

# LOGICA VAN BEWIJS TOT SPEL

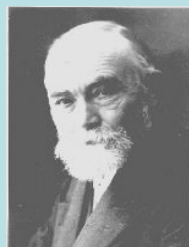
PANAMA, Noordwijkerhout, 20 Januari 2011

Johan van Benthem <http://staff.science.uva.nl/~johan/>

Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam  
Center for the Study of Language and Information, Stanford University  
Institute of Philosophy, Tsinghua University Beijing



## Facebook van de Logica



## Wat Betekent dat Spijkerschrift?

$$\not\vdash A \vee \neg A$$



De Gids, maart 2008

*Een Postzegel vol Logica*

## Klassieke Propositieloga

Sudokuregel  $A \vee B, \neg A \models B$ ,

conclusie  $B$  volgt uit de premissen  $A \vee B$  en  $\neg A$ .

**Propositieloga**, Boole, “Laws of Thought”, 1847.

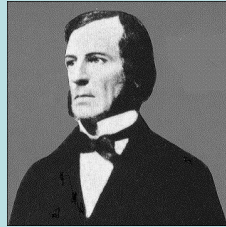
Volledig wiskundig systeem van geldige redeneerwetten.

Binair rekenen met waarheidswaarden  $0$  (onwaar),  $1$  (waar).

Leibniz, 1700: bouw redeneermachines met binair rekenen.

Moderne versie: Boolese circuits beheersen uw computer.

## Logica en Rekenen



## Drie Hoofdwetten

*Wet van de Identiteit*      $A \Rightarrow A$

*Non-Contradictie*      $\neg (A \ \& \ \neg A)$

*Uitgesloten Derde*      $A \vee \neg A$

Komen in diverse culturen voor:

- Interpretaties
- beschrijving van de wereld,
  - patroon in conversatie en dialoog.

## Van Waarheid naar Bewijs

Wiskundige waarheid: alleen via *bewijs*?

Brouwer-Heyting-Kolmogorov interpretatie:

Bijv. bewijs van  $A \& B$  is een paar van een bewijs voor  $A$  en een bewijs voor  $B$ ,  
bewijs van  $\neg A$  is weerlegging van  $A$ .

Uitgesloten derde zegt dan dat  
elke bewering is bewijsbaar of weerlegbaar.

In strijd met Gödel's Onvolledigheidsstellingen.

*Twisten we dan nog wel over hetzelfde principe?*

## Intuitionistische Logica

Veel oude principes blijven geldig: bijv.  $\neg(A \& \neg A)$ .

Reductio ad Absurdum:

*Uit  $A$  volgt tegenspraak, dus  $\neg A$ .*

Niet geldig: Uit  $\neg A$  volgt tegenspraak, dus  $A$ .

Intuitionistisch:  $\neg\neg A$  niet equivalent met  $A$ .

Klassieke logische negatie is zwakker.

Intuitionist ontkent Uitgesloten Derde, weerlegt het niet:

$\neg(A \vee \neg A)$  is niet geldig,  $\neg\neg(A \vee \neg A)$  juist wel.

## Van Bewijs Naar Informatie

**Beth Modellen**, informatiestadia,  
proces loopt van links naar rechts



E.W. Beth

In stadium  $1$  is de disjunctieve bewering  $A \vee \neg A$  onwaar.

In eindpunt  $2$  geldt klassieke logica. Daarom ook  $\neg\neg(A \vee \neg A)$ ,  
want de combinatie  $\neg\neg$  betekent “uiteindelijk in het proces”.

Bomen in het algemeen *vertakkend*, soms zelfs *oneindig*.

## Dialogospelen

Bewijs als intersubjectieve conversatie.

Argumentatie *spel* met Proponent, Opponent.

Verdedig  $A \vee B$ : speler *kiest* welke zij verdedigt.

Aanvallen  $A \vee B$ : val beide aan (de *ander* kiest).

Negatie  $\neg A$  geeft *rolwisseling* tussen de spelers.

Geldigheid: *winnende strategie* voor Proponent.

Observatie: de Sudoku regel is in deze zin spel-geldig,  
en evenzo alle intuitionistische redeneerprincipes.

maar Uitgesloten Derde niet (‘keuze komt te vroeg’).



Paul Lorenzen

## Logica en Oplossen van Spelen

**Stelling van Zermelo** In elk 2-persoonsspel van eindige diepte met win/verlies heeft een van de twee spelers een winnende strategie.



*Stel het spel duurt 1 zet, en Speler I begint. Dan heeft I óf een zet die tot winst leidt (en I's winnende strategie is: 'kies zo 'n winnende zet'), óf alle zetten leiden tot verlies voor I, en in dat geval heeft juist Speler II een winnende strategie ('wacht af, en win'). Enzovoorts.*

**Uitgesloten Derde!** Vele logische spelen in dit genre.

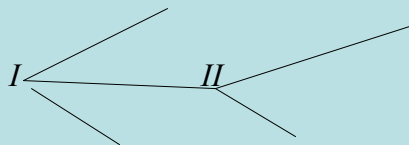
Verband met Schaken (herontdekking door Euwe).

## Spelen in Wiskunde

Brouwer's definitie van dimensie: spelen in topologie.

[Dekpuntsstelling: bewijs niet intuitionistisch...]

Zermelo's Stelling ook voor *oneindige spelen*?



Of **I** heeft een winnende strategie, of **II** heeft een strategie die **I** *verhindert om ooit een winnende positie te bereiken.*

Genoeg voor winnende strategie voor speler **II**?

Spelen in grondslagen verzamelingenleer:

**Axioma van Gedetermineerdheid.**

# Logica en Speltheorie

Numerieke *voorkeuren*, Backwards Induction.  
Onvolledige informatie, Nash *evenwichten*.  
Gemeenschappelijke kennis *rationaliteit*.



# Marie Curie Center Gloriclass



**EUROCORES Programme**  
European Collaborative Research

LogICCC - Modelling intelligent interaction  
Logic in the humanities, social and  
computational sciences

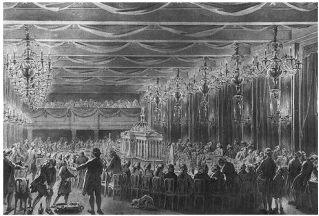
UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM  
**RESEARCH TRAINING SITE GLORICLASS**

► Research Training Site GLORIClass: Halftime Event

Research Training Site  
GLORIClass

The Main Themes  
People  
Opening Event  
Halftime Event  
GLORIClass Seminar  
Events  
Guests  
Open Positions

**Halftime Event**  
The Marie Curie Research Training Site GLORIClass took up its work in February 2006. Now it's coming up to the half-way point, the GLORIClass Halftime Event.  
On February 13, 2008, we will celebrate this event. It will take place at the historical *Doelenzaal* of the university library.



Time: 09:30  
Location: Universiteitsbibliotheek, Singel 425, 1012 WP Amsterdam  
How to get here: From Central Station, take train number 1, 2, or 5 to Koningsplein. [Cross the river and turn left to Singel.](#)  
Contact: [Comnoise](#) "mbsauder" + the at-sign + "science.uva.nl"

## Interactief Rekenen

Modern rekenen is interactief: informatica ~ speltheorie.

*Spelalgebra* is procesalgebra. Naast keuze ( $\vee$ ,  $\&$ ) en rolwisseling  $\neg$  nu ook *sequentieel product*  $A \bullet B$  van spelen, en zelfs *parallele compositie*  $A+B$ :

**Copy Cat** U schaakt simultaan, als Wit en Zwart. Laat Fisher als Wit openen, *copieer* zijn zet in het andere spel als Wit, en blijf daar, zodat hij nu aan de beurt is. Copieer dan zijn antwoord terug. Etc. Hetzelfde spel in beide spelen, U wint er één.



Samson Abramsky

*Rijkere logica.*

Logische pointe:  $A + \neg A$  is geldig!

## Een Serie Postzegels?



niet  $A \vee \neg A$

$\neg(A \vee \neg A)$

$A + \neg A$

## Andere Informatiebronnen



## Chinese Logica: Drie Bronnen



Mo Tze (470 – 390 v. Chr.)



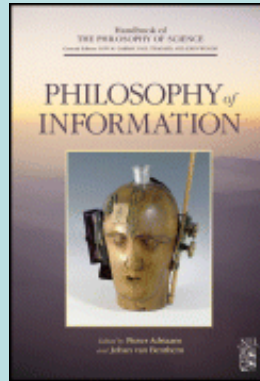
ZhuangZi & de Vissen

*Zhi: Wen, Shuo, Qin* □ □ □ □

Ook een sociale dimensie van informatie over elkaar:

Kennis ontstaat door *bewijs*, *ervaring* en *vragen*.

## Informatiestromen

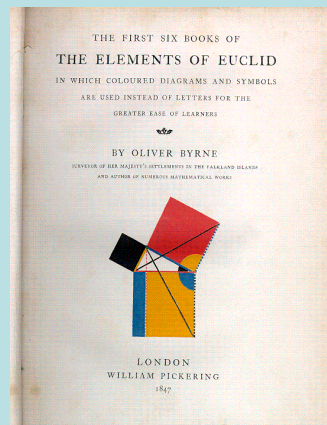


Handbook Philosophy  
of Information, 2008

## Logica: Bewijs en Conversatie

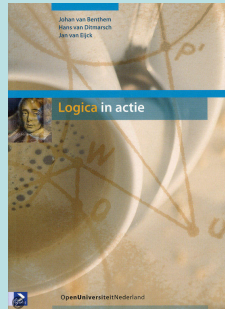
*Euclides Elementen*

*Plato Dialogen*



## Opencourse Logic in Action

**Propositielogica, Predikaatlogica, Logica van kennis,  
Dynamische logica van handelingen, Logica en spel.**



Opencourse team

<http://staff.science.uva.nl/~jaspars/logicinaction/>

## Coda: Logica in de Oriënt

**Shah Abdul Aziz:**

The Hindus have a special inclination for mathematics.

The Franks have a special aptitude for industry and technology.

But their minds, with few exceptions, cannot grasp  
the finer points of logic, theology, and philosophy.”



# Iran 2009

Iran Journal of Mathematics Education

