Verhouding in Onderzoek

L. Streefland, OW & OC

Samenvatting
Het onderwerp 'verhoudingen'[1] is mathematisch-didactisch belangrijk en interessant als onderzoeksterrein.
Hierop willen we ons in dit artikel begeven. Zal het een dorre vlakte blijven met een sporadische oase van mathematisch-didactische weelde of juist omgekeerd?
We laten dit graag aan het oordeel van de lezer over, hoewel bij de synthese van de geraadpleegde onderzoeksliteratuur een kritische analyse niet steeds te vermijden is. Bovendien zal aan het eind van deze bijdrage meer en meer een toewending naar het wiskundeonderwijs plaatsvinden. Met de vraag naar dorheid versus mathematisch-didactische weelde willen we slechts aangeven, dat men bij onderzoek met de pretentie van dienstbaarheid aan het onderwijs de weging van het mathematisch-didactisch gehalte niet kan en niet mag overslaan. Van daaruit dient tevens een eventueel kritische stellingname in dit artikel tegenover psychologisch getint onderzoek begrepen te worden. Ook de kwaliteit van psychologisch onderzoek staat of valt met het didactische gehalte van de gekozen taken daarin.

Tot aan het einde van de jaren zeventig was het vooral de invloed van de Geneefse school die de aard en inhoud van dergelijk onderzoek bepaalde. Men beperkte zich tot evenredigheden (Suydam, 1978). Daarmee was het onderwerp getypeerd.
De orientatie van onderzoekers op dit onderwerp onderging geleidelijk verandering, zowel ten aanzien van de wiskundige inhoud als de theorie op de achtergrond. In navolging van Piaget c.s. werd het voltrekken van een verhoudingsredenering aanvankelijk als het uitvoeren van een formele operatie beschouwd. Later volgden meer longitudinale beschouwingen en betrok men ook jonge kinderen in onderzoek (Inhelder & Piaget, 1958; Suydam, 1978).

In dit artikel wordt gepoogd iets van genoemde ontwikkelingen te achterhalen. *Het is ingedeeld conform de stadia in een langlopend leerproces.* Daarmee kon tevens orde gebracht worden in de te verwerken literatuur.
Eerst richten we ons op enkele thema's uit constaterend onderzoek, namelijk:
- het intuïtieve begrip verhouding (par.1.1);
- de aanpak van verhoudingsproblemen door leerlingen van uiteenlopende leeftijd, in het bijzonder moeilijkheden met de numerieke behandeling van verhoudingen, met name het foutief additief redeneren (par.1.2);
- de toepassing van geleerde algoritmen en formules (par.1.3);
- kritiek van onderzoekers, zoals de keuze en analyse van taken (par.1.4).

Vervolgens komen studies aan bod die bijdragen aan een didactiek voor verhouding in een elementair (en voortgezet) wiskunde-curriculum. De aandacht zal zich daarbij speciaal richten op de uitlijning van het curriculum (par.2.4) en op middelen tot ondersteuning van het leerproces over langere termijn (par.2.2 en 2.3).

In de afronding (par.3) zal een aanbeveling gedaan worden voor het wiskundeonderwijs en onderzoek ervan omtrent de organisatie van een langlopend onderwijsleerproces voor verhouding.

1 Het inzicht in verhouding van kinderen volgens uitkomsten van constaterend onderzoek

1.1 Het intuïtief begrijpen van verhouding

Intuïtief begrijpen, wat is dat? Is dat het hebben en toepassen van intuïtieve noties, van 'intuitions', van concept images, bij zekere probleemoplossing? Of het operationeel hebben van mentale objecten: Is het een soort gestripte zône van naaste ontwikkeling voor een begrip, een operatie, een structuur, een idee, uit de wiskunde bijvoorbeeld?
Wanneer iemand iets intuïtief begrijpt, of aanvoelt, wil dat zoveel zeggen als het kunnen leveren van een bepaalde cognitieve prestatie, zonder dat precies duidelijk is waarom en waarmee. Reflectie kan dit aan het licht brengen, bewust maken. Dat er zoiets als intuïtieve noties bestaan, of beter wel moeten bestaan, blijkt onomwonden uit observaties in de literatuur (Fischbein, 1978; Freudenthal, 1983; Piaget, 1972, 1976; Tall, 1981; Thom, 1972; Bringuier, 1977).
In dit artikel kunnen en mogen we er dus wel vanuit gaan dat er zoiets als 'intuitief begrip' is. Bedoeld fenomeen dan ook precies te definiëren, is een heel andere kwestie. Die pretentie hebben we niet. Wat we echter nog wel willen is een voorbeeld geven om te illustreren wat we zo ongeveer bedoelen.

PROBLEEM
Welke van de volgende figuren A, B, C en D is het meest compact? Hoe kun je de compactheid meten? (figuur 1)

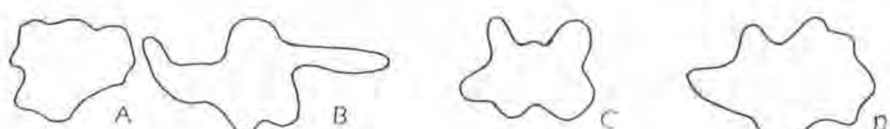


fig.1

Wie deze uitdaging aanneemt en een methode voor het meten van compactheid probeert te ontwikkelen, stelt vrijwel onmiddellijk vast dat *A* compacter is dan *B*. Waarom? Ja, dat zie je zo! Wat is het, dat tot dit 'zo maar' beslist? Is er al een zekere notie van compactheid voorhanden, die op dit kwalitatieve niveau direkt inzetbaar is? Maar hoe zit het met *C* en *D* onderling? En vergeleken met *A*? De *B*, die ogenblikkelijk het veld moest ruimen, was de grilligheid zelve. Zijn twee 'tentakels' zaten hem te veel in de weg om echt lekker compact te kunnen zijn. Als nu die twee 'tentakels' eens geamputeerd werden, dan zou *B* veel aan omtrek prijsgeven en naar verhouding veel minder aan oppervlakte. Zou dat het niet zijn? De verhouding van omtrek en oppervlakte als uitgangspunt voor het meten van compactheid? In ieder geval voelt ieder op voorhand intuïtief aan dat deze

verhouding van alle vlakke figuren bij de cirkel het gunstigst is....
We laten het voorbeeld nu verder voor wat het is en menen er in ieder geval mee aangegeven te hebben, dat er zoiets als intuitieve noties zijn die richting (kunnen) geven aan zeker leerproces.
In het onderhavige artikel wordt onderzoek besproken, waarin een fase van intuitief begrijpen van verhouding als cognitief ontwikkelingsstadium onderscheiden wordt. Met voorbeelden van protocollen uit het onderzoeksmateriaal wordt dit geïllustreerd. Soms ontbreekt hierin echter het beweerde intuitieve begrip volledig en dringt zich een totaal afwijkende uitkomst van protocolanalyse op. Uit het signaleren hiervan vloeit ons inziens niet voort, dat wij intuitief begrip dan ook maar zelf empirisch zouden moeten funderen en vervolgens scherp definiëren. Dat zou een omkering van bewijslast zijn. Iets overeenkomstigs kan worden gezegd van het intuitief begrijpen en het kwalitatief begrijpen, die wel eens tegen elkaar worden uitgewisseld of aan elkaar gelijkgesteld. Ook dit wordt gesignaleerd. Niet om nog grotere verwarring te stichten, doch veeleer om aan te geven dat men niet zorgvuldig genoeg kan zijn wanneer interpretatie de plaats van constatering gaat innemen.
Om dubbelzinnig woordgebruik in dit artikel te vermijden, zullen *meetkundige* verhoudingen en *gevisualiseerde* verhoudingen onderscheiden worden als het gaat om het hebben van intuitief begrip.
Onder *meetkundige* verhoudingen zullen worden verstaan gelijkvormigheden en congruenties in de visueel-perceptieve werkelijkheid van (en voor) kinderen.
De andere categorie wordt vertegenwoordigd door verhoudingen van gegeven grootheidswaarden, welke op deze of gene wijze gevisualiseerd zijn; visueel ondersteunde verhoudingen.
Bijvoorbeeld: een recept van limonade luidt: neem één deel siroop op drie delen water. Dit kan bijvoorbeeld worden weergegeven door (figuur 2):

fig.2

Meetkundige verhoudingen

Eerste meetkundige noties verwerven kinderen (onder andere) door hun kijkwereld te organiseren. Daarin speelt gelijkvormigheid een belangrijke rol en derhalve dus ook verhouding, evenredigheid en invariantie van verhoudingen (Streefland, 1982), die kinderen verwerken en vasthouden (Bryant, 1974). Ook andere auteurs maken van deze bekwaamheid bij kinderen melding (Freudenthal, 1983; Dodwell, 1971).
Hoewel de visueel-perceptieve ruimtelijke ervaring als bron voor het begrijpen van verhouding als zodanig herkend is, komt Fuson, nadat zij de behoefte aan onderzoek op het gebied van projectieve, affiene en gelijkvormigheids-meetkunde geanalyseerd heeft, tot de conclusie dat aan dit ervaringsveld zowel in theorie als in onderzoek voorbijgegaan werd (Fuson, 1978).

Ik aarzel niet hieraan het wiskundeonderwijs zelf toe te voegen, omdat de in onderzoek gebruikte taken en problemen veelal ontleend zijn aan of geinspireerd zijn op het aktuele onderwijs of de daarin gebruikte leerboeken.[2] In verband met intuitief begrip voor verhouding zou men zich moeten realiseren:

> '... hoe kinderen van de wieg af aan theoretische ervaring en vaardigheid opdoen, in het begin onbewust maar geleidelijk aan bewuster.' (Freudenthal, 1979)

Het miskennen van dit ervaringsveld in het wiskundeonderwijs kan voor veel kinderen betekenen dat ze het begrip verhouding in het geheel niet of slechts gebrekkig leren.
De voorwaarden om in het wiskundeonderwijs vroeg, dat wil zeggen met jonge kinderen (vijf à acht jaar) het leerproces voor verhoudingen te beginnen, lijken vervuld, wanneer aangesloten wordt bij de door Freudenthal genoemde theoretische ervaring en vaardigheid. Men zou de bewustmaking moeten bevorderen van wat er aan verhouding in kinderen leeft (vgl. Streefland, 1978, Van den Brink en Streefland, 1979). Waar het op aankomt is dat kinderen de methode gaan beheersen om de realiteit op verkleinde of eventueel vergrote schaal weer te geven. Maar - zoals in par.1.3 nog zal blijken - het streven naar numerieke precisering en algoritmisering van verhouding kost veel leerlingen hoofdbrekens en lokt merkwaardige redeneringen uit, die oppervlakkig beschouwd in tegenspraak lijken met de zoeven getrokken conclusie.

Visueel ondersteunde verhoudingen
Aan het intuitieve begrijpen door kinderen van 'meetkundige verhoudingen' hoeft - gelet op het voorgaande - niet getwijfeld te worden.
Hoe zit dat met visueel ondersteunde verhoudingen? Laten we eerst een voorbeeld beschouwen.
In zijn veel geciteerde 'orange-juice'-experiment gaf Noelting (1980a, 1980b) vergelijkingsproblemen op (figuur 3).

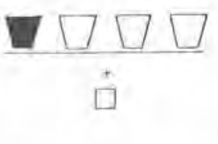


fig.3

Vergelijk de limonades (3,1);(dat wil zeggen 3 delen siroop op 1 deel water) met (1,3). Welke smaakt zoeter en waarom?
In de analyse en ordening van resultaten onderscheidde Noelting een intuitief niveau in overeenstemming met de ontwikkelingsfasen van Piaget.[3] Op dit niveau worden vragen gegeven als (figuur 4 en figuur 5). Bij het beantwoorden wordt door kinderen uitsluitend op de eerste termen gelet (figuur 4) of op de tweede termen (figuur 5).
Intuitief begrijpen is in dit geval sterk verbonden met een bepaald soort oplossingsgedrag. In hun geschreven verklaringen gaven de leerlingen eveneens dergekijke door de getallen bepaalde redeneringen.
Voorbeeld: het vergelijken van (4,1) versus (1,4). Christian (8;11) koos (4,1)

voor het hebben van de sterkste smaak, omdat de ene vier glazen siroop heeft en de ander maar één (Noelting, 1980a).

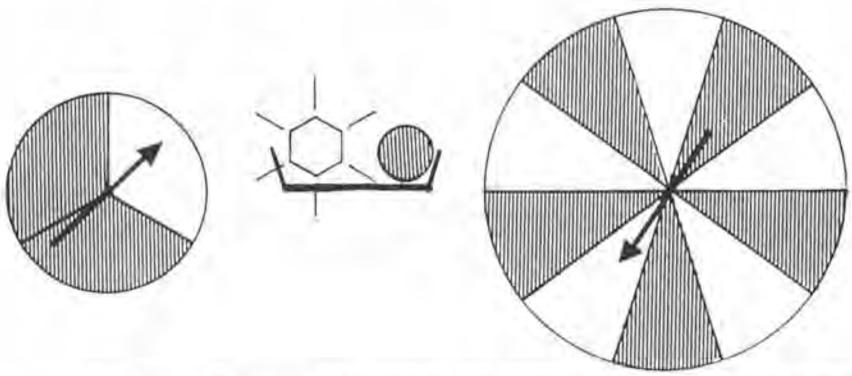
■■■■□ ■□□□□
(4, 1) vs. (1, 4)

fig.4

■□□ ■□□□□□
(1, 2) vs. (1, 5)

fig.5

Feitelijk veronachtzaamt Christan de betrokken verhoudingen. Zonder nadere opheldering kan men hier niet de conclusie trekken dat Christan handelde op basis van intuitief begrip voor verhouding. Integendeel. Overeenkomstig gedrag signaleerde De Jong (1985) bij Mavo-leerlingen in verband met concentraties van oplossingen, een aanwijzing te meer dat *het leren innemen van een verhoudingen-standpunt* als essentieel onderdeel van het onderwijsleerproces voor verhoudingen beschouwd dient te worden.
In het volgende geval is sprake van intuitief begrijpen, maar wellicht van meer. Christiane (12;3) koos voor het goede antwoord toen zij (3,1) en (2,2) vergeleek. Ze argumenteerde dat in het ene geval de hoeveelheden gelijk waren in dat er in het andere meer siroop dan water was (Noelting, 1980a).
Christiane houdt klaarblijkelijk in kwalitatieve zin rekening met de verhouding *tussen* de verschillende grootheidswaarden in beide getallenparen. Haar redenering is kwalitatief, maar wel goed gemotiveerd. Preciezer wiskundige middelen zijn in dit geval niet nodig om in deze kwestie te beslissen. Is dit nu intuitief begrijpen? Wellicht. De expliciete redenering op grond van verhoudingen rechtvaardigt echter de conclusie dat het *meer is dan dat*. Bijgevolg is 'kwalitatief' niet hetzelfde als 'intuitief'.
Falk et al (1980) onderzochten het kansbegrip bij jonge kinderen. Als taken dienden kansexperimenten met kartonnen roulettes in een aantal sectoren met gelijke middelpuntshoeken verdeeld (figuur 6).



A comparison between two roulettes. The shaded area is blue; the unshaded area is yellow. The payoff colour is blue, as represented by a blue bead placed between the roulettes, next to a prize for that task.

fig.6

De inzichten van de jongere proefpersonen werden als intuitief beoordeeld. Falk gaf enkele suggesties om het intuitieve begrip kans bij de kinderen door onderwijs te versterken. Bijvoorbeeld het uitbreiden van hun ervaring door het herhaaldelijk spelen van kans- en waarschijnlijkheidsspelen.
Ons inziens raakt dit de kern van de zaak als het om intuitief inzicht of begrijpen gaat, namelijk nieuwe ervaringen toevoegen aan die waarop ontluikend begrip gebaseerd is (of zou kunnen zijn). Dit inzicht zou men impliciet kunnen noemen of - zoals het in de onderzoeksliteratuur genoemd wordt - intuitief.
Een belangrijke kwestie in Falks research is de poging het *verbale* begrip van waarschijnlijkheid bij kinderen te onderzoeken. De eis tot verbaliseren kan namelijk het (intuitieve) begripsniveau ontmaskeren. In haar conslusies komt het verband met het onderwerp van dit artikel tot uitdrukking. Kinderen vanaf zes jaar bleken gevoel voor verhoudingen te hebben en zochten naar goede formuleringen om dit uit te drukken. Maar de verbale mogelijkheden om hun noties te verwoorden bleken sterk achter te blijven bij het getoonde efficiente gedrag in de experimenten zelf, echter niet bij de bekwaamheid hun begrip van verhoudingen te verwoorden.
In deze opvatting lijkt iemands intuitief begrip af te hangen van de mate van bewustheid en dus van de bekwaamheid zijn oplossingsgedrag en/of redeneertrant onder woorden te brengen.
Wachsmuth et al (1983) concludeerden na een experiment met vijfdeklassers overeenkomstig aan dat van Noelting, dat een kwart van de goede antwoorden onjuist beargumenteerd werd, hetgeen voor de onderzoekers een aanwijzing vormde dat de antwoorden op de gegeven visualiseringen gegrond waren.
Bij herlezing van dit laatste gedeelte over het hebben van intuitief begrip voor verhouding is het gebruik van termen als 'verondersteld', 'lijkt', 'suggereert', 'gevoel' e.d. opvallend.
Desondanks is de conclusie gerechtvaardigd dat het visueel ondersteunen van verhoudingstaken de prestatie gunstig *kan* beinvloeden. Bovendien kan worden gesteld dat het onderscheiden van een stadium van intuitief begrijpen in het totale cognitieve verwervingsproces van verhouding zowel afhankelijk is van de taken die men in onderzoek gebruikt als van de ontwikkelingsfase, waarin de leerlingen verkeerden en dat dit ontwikkelingsstadium weer afhankelijk is van en beinvloed wordt door ervaringen in de werkelijkheid van alledag (vgl. Piaget, 1958; Falk et al, 1980; Karplus, 1980; Noelting en Gagné, 1980; Noelting, 1980a,b).

1.2 Hoe leerlingen verhoudingen behandelen

Foutief additief redeneren

Verhouding doet zich op uiteenlopende wijzen voor. Freudenthal (1983) onderscheidt *interne* en *externe* verhouding. Bij interne verhouding zijn de getallen van een paar *binnen* eenzelfde grootheid gekozen.
Voor de wegen s_1 en s_2 uitgedrukt in een afstand- of lengtemaat en de benodigde tijden t_1 en t_2 om ze te overbruggen, geldt - ingeval er van constante snelheid sprake is - de wegen verhouden zich als de tijden $s_1 \div s_2 = t_1 \div t_2$ (interne verhoudingen). Men kan echter paren

verhoudingsgetallen ook gemengd samenstellen, dus verwijzend naar verschillende grootheden. In ons voorbeeld geldt ook, dat de verhouding van weg en tijd constant is: $s_1 \div t_1 = s_2 \div t_2$. Het is een verhouding *tussen* grootheden, *externe* verhoudingen genoemd.

Dergelijke interne en externe verhoudingen kan men in het oog vatten bij het samenstellen van mengsels volgens zeker recept of bij het beschouwen van dichtheden. Freudenthal spreekt respectievelijk van *composities* en *exposities*. Soortgelijke beschrijvingen voor dezelfde zaken, maar met andere termen, kan men ook elders in de literatuur aantreffen (vgl. Karplus, 1981; Noelting, 1980a,b; Vergnaud, 1982).

In diverse studies bleken leerlingen van uiteenlopende leeftijd een voorkeur te hebben voor het toepassen van interne verhoudingen bij hetoplossen van verhoudingsproblemen (Vergnaud et al, 1979; Lybeck, 1978; Streefland, 1982).

Karplus et al (1983) kwamen echter tot de slotsom dat het vergelijken van externe en interne verhoudingen (door hen 'within' en 'between' genoemd) van vergelijkbare moeilijkheid zijn; van voorkeur voor één van beide was geen sprake. Ook speelt de context van voorgelegde problemen een belangrijke rol (Karplus, 1981; Vergnaud, 1982).

Leerlingen kunnen met zinledige getallen niet uit de voeten. Aan kale getallen zullen ze een betekenis toekennen door ze als hoeveelheden te zien of ze op te vatten als operatoren (vgl. Vergnaud, 1982).

In veel studies werd foutief, additief redeneren bij het oplossen van verhoudingsproblemen vastgesteld. In plaats van verhoudingen in een gegeven probleem te respecteren, wordt het redeneren in dat geval gebaseerd op veronderstelde constante verschillen tussen de gegeven getallen (vgl. Desjardins en Hétu, 1974; Karplus, 1975; Piaget et al, 1977; Hart, 1978; Johansson en Lybeck, 1978; Lybeck, 1978; Martin, 1978; Suarez, 1978; Suydam, 1978; Noelting, 1978, 1980; Hart, 1980, 1981; Karplus et al, 1981).

Ter toelichting een voorbeeld: H. maakt paarse inkt met blauw en rood, twee druppels blauw bij drie druppels rood. Op de vraag hoeveel druppels rood zij bij vier druppels blauw nodig zou hebben antwoordt zij: 'Vijf', met als motivering: 'Ook twee meer.'

Dergelijk additief redeneren, te verklaren vanuit ontoereikend inzicht, is niet overtuigend, ondanks de onaantastbaar lijkende plaats die dit verschijnsel zich in de literatuur verworven heeft. Er kunnen andere verklarende factoren zijn dan het (gebrek aan) inzicht in verhouding. Bijvoorbeeld defecten in de in onderzoek gebruikte taken of moeilijkheden veroorzaakt door de getalgegevens kunnen een belemmering vormen om tot een adequate oplossing te komen. Karplus et al (1981) stelden de complexiteit van uit te voeren rekenkundige operaties in hoofdzaak verantwoordelijk voor het onderdrukken van aanwezig begrip bij leerlingen en zich uitend in foutief, additief oplossingsgedrag. Als het rekenen lastig wordt, zoeken kinderen naar een uitweg, daarbij hun intuitieve voorkeuren volgend (vgl. Hart, 1981a,b).

Later stelden Karplus et al (1983) hun stellingname over deze kwestie aanzienlijk bij en concludeerden, dat de additieve aanpak niet zo verbreid leek als ze eerst *geloofden*.

Ook is er een verklaring gezocht in het (veronderstelde) conflict tussen de construerende activiteit bij het feitelijk samenstellen van mengsels volgens

voorgeschreven mengverhouding en de onderliggende vermenigvuldigingsstructuur (Desjardins en Hétu, 1974). Binnen de op dit onderdeel betrekking hebbende literatuur zijn er relatief weinig studies die melding maken van de neiging van leerlingen om een gegeven verhouding te veranderen met de bedoeling het gevraagde (verhoudings-)paar te verkrijgen via 'tussenstappen', daarbij verhoudingsconstantie respecterend of eventueel niet (vgl. Noelting, 1980a,b; Vergnaud et al. 1979; Hart, 1981; Streefland, 1982; Quintero, 1983). Dergelijk oplossingsgedrag kwam vooral voor bij het vereenvoudigen van vergelijkingstaken. Hart (1981) beschrijft dit gedrag met 'building up to an answer.'
Wat *correct* additief redeneren aangaat, lijkt de waarde ervan voor het leerproces genegeerd of onderschat te zijn in wiskundeonderwijs en onderzoek, vanwege het gesignaleerde *foutieve* additieve redeneren. Het wiskundeonderwijs zou de neiging van kinderen om verhoudingen te variëren om vergelijkingsproblemen te vereenvoudigen moeten respecteren. Deze kwestie wordt in de volgende paragraaf met een voorbeeld toegelicht.

1.3 Algoritmen en formules in het oplossingsgedrag van leerlingen

Het mentaal verwerven van het begrip verhouding in volle omvang (evenredigheid, klasse, verhoudingsconstantie) en het met vaardigheid bewerken van getalgegevens lijken niet in elkaars verlengde te liggen. Noelting (1980b) ging bijvoorbeeld op deze kwestie in en stelde de overeenkomst vast tussen ontwikkeling en leren. De dualiteit kwalitatief-kwantitatief uit de ontwikkeling vindt in het leren zijn uitwerking in begrijpen en toepassen (sommen maken).
Diverse studies bevestigen dit in zoverre, dat melding wordt gemaakt van leerlingen die de formele (reken-)procedures, welke zij geleerd hebben, uit de weg gaan (vgl. Hart, 1980, 1981; Karplus, 1981, 1983; Vergnaud, 1982). Het betreft methoden als die van de kruisprodukten (bijvoorbeeld in $3 \div 6 = 6 \div x$ of $\frac{3}{6}=\frac{6}{x}$ de vierde evenredige bepalen door $3 \times x = 6 \times 6 \leftarrow 3x = 36$ dus $x = 12$) of toepassing van de 'regel van drie' (bijvoorbeeld: met 'acht potloden kosten twee gulden' de prijs van elf potloden bepalen via de prijs van één potlood, dus $8 \div 2$ omzetten in $1 \div \frac{1}{4}$ en dit in $11 \div 3\frac{3}{4}$). Het is dus zinvol verwerving van begrip en (reken-)vaardigheid van elkaar te onderscheiden.
Tot voor kort werden slechte prestaties bij het oplossen van (reken)-problemen toegeschreven aan tekort aan inzicht. Als dè oorzaak van veel mislukking en bron van fouten lijkt het algoritmiseringsproces voor verhouding (of het negeren van de noodzaak van zulk een proces) echter meer voor de hand liggend te zijn.
Vooral de problemen met een sterk beroep op rekenvaardigheid ontlokten het (foutieve), additieve redeneren (Lybeck, 1978; Noelting, 1980; Hart, 1981; Karplus, 1981; Vergnaud, 1982). De regel van drie wordt nauwelijks toegepast door leerlingen (Hart, 1981; Vergnaud, 1982).
Hetzelfde kan gezegd worden voor het toegepast rekenen met breuken, in het bijzonder het vermenigvuldigen (vgl. Hart, 1981). De meeste leerlingen negeren algoritmen en formules, zoals ze in de wiskundeles geleerd zijn (Hart, 1981). De door Noelting (1980b) gepubliceerde protocollen hebben dezelfde kenmerken. De meeste leerlingen loochenen de geleerde algoritmen en

formules, omdat ze niet aansluiten bij de 'natuurlijke' logica waarop zij dergelijke problemen begrijpen en waarop zij ermee omspringen. Bovendien kan er dikwijls vrij eenvoudig een uitweg gezocht worden ten gunste van persoonlijke, informele procedures (vgl. Gold, 1980; Hart, 1981; Vergnaud, 1982).
Het houden van correcte verhoudingsredeneringen wordt begunstigd door voldoende drastische verschillen tussen de getalgegevens. In Noeltings experiment, waarnaar we eerder verwezen, werd aan Nicole (13;0) gevraagd de 'limonades' (2,3),(A) en (1,2),(B) te vergelijken op hun respectieve smaken. Nicole koos het goede antwoord, daarbij argumenterend:

> 'Because in B there is a glass of juice for 2 glasses of water while in A there is a glass of juice for $1\frac{1}{2}$ water, so the taste will be stronger, as there is less water.' (Noelting, 1980a)

Niemand zal betwisten dat Nicole inziet dat een bepaalde smaak en passende verhoudingsconstante hoeveelheden siroop en water met elkaar in verband staan. Maar zie hier wat er gebeurde toen Nicole gevraagd werd (3,2) en (4,3) met elkaar te vergelijken. Ze verklaarde ze gelijk van smaak:

> 'Because on both sides there is one more glass of juice and the rest is devided half-half between water and juice.' (Noelting, 1980a)

De verschillen tussen (3,2) en (4,3) waren minder duidelijk, dus een op verhouding gebaseerde instap geblokkeerd en derhalve 'ontsnapte' Nicole via foutief, additief redeneren. Er lijkt voldoende bewijslast voorhanden voor het respecteren van de voorkeur van leerlingen om verhoudingen middels additieve procedures te vergelijken, speciaal in leerboeken (vgl.par.2). Had Nicole het onderhavige geval op de bedoelde, correcte additieve manier aangepakt, dan had zij als volgt kunnen handelen.
Bij (3,2) doe ik net zoveel siroop en water en nog eens. Ik krijg dan (3,2) → (6,4) → (9,6). Met (4,3) doe ik hetzelfde, dus (4,3) → (8,6). De eerste smaakt sterker, dus moet (3,2) zoeter dan (4,3) zijn.
Gemeten naar de voltrokken bewerkingen zou Nicole dan additatief gehandeld hebben, doch gemeten naar het 'inzicht op de achtergrond' respecteerde zij verhoudingsconstantie. Dat is waar het op aankomt (Streefland, 1983, 1984, 1985a).
De kwestie is nu het onderwijsleerproces voor verhouding zo in te richten, dat de leerlingen de gelegenheid krijgen hun additatieve voorkeuren geleidelijk aan om te zetten in een multiplicatief standpunt (vgl. Vergnaud, 1982 en par.2).

1.4 Tekorten in onderzoek

De invloed van de Geneefse school op onderzoek naar de verwerving van het verhoudingsbegrip is tanende. Een drietal punten van kritiek op door Piaget e.a. bepaalde trends dient zich aan.
Ten eerste is er de gepleegde reductie op verhouding. Piaget en zijn onderzoekers beperkten verhouding tot evenredigheden ($a \div b = c \div x$; $x = ?$). In dat geval veronachtzaamt men vooral dat verhouding een equivalentierelatie is,

die in de verzameling van getallenparen een indeling in *klassen* teweeg brengt met zekere eigenschappen (namelijk: a÷b = a÷b en als a÷b = c÷d, dan is c÷d = a÷b, maar vooral als a÷b = c÷d en c÷d = e÷f, dan is a ÷b = e÷f ofwel a÷b *staat voor* een oneindige klasse van getallenparen, die dezelfde verhouding hebben; a÷b is hun *representant*). Kinderen blijken in hun spontaan omspringen ermee verhouding ook als zodanig te behandelen.
Op grond van voornoemde invloed van Piaget c.s. werden in onderzoekstaken verhoudingen in eerste instantie beperkt tot het vinden van de vierde evenredige.[4] Een bekend voorbeeld is het frequent geciteerde probleem van Mr. Short en Mr. Tall.[5] (Karplus en Karplus, 1975; Karplus et al, 1977; Hart, 1978; Johansson en Lybeck, 1978; Martin, 1978; Suydam, 1978).
Ten tweede kunnen de taken in Piaget-onderzoek gekritiseerd worden vanwege de fysische complexiteit, die verhullend werkt, als het op het verhoudingsbegrip van kinderen aankomt. Er zijn dan te veel variabelen in het spel om over de kwaliteit van het verhoudingsredeneren van kinderen nog verantwoorde uitspraken te kunnen doen (Karplus et al, 1981).
In de derde plaats kan worden gesteld dat verhouding in al zijn facetten en verschijningsvormen tot dusver onvoldoende geanalyseerd is. De gebruikte problemen in het meeste onderzoek doen onvoldoende recht aan het verschijnsel verhouding. Een treffend voorbeeld vindt men bij Jackson en Phillips (1983). Verhouding wordt daar teruggebracht tot een beperkt lijstje van termen en symbolen, dat bij een wat realistischer kijk op het verschijnsel verhouding gemakkelijk met essentiële zaken kan worden uitgebreid (vgl. Freudenthal, 1984). Bijgevolg is een beschrijving van de cognitieve ontwikkeling ervan op deze wankele, inhoudelijke basis onvolledig.
Het is daarom dat diverse auteurs met toenemende voorzichtigheid hun onderzoeksuitkomsten gingen beschouwen. De invloed van door de gekozen taken veroorzaakte obstakels werd meer en meer herkend (vgl. Karplus, 1980; Noelting en Gagné, 1980; Wachsmuth et al, 1983), waarbij in sommige gevallen eerder ingenomen standpunten deels verlaten werden, bijvoorbeeld:

> '... stages of development can be ascertained when a universe of content is strictly maintained, with variability due only to complexity of the content (or quantitative relations between its parts).' (Noelting, 1980a)

Zolang echter de 'universe of content' beperkt blijft tot het vergelijken van paren siroop-water 'mengsels' van uiteenlopende numerieke complexiteit, zoals in het onderhavige geval, lijkt het generaliseren van ontwikkelingsstadia voor het begrijpen van verhoudingen prematuur. Dus is Abramowitz' waarschuwing tegen te onbezonnen generaliseren van toepassing (vgl. Abramowitz, 1975).
Ook is vermeldenswaard dat Noelting voor *vergelijkings*problemen koos in plaats van strikte evenredigheidsproblemen. Dit betekende een tweede stap op de weg van verwijdering van de Piagetaanse traditie (de eerste stap was de bewustwording van de taakafhankelijkheid van onderzoeksuitkomsten). Met het oog op het fenomeen verhouding is deze stap belangrijk, omdat:

> 'It is the meaning of ratio to speak about equality (and inequality) of ratios without knowing how large the ratio is...' (Freudenthal, 1983 of Vergnaud, 1982).

Dus wordt in vergelijkingstaken meer recht gedaan aan de probleemoplossende kracht van verhouding als wiskunde werktuig. Bovendien wordt dan verhouding als equivalentierelatie gerespecteerd ((2,1) → (4,2) → (6,3) etc.). Met betrekking tot congruenties en gelijkvormigheden in de kijk- en (speel!)-wereld van kinderen werd de kritiek op onderzoek reeds vermeld (par.1.1). Bovendien kunnen onvolkomenheden in de verbale expressie van kinderen in interviews en dubbelzinnigheden in de presentatie van problemen de feiten maskeren.
Evenwel het meeste onderzoek waarnaar verwezen werd, gaat mank aan een onvoldoend diepgaande (mathematisch-didaktische) analyse van verhouding, inclusief de samenhang met en invloed op het overige curriculum. De in onderzoek gebruikte taken hebben tot dusver veelal een geisoleerd karakter. Ze zijn verstoken van enige visie op wiskunde en wiskundeonderwijs in het algemeen en op het leerproces voor verhouding in het bijzonder. De gekozen problemen weerspiegelen dikwijls slechts een enkel aspect van verhouding (de vierde evenredige vinden, het vergelijken van mengsels, ...).
Wat voor het wiskundeonderwijs dringend gewenst is - en dat geldt ook voor een onderwerp als breuken - is de beschikbaarheid van een herziene uitlijning van verhouding en evenredigheid met het oog op een leerproces over langere termijn (voor leerlingen van vijf tot vijftien jaar). In de uitlijning zou zowel aan het verschijnsel verhouding in al zijn aspecten als aan de wijze waarop kinderen handelen met verhouding in het leven van alledag recht gedaan moeten worden. Het wiskundeonderwijs-leerproces zou wiskundige werktuigen en hulpmiddelen moeten bieden, zodat de uitlijning van het curriculum en het natuurlijk inzicht van de leerling doelmatig samengebracht worden.

Noten

1. In dit artikel zal sprake zijn van 'verhouding' wanneer bedoeld wordt het grote, allesomvattende concept. Wanneer gerept wordt over 'verhoudingen' worden paren verhoudingsgetallen bedoeld, al dan niet met elkaar in evenwicht. Dus bijvoorbeeld: 8 sinaasappels voor 6 gulden of 12 sinaasappels voor 9 gulden (aantal: prijs als 8 : 6 of als 12 : 9) en: bij een eenparige beweging (een beweging met constante snelheid), verhouden de de wegen (s_1 en s_2 zich als de tijden (t_1 en t_2), dus ($s_1 \div s_2 = t_1 \div t_2$); $s_1 \div s_2$ en $t_1 \div t_2$ zullen we dus verhoudingen noemen als exemplaren van 'verhouding'; $s_1 \div s_2 = t_1 \div t_2$ wordt evenredigheid genoemd.
2. Een uitzondering in positieve zin is de methode *Rekenen en wiskunde* van het project Onderwijs en Sociaal Milieu (coördinatie en eindredactie K.Gravemeijer), uitgave van Bekadidact Baarn.
3. De studies van Dodwell (1971), Lovell (1971), Desjardin & Hétu (1974), Fuson (1978), Noelting (1978, 1980a,b) werden — onder andere — door Piagets theorie beinvloed, of erop gebaseerd. Vooral de studies van Desjardin & Hétu en Noelting volgen de door Inhelder & Piaget (1958) getraceerde ontwikkelingsstadia met betrekking tot verhouding (en/of het breukbegrip).
4. Bij gegeven a, b en v in a : b = c : x heet x de vierde evenredige van a, b en c.
5. Mr Short en Mr Tall zijn twee mannetjes, waarvan verteld wordt dat bij nameten met knopen de één vier en de ander zes knopen meet. Gevraagd wordt de lengte van Mr Tall in paperclips te bepalen als Mr Short op een tekening in paperclips gemeten kan worden.

(wordt vervolgd)