 5\frac{2}{7}$	er gaat een geheel getal vooraf aan het breukdeel (in het uiteindelijke onderzoek is niet nagegaan of er systematische verschillen optreden in de distributie van het al dan niet een gemengd getal zijn van breuken in rekenboeken)

figuur 14.1 Terminologie voor de formele kenmerken van breuken

Met deze elementen, afkomstig uit boeken voor de lerarenopleiding, is een classificatie van breuken opgesteld, die overigens uitsluitend bedoeld is voor het onderzoek ten behoeve van het ITS-breken. Deze classificatie heeft geen didactische pretenties, en is evenmin geheel compleet: bijvoorbeeld kunnen breuken waarvan de teller of de noemer zelf weer een breuk is, niet worden ingedeeld. Uitgangspunt van de indeling is weer de breuk  $\frac{v}{k}$ , waarbij  $v, k \in \mathbb{N}^+$ . Figuur 14.2 toont het resultaat.



- categorie A:  $getal \in \mathbb{N}^+$
- categorie B:  $k > 1$  en  $v = k$
- categorie C:  $v = getal \cdot k$ , waarbij  $getal, k > 1$
- categorie D:  $k = getal \cdot v$ , waarbij  $getal, v > 1$
- categorie E:  $v < k$  en  $ggd(v,k) > 1$  en  $ggd(v,k) \neq v$   
(*ggd is: grootste gemene deler*)
- categorie F:  $v > k$  en  $ggd(v,k) > 1$  en  $ggd(v,k) \neq k$
- categorie G:  $v = 1$  en  $k \geq 2$
- categorie H:  $v \geq 2$  en  $k > v$  en  $ggd(v,k) = 1$
- categorie I:  $k = 1$
- categorie J:  $k \geq 2$  en  $v > k$  en  $ggd(v,k) = 1$

figuur 14.2 Classificatie van breuken, op grond van formele kenmerken

Elke categorie is wiskundig gekarakteriseerd, hetgeen het voordeel heeft dat de classificatie onmiddellijk bruikbaar is voor een geautomatiseerde analyse van de breuken uit de rekenboeken.

## 2 Rekenboekenonderzoek

Oorspronkelijk is het hier gepresenteerde rekenboekenonderzoek opgezet met het doel kennis te verwerven over opgaven voor het hoogste niveau van Eerlijk Verdelen, dat toen nog niet zijn beslag had gekregen. Omdat er destijds bij het ontwerp rekening gehouden werd met bewerkingen op breuken, is de opbouw binnen de rekenmethoden ten aanzien van de optelsommen met breuken geanalyseerd. Inmiddels is er het inzicht ontwikkeld, dat Eerlijk Verdelen beter beperkt kan blijven tot de ver-



deelactiviteit en het met breuken benoemen van partjes. Bewerkingen met breuken komen hierbij wel voor, maar dan alleen in de benoeming van de portie voor één kind; er wordt binnen het programma niet specifiek geoefend met bewerkingen op breuken. Desalniettemin wordt het uitgevoerde onderzoek hier gepresenteerd. Het resultaat ervan heeft namelijk zijn praktische weerslag gekregen bij het automatisch genereren van opgaven voor het onderdeel Snijmachines.

## 2.1 Materiaal

Er is binnen het onderzoek gebruik gemaakt van:

- de in paragraaf 1 gepresenteerde classificatie van breuken;
- een computerbestand met alle opgaven waarin breuken voorkomen, uit vier rekenmethoden die in veel scholen gebruikt worden;
- een speciaal voor dit onderzoek ontwikkeld computerprogramma, dat alle mogelijke breuken genereert binnen tevoren opgegeven restricties;
- een tweede computerprogramma, dat breuken indeelt aan de hand van de classificatie, en statistieken bijhoudt van de aantallen breuken per categorie.

Methoden	Naar Zelfstandig Rekenen	Operator Rekenen	Rekenen & Wiskunde	De Wereld In Getallen
Karakter	mechanistisch <sup>1</sup>	mechanistisch/ realistisch	realistisch	realistisch
Onderdelen per leerjaar	+ 2 takenboeken – antwoordenboek voor de leerling – hulpboek met correctieve herhalingsstof en verdiepingsstof – toetsenboek – handleiding	– handleiding + 10 werkboekjes + rekenkaarten – antwoordenboekjes (werkboekjes en toetsenboekjes)	+ 2 opdrachtenboeken – 2 allerlei boeken – 2 handleidingen – toetsenboeken	(voor in totaal acht leerjaren:) – groep 1 - 2 : ideeënboek en kopieerbladen + 11 rekenboeken – 12 handleidingen – 8 antwoordenboeken – 7 rekenwerkboeken
Aantal optelsommen met breuken	490	406	434	261

figuur 14.3 Overzicht van de rekenmethoden; een plus (+) markeert de onderdelen die zijn gebruikt voor de statistische analyse

## 2.2 Procedure

Ten behoeve van het onderzoek zijn vier rekenmethoden geselecteerd. Criterium voor selectie is in de eerste plaats het dekkingspercentage: de methoden moeten veel gebruikt worden op scholen. Daarnaast is rekening gehouden met de didactische typering van de methoden. De vier gekozen rekenmethoden zijn 'Naar Zelfstandig Rekenen', 'Operator Rekenen', 'Rekenen & Wiskunde' en 'De Wereld In Getallen'. Twee van de gekozen rekenmethoden zijn te karakteriseren als realistisch, dit zijn: 'Rekenen & Wiskunde' en 'De Wereld In Getallen'. 'Naar Zelfstandig Rekenen' is traditioneel, mechanistisch. De vierde methode, 'Operator Rekenen', kan het best gekarakteriseerd worden als een overgangsmethode, die eigenschappen bevat van zowel de mechanistische als de realistische didactische aanpak. In figuur 14.3 zijn deze methoden kort toegelicht. Van de vier methoden zijn die onderdelen geselecteerd, die door alle leerlingen mochten worden doorgewerkt. Deze onderdelen zijn in de figuur aangegeven met een plus (+).

Van de geselecteerde onderdelen zijn alle opgaven waarin een breuk voorkomt ingetypt in een computerbestand, zodat deze opgaven voor automatische bewerking gereed zijn. Uit dit computerbestand zijn alle opgaven geselecteerd waarin een optelling staat. De breuken die voorkomen in deze opgaven zijn door een speciaal voor dit doel ontwikkeld computerprogramma ingedeeld in de categorieën van de classificatie van paragraaf 1. Vervolgens is per rekenmethode voor elke categorie van de classificatie vastgesteld, hoeveel procent van het totale aantal breuken de betreffende categorie omvat.

Naast het bestand met de breukenopgaven uit de rekenboeken is er door de computer een tweede bestand met breukenopgaven gegenereerd. Dit bestand bevat alle mogelijke optelsommen met breuken waarvoor geldt:

- de teller varieert in 1 .. 18 ;
- de noemer varieert in 1 .. 18 ;
- vóór het breukdeel staat niets, of een 1 ;
- één van de termen van de optelsom mag 1 zijn, zonder breukdeel.

---

1 'Mechanistisch' is een aanduiding voor rekenmethoden, gebezigd door aanhangers van de realistische reken-wiskundetraditie. De mechanistische benadering wordt door Streefland (1988, p.20) gekenschetst als: "Het nastreven in het onderwijsleerproces van kwaliteiten als structuur, samenhang en inzicht, kenmerkend voor de structuralistische benadering, wordt in de mechanistische veronachtzaamd, dan wel volledig genegeerd ten gunste van de geval-na-geval-behandeling onder toename van de complexiteit. In iedere fase van het onderwijsleerproces ligt het einddoel vast, of beter, staat het einddoel voorop, namelijk het realiseren van het bij dat stadium passende algoritmische eindniveau. Het toepassen blijft — wat de breuken aangaat — beperkt tot het voltrekken van regels voor het vereenvoudigen van breuken, het omzetten van breuken  $> 1$  in gemengde getallen en omgekeerd, en het uitvoeren van de vier hoofdbewerkingen. (...)"

Op dit tweede bestand zijn dezelfde bewerkingen uitgevoerd als op het bestand met de optelsommen van de rekenboeken.

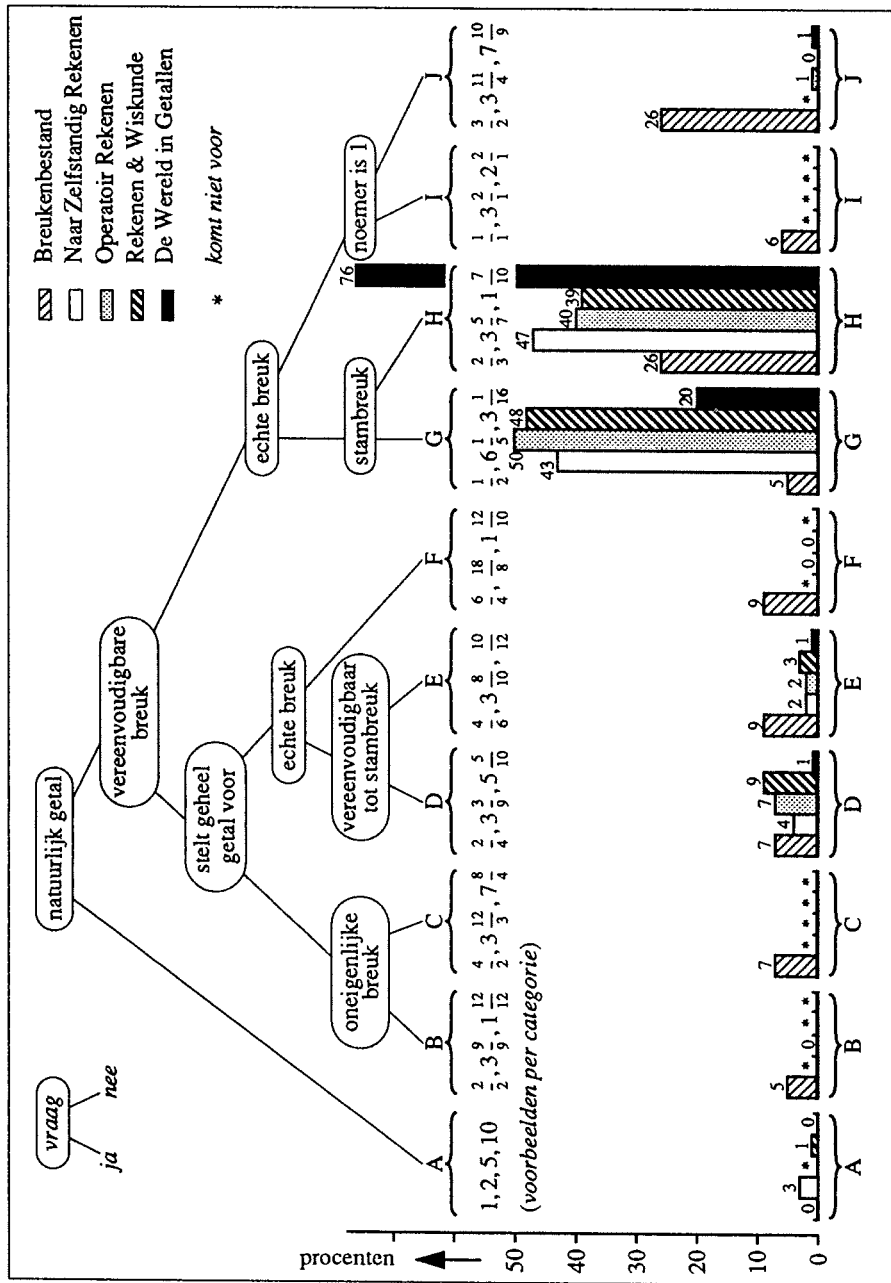
Het is bekend dat schoolse optelsommen vaak 'goed uitkomen'. Het is dus van belang om niet alleen de samenstellende delen te analyseren, maar ook de resultaten van de opgaven. Daarom is, geheel analoog aan de eerste analyse, nog een tweede analyse uitgevoerd, op de — door de computer uitgerekende — resultaten van de optelsommen. Voor het berekenen van het resultaat van een opgave is het volgende voorschrift gebruikt: in het geval van twee gelijknamige breuken wordt de noemer van het resultaat dezelfde als de noemer van de oorspronkelijke breuken; bij breukenparen waarin de ene noemer een echt veelvoud is van de andere, wordt de grootste noemer gekozen als de noemer van het resultaat; in alle andere gevallen (ook als de grootste gemene deler van de noemers groter is dan 1) wordt de noemer van het resultaat gelijk genomen aan het produkt van de beide noemers van het breukenpaar van de opgave.

### 2.3 Resultaten en interpretatie

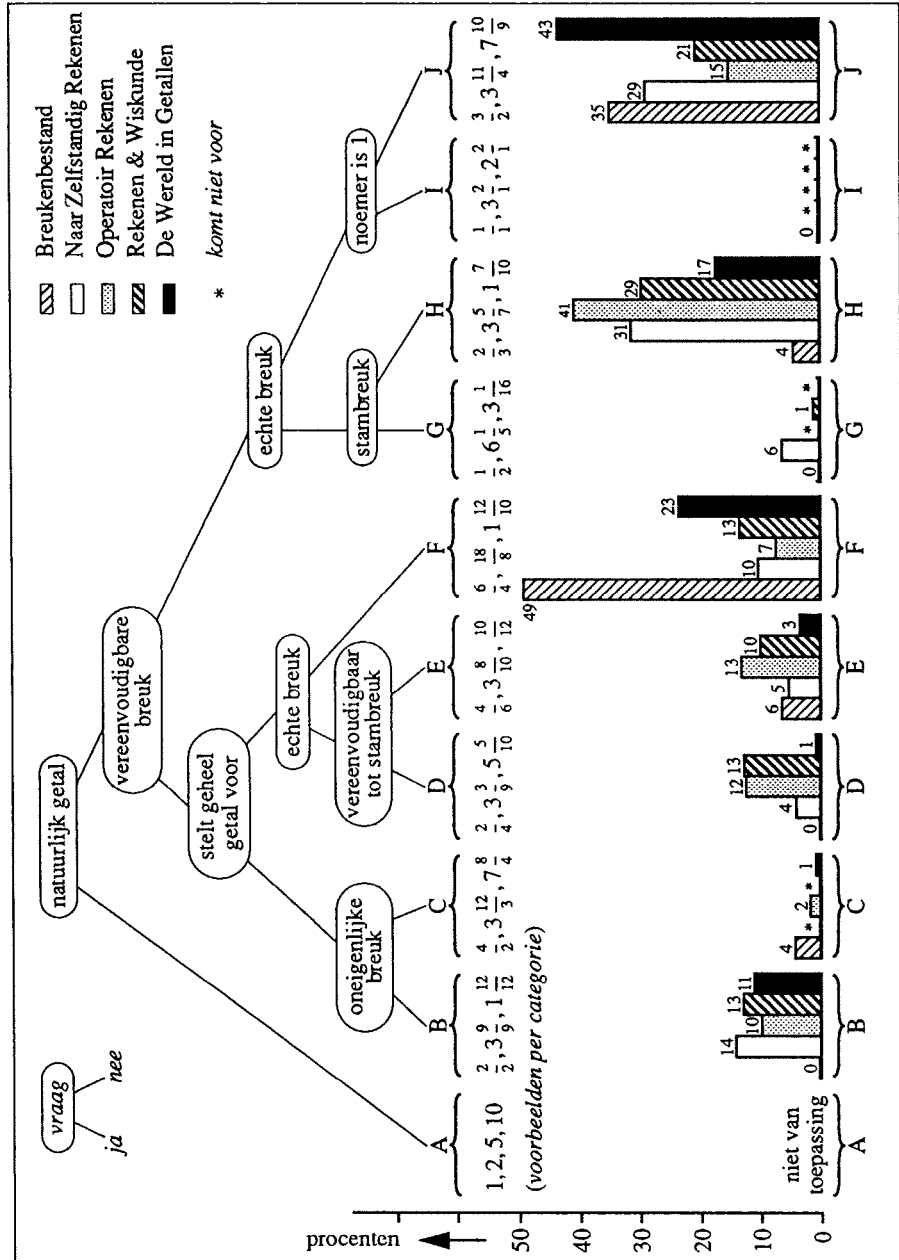
De resultaten van de beschreven analyses zijn weergegeven in de figuren 14.4 en 14.5. De eerste figuur geeft de distributie weer van de kenmerken van de breuken in de samenstellende delen van de optelsommen, de tweede figuur geeft de distributie weer van de kenmerken van de resultaten.

Het aantal verschillende opgaven dat de computer genereert binnen de gegeven restricties, bedraagt 421200. Het op deze wijze gegenereerde breukenbestand bevat een zeer groot aantal breuken vergeleken bij de totale aantallen opgaven in de onderzochte rekenboeken, namelijk zo'n 400 opgaven per methode. Het is nauwelijks voor te stellen dat de keuzen, die leergangontwikkelaars blijkbaar maken bij het samenstellen van lesmateriaal, aselekt zijn: ze schrijven niet 'zomaar' sommen op. Uit figuur 14.4 blijkt inderdaad, dat de distributie van kenmerken van breuken uit de vier methoden aanzienlijk verschilt van de kenmerkendistributie van alle mogelijke breuken uit het breukenbestand. Tevens blijkt, dat de verschillen tussen de methoden onderling klein zijn ten opzichte van de verschillen tussen de methoden enerzijds en het breukenbestand anderzijds.

Stambreuken komen in alle vier de methoden relatief veel vaker voor dan in het door de computer gegenereerde breukenbestand. De combinaties van kenmerken die leiden tot indeling van een breuk in één van de categorieën B, C, F en I komen niet of nagenoeg niet voor in de methoden (gemiddeld 0%); voor de categorieën A en J geldt vrijwel hetzelfde. Deskundigen van verschillende didactische tradities lijken het onderling eens te zijn dat het zinloos is om leerlingen breuken met zulke kenmerken voor te schotelen. Van de opgaven in het gegenereerde breukenbestand zou maar liefst de helft (in procenten:  $0 + 5 + 7 + 9 + 6 + 26 = 53\%$ ) in die categorieën vallen.



figuur 14.4 Distributie van kenmerken van breuken uit optelsommen



figuur 14.5 Distributie van kenmerken van breuken bij de resultaten van optelsommen

In figuur 14.5 is weergegeven hoe de kenmerkendistributie van de resultaten van de optelsommen is. Zoals te verwachten is, verschilt deze distributie aanmerkelijk van die van de eerste analyse. In het algemeen geldt weer, dat de verschillen tussen het breukenbestand en de schoolboeken aanzienlijk groter zijn dan de verschillen tussen de schoolboeken onderling. Voor de opgaven uit de rekenboeken geldt, dat de categorieën D, E en vooral B, F en J nu meer gevuld zijn, ten koste van H en vooral van G. Deze verschuiving is voorspelbaar, want van leerlingen wordt vaak verlangd dat ze 'de helen' uit het resultaat halen en de breuk zoveel mogelijk 'vereenvoudigen'. In termen van de classificatie betekent het dat de enige categorieën die traditioneel door leraren worden goedgekeurd A, G en H zijn. Breuken uit de categorieën B, C en I moeten herleid worden tot breuken uit de categorie A; D tot G; E tot H; F moet herleid worden tot H, of eventueel tot G; en J tot G of H. Uit figuur 14.5 blijkt, dat leergangontwikkelaars er in ruim 10% van de gevallen een resultaatbreuk met de waarde 1 uit laten komen (categorie B).

### 3 De opbrengst voor het ITS-breuken: het opgavenfilter

De resultaten die geboekt zijn bij het beschreven onderzoek kunnen niet zonder meer ingezet worden bij het automatisch genereren van opgaven door het ITS-breuken. Bij het maken van eerlijke verdelingen gaat het aanvankelijk immers om breuken als verdeel*resultaat*, en nog niet om het uitvoeren van *bewerkingen* met breuken. Toch geeft de specifieke distributie van kenmerken van breuken in de rekenboeken indirect een indicatie van het karakter van de verdeelactiviteit die door didactici als zinvol wordt ervaren. Typen breuken die door leergangontwikkelaars niet opgenomen worden in de lesstof, zouden bij voorkeur ook niet moeten ontstaan als gevolg van verdeelactiviteit, of althans niet zo vaak. Bij automatische opgavengeneratie dient hiermee rekening gehouden te worden.

Voor het ITS-breuken is daarom een computerprogramma ontwikkeld, het *opgavenfilter*, dat uit de initieel door de opgavengenerator samengestelde reeksen van opgaven die opgaven herkent en verwijdert die didactici zouden vermijden. Het opgavenfilter behoedt leerlingen voor automatisch aangemaakte opgaven, die weliswaar voldoen aan de criteria zoals die voortgekomen zijn uit de interviews met de didactici, maar die zij zelf toch nooit als opgave zouden voorleggen. De kennis die verworven is met het rekenboekenonderzoek leidt dus niet direct tot het genereren van nieuwe opgaven, maar krijgt de functie van controle achteraf.

De resulterende procedure voor het opstellen van opgavenreeksen wijkt niet fundamenteel af van de manier waarop ervaren didactici te werk gaan. Eerst wordt een plan opgesteld, waarbij in globale termen wordt aangegeven welke doelen bereikt zouden moeten worden, en binnen welke termijn. Vervolgens wordt een nadere uit-

werking gegeven van dit plan, in de vorm van een concrete opgavenreeks. Tenslotte wordt de aldus verkregen opgavenreeks nog eens doorgenomen, om na te gaan of er geen opgaven ingeslopen zijn die hun doel voorbij schieten.

### **Literatuur**

Voor de classificatie van de breuken en de terminologie van de eigenschappen van breuken is gebruik gemaakt van de Van Dale (1984), de terminologie van Woort en Meijer (1966), van Henfi (1986) en van de handleiding van Texas Instruments Galaxy Junior (1988).

---

## Hoofdstuk 15

# Leerlingen maken kennis met Eerlijk Verdelen

Johan Zuidema

Ten behoeve van de ontwikkeling van het ITS-breuken is met prototypen van Eerlijk Verdelen en het ITS-breuken exploratief onderzoek uitgevoerd met leerlingen van de basisschool. Dit onderzoek is primair gericht op het vergaren van kennis die direct toepasbaar is bij de verbetering van het ITS-breuken, en niet zozeer op het vergaren van breed inzetbare, generaliseerbare kennis. Door deze specifieke doelstelling heeft de opzet en uitvoering van het onderzoek een informeler karakter dan wordt voorgeschreven bij bijvoorbeeld effectmetingen: van voorgenomen werkwijzen is tijdens het onderzoek opzettelijk afgeweken, als veranderende omstandigheden dit wenselijk maakten. Het uitgevoerde onderzoek is niet puur observerend, maar deels ook participierend.

### 1 Het belang van schoolexperimenten en de reikwijdte ervan

Bij het ontwikkelen van complexe, kennisgebaseerde systemen blijkt het in de praktijk niet mogelijk om vooraf een volledige, valide specificatie van het beoogde systeem te geven. Voor het ontwikkelen van een dergelijk systeem wordt daarom vaak gekozen voor een exploratieve benadering, waarbij fijnkorrelige ontwerpbeslissingen pas in de loop van de realisatie van het systeem worden genomen. Ook de ontwikkeling van het ITS-breuken is op deze wijze uitgevoerd.

Het specificeren van educatieve computerprogramma's vereist een grotere mate van detail dan het ontwerp van traditioneel lesmateriaal. Vaak is er een reden om van de inrichting van traditioneel lesmateriaal af te wijken, vanwege de extra mogelijkheden van dynamische presentatie door de computer. Daarbij komt nog, dat de wijze waarop de leerstof door leerlingen wordt verwerkt vaak net iets anders is als er computers in het spel zijn, ook al is het beoogde didactisch doel hetzelfde. Er is daarom vooraf geen zekerheid over het didactisch effect van veel van de ontwerpbeslissingen. De keuzen die gemaakt worden voor de didactische invulling van het ITS-breuken moeten dan ook op school worden getoetst op hun doeltreffendheid.

Het belang van het doen van schoolexperimenten tijdens het ontwikkelen van educatieve software moet niet worden onderschat, maar andersom moeten de ontwikkelaars ook de beperkte reikwijdte van zulke experimenten in de gaten houden. Het on-



derzoek kent uitdrukkelijke grenzen voor wat betreft de generaliseerbaarheid van de conclusies.

Een eerste grens betreft de fijnmazigheid van het onderzoek. Een computerprogramma is op te vatten als de uitkristallisatie van een *verzameling* ontwerpbeslissingen. Bij programma's met een complexiteit als die van Eerlijk Verdelen of het ITS-breuken is die verzameling zo groot, dat het niet mogelijk is om binnen een redelijk tijdsbestek elke inhoudelijke of vormgevingsbeslissing afzonderlijk te onderzoeken.

Een tweede beperking van het onderzoek betreft de onderlinge afhankelijkheden tussen de implicaties van ontwerpbeslissingen. Het veranderen van één van de beslissingen kan gevolgen hebben voor de zinvolheid van de andere. Juist omdat Eerlijk Verdelen als microwereld intern sterk ineengrijpt, kan het wijzigen van één ontwerpbeslissing verregaande consequenties hebben.

Ten derde wordt gewezen op het probleem van de beïnvloeding van het te onderzoeken verschijnsel, juist dóór het te onderzoeken. De bedoeling van educatieve computerprogramma's is, dat ze op school gebruikt worden zonder tussenkomst van anderen. Als ontwikkelaars op school onderzoek doen, dan is de situatie die daarmee ontstaat lang niet in alle opzichten representatief voor de reële schoolpraktijk.

Tenslotte blijft het door het onderzoek verworven inzicht in eerste instantie noodgedwongen beperkt tot de functionaliteit van de software als autonoom didactisch middel, zonder dat het functioneel is ingebed in de reguliere lessen. Leraren zijn pas bereid om reguliere lessen door gecomputeriseerd onderwijs te vervangen als er enige garantie is dat er goede resultaten mee worden bereikt. Omdat leerlingen gedurende de experimenten de gewone lessen blijven volgen, treedt er interferentie op.

De grenzen van experimenteel onderzoek zorgen ervoor, dat het onmogelijk is om definitief uitsluitsel te krijgen over de kwaliteit van ontwerpbeslissingen — hoe lang er ook wordt onderzocht. De informatie die door een dergelijk onderzoek naar voren komt is echter uiterst waardevol. De ene keer leiden de resultaten tot een fijnere afstemming van details, de andere keer heeft de uitkomst tot gevolg dat een heel programma-onderdeel opnieuw ontworpen wordt. Er is tijdens het hele ontwikkeltraject evenwel een blijvend spanningsveld tussen de directe betrokkenheid van het op school werken en de reflectie erover achter het bureau. Alleen door van tijd tot tijd ook voldoende afstand te nemen van de schoolpraktijk ontstaat er een bruikbaar programma.

## 2 Experimenten met het prototype van Eerlijk Verdelen

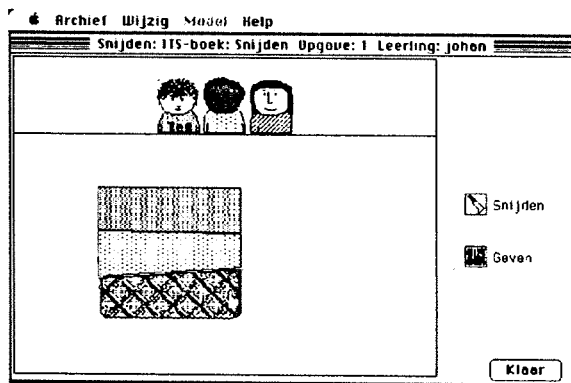
De eerste schoolexperimenten met een voorloper van Eerlijk Verdelen dateren van begin 1988; 35 leerlingen van de basisschool De Eendracht te Mijdrecht hebben één

of twee sessies met het programma gewerkt. De positieve resultaten van deze experimenten hebben geleid tot de beslissing om met de ontwikkeling van Eerlijk Verdelen door te gaan. Het was destijds de bedoeling om het toenmalige programma na enige kleine bijstellingen op de markt te brengen. Op dat moment was er nog geen sprake van een eventuele inbedding van Eerlijk Verdelen in een kennisgebaseerd systeem.

De eerste schoolexperimenten die van direct belang zijn voor de ontwikkeling van het ITS-breuken, zijn medio 1989 uitgevoerd, met inmiddels het tweede prototype van Eerlijk Verdelen. Dit prototype wijkt op relevante punten af van de in hoofdstuk 4 gepresenteerde versie. Daarom volgt er nu eerst een korte beschrijving, aan de hand van schermafdrucken van het programma.

### **Beschrijving van het prototype van Eerlijk Verdelen**

Het prototype van Eerlijk Verdelen waarmee in scholen is geëxperimenteerd draait op een *Apple Macintosh*-computer. Voor dit type computer is destijds gekozen, vanwege het superieure bedieningsgemak in vergelijking met andere computers. De basis van Eerlijk Verdelen is in dit prototype reeds herkenbaar: eerst de concrete verdeelactiviteit, vervolgens het werken met modellen en tenslotte het oefenen met de formele breuknotatie. Leerlingen hoeven heel weinig te lezen en nergens te typen: het programma is muisgestuurd. Figuur 15.1a-b geeft enkele schermafdrucken weer, op dezelfde schaal als de schermafdrucken in hoofdstuk 4.

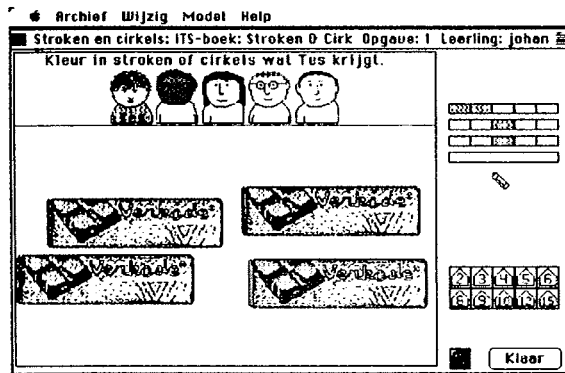


#### *Snijden*

- aantal voorwerpen: 1 of 2
- aantal kinderen: 2 .. 9
- soort: reep, wafel, taart

De voorwerpen op het scherm worden met het mes in stukken gesneden en vervolgens met de hand versleept naar de kinderen. Nadat alles op deze manier is uitgedeeld, en de leerling op 'Klaar' heeft geklikt, evalueert Eerlijk Verdelen het resultaat.

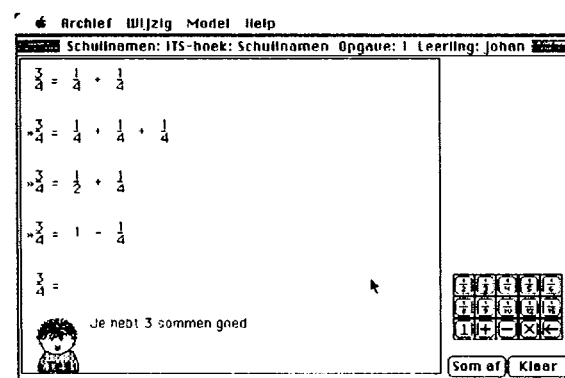
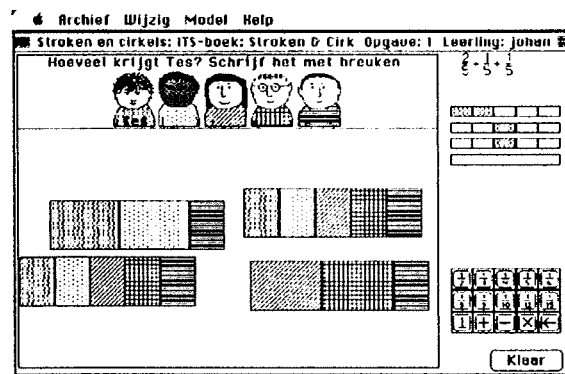
figuur 15.1a Het prototype van Eerlijk Verdelen



*Stroken & Cirkels*

- aantal voorwerpen: 1 .. 8
- aantal kinderen: 2 .. 9
- soort: pannekook, koekje, reep, limonade, stroopwafel, zuurstok, wafel
- snijmachines: 2 .. 6, 8 .. 10, 12, 15; 'alle-partjes-snijdend'
- modellen: cirkel, strook
- wel / geen breuknotatie

De voorwerpen op het scherm worden niet bewerkt. De leerling geeft in het model rechtsboven op het scherm aan wat de eerlijke portie is van Tes. Dat gaat met snijmachines (eerste afbeelding). De snijmachines snijden uitsluitend verticaal (bij strook als model) of vanuit het midden (bij cirkel als model). Na 'Klaar' voert Eerlijk Verdelen een animatie uit, waarmee de verdeling die gemaakt is in de modellen ook te zien wordt bij de voorwerpen, en beoordeelt het resultaat. Afhankelijk van de opgavespecificatie wordt de leerling dan nog gevraagd de portie van Tes in breuken te schrijven (tweede afbeelding).



*Schuilnamen*

- teller: kleiner dan noemer
- noemer: kleiner dan 16

De leerling wordt gevraagd equivalentierelaties van breuken te geven, in de afbeelding van  $\frac{3}{4}$ .

De beschikbare breuken zijn:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}$ , door een extra keer te klikken op dezelfde breuk wordt de teller telkens met 1 verhoogd.

figuur 15.1b Het prototype van Eerlijk Verdelen (vervolg)

De belangrijkste verschillen ten opzichte van de uiteindelijke versie van Eerlijk Verdelen zijn:

- er wordt gewerkt met modellen van voorwerpen, in plaats van met voorwerpen als modellen;
- er is een beperkte verzameling van snijmachines beschikbaar, die bovendien maar op één manier snijden: ze zijn uitsluitend ‘alle-partjes-snijdend’.

Er zijn voorts kleine en grote verschillen in presentatie van het programma op het scherm en in het bedieningsgemak.

### **Onderzoeksvragen**

Het doel van de schoolexperimenten met het prototype van Eerlijk Verdelen is om na te gaan of het een zinnige bijdrage levert aan het breukenonderwijs en op welke punten het programma bijgeschaafd kan worden.

### **Proefpersonen**

In totaal 37 leerlingen van de Fatima Jozefschool, een basisschool te Bussum, hebben aan het onderzoek meegewerkt: 6 leerlingen zijn afkomstig uit groep vier, 4 uit groep vijf, 2 uit groep zes, 18 uit groep zeven en 7 uit groep acht.

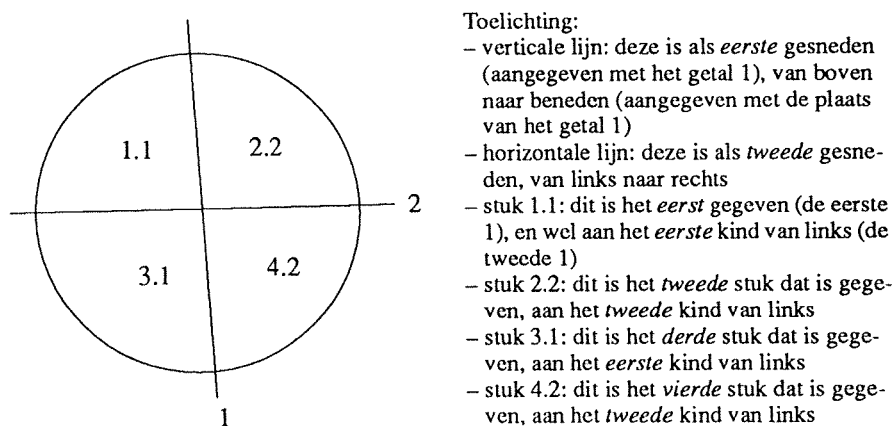
### **Procedure**

In een eerste periode van vier weken worden alle leerlingen van de groepen zeven en acht wekelijks per tweetal apart genomen om gedurende een half uur met Eerlijk Verdelen te werken. De computer staat dan klaar in het documentatiecentrum van de school, waar op dat moment geen andere lessen gegeven worden. In een tweede periode is enkele keren een paar duo's uit de groepen zes, vijf en vier achter de computer gezet, om te onderzoeken vanaf welke leeftijd het programma tot zinnige leeractiviteit aanleiding geeft.

Er is gekozen om de leerlingen in duo's te laten werken, vanwege het verwachte spontane overleg tussen hen; dergelijk overleg maakt hun overwegingen observeerbaar. Bovendien is het ook in de gewone schoolsituatie te verwachten dat leerlingen eerder met z'n tweeën dan alleen achter de computer zitten, eveneens vanwege het onderwijskundige voordeel van onderling overleg, maar ook vanwege de schaarste van computers op school.

Voorzover nodig krijgt elk duo de eerste keer instructie over het gebruik van de muis; in principe moet het programma zich verder zelf wijzen. De jongste leerlingen worden indien nodig letterlijk bij de hand genomen om de eerste opdracht samen met de onderzoeker uit te voeren. Om beurten werken de leerlingen de opdrachten af, waarbij ze afwisselend de eerste beurt krijgen.

De manier van snijden en uitdelen wordt door de onderzoeker systematisch bijgehouden in een logboek. Er is voor dit doel een manier van registreren ontworpen waarbij de plaats, de richting en de volgorde van het snijden wordt vastgelegd, evenals de volgorde van het uitdelen van de ontstane stukken, en aan welke kinderen ze uitgedeeld zijn. Deze manier van registreren is geïllustreerd in figuur 15.2.



Toelichting:

- verticale lijn: deze is als *eerste* gesneden (aangegeven met het getal 1), van boven naar beneden (aangegeven met de plaats van het getal 1)
- horizontale lijn: deze is als *tweede* gesneden, van links naar rechts
- stuk 1.1: dit is het *eerste* gegeven (de eerste 1), en wel aan het *eerste* kind van links (de tweede 1)
- stuk 2.2: dit is het *tweede* stuk dat is gegeven, aan het *tweede* kind van links
- stuk 3.1: dit is het *derde* stuk dat is gegeven, aan het *eerste* kind van links
- stuk 4.2: dit is het *vierde* stuk dat is gegeven, aan het *tweede* kind van links

figuur 15.2 Systematische registratie van het snijden en uitdelen (handmatig)

Voorts schrijft de onderzoeker zoveel mogelijk verbalisaties van leerlingen op. Als daartoe aanleiding bestaat, vraagt de onderzoeker aan de leerling waarom hij de opdracht op een bepaalde manier uitgevoerd heeft, of het ook anders kan, enzovoort. Soms treedt de onderzoeker corrigerend op ten opzichte van de beoordeling door Eerlijk Verdelen, als deze te streng dan wel te soepel blijkt: als een leerling zich hierdoor frustrereert, nuanceert de onderzoeker het oordeel van de computer.

### Resultaten

Geen van de leerlingen uit de groepen zeven en acht blijkt moeilijkheden te hebben met de bediening van het programma. De bedoeling van het programma en de betekenis van de iconen blijkt voor de leerlingen grotendeels voor zichzelf te spreken. Ook de jongste leerlingen hebben geen moeite met de bediening van het programma, met dien verstande dat het lezen, zelfs van een enkel woordje, nogal eens op moeilijkheden stuit. Per sessie van een half uur zijn door elk van de twee leerlingen zo'n vijf tot acht opgaven gemaakt.

Het laten werken van leerlingen in duo's blijkt een positief effect te hebben. De ene keer leidt de oplossing van de één tot een zo precies mogelijke kopie ervan door de ander — imiteren is echter moeilijk als het origineel niet in beeld blijft; een andere keer stimuleert de oplossing van de één de ander tot het vinden van een alternatieve manier van snijden en geven.

In het leerlingenwerk is bij de experimenten een grote diversiteit van verdeelmannieren naar voren gekomen. Bij het eerste onderdeel, Snijden, worden door vrijwel alle leerlingen goede oplossingen geconstrueerd. De handigheid van de oplossingen loopt echter sterk uiteen. De verschillende manieren van verdelen die in het logboek zijn genoteerd, hebben de basis gevormd voor het opstellen van de classificatie van verdeelmannieren die gehanteerd wordt door de diagnostische expert van het ITS-breken (zie hoofdstuk 10).

Het werken met Eerlijk Verdelen blijkt snel tot abstracties te leiden. Leerlingen stellen zich in het begin het snijden van voorwerpen heel concreet voor. Na enige tijd wordt er door de leerlingen echter geen enkele aandacht meer geschonken aan de afgebeelde voorwerpen; ze abstraheren volledig van het soort etenswaar dat ze snijden, en bekommeren zich nog uitsluitend over de manier van verdelen. In figuur 15.3 zijn twee manieren van een chocoladereep snijden weergegeven.



figuur 15.3 Een reep als concrete reep gesneden, en een reep als abstract voorwerp gesneden

De linkse manier van snijden is typerend voor een beginner. “Waarom snijd je zó?” “Omdat die in blokjes *moet*, het is toch een reep!” Twee opgaven later snijdt dezelfde leerling zoals rechts is weergegeven, zonder commentaar.

Leerlingen leven zich heel snel in de microwereld van Eerlijk Verdelen in. Ook in het taalgebruik van de leerlingen is dit te merken. Aanvankelijk is alleen de uiteindelijke verdeling eerlijk of niet: “Die moet je wel eerlijk vinden.” of “Dat zal je wel weer niet eerlijk vinden, hè?”. Later maken de leerlingen al tijdens het snijden opmerkingen, soms al bij de eerste snede: “Dat is een oneerlijke *streep*.”, “Die gaat niet eerlijk.”. Hieraan is te merken dat leerlingen de verdeling hoe langer hoe meer *plannen*. Ze voeren de verdeling eerst mentaal uit — het maken van de verdeling op het computerscherm is dan nog een kwestie van uitvoerend handelen.

Voor de meeste leerlingen blijkt de moeilijkheidsgraad van de opgaven acceptabel, temeer daar iedere leerling zijn eigen interpretatie geeft aan een opgave: als het een gemakkelijke opgave is denkt hij meer na over een handige of juist een heel exotische verdeling, bij een moeilijke opgave is hij al blij als hij het tot een goed eind brengt. Uit de observaties blijkt verder, dat leerlingen, juist naarmate ze meer overwicht krijgen op de opgaven, van tijd tot tijd met opzet fouten gaan maken. Dat gebeurt dan om de grenzen van de beoordelingscapaciteit van Eerlijk Verdelen te onderzoeken. Het aantal goed of fout gemaakte opgaven zegt hierdoor niet zoveel over het niveau van leerlingen; de manier waarop verdeeld wordt des te meer.

Leerlingen geven zelf vaak vrij direct aan welke aanpassingen van de vormgeving wenselijk zijn. Een paar voorbeelden:

- “Je kan geen Mercedes-teken maken.” — inkepingen zijn niet mogelijk bij Snijden;
- “Die staat verkeerd, hoe kan je gummen?” — het *pull-down*-menu dat beschikbaar is onder ‘Wijzig’ (zie figuur 15.1a-b) blijkt geen van de leerlingen uit zichzelf te vinden;
- ‘Help’ wordt nooit gebruikt, er wordt ook zelden gevraagd om hulp;
- teksten worden niet of nauwelijks gelezen;
- leerlingen begrijpen bij Stroken & Cirkels niet, waarom ze in de modellen moeten snijden en kleuren, en niet in de voorwerpen zelf.

### **Consequenties**

De schoolexperimenten met het prototype van Eerlijk Verdelen hebben geleid tot een tweesplitsing in het ontwikkelingsonderzoek. In de eerste plaats is ernaar gestreefd om nu dan toch zo snel mogelijk te komen tot een afgerond computerondersteund onderwijsprogramma Eerlijk Verdelen. Daarnaast is het idee ontstaan om Eerlijk Verdelen in te bedden in een intelligente onderwijsomgeving, hetgeen uiteindelijk geresulteerd heeft in het ITS-breuken. Er zijn inhoudelijke argumenten voor voortdurende bijstellingen van Eerlijk Verdelen gedurende het ITS-project: een goede interface is voor de leerlingen van wezenlijk belang. Het ontwerp ervan wordt niet alleen gestuurd door esthetische overwegingen, maar vooral door de ontwikkelende cognitieve theorie.

## **3 Experimenten met het ITS-breuken**

Na de eerste schoolexperimenten met de prototypen van Eerlijk Verdelen, is er ruim anderhalf jaar niet meer systematisch op school geëxperimenteerd. In die periode is het eerste prototype van het ITS-breuken geïmplementeerd en is het basisprogramma Eerlijk Verdelen ontwikkeld voor de Comenius-computer. Omdat dit laatste langer heeft geduurd dan oorspronkelijk is voorzien, is er geen gelegenheid geweest om het — ingrijpend vernieuwde — Eerlijk Verdelen los van het ITS-breuken op school uit te proberen. De experimenten waarvan hierna verslag wordt gedaan betreffen daarom het volledige systeem.

### **Onderzoeksvragen**

Het doel van de schoolexperimenten met het ITS-breuken is, om na te gaan of het technisch mogelijk is om het systeem op school te laten functioneren, of het zonder ingrijpen van buitenaf mogelijk is om het ITS-breuken opgaven te laten genereren

die het leerproces sturen, en om te onderzoeken welke bijstellingen aan het systeem wenselijk zijn.

### **Proefpersonen**

Er zijn verschillende experimenten uitgevoerd. Het eerste experiment is gedaan met 16 leerlingen uit verscheidene brugklassen van College De Klop te Utrecht. Alle andere experimenten zijn uitgevoerd met de 13 leerlingen uit groep acht van de Floris Evers basisschool, eveneens te Utrecht.

### **Procedure**

Begin september 1991 is op College De Klop een *try-out* geweest van het ITS-breuken, die met name bedoeld was als technische systeemtest. Het basisprogramma werkte op een Comenius-computer, die via een modem en een telefoon in verbinding stond met het Freudenthal Instituut, waar de intelligente componenten van het systeem draaiden op een *SUN-SPARC*-werkstation. Vanwege de doelstelling van dit experiment is er voor gekozen om met wat oudere leerlingen te werken. Binnen één week hebben alle deelnemende leerlingen tenminste één keer ongeveer veertig minuten gewerkt met het ITS-breuken.

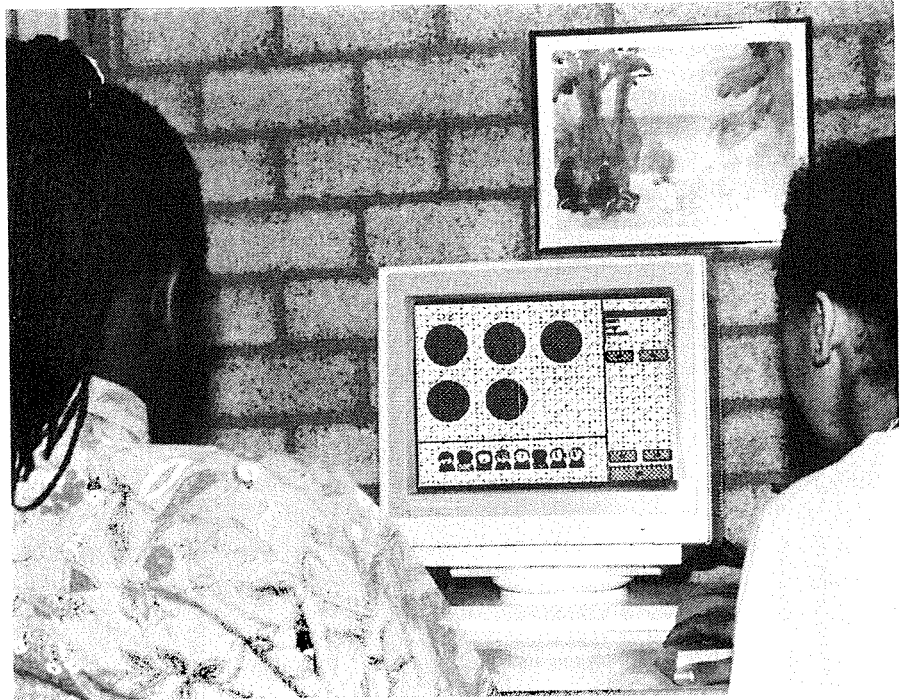
Vanaf de tweede helft van september 1991 is enkele malen geëxperimenteerd op de Floris Evers basisschool. Deze experimenten richtten zich, sterker dan de *try-out*, op de didactische onderzoeksvragen. De leerlingen zijn per tweetal apart genomen om met het ITS-breuken te werken.

Alle leerlingen maakten eerst kennis met het programma door te oefenen met Snijden & Geven. Ze werkten hier een vaste rij opgaven af. Vervolgens hebben de onderzoekers zelf een korte klassikale les gegeven, om Snijmachines te introduceren. Aan de hand van enkele eenvoudige huishoudelijke instrumenten, een eiersnijder en een appelsnijder (zie figuur 4.3), is het voordeel uitgelegd van het gebruik van speciaal gereedschap voor het maken van verdelingen.

Na deze klassikale introductie hebben de leerlingen in duo's gewerkt met het onderdeel Snijmachines. De opgaven worden dan volledig automatisch gegenereerd door het ITS-breuken. De leerlingen maken om beurten een opgave. Er wordt in deze versie van het ITS-breuken voor een duo slechts één didactisch plan opgesteld en slechts één leerlingmodel opgebouwd. Het zou weinig moeite kosten om de voordeelingen van elk van de leerlingen te modelleren, maar dat heeft alleen zin als de didactische expert voor elk van de leerlingen van één duo een individueel didactisch plan kan opstellen, zodanig dat de beide plannen toch een coherent geheel vormen. Dit is nog niet onderzocht.

Er is eerst gewerkt met dezelfde configuratie als die op College De Klop is gebruikt; later is gewerkt met een opstelling waarbij alle computers op school stonden.





*figuur 15.4* Basisschoolleerlingen aan het werk met het ITS-breuken

De experimenten met het ITS-breuken zijn afgerond met enkele sessies in juni 1992, waarbij leerlingen van de Floris Evers basisschool naar het Freudenthal Instituut zijn gehaald om daar met het programma te werken. De laatst geïmplementeerde versie waarmee toen is geëxperimenteerd, is beschreven in de delen II en III van dit boek.

#### **Resultaten — algemeen**

Tijdens de *try-out*, op College De Klop, lukte het met kunst- en vliegwerk om het systeem technisch in de lucht te houden. Naar aanleiding van dit experiment zijn er tal van verbeteringen aangebracht, met name in de protocollen voor de verbinding.

Tijdens de experimenten op de Floris Evers basisschool bleken de technische problemen overwonnen. De aandacht kon vanaf dat moment volledig gericht worden op de didactische onderzoeksvragen.

Alle leerlingen werkten de vaste rij opgaven met Snijden & Geven af, zonder daar moeite mee te hebben. Na de klassikale introductie van Snijmachines stapten de leerlingen over op dit tweede onderdeel van Eerlijk Verdelen — toen de leerlingen weer achter de computer zaten noemden ze de ‘6-snijdende’ machine nog steeds de eiersnijder en de ‘8-snijdende’ machine de appelsnijder.

De didactische invulling van het ITS-breuken voor het onderdeel Snijmachines was

aanvankelijk weinig subtiel. In de eerste experimenten was het voornamelijk de bedoeling om te onderzoeken of er didactisch gestuurd kon worden door het geven van toegespitste opgaven. Het laten toepassen van verschillende verdeelmethoden lukte inderdaad, maar werd soms afgedwongen door 'wurgsommen' waarbij een zeer beperkte verzameling snijmachines, uitsluitend van het type 'één-partje-snijdend', ter beschikking gesteld werd.

Sommige leerlingen begrepen niet, dat bij herhaald gebruik van de 'één-partje-snijdende' machines de afgesneden stukken telkens kleiner werden. Naar aanleiding van deze ervaring is Eerlijk Verdelen bijgesteld: inmiddels wordt met stippellijnen feed-forward gegeven als er 'één-partje-snijdende' machines worden gebruikt (zie figuur 4.5).

Bij vrije opgaven proberen leerlingen elkaar soms het leven zuur te maken door een zo moeilijk mogelijke opgave te creëren, die de andere leerling dan moet zien op te lossen. Het opstellen van 'de lastigste opgave' leidt tot felle discussies tussen de leerlingen. Er zijn natuurlijk ook mildere leerlingen, die gemakkelijke opgaven klaarzetten voor hun klasgenoot.

In de loop van het schooljaar 1991-1992 zijn er vele aanpassingen geweest, aan alle componenten van het ITS-breuken. Naar aanleiding van de ervaringen op school en op grond van de interviews met deskundigen op het gebied van de rekendidactiek, is de didactische expert inhoudelijk volledig opnieuw ontworpen. Het ITS-breuken functioneerde hoe langer hoe beter, en het basisprogramma Eerlijk Verdelen kristalliseerde uit tot zijn definitieve vorm.

In het hierna volgende wordt van twee duo's een deel van het verloop van één sessie gepresenteerd, met de laatst geïmplementeerde versie van het ITS-breuken.

### **Resultaten — twee voorbeelden**

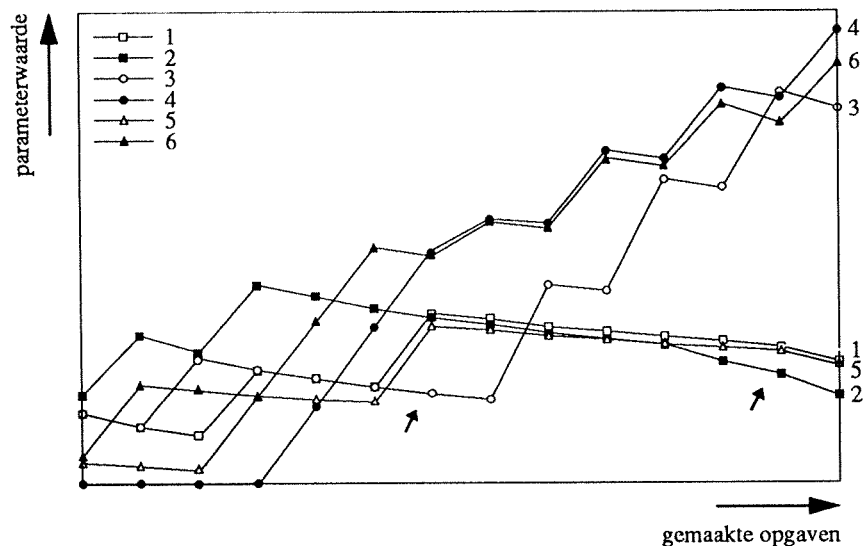
Het eerste duo, dat al enige tijd aan het werk is, heeft zojuist een vrije opgave gemaakt, ingevuld als '9 rechthoeken verdelen over 12 kinderen'. Op basis van de gegevens die het leerlingmodel verschaft, stelt de didactische expert een plan op. Met dit plan wordt geen stimulans voor een specifieke verdeelwijze gegeven. Het didactische doel Afwisseling krijgt de hoogste prioriteit. De verdeelsituaties die met dit plan worden aangeboden, zijn:

- situaties:      2 cirkels verdelen over 5 kinderen
- 2 stroken verdelen over 8 kinderen
- 5 vierkanten verdelen over 6 kinderen
- 2 rechthoeken verdelen over 3 kinderen
- 2 cirkels verdelen over 6 kinderen
- ? voorwerpen verdelen over ? kinderen

Bij deze verdeelsituaties zijn telkens alle snijmachines beschikbaar, zowel 'één-partje-snijdend' als 'alle-partjes-snijdend'.

Tijdens de uitvoering van dit plan voert de diagnostische expert een analyse van het leerlingwerk uit. Het leerlingmodel verwerkt de resultaten van deze analyse in waarden voor de zes parameters die de beheersing van de afzonderlijke verdeelmethoden beschrijven. In figuur 15.5 is het verloop van deze parameterwaarden grafisch weergegeven.

De eerste (kolom) parameterwaarden zijn afgeleid uit de resultaten van opgaven van voorafgaande plannen. De zes volgende waarden per parameter corresponderen met de resultaten van de opgaven van het hierboven gepresenteerde didactische plan. Tijdens de uitvoering door het duo van de laatste, vrije opgave van het plan — ingevuld als '5 stroken verdelen met 7 kinderen' — stelt de didactische expert een nieuw plan op; dit is in de figuur aangegeven met een pijltje.



figuur 15.5 Verloop van de parameterwaarden voor de beheersing van verdeelmethoden — duo 1

De didactische expert constateert, dat, gezien het doel Gelijkmatigheid, het verdelen volgens type 3 iets achterblijft in vergelijking met andere verdeelmethoden. De didactische expert besluit dan ook om het verdelen volgens type 3 zwak te stimuleren. Het gegenereerde plan heeft de volgende vorm:

- situaties:
- 5 cirkels verdelen over 8 kinderen
  - 3 stroken verdelen over 4 kinderen
  - 6 rechthoeken verdelen over 8 kinderen

- 7 rechthoeken verdelen over 8 kinderen
- 4 cirkels verdelen over 6 kinderen
- ? voorwerpen verdelen over ? kinderen

Bij deze verdeelsituaties zijn telkens alle snijmachines beschikbaar, zowel 'één-partje-snijdend' als 'alle-partjes-snijdend'.

Na het punt waarop met de uitvoering van dit plan is gestart, laat figuur 15.5 een duidelijke stijging zien in de parameterwaarde van het verdelen volgens type 3: het beoogde effect is bereikt (tenminste voor één van de leerlingen). Na het doorwerken van dit plan stelt de didactische expert opnieuw een plan op voor het duo, waarvan binnen deze sessie nog slechts één opgave is gemaakt.

Een ander duo komt eveneens aan het einde van een plan met een vrije opgave, door hen ingevuld als '6 cirkels verdelen over 8 kinderen'. Ook voor dit duo wordt door de didactische expert een plan opgesteld, waarbij de module Afwisseling de hoogste prioriteit heeft: er wordt weer geen specifieke verdeelmanier gestimuleerd. De opgaven van dit plan zijn:

- situaties: 2 cirkels verdelen over 5 kinderen
- 2 stroken verdelen over 4 kinderen
- 5 vierkanten verdelen over 6 kinderen
- 2 rechthoeken verdelen over 3 kinderen
- 2 cirkels verdelen over 6 kinderen
- ? voorwerpen verdelen over ? kinderen

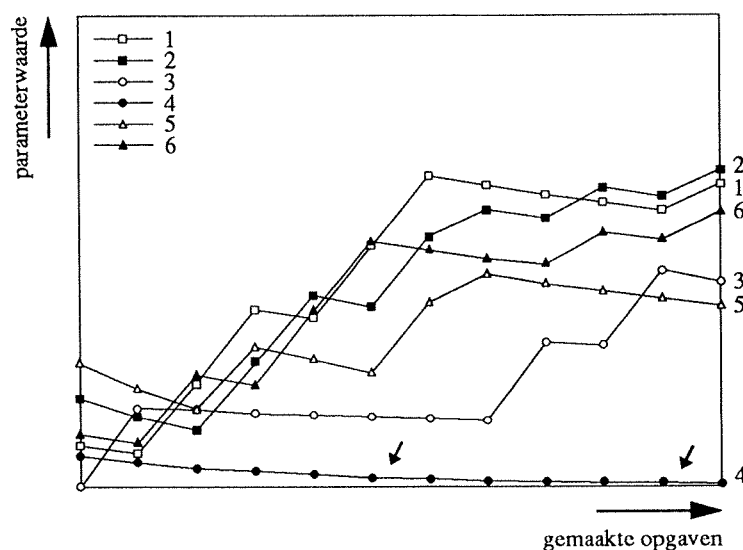
Bij deze verdeelsituaties zijn telkens alle snijmachines beschikbaar, zowel 'één-partje-snijdend' als 'alle-partjes-snijdend'.

In figuur 15.6 (op de volgende pagina) is het verloop van de waarden van de zes parameters voor dit duo weergegeven. De eerste parameterwaarden zijn weer afgeleid uit de resultaten van de opgaven van voorafgaande plannen. De zes volgende waarden corresponderen met het bovenstaande plan. Tijdens de uitvoering van de laatste, vrije opgave van het plan stelt de didactische expert een nieuw plan op; dit is in de figuur weer aangegeven met een pijltje.

De didactische expert besluit op basis van deze gegevens van het leerlingmodel om het verdelen volgens type 4 zwak te stimuleren, en genereert de volgende opgaven:

- situaties: 3 cirkels verdelen over 4 kinderen
- 4 stroken verdelen over 5 kinderen
- 7 vierkanten verdelen over 8 kinderen
- 8 rechthoeken verdelen over 9 kinderen
- ? voorwerpen verdelen over ? kinderen

Bij deze verdeelsituaties zijn telkens alle snijmachines beschikbaar, zowel 'één-partje-snijdend' als 'alle-partjes-snijdend'.



figuur 15.6 Verloop van de parameterwaarden voor de beheersing van verdeel-  
manieren — duo 2

In figuur 15.6 is te zien, dat het stimuleren van het verdelen volgens type 4 niet heeft geleid tot een verhoging van de betreffende parameterwaarden.

Overigens is het opmerkelijk dat de beheersing van de verdeelmanieren bij deze twee duo's zo heel anders is. Het gemiddelde van de uiteindelijke hoogten van de parameterwaarden verschilt tussen de duo's niet zoveel, maar de distributie ervan voor de verschillende verdeelmanieren loopt sterk uiteen. Het leerlingmodel blijkt goed in staat om te differentiëren tussen de twee duo's.

### Resultaten — het opgavenfilter

Het opgavenfilter, dat in het vorige hoofdstuk is beschreven, is bij alle ongeveer 2000 opgaven die er gegenereerd zijn tijdens de experimenten met de laatst geïmplementeerde versie van het ITS-breuken toegepast. Ruim 20% van deze opgaven is door het filter verworpen. Het was te verwachten dat het opgavenfilter tussen 0% en 53% van de gegenereerde opgaven zou verwerpen, afhankelijk van de kwaliteit van de didactische kennis van het systeem. Bij een kennisloze opgavengenerator, die willekeurig opgaven zou putten uit de verzameling van alle mogelijk door Eerlijk Verdelen aan te bieden opgaven, zou 53% worden afgekeurd — zo blijkt uit het in het kader van het ITS-project uitgevoerde rekenboekenonderzoek. Als het opgavenfilter zelden tot nooit gegenereerde opgaven afkeurt, dan komt de kennis van de didactische expert overeen met de kennis die in rekenboeken ingebed is. Het feit dat ruim 20% van de gegenereerde opgaven door het opgavenfilter verworpen is, geeft

## Experimenten met het ITS-breken

---

aan dat de didactische expert al veel kennis heeft over het karakter van didactisch wenselijke opgaven, maar dat die kennis nog uitgebreid kan worden.

### ***Literatuur***

Hennessy, O'Shea, Evertsz en Floyd (1989) en Dillebourg (1991) benadrukken het belang van een goede interface bij intelligente onderwijssystemen.

---

# V

## Exploratieve systeemontwikkeling

*Deel V gaat over technische aspecten van het ontwikkelproces dat aan de totstandkoming van het ITS-breuken ten grondslag ligt. Bij aanvang van het ITS-project zijn de didactische uitgangspunten duidelijk; er is op dat moment echter onvoldoende inzicht in hoe deze uitgangspunten hun weerslag kunnen vinden in een programma. Het is vanwege de complexiteit van het voor ogen staande systeem onmogelijk om het op voorhand gedetailleerd te specificeren. Voor de systeemontwikkeling is daarom gebruik gemaakt van een exploratieve methode, waarbij het ITS-breuken uitgaande van een eerste, eenvoudige implementatie stapsgewijs uitgebreid en verfijnd wordt. Experimenten met tussentijdse versies zijn telkens de leidraad voor bijstellingen van het systeem. Hoofdstuk 16 licht de in het project gevolgde methode van systeemontwikkeling toe.*

*Hoofdstuk 17 gaat over de technische ontwikkelomgeving die bij de realisatie van het ITS-breuken wordt gebruikt. Er wordt gebruik gemaakt van een doelcomputer, een ontwikkelmachine, van programmeertalen en van additionele ontwikkelsoftware. Het is van belang de ontwikkelomgeving met zorg te kiezen, omdat deze mede bepalend is voor de kwaliteit van het uiteindelijk resulterende systeem. In het geval van het ITS-breuken ligt de doelmachine voor de interface vast, door de computerstandaard voor de basisscholen. De keuze van de overige onderdelen van de technische ontwikkelomgeving is gericht op maximale vrijheid voor de ontwikkelaars van het ITS-breuken.*

<b>16</b>	<b>Ontwikkelmethode bij exploratief onderzoek</b>	<b>195</b>
	<i>Linda van der Gaag</i>	
<b>17</b>	<b>Technische ontwikkelomgeving</b>	<b>201</b>
	<i>Wim van Velthoven</i>	

---

## Hoofdstuk 16

# Ontwikkelmethode bij exploratief onderzoek

Linda van der Gaag

Het ITS-breuken is een omvangrijk en complex systeem, waaraan gedurende ruim drie jaar door een team van ontwikkelaars is gewerkt. Het ontwikkelen van een systeem van een dergelijke omvang en complexiteit vereist een gestructureerde aanpak om de realisatie van het beoogde eindproduct te kunnen garanderen. Er zijn verschillende methoden voor gestructureerde systeemontwikkeling voorhanden. In het ITS-project is gebruik gemaakt van een methode, die aansluit bij het verkennende karakter van het ontwikkelingsonderzoek: er is gekozen voor toepassing van de exploratieve ontwikkelmethode, rekening houdend met de fasering van het traditionele *software life-cycle model*.

### 1 Methoden voor systeemontwikkeling

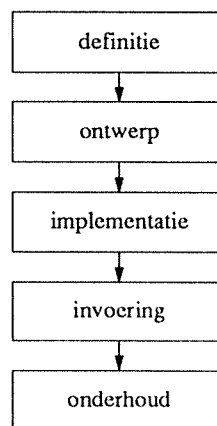
Een in omvang beperkt programma wordt meestal door één programmeur ontwikkeld, die alle details ervan kan overzien. Voor zo'n programma wordt geen uitgebreid gedocumenteerd ontwerp gemaakt: zelfs bij een informeel ontwerp blijft het overzicht behouden en zijn eventuele wijzigingen eenvoudig te realiseren. Omvangrijker systemen laten een dergelijke benadering niet toe: het is onmogelijk voor een individuele programmeur om alle details van het ontwerp en de implementatie te overzien. Bovendien zal omwille van de ontwikkelsnelheid vaak een team van programmeurs aan hetzelfde systeem werken. Dan is een gestructureerde aanpak van specificatie, ontwerp en implementatie onontbeerlijk en wordt zorgvuldige documentatie van elke stap in het ontwikkelproces essentieel. Deze inzichten hebben geleid tot onderzoek naar methoden voor systeemontwikkeling, de *software engineering*.

De problematiek rond de ontwikkeling van omvangrijke software-systemen kwam in de jaren zestig indringend naar voren met de introductie van een nieuwe generatie computers, die de ontwikkeling van grotere en complexere systemen mogelijk maakte. De eerste ervaringen met de ontwikkeling van dergelijke systemen lieten zien, dat de methoden voor systeemontwikkeling die gebruikt werden voor kleinere systemen niet eenvoudigweg opschaalbaar waren tot methoden voor de ontwikkeling van grotere systemen. Systemen werden vaak jaren te laat opgeleverd en hadden dan aanzienlijk meer gekost dan oorspronkelijk begroot; bovendien bleken de systemen slecht onderhoudbaar. De software-crisis was een feit.



Het onderzoek op het gebied van de *software engineering* heeft inmiddels vele nieuwe inzichten in het ontwerpen en implementeren van omvangrijke systemen opgeleverd die geleid hebben tot nieuwe methoden voor systeemontwikkeling. Desalniettemin blijft het ontwikkelen van software-systemen moeilijk.

De bekendste en meest toegepaste methode voor systeemontwikkeling is het *software life-cycle model*. Deze methode is gebaseerd op het idee dat de ontwikkeling van een systeem dient te verlopen in een aantal fasen, die in essentie strikt gescheiden zijn, en die na elkaar worden uitgevoerd. Elke fase wordt afgerond met een voor die fase specifiek document; pas als het document van de voorgaande fase gereed is, wordt met de volgende fase van de systeemontwikkeling begonnen. Het *software life-cycle model* kent vijf basisfasen, die zijn weergegeven in figuur 16.1.



figuur 16.1 Fasering van de systeemontwikkeling volgens het *software life-cycle model*

In de *definitiefase* van de systeemontwikkeling worden de eisen geïdentificeerd waaraan het toekomstige systeem moet voldoen: in overleg met de gebruikersdoelgroep worden de taken vastgesteld die het systeem moet gaan uitvoeren, en worden de omstandigheden geanalyseerd waaronder het systeem moet gaan functioneren.

Na de definitie van het te ontwikkelen systeem wordt met de *ontwerpfase* begonnen. Deze fase bestaat uit twee deelfasen: het *conceptuele* ontwerp en het *fysieke* ontwerp. In het conceptuele ontwerp wordt het te ontwikkelen systeem in deelsystemen gedecomposeerd. Bij deze decompositie wordt onafhankelijkheid tussen de onderscheiden deelsystemen nagestreefd, opdat deze later in de systeemontwikkeling los van elkaar, en eventueel door verschillende programmeurs, geïmplementeerd kunnen worden. De relaties tussen de deelsystemen definiëren de architectuur van het toekomstige systeem. In het fysieke ontwerp worden de taken van de afzonderlijke

deelsystemen gedetailleerd uitgewerkt in een eenduidige, programmeertaal-onafhankelijke vorm, die transformatie naar voor de computer executeerbare code mogelijk maakt.

In de *implementatiefase* worden de deelsystemen van het beoogde systeem los van elkaar gerealiseerd — in een geschikte programmeertaal, op een gegeven computer. Alle deelsystemen worden afzonderlijk getest om te onderzoeken of ze voldoen aan hun respectieve specificatie. Vervolgens worden de afzonderlijke implementaties geïntegreerd volgens de in de ontwerpfase gedefinieerde architectuur. Het resulterende systeem wordt als geheel weer getest en zo nodig aangepast.

Vervolgens vindt *invoering* van het geïntegreerde systeem in de praktijksituatie plaats. Daarbij is het vaak nodig om de gebruikers te instrueren in het gebruik van het systeem, voordat het in de dagelijkse praktijk wordt ingezet.

Als het systeem eenmaal in gebruik is genomen begint de *onderhoudsfase*. In deze fase wordt het systeem indien nodig bijgesteld, naar aanleiding van veranderende behoeften van de gebruikers.

Idealiter zijn de fasen in de systeemontwikkeling bij toepassing van het *software life-cycle model* strikt gescheiden. In de praktijk zullen de fasen echter vaak een zekere overlap vertonen: in de ontwerpfase, bijvoorbeeld, kunnen problemen met betrekking tot de definitie van het systeem aan het licht komen. De systeemontwikkeling is dan geen strikt lineair proces meer, maar laat een aantal iteraties zien. Naarmate het ontwikkelproces meer iteraties vertoont, gaan de voordelen van toepassing het *software life-cycle model* verloren.

Als voorzien wordt dat het ontwikkelproces ongewenst veel iteraties zal gaan vertonen, omdat er vooraf geen volledige zekerheid met betrekking tot de systeemdefinitie kan worden verkregen, wordt vaak gebruik gemaakt van *prototyping*. Het idee van *prototyping* is, dat in de systeemontwikkeling een aantal opeenvolgende prototypen van delen van het toekomstige systeem wordt gemaakt, met het doel om te komen tot een volledige, gedetailleerde systeemspecificatie. Zo'n prototype wordt toegespitst op één of meer specifieke taken van het toekomstige systeem en hoeft de overige taken niet of slechts in rudimentaire vorm te ondersteunen. Een prototype wordt in een zo kort mogelijk tijdsbestek geïmplementeerd. Daarbij wordt nog geen aandacht geschonken aan aspecten die ondergeschikt zijn aan de functionaliteit. Het prototype wordt in nauw overleg met de beoogde gebruikers beoordeeld, waarna de specificatie van het toekomstige systeem voor zover nodig wordt bijgesteld. In de praktijk zal voor de ontwikkeling van een omvangrijk software-systeem een reeks van prototypen ontstaan. Een dergelijke reeks culmineert overigens niet in een operationele implementatie van het gewenste systeem; de prototypen zijn immers ontwikkeld ter ondersteuning van de definitiefase. Na de definitiefase moeten alle andere fasen van de systeemontwikkeling nog worden doorlopen.

In het *software life-cycle model* wordt ervan uitgegaan dat het mogelijk is om tot een volledige definitie van het toekomstige systeem te komen, al dan niet gebruik makend van *prototyping*, voordat met de implementatie begonnen wordt. Met name voor systemen die taken moeten gaan vervullen die vooralsnog niet met de computer worden uitgevoerd, is het echter bijzonder moeilijk of zelfs onmogelijk om op voorhand tot een volledige specificatie te komen. Dan wordt gebruik gemaakt van de *exploratieve ontwikkelmethode*.

Het idee van de exploratieve ontwikkelmethode is, dat een reeks voorlopige implementaties van het gehele systeem wordt gemaakt, en dat door middel van experimenten met deze implementaties inzicht wordt verworven in de taken die het toekomstige systeem kan uitvoeren. Bij exploratieve systeemontwikkeling worden daarom geen uitgebreide definitie- en ontwerpfasen doorlopen, maar wordt na een eerste, globale analyse al een zo volledig mogelijke, initiële implementatie van het systeem gemaakt. Op basis van de resultaten van experimenten met deze implementatie wordt het systeem stapsgewijs uitgebreid en verfijnd, totdat het voldoet. In tegenstelling tot bij *prototyping* is bij de exploratieve ontwikkelmethode te allen tijde een volledige implementatie van het beoogde systeem beschikbaar. Een nadeel van het toepassen van de exploratieve ontwikkelmethode is, dat er meestal een minder goed gestructureerd systeem ontstaat: zelfs bij zorgvuldig beheer van het systeem verstoren de veelvuldige veranderingen de initiële structuur. Toepassingsgericht ontwikkelingsonderzoek op het gebied van de kunstmatige intelligentie kan echter niet om de exploratieve ontwikkelmethode heen.

## 2 De ontwikkelmethode voor het ITS-breuken

Het ITS-breuken is onmogelijk vooraf volledig te specificeren. Bij aanvang van het project zijn de didactische wensen in grote lijnen weliswaar duidelijk, maar het is vanwege het grensverleggende karakter van het beoogde systeem, en de complexiteit ervan, op voorhand niet mogelijk om voldoende inzicht te krijgen in de repercussies van de vele mogelijkheden bij het grote aantal te nemen ontwerpbeslissingen, en nog minder in de concrete didactische invulling van het systeem. Voor het ITS-breuken is de exploratieve ontwikkelmethode om deze reden de enig mogelijke benadering voor systeemontwikkeling.

Het grootste nadeel van toepassing van de exploratieve ontwikkelmethode is, dat vaak een slecht gestructureerd systeem resulteert. Het vrijelijk toepassen van deze methode biedt derhalve onvoldoende garantie voor de kwaliteit en de onderhoudbaarheid van het resulterende ITS-breuken. De exploratieve methode is daarom zoveel mogelijk binnen het kader van het *software life-cycle model* geplaatst, en waar nodig aangevuld met *prototyping*.

Voor de ontwikkeling van het ITS-breuken is eerst op bescheiden schaal een definitiefase uitgevoerd. Het doel hiervan is om voldoende inzicht te vergaren in de eisen waaraan het beoogde systeem moet voldoen, om zo tot een conceptueel ontwerp op een hoog abstractieniveau te komen. Omdat er in de definitiefase uitgegaan is van de didactische wensen die bij aanvang van het project redelijk vast lagen, biedt de systeemdefinitie voldoende houvast om een globale architectuur voor het ITS-breuken te definiëren.

Na de initiële definitiefase zijn de taken van de onderscheiden componenten van het ITS-breuken in grote lijnen bekend. De afzonderlijke componenten worden nu in principe apart ontwikkeld, waarmee het risico van een ondoorzichtige systeemopzet aanzienlijk is afgenomen — *mits* de globale architectuur in de verdere systeemontwikkeling gehandhaafd kan blijven. Voordat met de ontwikkeling van de systeemcomponenten is begonnen, is daarom zekerheid over de doelmatigheid van de architectuur gezocht. Dit is gedaan door middel van een rollenspel, dat in hoofdstuk 12 besproken is. Het resultaat is de architectuur die in hoofdstuk 6 is beschreven.

Voor elk van de in de architectuur onderscheiden componenten is eerst een prototypische implementatie gemaakt, om voor de toekomstige experimenten verzekerd te zijn van een draaiend ITS-breuken. Vanuit deze eerste prototypen van de componenten is de verdere systeemontwikkeling uitgevoerd, waarbij ervoor gewaakt is op elk moment de beschikking te hebben over een volledig operationeel systeem. De prototypen van de componenten zijn steeds verder verfijnd, waarbij niet geschroomd is een volstrekt nieuw ontwerp en een nieuwe implementatie van een component te maken als daartoe aanleiding was: zo is de didactische expert in de loop van het ontwikkelproces volledig opnieuw ontworpen en geïmplementeerd. Er zijn ook verschuivingen in taken tussen de afzonderlijke componenten geweest: het basisprogramma Eerlijk Verdelen heeft een deel van de diagnostiek van het leerlingwerk van de diagnostische expert overgenomen. Hoewel de inrichting van de afzonderlijke componenten aan veranderingen onderhevig is door de voortdurend voortschrijdende systeemontwikkeling, zijn er gedurende de ontwikkeling van het systeem geen wezenlijke veranderingen aan de architectuur van het ITS-breuken geweest.

Een ander probleem bij toepassing van de exploratieve ontwikkelmethode doet zich voor bij de keuze voor de benodigde technische ontwikkelomgeving. De keuze voor de hardware en software die in het project gebruikt wordt, is bepalend voor zowel het ontwikkelgemak als de kwaliteit van het resulterende systeem. Als het *software life-cycle model* wordt toegepast, wordt de keuze voor de te gebruiken ontwikkelomgeving uitgesteld tot het fysieke ontwerp van het beoogde systeem voltooid is: pas dan is precies bekend welke eisen aan de hardware en software worden gesteld, en kan een verantwoorde keuze voor een optimale omgeving gemaakt worden. Bij de exploratieve ontwikkelmethode wordt er echter naar gestreefd om zo vroeg mogelijk in de systeemontwikkeling over een operationele implementatie van het gehele sys-

teem te beschikken. De keuze voor een ontwikkelomgeving moet daarom meteen al bij aanvang van het project gemaakt worden, en is dus vaak gebaseerd op onvoldoende inzicht in de eisen die gesteld zullen worden. Bij de ontwikkeling van het ITS-breuken is gekozen voor een ontwikkelomgeving die maximale vrijheid voor implementatie biedt, waarbij rekening is gehouden met het feit dat het eindproduct moet kunnen draaien op configuraties die realistisch zijn voor de schoolpraktijk. In hoofdstuk 17 wordt de gekozen ontwikkelomgeving nader toegelicht.

Bij toepassing van de exploratieve ontwikkelmethode gaan de systeemontwikkeling en het experimenteren met implementaties van het systeem hand in hand. Ten behoeve van de ontwikkeling van het ITS-breuken is uitvoerig op school getest met prototypen van Eerlijk Verdelen en het volledige ITS-breuken; hiervan is verslag gedaan in hoofdstuk 15. Hoewel schoolexperimenten uitdrukkelijke grenzen hebben voor wat betreft hun reikwijdte, is het uitvoeren van dergelijke experimenten essentieel bij een exploratieve benadering van de systeemontwikkeling: door experimenten worden de gevolgen van de genomen ontwerpbeslissingen zichtbaar en kan zinvolle bijstelling van het programma plaatsvinden.

De ontwikkeling van het ITS-breuken is nog niet voltooid. Ten opzichte van de fasering van het *software life-cycle model* bevindt de ontwikkeling van het systeem zich in de ontwerp- en implementatiefase. Bij toepassing van de exploratieve ontwikkelmethode dreigt de systeemontwikkeling vaak te blijven itereren in deze twee fasen — het kan immers altijd beter. Het risico dat nooit aan de fase van invoering zou worden toegekomen is daarom niet denkbeeldig. De ontwikkeling van het ITS-breuken is nu echter in een stadium gekomen waarin voldoende inzicht in de mogelijkheden van het beoogde systeem is verkregen om serieus over invoering te gaan nadenken.

### **Literatuur**

Sommerville (1992) geeft een inleiding in de problematiek van de software engineering en biedt een overzicht van methoden voor systeemontwikkeling.

---

# Hoofdstuk 17

## Technische ontwikkelomgeving

Wim van Velthoven

Bij de ontwikkeling van een computerprogramma voor een bepaalde doelmachine wordt voor de implementatie onvermijdelijk gebruik gemaakt van een technische ontwikkelomgeving: één of meer computers, programmeertalen en vaak nog additionele ontwikkelsoftware. De keuze voor de ene of de andere ontwikkelomgeving is bepalend voor het ontwikkelgemak en vindt zijn weerslag in de kwaliteit van het eindprodukt. Er moet daarom voor een project een weloverwogen keuze gemaakt worden uit een veelheid van mogelijkheden. Als namelijk pas later blijkt, dat de gekozen ontwikkelomgeving niet optimaal is, zal alleen met een extra investering in tijd en geld op een andere ontwikkelomgeving overgestapt kunnen worden. Vaak moet dan worden besloten om toch maar door te gaan op de ingeslagen weg, met alle consequenties van dien voor de kwaliteit van het eindprodukt.

Bij de verslaglegging van de meeste ontwikkelprojecten voor educatieve software wordt er aan dit aspect van de implementatie nauwelijks of geen aandacht besteed. Zo wordt vaak niet duidelijk welke ontwikkelomgeving gebruikt is, en nog minder waarop de keuze voor die omgeving is gebaseerd. Dit is niet zo heel verwonderlijk. Ontwikkelaars van educatieve software zijn in het algemeen niet bijster geïnteresseerd in apparaten en programmeertalen, maar des te meer in de didactische kwaliteit van hun programma's — de apparatuur is dan alleen een noodzakelijk kwaad, waar liefst zo weinig mogelijk tijd aan wordt besteed.

### 1 Standpuntbepaling ten aanzien van computers en didactiek

Onder ontwerpers van educatieve software heerst er geen eensluidende mening over in hoeverre geconformeerd moet worden aan op school aanwezige computers. Er zijn 'pragmatici', die uitsluitend voor de onderkant van de techniek ontwikkelen, opdat zoveel mogelijk leerlingen hun programma's direct kunnen gebruiken. Met de doelcomputer als primair uitgangspunt resulteren echter vaak programma's die vanuit didactisch oogpunt nogal tegenvallen. De pragmatici wordt daarom vaak conservatisme verweten, dat ouderwetse didactische idealen in stand houdt.

Tegenover de pragmatici staan de 'idealisten'. Zij ontwerpen programma's die voldoen aan alle denkbare didactische idealen. Eerst ten tijde van de implementatie wordt dan bezien welke concessies moeten worden gedaan aan de op dat moment

meest krachtige computers op school. De idealisten wordt verweten geen voeling te houden met het veld, en niet te weten waar het nu werkelijk allemaal om draait op school. Paradoxaal genoeg ontmoeten juist de idealisten de meeste technische problemen: het lijkt wel of er een omgekeerde verhouding bestaat tussen de tijd die een ontwikkelaar op grond van zijn ingenomen standpunt wil besteden aan computers en de tijd die hij er daadwerkelijk mee kwijt is.

Tussen deze standpunten van uitersten komen nog allerlei gradaties van compromisbereidheid voor: er zijn ontwerpers die programma's maken voor machines die nog maar net op school worden gesignaleerd; er zijn er die ontwerpen voor apparaten die nog net niet op school voorkomen — in de veronderstelling dat die er wél zijn als hun programma klaar is. Overigens is het niet zo, dat programma's meer instructionele waarde hebben naarmate de benodigde techniek nieuwer of complexer is: sommige technisch nogal simpele programma's kunnen uitstekend worden ingezet binnen didactisch vooruitstrevend onderwijs, en andersom passen technisch zeer geavanceerde produkten soms alleen in verouderde didactische kaders.

Bij de ontwikkeling van het ITS-breuken is ten aanzien van de relatie techniek-didactiek gekozen om te implementeren op computers die al net wel of nog net niet op school in gebruik zijn. Er is voor gewaakt om uitsluitend in uitzonderlijke gevallen concessies te doen aan grenzen die gedictieerd worden door de techniek. Bij de ontwikkeling van het basisprogramma Eerlijk Verdelen is gekozen om aan te sluiten bij een bestaand apparaat: de recentelijk als standaard voorgeschreven Comenius-computer. Bij de ontwikkeling van de andere componenten van het ITS-breuken daarentegen is niet op voorhand gekozen voor een bepaalde machine: de verwachting aan het begin van het project was, dat niet de implementatie, maar het didactisch ontwerp het grote struikelblok zou vormen.

## 2 Ontwikkelen onder veranderende omstandigheden

De geschiedenis van het computerprogramma Eerlijk Verdelen start in de tweede helft van 1985, wanneer aan het Freudenthal Instituut (destijds 'Vakgroep OW&OC') subsidie wordt toegekend voor *Ontwerp en productie van rekenprogramma's op basis van kennis en materialen uit het project 'Onderwijs en Sociaal Milieu', in het bijzonder gebruik makend van nieuwe rekendidactische inzichten waarbij de computer een bijzondere presentatiefunctie kan vervullen*. Het gaat hier om één jaar 'Diepteproject' voor het basis- en speciaal onderwijs, binnen Cluster II.1 van het INSP (INformatica Stimulerings Plan), met als titel *Themagebonden Ondersteuningsprojecten*. In de daarop volgende uitvoeringsfase van Eerlijk Verdelen wordt de projectverantwoordelijkheid formeel gecoördineerd vanuit het COI (Centrum voor Onderwijs en Informatietechnologie) te Enschede, tot eind 1988. Vanaf

begin 1990 wordt Eerlijk Verdelen verder ontwikkeld als basisprogramma van het ITS-breuken.

Ten tijde van de eerste ideevorming rond Eerlijk Verdelen zijn er nog heel weinig computers op basisscholen — van standaardisatie is al helemaal geen sprake. Het is vermeldenswaard, juist in relatie tot de in de vorige paragraaf verwoorde standpuntbepaling ten aanzien van de relatie techniek-didactiek, dat het Diepteproject ingegeven is door het in 1985 op de markt verschijnen van een nieuwe computer, namelijk de *Macintosh* van *Apple*. Voor deze computer, met revolutionair nieuwe mogelijkheden voor onderwijstoepassingen, is de eerste versie van Eerlijk Verdelen ontwikkeld; deze versie is binnenshuis gerealiseerd in *MacPascal*. Het programmeren van Eerlijk Verdelen bleek technisch moeilijk; het programmeren van een tweede versie is daarom uitbesteed aan een extern software-bedrijf. Dit is een bewuste keuze geweest: de kwaliteiten van een op onderwijs gericht instituut liggen eerder op het gebied van de didactiek dan op het gebied van programmeren.

De versie van Eerlijk Verdelen die door het ingeschakelde software-bedrijf is opgeleverd, is door de ontwerpers beschouwd als een halfprodukt, waaraan naar aanleiding van schoolexperimenten mogelijk nog allerlei bijstellingen zouden moeten gebeuren: in het eindrapport van het Diepteproject wordt geconcludeerd, dat er eerst uitgebreid op school moet worden geëxperimenteerd met Eerlijk Verdelen, voordat er sprake kan zijn van een definitieve versie die geschikt is voor commerciële verspreiding. Er zou bij de specificatie van een definitieve versie kritisch moeten worden bezien voor welke doelmachine uiteindelijk het beste ontwikkeld kan worden.

Na het Diepteproject is met de *Macintosh*-versie van Eerlijk Verdelen nog geruime tijd geobserveerd op de basisschool. Gebaseerd op de ervaringen met leerlingen is een specificatie opgesteld voor een nieuwe versie van Eerlijk Verdelen; sommige onderdelen wijken in deze specificatie drastisch af van het origineel. Om in de uitvoerige discussies over deze nieuw opgestelde specificatie zo weinig mogelijk ruimte te laten voor eventuele misverstanden en om de uiteindelijk vastgestelde specificatie zo eenduidig mogelijk te kunnen overdragen aan programmeurs, is deze uitgewerkt in *Hypercard*. Met deze betrekkelijk eenvoudige ontwikkelomgeving is het mogelijk om reeds na korte tijd een goede benadering van het bedoelde, gereviseerde programma op de computer te simuleren, in de vorm van opeenvolgende schermen. *Hypercard* is echter niet geschikt om programma's met een zo grote complexiteit als Eerlijk Verdelen volledig te implementeren.

De schoolexperimenten en de discussies naar aanleiding van de nieuwe specificatie van Eerlijk Verdelen hebben aanleiding gegeven tot een tweesplitsing in het ontwikkelingsonderzoek. Enerzijds is gestreefd naar afronding van Eerlijk Verdelen als zelfstandig COO-programma, anderzijds is het idee ontstaan om het te integreren in een intelligente onderwijsomgeving: het ITS-breuken. In beide gevallen kan uitgegaan worden van één programma Eerlijk Verdelen.



Bij de start van het ITS-project was bekend, dat de overheid op korte termijn een computerstandaard voor de basisscholen zou opleggen — na enkele maanden werden de karakteristieken van de Comenius-computer vastgesteld, een *MS-DOS*-computer met *Windows*. Hierop is uiteraard gewacht met het verder ontwikkelen van de definitieve versie van Eerlijk Verdelen.

De derde versie van Eerlijk Verdelen is weer binnenshuis geïmplementeerd, om aanpassingen die later nog naar aanleiding van de ontwikkelingen rond het gehele ITS-breuken naar voren zouden komen, gemakkelijk te kunnen doorvoeren. Voor het programmeerwerk voor deze *Windows*-versie is geen gebruik gemaakt van de oorspronkelijke *Macintosh*-versie. Een deel van de code had misschien kunnen worden hergebruikt, maar daarvoor was bij het oorspronkelijke Pascal-programma te weinig aandacht besteed aan de portabiliteit. Voor het programmeren van deze derde versie van Eerlijk Verdelen was oorspronkelijk een maand of vier, vijf uitgetrokken. De ontwikkeltijd van het programma is uiteindelijk opgelopen tot bijna twee jaar. Hiervoor zijn verschillende oorzaken aan te wijzen. Achteraf bezien is de benodigde programmeertijd onrealistisch ingeschat — er was tevoren geen serieus projectplan opgesteld. Bovendien heeft het project te kampen gehad met vele beleidsmatige en technische tegenslagen: het onnodig uitstellen en van elkaar afhankelijk maken van beslissingen, het niet tijdig vrij maken van competent personeel, het te laat op de markt verschijnen van aangekondigde ontwikkelsoftware.

Niet alleen tegenvallers zijn debet aan het uitlopen van het programmeren van Eerlijk Verdelen. Er zijn ook didactische koerswijzigingen geweest tijdens de ontwikkeling. Van lieverlee is het bijschaven van het prototype 'ontaard' in een bijna volledig herontwerp van Eerlijk Verdelen. Tijdens het programmeren zijn de bijstellingen, naar aanleiding van observaties van experimenten die uitgevoerd zijn in het kader van het ITS-project, telkens doorgevoerd in het basisprogramma. Eerlijk Verdelen heeft daarbij geprofiteerd van de ontwikkeling van de andere componenten van het ITS-breuken.

Als er teruggeblikt wordt op de hoeveelheid werk die is verzet, dan is de bijna twee jaar echt nodig geweest; er is voortdurend intensief en doelgericht gewerkt. Het is dan ook de vraag in hoeverre één en ander in betere banen geleid had kunnen worden als er wèl een gedetailleerd projectplan was opgesteld, met een realistische inschatting van de tijd voor het programmeren van Eerlijk Verdelen. Hoogstwaarschijnlijk had dan de hele onderneming geen doorgang gevonden, want de marges waarbinnen educatieve software wordt ontwikkeld zijn smal. De extra inspanningen hebben echter wèl geleid tot een eindproduct.

### 3 De implementatie van Eerlijk Verdelen binnen het ITS-breuken

Bij de ontwikkeling van het basisprogramma Eerlijk Verdelen binnen het ITS-breuken is rekening gehouden met de doelmachine, een nader te bepalen ontwikkelmachine en met programmeertalen en ontwikkelsoftware.

#### 3.1 De doelmachine

De definitieve versie van Eerlijk Verdelen is ontwikkeld voor de Comenius-computer. Deze computer heeft de volgende karakteristieken:

- *MS-DOS*-besturingssysteem
- minimaal een 80386-SX-processor (eventueel 80286)
- kloksnelheid 16 MHz
- minimaal 2 Mb RAM-geheugen
- 40 Mb harde schijf
- VGA-kleurenmonitor
- muis
- *Windows 3.0* (onder *Windows 3.1* draait Eerlijk Verdelen aanzienlijk sneller)

Deze doelmachine levert ten opzichte van de eerder gebruikte *Macintosh Plus* voordelen op voor wat betreft het aantal beeldpunten (in het Engels *pixel*) op het scherm (van  $512 \times 342$  naar  $640 \times 480$ ) en de fysieke grootte van het scherm (van 9 inch naar 14 inch). Daardoor passen er meer voorwerpen en meer kinderen op het scherm. Een belangrijker voordeel is de beschikking over kleur. Met kleuren is het gemakkelijker om onderscheid aan te brengen tussen functionele eenheden van de interface. Bovendien vinden leerlingen een computerprogramma in kleur veel leuker.

#### 3.2 De ontwikkelmachine

De Comenius-computer is nauwelijks geschikt als ontwikkelmachine voor software met de complexiteit van Eerlijk Verdelen. Vandaar dat voor het ontwikkelproces een krachtiger apparaat is gebruikt, met de volgende karakteristieken:

- *MS-DOS*-besturingssysteem
- 80386-DX-processor
- kloksnelheid 25 MHz
- 6 Mb RAM-geheugen
- 200 Mb harde schijf
- VGA-kleurenmonitor
- muis
- *Windows 3.0* (later *Windows 3.1*)

Hoewel deze ontwikkelmachine voldoende krachtig is gebleken tijdens de ontwikkeling van Eerlijk Verdelen, zou voor een nieuw project voor een nog zwaardere ma-

chine worden gekozen: de compilatietijd van het programma bedroeg op het laatst voor alleen het leerlingendeel al ongeveer *vijf uur*.

### 3.3 Programmeertalen en ontwikkelsoftware

Bij de start van het ITS-project waren enkele softwarepakketten beschikbaar voor de ontwikkeling van computerprogramma's voor *Windows*. *Microsoft* levert standaard *SDK* (*Software Development Kit*) voor het ontwikkelen van programma's in C. Er is gekozen voor de op *SDK* gebaseerde, geïntegreerde programmeeromgeving van C++ en *CommonView* van *Glockenspiel*. *CommonView* ondersteunt het object-georiënteerd programmeren in C++. Het werk kon hier uiteindelijk goed mee worden uitgevoerd.

Object-georiënteerd programmeren is in de jaren zeventig in zwang gekomen met de introductie van de programmeertaal *Smalltalk*. Bij object-georiënteerd programmeren staat de notie van *object* centraal: een object is een samenstel van bij elkaar horende gegevens en alle bewerkingen die op deze gegevens gedefinieerd zijn. De objecten zijn veelal georganiseerd in een hiërarchie: objecten hoog in de hiërarchie zijn algemener van aard dan objecten lager in de hiërarchie. Een object kan beschouwd worden als een specialisatie van de hiërarchisch boven hem gelegen objecten, zodat ook informatie van die objecten voor hem relevant is. Het object verkrijgt de voor hem relevante informatie van deze objecten door middel van *overerving* (in het Engels *inheritance*).

Een object in een object-georiënteerd programma is zelfstandig in staat om de gespecificeerde bewerkingen op zijn eigen gegevens uit te voeren. De objecten scherpen hun interne structuur echter voor elkaar af. Dit principe wordt (*data*)*abstractie* genoemd (in het Engels *information hiding*). Als een object voor het uitvoeren van een bewerking informatie nodig heeft van een ander object, dan kan hij die informatie verkrijgen door een boodschap naar dat object te sturen. Alle activiteit tijdens de executie van het programma vloeit zo voort uit het zenden van boodschappen (in het Engels *message passing*).

Het voordeel van object-georiënteerd programmeren is, dat de objecten probleemloos door verschillende programmeurs geïmplementeerd kunnen worden. Een voordeel van *CommonView* is nog, dat het voorziet in een bibliotheek van voorgedefiniëerde objecten voor vensters, knoppen, enzovoort, zodat programmeurs zich niet hoeven te bekommeren om de laag-niveau *Windows*-functies onder *MS-DOS*.

## 4 De implementatie van de intelligente componenten

De ontwikkeling van de intelligente componenten van het ITS-breuken is veel minder dan de ontwikkeling van het basisprogramma Eerlijk Verdelen gebonden aan

een bepaald type computer. Als het systeem volledig operationeel is, zijn er immers alleen mensen direct in contact met het basisprogramma, en niet met de overige componenten. Vanuit het perspectief van de gebruikersdoelgroep bestaan er dus geen eisen ten aanzien van de ontwikkelomgeving voor deze componenten: er kan vrij worden gekozen voor gereedschap dat voor het ontwikkelproces optimaal is.

Als ontwikkelmachine is gebruik gemaakt van een *SUN-SPARC*-werkstation met het *UNIX*-besturingssysteem. Om maximale vrijheid te hebben bij de ontwikkeling van de componenten van het ITS-breuken is gekozen voor de programmeertaal Prolog, een hogere *general purpose* programmeertaal. Prolog is bij uitstek geschikt voor het ontwikkelen van prototypen van kennisgebaseerde programma's. Er is hierbij gebruik gemaakt van het venster-georiënteerde *BIM-Prolog*. *BIM-Prolog* biedt voor ontwikkelaars goede gereedschappen, zoals een *debugger*. Ten behoeve van de portabiliteit naar andere computers is er een omzetsprogramma ontwikkeld, dat code in *BIM-Prolog* omzet naar code in 'standaard' *C-Prolog*.

Er is overwogen om het hele ITS-breuken in C++ te ontwikkelen. Programma's in C++ werken in het algemeen sneller dan die in Prolog, en stellen minder eisen aan het werkgeheugen van de computer. Daar staat tegenover, dat het ontwikkelen van de onderhavige toepassing in C++ in het beginstadium extra programmeertijd zou vergen. Als het ITS-breuken zijn (semi)definitieve vorm heeft, is het zinvol om alsnog op C++ over te stappen.

## 5 Het ITS-breuken op twee processoren

Vanaf het begin van het denken over het ITS-breuken is rekening gehouden met een implementatie ervan in een multi-processor-omgeving. Er zijn voordelen te verwachten van een implementatie van het ITS-breuken op twee (of meer) processoren. Een eerste voordeel is, dat Eerlijk Verdelen als onderdeel van het ITS-breuken nagenoeg hetzelfde kan zijn als Eerlijk Verdelen als zelfstandig COO-programma. Het gaat hierbij niet alleen om het evidente programmeer voordeel — ook de schoolervaring met alleen Eerlijk Verdelen blijft direct van belang voor de ontwikkeling van het hele ITS-breuken.

Een tweede belangrijk voordeel is, dat een implementatie in een multi-processor-omgeving minder zware eisen stelt aan de hardware dan een implementatie op één processor. Eerlijk Verdelen draait bevredigend op een voor basisscholen beschikbare 80386-SX-processor — de processor heeft aan het programma echter zijn handen vol. Gezien de wachttijd die door didactici als acceptabel beschouwd wordt voor leerlingen, zou een implementatie van het hele ITS-breuken op één processor impliceren, dat er voor een heel veel krachtiger processor zou moeten worden geselecteerd: de leerling en het programma moeten immers telkens op elkaar wachten. Bij een im-

plementatie op twee of meer processoren kunnen de leerling en het ITS-breuken — zoals bij schaken — ‘denken in de tijd van de tegenstander’.

Het ITS-breuken is gerealiseerd in een twee-processor-omgeving. Voor het boodschappenverkeer tussen de processoren is een communicatieprotocol in C ontwikkeld. Voor de technische koppeling van de processoren zijn vier verschillende configuraties opgezet. Met deze configuraties is op school geëxperimenteerd.

In de eerste configuratie is voorzien in een modemverbinding tussen de schoolcomputer waarop het basisprogramma draait en het werkstation waarop de overige componenten van het ITS-breuken draaien. Er is zo geprofiteerd van een reeds bestaande situatie: een computer op school voor het basisprogramma, de reeds aanwezige telefoonlijn en één van de werkstations op het Freudenthal Instituut. Een eerste probleem bleek echter de slechte kwaliteit van de telefoonverbinding: het was nodig om een foutendetecterend protocol te ontwikkelen voor de communicatie. Een tweede probleem deed zich voor toen de tweede telefoonlijn waarover de bewuste basischool beschikte (van vóór de integratie kleuter- en lager onderwijs) vanwege een nieuw budgetteringssysteem moest worden afgestoten. Vanzelfsprekend kon niet worden toegestaan dat de school lange tijd achtereen onbereikbaar zou zijn als gevolg van de experimenten met het ITS-breuken.

In een tweede configuratie is alle benodigde apparatuur op school opgesteld. Deze configuratie was vanuit praktisch oogpunt weinig aantrekkelijk, vanwege het transport van zware apparatuur, en vanwege het uitschakelen van een aantal UNIX-werkplekken op het ontwikkelinstituut, door het ontkoppelen van een centrale harde schijf.

In een derde opstelling is het ITS-breuken gerealiseerd op twee schoolcomputers. Hiertoe is de code van de componenten van *BIM-Prolog* omgezet naar *C-Prolog*, voor een *MS-DOS*-computer. Hoewel de implementatie van het ITS-breuken op twee schoolcomputers operationeel is, is deze configuratie vanzelfsprekend niet realistisch voor invoering van het ITS-breuken op school, gezien de computerschaarste aldaar.

Tenslotte worden de mogelijkheden onderzocht om *transputers* toe te passen voor de realisatie van educatieve software, en meer in het bijzonder voor de realisatie van het ITS-breuken. Een transputer is hardware, bestaande uit één of meer processoren en verbindingen, vaak samengebracht op een insteekkaart voor een standaardcomputer. Daarmee kan in feite de configuratie met twee schoolcomputers worden nabootst, maar dan binnen één behuizing, met één beeldscherm, enzovoort. De aanzienlijke kostenbesparing die de transputer-techniek met zich meebrengt, biedt interessante perspectieven voor de realisatie van veeleisende educatieve toepassingen. Er is ten behoeve van het ITS-breuken nog maar op bescheiden schaal geëxperimenteerd met een insteekkaart met één zo'n extra processor. Hoewel het nog niet gelukt

is om de laatste versie van het ITS-breuken in zijn geheel met een transputer te laten functioneren, worden bij verdere realisatie geen fundamentele problemen verwacht.

### **Literatuur**

Ontwerpen met een concessieloze didactische vrijheid is het onderwerp van de conferentie 'Didactische systeemanalyse', waarvan Klep en Kommers (1989) verslag doen. Voor meer informatie over C++ en object-georiënteerd programmeren wordt verwezen naar Lippman (1989). Bratko (1986) biedt een inleiding tot de programmeertaal Prolog, toegespitst op gebruik ervan in de kunstmatige intelligentie. De Waard (1989) bespreekt de transputer en zijn toepassingsmogelijkheden.

---

## Terugblik ... vooruitblik

Het realistisch reken-wiskunde-onderwijs heeft, los van computers, bewezen goede papieren voor efficiënt onderwijs — het ligt dus voor de hand om bij experimenten met gecomputeriseerd onderwijs deze filosofie als didactisch uitgangspunt te nemen. Het realistisch reken-wiskunde-onderwijs stelt een ontwikkelaar van een educatief computerprogramma aanvankelijk voor aanzienlijke problemen, vooral als gevolg van de wens van een gemengd initiatief van de leerling die met het programma werkt en de computer. Met het ITS-breuken is aangetoond dat deze problemen weliswaar aanzienlijk zijn, maar niet onoverwinbaar.

Het ITS-breuken is nog niet klaar. Terugblikkend op de resultaten die tot nu toe binnen het project zijn geboekt, wordt geconcludeerd, dat het ITS-breuken kan worden ontwikkeld tot een volwaardig educatief computerprogramma dat bruikbaar is op school — er staan daarbij geen onoverkomelijke technische of inhoudelijke obstakels in de weg. Nieuwe versies van het programma moeten weer aan onderzoek worden onderworpen, hetgeen opnieuw zal resulteren in uitbreidingen en bijstellingen. Dit iteratieve bijstellingsproces stopt in principe pas als er een naar de mening van alle betrokken partijen bevredigende versie van het programma is. In de praktijk leidt meestal een andere factor tot het afronden van het ontwikkelingsonderzoek, zoals het einde van de financiering van het project. Voor het ITS-project is dat moment aangebroken, en daarom is er aanleiding tot bezinning over wat er in de afgelopen tijd is bereikt en over wat de toekomst brengen moge.

Voor reflectie over wat er binnen het project is gebeurd, biedt dit boek voldoende stof. Die reflectie betreft ten eerste het ITS-breuken zelf. Het tussenresultaat dat nu beschikbaar is moet teruggekoppeld worden naar de didactici, voor een validatie van het systeem. Voorts kan de kennis van de afzonderlijke componenten nog aanzienlijk worden verrijkt. Met Snijmachines is wellicht meer te reguleren dan alleen het gevarieerd laten toepassen van verdeelmanieren; op het niveau van Kleuren & Benoemen ontbreekt de invulling van de kennissystemen nog geheel. Het leerlingmodel moet worden voorzien van extra parameters en de diagnostische expert moet daarvoor worden bijgesteld. Misschien kunnen er dan ook niet-vakspecifieke parameters worden toegevoegd, die bijvoorbeeld leersnelheid of faalangst modelleren, zodat leraren hierover gemakkelijk informatie kunnen inwinnen. De didactische expert zou voor een duo samenhangende, maar eventueel toch onderling afwijkende plannen moeten kunnen opstellen, met daarbij een leerlingmodel dat voorstellen kan doen voor een overwogen herindeling in duo's per groep. Zulke inhoudelijke uitbreidingen hoeven niet te leiden tot aanpassingen van de architectuur van het ITS-breuken — die is op de groei berekend.

Reflectie betreft ook het nut van ITS'en. Het formaliseren van didactische overwegingen leidt bij 'niet-computer-didactici' al gauw tot behoedzaamheid, *a fortiori* bij hen die werken vanuit de moderne, realistische visie op rekenonderwijs. Zij zijn beducht voor de formalisatie van de didactiek die de computer afdwingt: door de computerisering van het breukenonderwijs lijkt het of de didactiek óók mechanistisch wordt. Dit is echter beslist niet noodzakelijk en geenszins de bedoeling. Bij het ITS-breuken is de beduchtzaamheid voor formalisatie zelfs nog sterker, omdat ook de didactische sturing door het programma geregeld wordt. Het feit dat een didactisch plan gevormd wordt op basis van gefragmenteerde processen in de computer, impliceert echter niet dat de instructie de vorm krijgt van 'hapklare brokjes', zoals bij geprogrammeerde instructie. Bij het ITS-breuken krijgen leerlingen immers opgaven in exact dezelfde vorm als bij het programma Eerlijk Verdelen, dat direct is ontstaan uit de traditie van het realistisch rekenonderwijs.

De discussie over de werkverdeling tussen leraar en computer is vanaf de eerste vormen van machinale instructie gevoerd tegen de achtergrond van werkgelegenheid: eerst kon er een dreigend lerarentekort mee opgevangen worden, later zouden computers de lerarenbanen bedreigen. Zonder iets af te doen aan de veranderingen op school door de introductie van computers, moet echter worden geconstateerd dat er tot nu toe niets blijkt van tijdsbesparing door computerondersteund onderwijs — veeleer is het tegendeel waar. Leerlingen moeten tegenwoordig efficiënt onderwijs krijgen. Leraren moeten daartoe het onderwijs individualiseren en differentiëren, liefst gebruik makend van de nieuwste media. De discussie over de functie van ITS'en zou in dit kader moeten worden omgebogen van de vraag in hoeverre machines leraren kunnen *vervangen* naar de vraag hoe machines leraren kunnen *ondersteunen*, opdat invoering van nieuwe onderwijsnormen geen buitensporige taakverzwaring betekent voor onderwijsgeevenden. Aan de didactische kennis van een onderwijssysteem hoeft dan niet de eis gesteld te worden van een 'modelleraar'; het is voldoende als het systeem beter in staat is om onderwijs-op-maat te verzorgen dan een boek of een computerprogramma met een tevoren vastgelegde didactische vulling.



# Literatuur

- Bidwell, J.K. (1982). Share five chocolate bars among six children. *Mathematics Teaching*, nr. 99, p. 4-8.
- Bierman, D., J. Breuker & J. Sandberg (1989). *Artificial Intelligence and Education: Proceedings of the 4th International Conference on AI and Education*, Amsterdam. Amsterdam: IOS.
- Boermeerster, C. (z.j.; 1965 of later). *Programmering in de Praktijk: Een Experiment met Geprogrammeerde Instructie*. J.M. Meulenhoff; J. Muusses; Erven P. Noordhoff; Nijgh & Van Ditmar; Spruyt, Van Mantgem & De Does.
- Bratko, I. (1986). *Prolog Programming for Artificial Intelligence*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.
- Breuker, J. & B. Wielinga (1987). Use of models in the interpretation of verbal data. In: A.L. Kidd. *Knowledge Acquisition for Expert Systems*. New York: Plenum Press, p. 17-44.
- Brown, J.S. & R.R. Burton (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, vol. 2, p. 155-191.
- Brown, J.S. & K. VanLehn (1980). Repair theory: a generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science*, vol. 4, p. 379-426.
- Burton, A.M., N.R. Shadbolt, G. Rugg & A.P. Hedgcock (1988). Knowledge elicitation techniques in classification domains. In: *Proceedings of the 8th European Conference on Artificial Intelligence*, p. 85-90.
- Carr, B. & I.P. Goldstein (1977). *Overlays: A Theory of Modeling for Computer-Aided Instruction*. AI Lab Memo 406 (Logo Memo 40). Cambridge, Massachusetts: MIT.
- Clancey, W.J. (1987). *Knowledge-based Tutoring: The GUIDON Program*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- Cole, M. (1990). Computers and the organization of new forms of educational activity: a socio-historical perspective. *GOLEM - Newsletter of Technology and Education*, vol. 2, p. 6-13.
- Dale, Van (1984). *Groot Woordenboek der Nederlandse Taal*. 11de druk. Utrecht / Antwerpen: Van Dale Lexicografie.
- Davydov, V.V. & Z. Tsvetkovic (1969). *Psychologische Mogelijkheden van Jonge Schoolkinderen in het Wiskundeonderwijs*. Moskou. [behandeld door Streefland (1979)]
- De Nieuwe Wiskrant: Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*. Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.
- Dillebourg, P. (1991). The Geneva manifesto of intelligent learning environments. *GOLEM - Newsletter of Technology and Education*, vol. 3, p. 23-25.
- Dirkwager, A. (1991). Educatieve instrumentatietechnologie: het einde van de onderwijskunde. *Tijdschrift voor Onderwijsresearch*, vol. 16, p. 39-48.
- Elsom-Cook, M. (1990). *Guided Discovery Tutoring: A Framework for ICAI Research*. London: Paul Chapman Publishing.

- Engelmore, R.S. & A.J. Morgan (1988). *Blackboard Systems*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.
- Fernández de Castro, M.I. (1989). *Estrategias de Enseñanza en un Sistema Inteligente de Enseñanza Asistida por Ordenador*. Dissertatie. San Sebastián: Universidad del País Vasco.
- Freudenthal, H.F. (1979). How does reflective thinking develop. In: *Proceedings of the 3rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Warwick*.
- Freudenthal, H.F. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Goffree, F. (1992). De Pabo-bv anno 2002: reken-wiskunde & didactiekonderwijs 1952 - 2002. In: F. Goffree, A. Treffers & J. de Lange. *Rekenen Anno 2002: Toekomstverwachtingen van het Reken-wiskundeonderwijs*. Utrecht: NVORWO, p. 35-66.
- Guida, G. & C. Tasso (1989). *Topics in Expert System Design: Methodologies and Tools*. Amsterdam: North-Holland.
- Henfi, J. (1986). *Kapstok Rekenen, Opzoekgids voor Rekenzaken*. Leiden: Ajodakt.
- Hennessy, S., T. O'Shea, R. Evertsz & A. Floyd (1989). An Intelligent Tutoring System approach to teaching primary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 20, p. 273-292.
- International Journal of Educational Research* (1988). Knowledge acquisition in intelligent learning environments, vol. 12.
- Jackson, P. (1986). *Introduction to Expert Systems*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.
- Jonker, V., F. van Galen & K. Gravemeijer (1988). *Eindrapportage Project Ontwikkeling Rekensoftware*. Utrecht: Vakgroep OW & OC, Universiteit Utrecht.
- Kearsley, G. (1987). *Artificial Intelligence and Instruction: Applications and Methods*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.
- Klep, J. & P. Kommers (1989). *Courseware en Leerplanontwikkeling: Didactische Systemanalyse*. Enschede: SLO.
- Lawler, R. & M. Yazdani (1987). *AI and Education: Learning Environments and Intelligent Tutoring Systems*. Norwood, New Jersey: Ablex Publishing.
- Leeuw, L. de & G. Beukhof (1987). De computer en het onderwijsleerproces; een inleiding. *Pedagogische Studiën*, vol. 64, p. 327-334.
- Linschoten, J. (1964). *Idolen van de Psycholoog*. Utrecht: Erven J. Bijleveld.
- Lippman, S.B. (1989). *C++ Primer*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.
- Lucas, P.J.F. & L.C. van der Gaag (1988). *Principes van Expertsystemen*. Schoonhoven: Academic Service.
- Luger, G.F. & W.A. Stubblefield (1988). *Artificial Intelligence and the Design of Expert Systems*. Redwood City, California: Benjamin / Cummings.
- Mandl, H., E. de Corte, N. Benett & H.F. Friedrich (1990). *Learning and Instruction*. Oxford: Pergamon Press.
- McGraw, K.L. & K. Harbison-Briggs (1989). *Knowledge Acquisition: Principles & Guidelines*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- Nwana, H.S. & P. Coxhead (1988). Towards an Intelligent Tutoring System for fractions. In: *Proceedings ITS-88, Montreal*, p. 403-408.

- Papert, S. (1980). *Mindstorms*. Brighton: Harvester Press.
- Pedagogische Studiën* (1987). De computer en het onderwijsleerproces, vol. 64.
- Polson, M.C. & J.J. Richardson (1988). *Foundations of Intelligent Tutoring Systems*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sandberg, J. & F. Pijls (1989). *De Computer als Expert en Didacticus: Een Introductie in het Onderzoek naar Intelligente Onderwijssystemen*. Muiderberg: Coutinho.
- Self, J. (1988). *Artificial Intelligence and Human Learning: Intelligent Computer-Aided Instruction*. London: Chapman and Hall.
- Sleeman, D.H. & J.S. Brown (1982). *Intelligent Tutoring Systems*. London: Academic Press.
- Sommerville, I. (1992). *Software Engineering*. 4de editie. Wokingham: Addison-Wesley.
- Streefland, L. (1979). Davydov, Piaget en de breuken. *Pedagogische Studiën*, vol. 56, p. 51-73.
- Streefland, L. (1988). *Realistisch Breukenonderwijs: Onderzoek en Ontwikkeling van een Nieuwe Leergang*. Dissertatie. Utrecht: Universiteit Utrecht.
- Teaching Machine, type EL 9000 and Programmed Instruction* (1967). Philips, Electroacoustics Division 3922 980 51641.
- Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs*. Utrecht: HMN/FEO, Freudenthal Instituut.
- Treffers, A. (1990). Wiskunde-onderwijstheorie of  $\beta$ -onderwijstheorie? In: P.L. Lijnse & W. de Vos. *Didactiek in Perspectief: Het Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen Geopend*. Utrecht: CD- $\beta$  Press, p. 156-172.
- Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In: L. Streefland. *Realistic Mathematics Education in Primary School*. Utrecht: CD- $\beta$  Press, p. 21-56.
- Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1991). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool: breuken (deel 1). *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs*, vol. 10, nr. 2, p. 3-10.
- Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1992a). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool: breuken (deel 2). *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs*, vol. 10, nr. 3, p. 14-25.
- Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1992b). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool: breuken (deel 3). *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs*, vol. 10, nr. 4, p. 22-28.
- Vassileva, J. (1990). A classification and synthesis of student modeling techniques in intelligent computer-assisted instruction. In: D.H. Norrie & H.W. Six. *Proceedings of the 3rd International Conference on Computer Assisted Learning*. Lecture Notes in Computer Science, 438. Berlin: Springer-Verlag, p. 202-213.
- Waard, H.W. de (1989). *Transputers*. Utrecht / Antwerpen: Bruna.
- Wenger, E. (1987). *Artificial Intelligence and Tutoring Systems*. Los Altos, California: Morgan Kaufmann.
- Woort, D. & G.H. Meijer (1966). *Algemene Rekenkunde*. Utrecht / Antwerpen: Prisma-boeken.