Verhouding in Onderzoek
- deel 2 -

L. Streefland, OW & OC

2 De uitlijning van het onderwijsleerproces voor verhouding

2.1 Vooraf

Het verdient de voorkeur om het onderwijsproces en het leerproces in samenhang te beschouwen. Dit betekent bijgevolg, dat het nemen van curriculummaatregelen voor verhouding, analyse van de (beoogde, individuele) leerprocessen impliceert en omgekeerd.

Het onderwijzen en leren van verhouding (of welke wiskunde ook) zijn onscheidbare Siamese tweelingen. Deze opmerking lijkt een gemeenplaats, doch is dat geenszins, omdat op grond van indelingsdrang 'onderwijzen' en 'leren' in algemeen onderwijskundige zin te dikwijls afzonderlijk, en dus los van elkaar, beschouwd zijn. Een uit te lijnen (deel-)curriculum zou men moeten afstemmen op en laten aansluiten bij de (informele en fragmentarische) kennis en inzichten van de leerlingen. Aan deze kernproblematiek kunnen de volgende aspecten als onderwijsprincipes onderscheiden worden.

Ten eerste: Het rekening houden met de ervaringen van leerlingen met verhoudingen in de werkelijkheid en met hun intuitieve noties van meetkundige verhoudingen. Op grond daarvan uitgaan van in reële contexten ingebedde problemen, het kwalitatief instappen in problemen en toepassen van het schatten als methodische instap tot numerieke verwerking in de diverse stadia van het leerproces (par.1.1).[1]

Ten tweede: Het ondersteunen van het proces van numerieke precisering en algoritmisering van verhouding met visuele modellen, afgeleid van paradigmatische voorbeelden uit de kijkwereld van kinderen (par.1.1 en 2.2).

Ten derde: Het respecteren van de neiging van leerlingen om gegeven verhoudingen in vergelijkingsproblemen te variëren, teneinde de gevraagde vergelijking te vereenvoudigen (par.1.2) en bedoelde neiging benutten door hierop in de benadering van verhouding methodisch aan te sluiten (par.2.3).

Ten vierde: Het erkennen en respecteren van de moeilijkheden die leerlingen bij het numeriek verwerken en algoritmiseren van verhouding ondervinden (par.1.3) en bijgevolg deze processen door schematiseringsmiddelen ondersteunen, waardoor standaardprocedures als de regel van drie of de kruisproduktmethode naar het eind van het leerproces verwezen worden en niet aan het begin ervan staan (par.2.3).

Ten vijfde: Samenvattend komen voorgaande kernpunten voor het leren van verhouding op het volgende neer. Het maken van een mathematisch-didactische analyse met het oog op een hechte verankering van verhouding in het curriculum, en het nastreven van samenhangen, die dieper ingrijpen dan

1. De paragraafaanduidingen beginnend met 1, verwijzen naar het eerste deel van dit artikel (zie Panamapost jrg 4 nr 2).

voor de hand liggende onderwerpen als gelijkwaardige breuken en procenten (par.2.4).

2.2 Visuele modellen

Voor visuele ondersteuning van verhouding en evenredigheid is verscheidene malen gepleit (vgl. Suydam, 1978). In dit verband kan speciaal de grafische weergave van afbeeldingen genoemd worden, die verhoudingen intact laten (vgl. Vergnaud et al, 1979). Een recent opgeworpen kwestie is de *ontwikkeling* van visuele modellen in het leerproces zelf, waarbij verschijnselen met paradigmatische kracht in de waarnemings-werkelijkheid van kinderen het uitgangspunt vormen. Modellen, die slecht passen bij de noties van kinderen zouden door de onderwijzer vermeden moeten worden. Het verschijnsel 'stok-schaduw' kan als voorbeeld dienen (vgl. Freudenthal et al, 1976; Streefland, 1978; Karplus, 1981). Enige stadia in het onderwijsleerproces over lange termijn werden door ons voorgesteld.

— bewuste exploratie van de loop van zonnestralen als 'viseerlijnen' (zeven tot acht jaar);

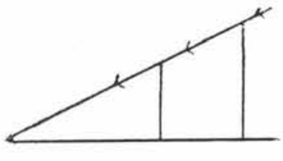

fig.7

— exploratie van het verschijnsel 'stok-schaduw' gericht op ontdekking en bewustmaking van de betrokken verhoudingsconstantie (negen tot tien jaar);
— het meten van onbereikbare hoogten door toepassing van voorgaande wetmatigheden (elf tot twaalf jaar);

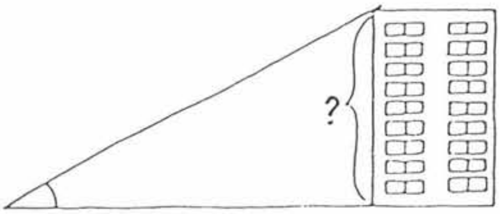

fig.8

— toepassing van het stok-schaduwmodel, bijvoorbeeld bij hellingen (elf tot twaalf jaar);
— stok-schaduw als algemeen model voor verhoudingsconstantie (twaalf tot ...);
— verbinding met lineaire grafieken, die vanzelfsprekend vanuit andere gezichtspunten al eerder geïntroduceerd kunnen zijn (twaalf tot ...). (Streefland, 1983, 1984, 1985a).

Kenmerkend in deze sequentie is de stapsgewijze overgang van het verschijnsel zelf naar de structuur die erin vervat is en die als model voor verhouding

dienst kan doen. Men start met een verkenning van de verschijnselen (vertikaal object-schaduw) en het is de bedoeling dat de leerlingen zelf, de beoogde abstracties voltrekken. Op deze wijze voorkomt men invoering van modellen, die niet bij het (intuitieve) niveau van de leerlingen passen en daarom later niet door hen kunnen worden toegepast.
De voorgestelde sequentie komt dus neer op het voortschrijdend abstraheren van het beoogde model voor verhoudingsconstantie, vanuit genoemde verschijnselen. Het is denkbaar dat een passende uitlijning trekken van een 'spiral curriculum' vertoont.

2.3 Schematiseren met de verhoudingstabel
Diverse auteurs deden suggesties tot ondersteuning van het leerproces van leerlingen door ze hulpmiddelen te bieden om de gegevens in een verhoudingsprobleem te organiseren en uit te voeren berekeningen te schematiseren. De verhoudingstabel is bij herhaling genoemd als werktuig met die functies, zowel in rij- als in kolomvorm (Vergnaud et al, 1979; De Jong, 1982; Vergnaud, 1982; Streefland, 1982, 1983). In een verhoudingstabel worden de grootheden gescheiden en dus onderscheiden. De tabel bevordert het toepassen in het oplossingsproces van interne en externe verhoudingen (Vergnaud, 1982)[2] tot uitdrukking komend in allerlei samenhangen. In verband hiermee is het van belang te vermelden, dat Kirsch (1969) het koopmansrekenen analyseerde met het oog op de eigenschappen van verhoudingsgetrouwe afbeeldingen. Deze eigenschappen blijken een beslissende rol te spelen in het oplossingsgedrag van leerlingen, ongeacht of ze nu wel of niet met de verhoudingstabel hebben leren werken (vgl. Hart, 1980, 1981; Streefland, 1982, 1983, 1985; Vergnaud, 1979, 1982).
Een verhoudingstabel als in figuur 9 organiseert op een doeltreffende manier het spontane en gedifferentieerde oplossingsgedrag van leerlingen.

afstand	5	10	12½	15		
tijd	1	2	2½	3		

fig.9

Bovendien snijdt de tabel geen oplossingsmogelijkheden af en schept ruimte tot het variëren van de gegeven verhoudingen waartoe kinderen 'van nature' geneigd blijken.
De door Vergnaud genoemde functies van de tabel, het scheiden en onderscheiden van de gegeven grootheden, zijn met het oog op het leerproces over langere termijn verder gespecificeerd, namelijk de tabel:
— ondersteunt de begripsverwerving (verhouding als equivalentierelatie en - in verband daarmee - het begrip variabele);
— draagt bij aan het loskomen van de contexten, waarin de problemen gegeven zijn (de verhoudingstabel als unificerend model);
— draagt bij aan het ontdekken, bewust maken en toepassen van *alle* eigenschappen, die gezamenlijk verhoudingsgetrouwe afbeeldingen kenmerken en aan hun toepassing bij het oplossen van getalproblemen;
— is dienstbaar aan het algoritmiseringsproces van verhouding (en

2. Overigens spreekt Vergnaud niet van interne en externe verhoudingen, doch respectievelijk van scalaire en functierelaties.

bewerkingen met breuken en procenten, ...), (Streefland, 1982, 1983). De laatste kwestie zullen we met een voorbeeld toelichten.

Probleem: Koolstof *(C)* en zuurstof *(O)* reageren op elkaar in de massaverhouding drie tot acht. Als er 8 gram *C* en 23 gram *O* worden samengevoegd van welke stof blijft er dan iets over? En hoeveel?
Leerlingen, gewend aan het werken met verhoudingstabellen, kunnen met uiteenlopende oplossingen komen. Bijvoorbeeld:
Leerling A stelt eerst de volgende tabellen samen:

C	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
O	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

fig.10

C	8	16	24	32	40
O	23	46	69	92	115

fig.11

C	3
O	8

fig.12

C	8
O	23

fig.13

24
64

fig.14

24
69

fig.15

Figuur 10 en 11 dienen om figuur 12 en 13 gemakkelijk vergelijkbaar te maken. Figuur 14 en 15 worden er vervolgens 'uitgepikt' om de conclusie te kunnen trekken, dat er $69 - 64 = 5$ gram *O* zou overblijven ingeval met 24 gram *C* en een naar rato grotere hoeveelheid *O* begonnen was. Beginnen met acht gram *C* betekent dus, dat er $5/3 = 1 2/3$ gram *O* 'onaangeroerd' blijft.
Leerling B start met figuur 16, daarbij steeds vergelijkend met figuur 17 tijdens de opbouw van de tabel.

C	8	16	24
O	23	46	69

fig.16

C	3
O	8

fig.17

De vergelijkende activiteit leidt tot de samenstelling van figuur 18, waarbij tussenliggende waarden (kunnen) worden overgeslagen.

C	3		24	
O	8		64	

fig.18

Leerling C gaat te werk als leerling B, maar direkter via figuur 19 en 20, en trekt daarna dezelfde conclusie als leerling A.

×3

C	8	24
O	23	69

×3

fig.19

×8

C	3	24
O	8	64

×8

fig.20

Leerling D gebruikt slechts één tabel en redeneert als volgt in figuur 21.

-2×3 -2/3×3

C	8	2	0
O	23	7	$1\frac{2}{3}$

-2×8 -2/3×8

fig.21

Dus er blijft $1\frac{2}{3}$ gram *O* over.
Leerling E bepaalt op grond van globale schatting, dat er (vermoedelijk) wat *O* over zal blijven en berekent dan in figuur 22 als volgt.

:3 ×8

C	3	1	8
O	8	$1\frac{2}{3}$	$21\frac{1}{3}$

:3 ×8

fig.22

$23 - 21\frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$ gram *O* blijft er over, daarmee het na de gedane schatting geuite vermoeden bevestigend.
De voorbeelden laten zien, dat de verhoudingstabel aan de berekeningen kan worden aangepast, waarbij de toenemende efficientie en de mogelijkheid tot het toepassen van verkortingen opvalt. In dit opzicht zijn er duidelijke overeenkomsten met het door Treffers (1983) beschreven geintegreerd cijferen volgens progressieve schematisering. Dit geldt vooral ook de standaardprocedures, die niet aan het begin, doch aan het einde van het leerproces gerealiseerd (kunnen) worden.
In de verhoudingstabel kunnen actiestrategieën van leerlingen zowel bij verhoudingen als bij breuken (de exploratie van verdeelsituaties) worden toegepast. (Streefland, 1985a).

2.4 De mathematisch-didactische analyse van verhouding en evenredigheid

Verscheidene auteurs beschouwden verhouding in relatie met wiskundige 'verwanten', zoals breuken, percentage enz. Kirsch (1969) merkte in dit verband op: 'Why should we teach fractions, if we would not use them in this context?' (Dat wil zeggen, in de context van aantal-prijs en gewicht-prijs relaties, of — zoals Kirsch het noemde — het koopmansrekenen.)
Noelting en Gagné (1980a) legden eveneens verband tussen verhoudingen en breuken. In leerboeken is dit verband dikwijls — zo niet altijd — te zwak vanwege het abstractie-niveau en het vergevorderde stadium van algoritmisering waarop dergelijke relaties pas gelegd worden. Daaraan zijn de meeste leerlingen dan nog niet toe (vgl. Freudenthal, 1984). Teneinde verhouding hecht in het curriculum te kunnen verankeren, is een diepgaande mathematisch-didactische analyse een vereiste (vgl. Freudenthal, 1984). Voorzover mij bekend, bestaan er behalve Freudenthals didactische fenomenologie van wiskundige structuren slechts enkele studies waarin dit probleem onderkend is of waarin er rekening mee gehouden wordt.[3]
Een dergelijke analyse richt zich op het betrokken stukje wiskunde, dus het begrip, de operatie, het idee, de structuur, beschouwd als gedachteding — dat wil zeggen als cognitieve verworvenheid, als deel uitmakend van de geformaliseerde wiskunde — in relatie tot de verschijnselen, waartoe bedoelde wiskundige gedachtedingen als ordenende instrumenten kunnen dienen, en verder: ...'aan te geven voor welke phainomena het als ordeningsmiddel is geschapen en tot welke het als zodanig kan worden uitgebreid, hoe het op de phainomena als ordeningsmiddel werkt, welke macht het ons over deze phainomena en andere geeft'. (Freudenthal, 1984, p.38. Zie ook Kieren, 1976 in verband met breuken.)

In het voorgaande ligt de nadruk op de didactische component in de beschrijving met het oog op de cognitieve verwerving van de betrokken wiskunde in het onderwijsleerproces dat men uiteindelijk wil organiseren (zie ook Streefland, 1985c, p.62, 63). Wat verhoudingen aangaat, komt het erop neer dat reële problemen, realistische verschijnselen, waarin verhouding vervat is, de bron van het onderwijs zullen moeten vormen.
Laten we de kwestie van de verankering van verhouding in het curriculum nog wat nader beschouwen aan een voorbeeld. In de 'samengestelde grootheid' bevolkingsdichtheid wordt een resultaat van *tellen* (bevolkingsaantal) in verband gebracht met een resultaat van *meten* (oppervlakte leefgebied). Het beargumenteerd relateren van beide grootheden voert tot een gelijkverdeling van inwoners per oppervlakte-eenheid, teneinde het vergelijken van een situatie met andere of andere situaties te vereenvoudigen: grotere, gelijke of kleinere bevolkingsdichtheid. In het algemeen heeft het *zich op het standpunt van verhoudingen stellen* tot gevolg dat

3. In Lesh en Landau (1983) wordt de methode van de 'Idee-analyse' bepleit, een methode, die met die van de mathematisch-didactische analyse verwant is doch die het psychologische element iets meer benadrukt. Dergelijke analysen zijn meer omvattend dan de tot dusver in de psychologische literatuur onderscheiden methoden van rationele en empirische analyse (Resnick) of logische en psychologische analyse (Davydov) e.d. Tenzij men rationele analyse uitbreidt tot realistisch wiskundeonderwijs. (zie Treffers en Goffree, 1985).

uitkomsten *gerelativeerd* worden van wat men elementair wiskundige of fysische operaties zou kunnen noemen, zoals meten, tellen, schatten, rekenen en hun samenstellingen.
De *logische status van verhouding* is complexer dan die van elementaire begrippen als lengte, massa, volume, aantal, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen (vgl. Freudenthal, 1983; Streefland, 1982). Het 'tellen van grote hoeveelheden' en 'het meten van oppervlakte' zijn — hier — *samen* de cognitieve en numerieke bronnen voor verhouding. Een kernvraag is nu, in welke stadia van voortschrijding in die afzonderlijke leerlijnen deze verstrengeld zouden moeten worden met het oog op het in gang zetten van het leerproces voor verhouding. Of - bekeken vanuit het gezichtspunt van verhouding - hoe vroeg moeten *informele toegangen* tot functionele samenhangen tussen grootheden verkend worden om in een later stadium van het leerproces herkend te worden als gelijkvormigheden, lineaire afbeeldingen, lineaire functies, enz. Bezwaren tegen te late verbindingen en geforceerde formaliseringen kunnen afgeleid worden uit onderzoeksresultaten (ongerijmde abstractie, voorbarige algoritmiseringen; vgl. Hart, 1980, 1981).
Wat hier door ons wordt voorgesteld is het verweven van dergelijke leerlijnen in een heel vroeg stadium van het leerproces, waarbij dan aangesloten wordt bij de intuïtieve, informele probleembenadering van kinderen en zonder hen te forceren tot algoritmen en slechtpassende modellen. Verstrengeling van leerlijnen zou moeten bijdragen aan de constitutie van de beoogde mentale objecten binnen de afzonderlijke leerlijnen zowel als aan verhouding. We noemen dit anticiperend leren. (Streefland, 1985b)
Een dergelijke keuze vereist ingewikkelde probleemsituaties voor de kinderen. Wat verhouding aangaat, valt aan conceptuele complexiteit overigens niet te ontkomen (vgl. Vergnaud, 1982). Als het leerproces voortschrijdt zal het doel van de anticiperende activiteiten vanzelfsprekend ook 'opschuiven'. Het door ons geraadpleegde panel van internationale deskundigen bevestigde de noodzaak van een lange termijn-leerproces voor verhouding (Streefland, 1984). Vergnaud kwam in verband met zijn onderzoek en analyse van multiplicatieve structuren tot dezelfde slotsom (vgl. Vergnaud, 1983). Gebaseerd op voorgaande literatuurraadpleging en beschouwing, kan men tot de volgende conclusie - of beter - aanbeveling voor het rekenwiskundeonderwijs en het onderzoek daarvan komen.

3 Aanbeveling

Het leren van verhouding zou gebaseerd moeten worden op levensechte problemen en verschijnselen in de realiteit van en voor kinderen als *bron* (voor de begripsverwerving) en als *toepassingsgebied*. In het begin zoekt men aansluiting bij de kijkwereld van kinderen (1.1). Er dient recht gedaan te worden aan verhouding in al zijn aspecten en verschijningsvormen (1.4; 2.1 en2.4). Het beoogde leerproces zou moeten worden uitgelijnd met anticiperende activiteiten, rekening houdend met samenhangen met andere leersequenties (2.4). Om dit doel te bereiken, zouden schematiseringen en visuele modellen ontwikkeld moeten worden om het lange termijn leerproces te ondersteunen en daarbinnen algemene cognitieve operaties als abstraheren, generaliseren en unificeren te bevorderen (2.2 en 2.3). De nadruk dient gelegd te worden op de wiskundige activiteit, waarin schema's, modellen en

procedures voor probleemoplossing door de kinderen *zelf geconstrueerd* worden met het oog op de opbouw van operationeel begrip, dat wil zeggen begrip, dat toepasbaar is (2.2, 2.3; zie ook Streefland, 1984b). Een kwalitatieve instap tot problemen en het schatten als toegang tot het rekenen, zouden op alle onderscheiden niveaus methodisch in het programma verankerd moeten zijn (1.1).
Abstracties, generalisaties en modellen moeten voortkomen uit de spontane, informele oplossingsstrategieën van de leerlingen, in plaats van door de leerkracht opgelegd te worden, teneinde het geleerde toepasbaar te maken.
Dit zijn naar onze opvatting de kiemen voor een 'ideale' benadering van verhouding in een leerproces over langere termijn.

Literatuur

Abramowitz, S., *Proportionality: As seen by Psychologists and Teachers*, ERIC, ED 111 689.

Abramowitz, S., *Adolescent Understanding of Proportionality Skill Necessary for Its Understanding*, ERIC, ED 690.

Brainerd, C.J., The development of the Proportionality Scheme in Children and Adolescents. *Developmental Psychology*, 1971, 5, 3, 469-476.

Brink, F.J. van den en L.Streefland, Young children (6-8) — ratio and proportion —. *Educational Studies in Mathematics*, 1979, *10*, 403-420.

Bryant, P., *Perception and Understanding in Young Children*, London: Methuen & Co. Ltd, 1974.

Desjardins, M. en J.C. Hétu, *L'Activité mathématique dans l'enseignement des fractions*. Les Presses de l'Université de Québec, 1974.

Dodwell, P., Children's perception and their understanding of geometrical ideas. *Piagetian Cognitive development research and mathematical education*, National Council of Teachers of Mathematics, USA, 1971.

Lesh, R. en M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, New York, 1983.

Falk, R., Analysis of the concept of probability in young children. In: Cohors-Fresenborg, E. en I.Wachsmuth (Eds.), *Proceedings of the second international conference for the Psychology of Mathematics Education*, Osnabrück, 1978, 242-278.

Falk, R,. *Children's Choice Behavior in Probabilistic Situations*. Paper presented at The First National Conference on the Teaching of Statistics, Sheffield, 1982.

Fischbein, E., I. Pampu en I. Manzat, Comparison of ratio and the chance concept in children. *Child development*, 1970, *41*, 377-388.

Fischbein, E., Intuition and Mathematical Education. In: Cohors-Fresenborg, E. en I. Wachsmuth (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Osnabrück, 1978, 148-177.

Freudenthal, H. et al (Eds.), Five years IOWO. On H. Freudenthal's retirement from the directorship of IOWO. *Educational Studies in Mathematics*, 1976, 7, 189-367.

Freudenthal, H., *Weeding and Sowing. Preface to a science of Mathematical Education*. Dordrecht, Boston, 1978.

Freudenthal, H., Verhoudingen als verschijnsel. *Wiskrant*, 1979, *4*, 5-9.

Freudenthal, H., *Didactische fenomenologie van Wiskundige Structuren*, OW & OC, Utrecht, 1984.

Fuson, K.A., An analysis of research needs in projective, affine and similarity geometries, including an evaluation of Piaget's results in these areas. *Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts*, Columbus Ohio, 1978.

Hart, K., The understanding of Ratio in the Secondary School. *Mathematics in School*, 1978, 7, 4-7.

Hart, K.M., *Secondary School Children's Understanding of Ratio and Proportion*, London, 1980, dissertation.
Hart, K.M. (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, London, 1981.
Hart, K., Strategies and errors in secondary mathematics — the addition strategy in ratio. *Proceedings of the International Group PME*, Grenoble, 1981, 199-203.
Inhelder, B. en J. Piaget, *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*, New York: Basic Books, 1958.
Johansson, B. en L. Lybeck, Proportions och proportionalitets-stänkande hog gymnasie elever, ak, I,N-och-T-linje'na, Göteborg, 1978.
Jong, O. de, Het oplossen van natuurwetenschappelijke vraagstukken. *Faraday*, 1982, *51*, 4-8.
Jong, O. de, *Concentratie als 'intensieve' grootheid*. Tijdschrift Didactiek β-wetenschappen 3 (1985) 3, 219-233.
Karplus, R., E. Karplus, M. Formisano en A.C. Paulsen, A Survey of Proportional Reasoning and Control of Variables in Seven Countries. *Journal of Research in Science Teaching*, 1977, *14*, 411-417.
Karplus, R., E. Karplus, M. Formisano en A.C. Paulsen, Proportional reasoning and control of variables in seven countries. In: J. Lockhead en J. Clement (Eds.), *Cognitive process instruction*, Philadelphia, Pennsylvania, 1979, 47-105.
Karplus, R., S. Pulos en E.K. Stage, Adolescents' Structure of Proportional Reasoning. *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley, 1980, 136-143.
Karplus, R. et al, *Proportional Reasoning of Early Adolescents*, Berkeley, 1981. Later gepubliceerd in: R. Lesh en M. Landau, *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, New York, 1983.
Kieren, Th.E., On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In: R.A.Lesh en D.A.Bradbard (Eds.), *Number and Measurement*, Columbus, Ohio: ERIC-SMEAC, 1976.
Kirsch, A., An analysis of Commercial Arithmetic. *Educational Studies in Mathematics*, 1969, *1*, 300-311.
Lovell, K., Proportionality and probability. *Piagetian Cognitive development research and mathematical education*. National Council of Teachers of Mathematics: USA, 1971.
Lybeck, L., *Studies of Mathematics in teaching of science in Göteborg*, Göteborg, 1978.
Martin, J.L., The child's concept of ratio and distances. *Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts*, Columbus, Ohio, 1978.
Müller, D., Perceptual Reasoning and Proportion, *Mathematics Teaching*, 1979, *87*.
Noelting, G., The development of proportional reasoning in the child and adolescent through combination of logic and arithmetic. In: E. Cohors-Fresenborg, en I. Wachsmuth (Eds.), *Proceedings of the second international conference for the Psychology of Mathematics Education*, Osnabrück, 1978, 242-278.
Noelting, G. en L. Gagné, The development of Proportional Reasoning in Four Different Contexts. *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley, 1980a, 126-136.
Noelting, G. en L. Gagné, A Learning Hierarchy for Ratios and Fractions. *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1980b, 292-303.
Noelting, G., The development of proportinal reasoning and the ratio concept. Part I. Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 1980a, *11*, 217-253.
Noelting, G., The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at successive stages: problem solving, strategies and the mechanism of adaptive restructuring, *Educational Studies in Mathematics*, 1980b, *11*, 331-363.

Piaget, J. en B. Inhelder, *The child's conception of space*, New York, 1969.
Piaget, J., *Understanding Cousality*, New York, 1971, speciaal hoofdstuk 12: Linearity, Proportionality and Distributivity.
Piaget, J., Comments on mathematical education. In: A.G.Howson (Ed.), *Developments in Mathematical Education*, Cambridge, 1973, 79-88.
Piaget, J., J.B. Grize, A. Szeminska en V. Bang, *Epistemology and psychology of functions*, Dordrecht, Boston, 1977.
Quintero, A.H., Conceptual Understanding in Solving Two-Step Word Problems with ratio. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1983, *14*, 102-112.
Streefland, L., Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction. *Educational Studies in Mathematics*, 1978, *9*, 51-73.
Streefland, L., The role of rough estimation in learning ratio and proportion — an exploratory research. In: Vermandel, A. (Ed.) *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Antwerpen, 1982, 193-200.
Streefland, L., Subtracting Fractions with Different Denominators. *Educational Studies in Mathematics*, 1982, *13*, 233-255.
Streefland, L., Search for the Roots of Ratio. Some Thoughts on the Long Term Learning Process. (Towards... a Theory), Part I. Reflections on a Teaching Experiment. *Educational Studies in Mathematics*, 1984, *15*, 327-348. Part II. Outline of the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics*, 1985a, *16*.
Streefland, L., The Long Term Learning Process for Ratio. *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Rehovot, Israel, 1983b, 182-188.
Streefland, L., *How to teach fractions so as to be useful*, Utrecht, 1984.
Streefland, L., Vorgreifendes Lernen zum Steuern langfristiger Lernprozesse. In: W. Dörfler, R. Fischer (Hrsg.) *Empirische Untersuchumgen zum Lehren und Lernen von Mathematik*, Wenen, Stuttgart, 1985b, 271-287.
Streefland, L., Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron, *Nieuwe Wiskrant*, 5(1), 1985c, 60-68.
Suydam, M.N., Review of recent research to the concept of fractions and ratio. *Proceedings of the Second International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Osnabrück, 1978, 269-333.
Thom, R., Modern mathematics: does it exist? In: A.G.Howson (Ed.), *Developments in Mathematical Education*, Cambridge 1973, 194-209.
Treffers, A., *Wiskobas Doelgericht*, Utrecht, 1978.
Treffers, A., Geïntegreerd cijferen volgens progressieve schematisering. *Pedagogische Studiën*, 1983, *60*, 351-362.
Treffers, A. en F. Goffree, Rational Analysis of Realistic Mathematics Education. In: Streefland, L. (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Vol II. 1985, 97-123.
Vergnaud, G., The acquisition of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 1979, *10*, 263-274.
Vergnaud, G. et al, *Acquisition des Structures Multiplicatives dans le Premier Cycle du Second Degré*, Parijs, 1979.
Vergnaud, G., Didactics and acquisition of 'multiplicative structures' in secondary schools. In: W.F.Archenbold et al (Eds.), *Cognitive development in research in science and mathematics*, Leeds, 1980.
Vergnaud, G., Multiplicative Structures. In: R.Lesh en M.Landau, (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, New York, 1983.
Wachsmuth, I., M.J. Behr en F.R. Post, Children's Perception of Fractions and Ratio in Grade 5. *Proceedings of the Seventh international Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Rehovot, Israel, 1983, 164-170.