



EMMY NOETHER & SYMMETRIE

NWD 2017

Gunther Cornelissen (Universiteit Utrecht)

1882-1935





INHOUD

- Stambomen, romans, boeken en cultuurstudies
- Noether als zinloos rolmodel
- Noether hobbyt in de natuurkunde
- Interessante carrière-aspecten
- Noether deelt abstracte algebra uit

BRONNEN

- D. Neuenschwander: *Emmy Noether's Wonderful Theorem*
- Mechthild Koreuber: *Emmy Noether, die Noether-Schule und die moderne Algebra - Zur Geschichte einer kulturellen Bewegung*
- Margaret Tent: *Emmy Noether - The Mother of Modern Algebra*



Rolmodel?

Niet Emmy Noether



WISKUNDIGE STAMBOMEN

J. Kluyver

E. Dirksen

J. van der Corput

C.-G. Jacobi

J. Koksma

P. Gordan

P. Mullender

E. Noether

W. Kuyk

E. Witt

F. Van Oystaeyen

G. Harder

J. Van Geel

E.-U. Gekeler

G. Cornelissen



Mathematics Genealogy Project

Home

Search

Extrema

About MGP

Links

FAQs

Posters

Submit Data

Contact

Mirrors

Donate

Emmy Amalie Noether

[Biography](#) [MathSciNet](#)

Ph.D. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg 1907



Dissertation: *Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form*

Mathematics Subject Classification: 06—Order, lattices, ordered algebraic structures

Advisor: [Paul Albert Gordan](#)

Students:

Click [here](#) to see the students ordered by family name.

Name	School	Year	Descendants
Heinrich Grell	Georg-August-Universität Göttingen	1926	250
Margarethe Hermann	Georg-August-Universität Göttingen	1926	
Wilhelm Dörnte	Georg-August-Universität Göttingen	1927	
Yaakov Levitzki	Georg-August-Universität Göttingen	1929	44
Werner Weber	Georg-August-Universität Göttingen	1929	6
Max Deuring	Georg-August-Universität Göttingen	1931	675
Hans Fitting	Georg-August-Universität Göttingen	1931	
Ludwig Schwarz	Georg-August-Universität Göttingen	1933	
Chiungtze Tsen	Georg-August-Universität Göttingen	1934	
Ernst Witt	Georg-August-Universität Göttingen	1934	175
Otto Schilling	Philipps-Universität Marburg	1935	77
Ruth Stauffer	Bryn Mawr College	1935	
Werner Vorbeck	Georg-August-Universität Göttingen	1935	
Wolfgang Wichmann	Georg-August-Universität Göttingen	1936	

According to our current on-line database, Emmy Noether has 14 [students](#) and 1233 [descendants](#).
We welcome any additional information.

A service of the
NDSU Department
of Mathematics, in
association with the
American
Mathematical
Society.

NOETHER HOBBYT IN DE NATUURKUNDE

*behoudswetten en
symmetrieën*

Invariante Variationsprobleme.

(F. Klein zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum.)

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918¹⁾.

Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und seine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen²⁾. Insbesondere sind die zweite Kleinsche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beein-

1) Die endgiltige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.

2) Hamel: Math. Ann. Bd. 59 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27./1. 1917. Für die weitere Litteratur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918.

In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode.

NOETHER'S STELLING (1915)

.....

- Hilbert wees haar op een probleem met “behoud van energie” in de algemene relativiteitstheorie (waar geen “globale tijd” bestaat).
- $E=mc^2$?
- Noether vond als “verklaring” een algemeen verband tussen behoudswetten en symmetrieën.
- Goedgekeurd als (tweede) Habilitationsschrift.
- wordt pas na 1950 bekend.

BEHOUD VAN ENERGIE (WALTER LEWIN, MIT 8.01, LECTURE 11)

.....



BEHOUDEN GROOTHEID

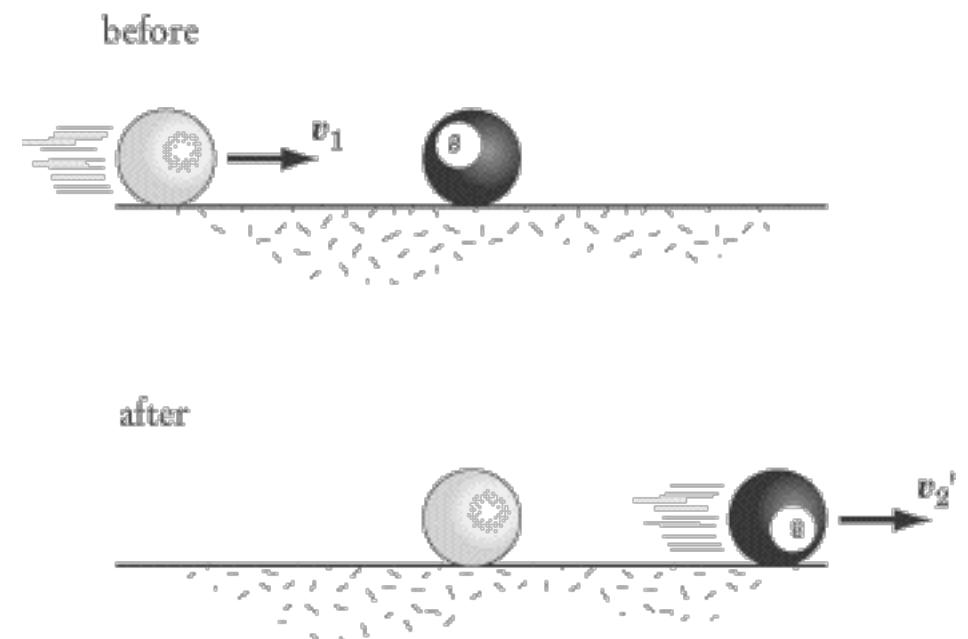
.....

- Een *behouden grootte* van een mechanisch systeem is een verandert niet in de tijd/tijdens een proces van waarde.
- Niet hetzelfde als een *invariante grootte*. Die hangt niet van de keuze van coördinaten af.



VOORBEELD: biljart

- in vast coördinaatsysteem is het moment *niet nul* (want de ene bal beweegt en de andere niet)
 - in een bewegend coördinaatsysteem met het zwaartepunt als middelpunt is het totale moment *nul*.
- **VRAAG:** is een behouden grootte altijd invariant? Is een invariant grootte altijd behouden?



SYMMETRIE

➤ In de Stelling van Noether gaat het om volgende symmetrie:



➤ Een symmetrie *van de bewegingsvergelijking*. Dit is coördinaat-transformatie waaronder de vergelijking invariant is (niet noodzakelijk het bewegende object).

➤ De symmetrie hangt op continue wijze af van een parameter ε , en de invariantie is asymptotisch voor kleine $\varepsilon \rightarrow 0$.

VOORBEELD Een deeltje beweegt langs de x-as onder invloed van een kracht $F = -\partial U / \partial x$, onder Newton's wet $F = dp/dt$, impuls $p = m \, dx/dt$, massa m . Impuls p is behouden als $dp/dt = 0$, d.wz. U onafhankelijk is van x , dus als U translatie-invariant is.

VOORBEELDEN

Symmetrie	Behouden grootheid
Tijd	Energie
Translatie	Impuls
Rotatie	Hoekimpuls

VRAAG Is er sprake van symmetrie in deze zin bij een meteoriet die rond de aarde draait? Enkel als de meteoriet een symmetrische vorm heeft?

“BEWIJS”

John Baez, <http://math.ucr.edu/home/baez/noether.html>

.....

We hebben deeltje in 1 dimensie met positie q , impuls p , waarop een kracht F werkt. Neem aan dat er een *Lagrangiaan* $L(q, q')$ bestaat zodat is voldaan aan

$$p = \frac{dL}{dq'}; F = \frac{dL}{dq}. \quad L = mq'^2 - U(q)$$

De wet van Newton zegt $p' = F$.

Stelling van Noether. *Stel dat L een symmetrie heeft, d.w.z. een transformatie*

$$\begin{cases} q = q(\varepsilon), \\ q' = q'(\varepsilon) \end{cases}$$

zodat

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(q(\varepsilon), q'(\varepsilon)) = 0;$$

dan is

$$C := p \frac{dq(\varepsilon)}{d\varepsilon}$$

een behouden grootte, d.w.z. $C' = 0$.

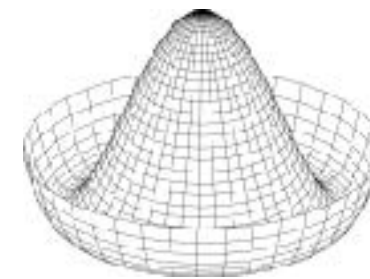
Bewijs.

$$\frac{d}{dt} p \frac{dq(\varepsilon)}{d\varepsilon} = p' \frac{dq(\varepsilon)}{d\varepsilon} + p \frac{dq'(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{dL}{dq} \frac{dq(\varepsilon)}{d\varepsilon} + \frac{dL}{dq'} \frac{dq'(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} L(q(\varepsilon), q'(\varepsilon)) = 0.$$

ONTVANGST

E.L. Hill, Hamilton's principle and the conservation theorems of mathematical physics, *Reviews of Modern Physics*, 23 (1951), pp. 253–260.

- Actieprincipes worden dominant in deeltjesfysica
- Symmetrie en *gebroken* symmetrie

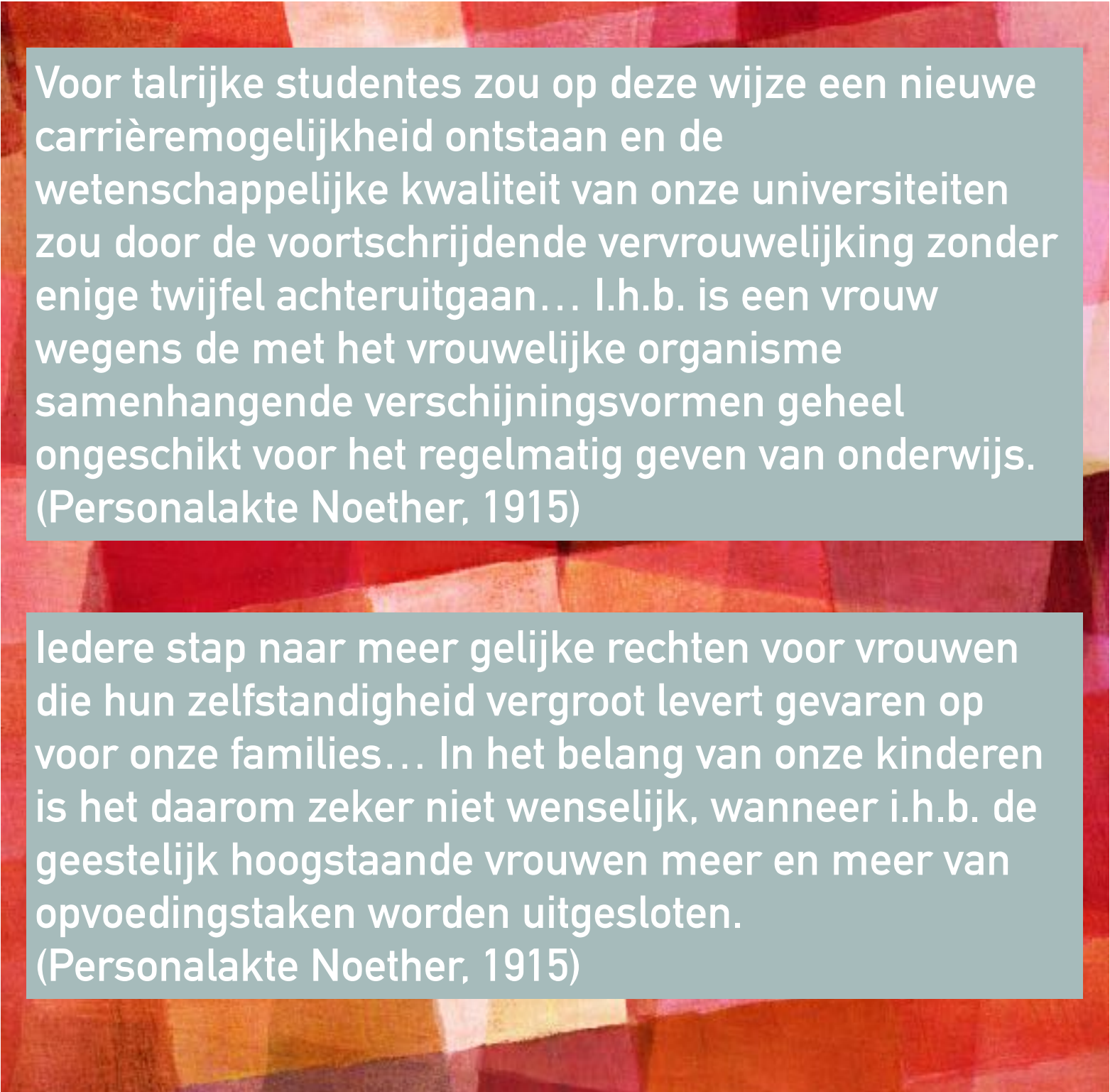


1920

1950

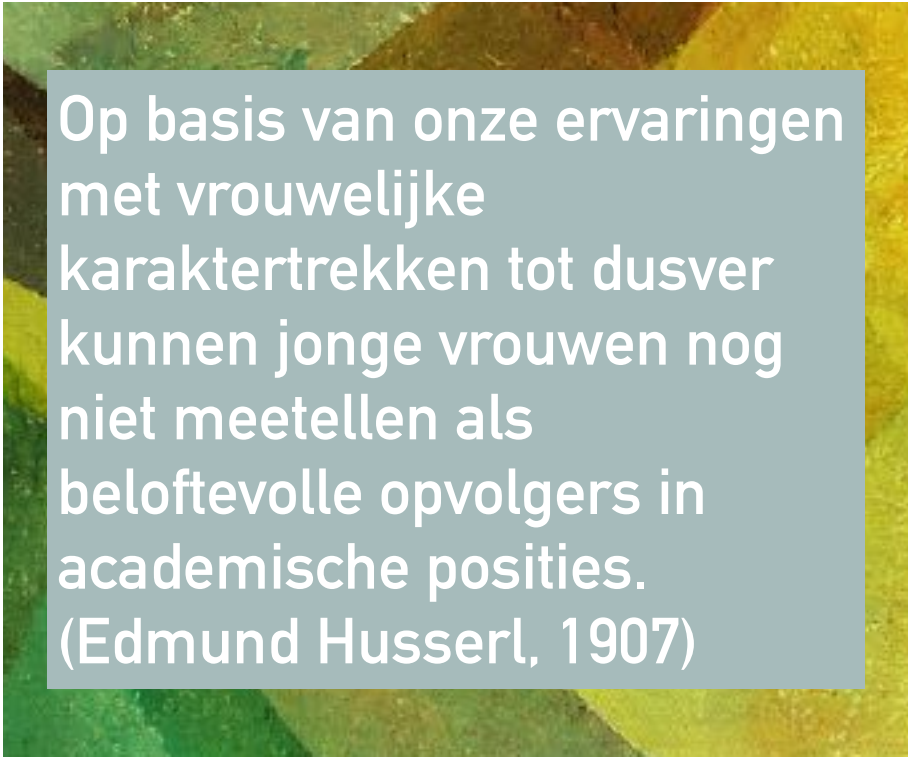
2000

- bijna geen citaties voor 1951
- Einstein, Hilbert, Klein, Weyl,...
- Wel voor Hilbert en Klein
- Deel van de formalisme-strijd?
- Lagrangianen niet gebruikelijk

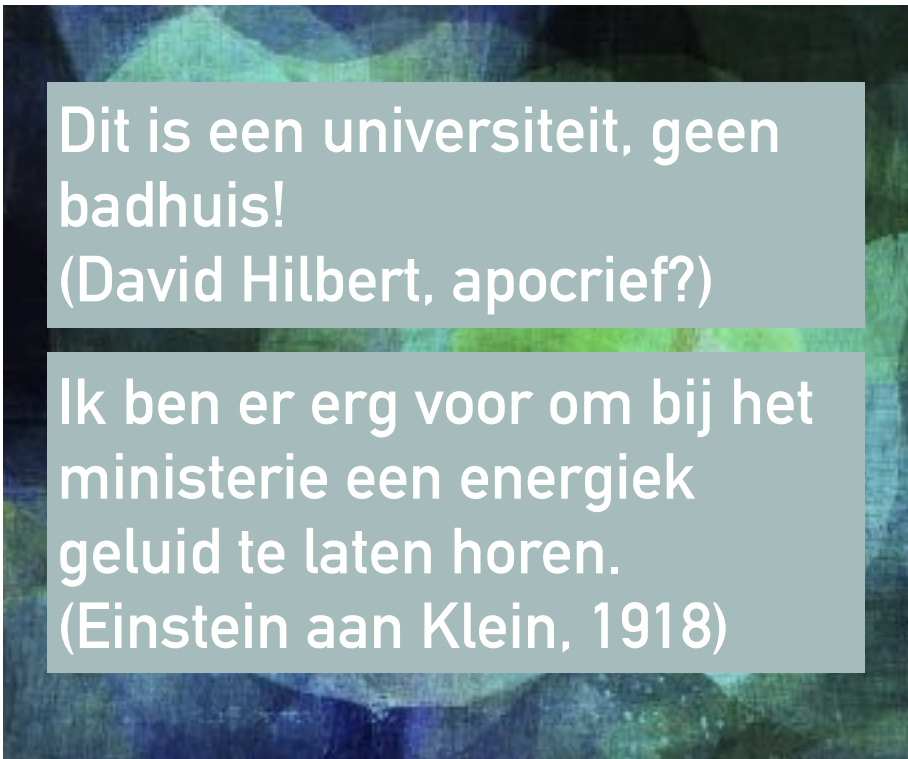


Voor talrijke studentes zou op deze wijze een nieuwe carrièremogelijkheid ontstaan en de wetenschappelijke kwaliteit van onze universiteiten zou door de voortschrijdende vervrouwelijking zonder enige twijfel achteruitgaan... I.h.b. is een vrouw wegens de met het vrouwelijke organisme samenhangende verschijningsvormen geheel ongeschikt voor het regelmatig geven van onderwijs. (Personalakte Noether, 1915)

Iedere stap naar meer gelijke rechten voor vrouwen die hun zelfstandigheid vergroot levert gevaren op voor onze families... In het belang van onze kinderen is het daarom zeker niet wenselijk, wanneer i.h.b. de geestelijk hoogstaande vrouwen meer en meer van opvoedingstaken worden uitgesloten. (Personalakte Noether, 1915)



Op basis van onze ervaringen met vrouwelijke karaktertrekken tot dusver kunnen jonge vrouwen nog niet meetellen als beloftevolle opvolgers in academische posities. (Edmund Husserl, 1907)



Dit is een universiteit, geen badhuis! (David Hilbert, apocrief?)

Ik ben er erg voor om bij het ministerie een energiek geluid te laten horen. (Einstein aan Klein, 1918)

Interessante Carrière-aspecten...

Emmy Noether's "Habilitation" werd in 1915 en 1917 afgewezen door het ministerie.



GLOBAL SUMMIT
OF WOMEN
2014

Paris,
France



SOMMET MONDIAL
DES FEMMES
2014

Paris,
France



S. BANERJI



J. McDONNELL



J. KOKO



S. TRIUJILLO



F. OUDEA



M. LANDEL

Groepen, Ringen, Idealen, Galoistheorie

Handschrift Galois

TIJDSLIJN

- 1907 promoveert in Erlangen bij Paul Gordan over invariantentheorie.

- Berekeningen, algoritmes
- Nauwelijks concepten

“Een formulejungle”

- E. Noether over haar proefschrift

- Onder invloed van Ernst Fischer, David Hilbert,...

- Geen berekeningen, wel (existentie-)bewijzen
- Nieuwe concepten
- Wiskunde met begrippen i.p.v. formules en figuren

DERDEGRAADS VERGELIJKING: PRE-NOETHER

Substitutie 1. (wat Cardano aan het eind toevoegde).

probeer x te vervangen door $y + s$ met s een voorlopig nog onbekend constant getal.

Dat geeft $(y + s)^3 + b(y + s)^2 + c(y + s) + d = 0$

$$\Rightarrow y^3 + 3y^2s + 3ys^2 + s^3 + by^2 + 2bsy + bs^2 + cy + cs + d = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + y^2(3s + b) + y(3s^2 + 2bs + c) + (s^3 + bs^2 + cs + d) = 0$$

Aan de tweede term zie je dat je, als je kiest $3s + b = 0$, ofwel $s = -\frac{1}{3}b$, dat dan de term met y^2 wegvalt. Dan is de vergelijking tenminste een stapje eenvoudiger geworden.

We hebben het oorspronkelijke probleem teruggebracht tot het oplossen van $y^3 + py + q = 0$

Kunnen we niet nóg zo'n substitutie verzinnen?

Als je gaat proberen y te vervangen door $z + s_2$ dan zal dat niet lukken! Immers dan is $x = y + s = z + s_2$ als dat iets nieuws oplevert, dan hadden we dat meteen bij de eerste substitutie ook al wel gevonden.

Het revolutionaire idee is nu: Probeer eens y te vervangen door $m + n$. Twee variabelen!

Geen constanten maar voor elke p of q zijn m en n weer anders. Ofwel: m en n hangen samen af van p en q .

Dat betekent dat we nog vrijheid hebben in het kiezen van m en n , immers er zijn oneindig veel koppeltjes (m, n) vinden zodat er dezelfde y uitkomt. Deze vrijheid zullen we straks gaan gebruiken.

invullen van $y = m + n$ geeft:

$$(m + n)^3 + p(m + n) + q = 0$$

$$\Rightarrow m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 + pm + pn + q = 0$$

$$\Rightarrow m^3 + 3mn(m + n) + n^3 + p(m + n) + q = 0$$

Er zijn natuurlijk niet voor niets twee termen rood gekleurd.....

Als we er nu voor zorgen dat $3mn = -p$ dan vallen zomaar die tweede én de vierde term tegen elkaar weg!

Twee voor de prijs van één!

onze oplossing gaat dan zó verder:

$$\Rightarrow m^3 + n^3 + q = 0$$

bedenk dat $n = -\frac{p}{3m}$ dan vind je:

$$\Rightarrow m^3 + \left(-\frac{p}{3m}\right)^3 + q = 0 \Rightarrow m^3 - \frac{p^3}{27m^3} + q = 0$$

Vermenigvuldig met $27m^3$ en er staat $27m^6 - p^3 + 27qm^3 = 0$

Substitutie 3.

Als je nu in deze laatste vergelijking m^3 gelijk stelt aan z , dan staat er $27z^2 + 27qz - p^3 = 0$

En dat is een kwadratische vergelijking.

Die heeft als complexe getallen altijd twee oplossingen, via onze oude vertrouwde ABC-formule.

En dan begint het trapsgewijs terugredeneren:

DERDEGRAADS VERGELIJKING: PRE-NOETHER

Substitutie 1 (wat Cardano aan het eind toevoegde).

probeer x te vervangen door $y + s$ met s een voorlopig nog onbekend constant getal.

Dat geeft $(y + s)^3 + b(y + s)^2 + c(y + s) + d = 0$

$$\Rightarrow y^3 + 3y^2s + 3ys^2 + s^3 + by^2 + 2bsy + bs^2 + cy + cs + d = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + y^2(3s + b) + y(3s^2 + 2bs + c) + (s^3 + bs^2 + cs + d) = 0$$

Aan de tweede term zie je dat je, als je kiest $3s + b = 0$, ofwel $s = -\frac{1}{3}b$, dat dan de term met y^2 wegvalt. Dan is de vergelijking tenminste een stapje eenvoudiger geworden.

We hebben het oorspronkelijke probleem teruggerecht tot het oplossen van $y^3 + py + q = 0$

Kunnen we niet nóg een substitutie verzinnen?

Als je gaat proberen y te vervangen door $z + s_2$ dan zal dat niet lukken! Immers dan is $x = y + s = z + s_2$ als dat iets nieuws oplevert, dan hadden we dat meteen bij de eerste substitutie ook al wel gevonden.

Het revolutionaire idee is nu: Probeer eens y te vervangen door $m + n$. Twee variabelen!

Geen constanten maar voor elke p of q zijn m en n weer anders. Ofwel: m en n hangen samen af van p en q .

Dat betekent dat we nog vrijheid hebben in het kiezen van m en n , immers er zijn oneindig veel koppeltjes (m, n) vinden zodat er dezelfde y uitkomt. Deze vrijheid zullen we straks gaan gebruiken.

invullen van $y = m + n$ geeft:

$$(m + n)^3 + p(m + n) + q = 0$$

$$\Rightarrow m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 + pm + pn + q = 0$$

$$\Rightarrow m^3 + 3mn(m + n) + n^3 + p(m + n) + q = 0$$

Er zijn natuurlijk niet voor niets twee termen rood gekleurd.....

Als we er nu voor zorgen dat $3mn = -p$ dan vallen zomaar die tweede én de vierde term tegen elkaar weg!

Twee voor de prijs van één!

onze oplossing gaat dan zó verder:

$$\Rightarrow m^3 + n^3 + q = 0$$

bedenk dat $n = -\frac{p}{3m}$ dan vind je:

$$\Rightarrow m^3 + \left(-\frac{p}{3m}\right)^3 + q = 0 \Rightarrow m^3 - \frac{p^3}{27m^3} + q = 0$$

Vermenigvuldig met $27m^3$ en er staat $27m^6 - p^3 + 27qm^3 = 0$

Substitutie 3.

Als je nu in deze laatste vergelijking m^3 gelijk stelt aan z , dan staat er $27z^2 + 27qz - p^3 = 0$

En dat is een kwadratische vergelijking.

Die heeft als complexe getallen altijd twee oplossingen, via onze oude vertrouwde ABC-formule.

En dan begint het trapsgewijs terugredeneren:

.....

DERDEGRAADS VERGELIJKING: POST-NOETHER

De Galoisgroep van het splijtlichaam van een irreducibel polynoom f van graad 3 over het lichaam F voortgebracht door de coëfficiënten van f is een transitieve ondergroep van S_3 , dus gelijk aan A_3 (precies als de discriminant Δ van f een kwadraat is in F) of S_3 . Allebei deze groepen zijn oplosbaar, dus is f ook oplosbaar in radicalen.

Om de oplossing te vinden: A_3 is cyclisch, en S_3 heeft een compositierij $S_3 \geq A_3 \geq 1$ die correspondeert met een toren lichaamsuitbreidingen

$$F \subseteq F(\sqrt{\Delta}) \subseteq K.$$

Door aan K een derde eenheidswortel toe te voegen, kan K berekend worden via resolventen van Lagrange.

in de stijl van: B. van der Waerden, Algebra, Erster Teil. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether

► **VRAAG:** Wat zijn complexe getallen?

NOETHER'S ALGEBRA

- Ringen, idealen, modulen
- Inverse probleem in Galoistheorie
- Noether's bovengrens voor generatoren van invariantenringen
- Stijgende en dalende rij-condities voor idealen, Noether-inductie
- Lasker-Noether stelling over factorisatie
- Abstracte eliminatietheorie
- Homologiegroepen
- Algebras, delingsalgebras, cyclische algebras,
- Skolem-Noether stelling
- Brauer-Noether stelling



- gaf “slecht” onderwijs voor beginners
- ontwikkelde nieuwe theorie tijdens het onderwijs geven aan studenten
- die studenten werkten de nieuwe theorie uit, o.a. in boeken

De “Noether-school” in abstract algebra

- **VRAAG:** Voor de middelbare school?

OPLOSSEN VAN $x^2+y^2=z^2$ MET RINGEN

.....

- We nemen aan dat x en y geen gemeenschappelijke delers hebben. Door modulo 4 rekenen zien we dat z oneven is.
- Werk in de ring $R = \mathbf{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$.
 - Ieder “getal” heeft een norm $N(a + bi) = a^2 + b^2$ en $N(uv) = N(u)N(v)$.
 - “Eenheden” in R (“getallen” waarvan het inverse ook in R zit) hebben norm een deler van 1; dus de eenheden zijn $\pm 1, \pm i$.
 - In R is ieder “getal” op unieke wijze te ontbinden in priemenvorm (op volgorde van priemenvorm en op eenheden na) – bewijs door “delen met rest” in R .
- Het probleem wordt *multiplicatief*: $(x + iy)(x - iy) = z^2$.
- Gemeenschappelijke “delers” in R van $x + iy$ en $x - iy$ delen $2x$ en $2iy$, dus 2. Maar z is oneven, dus $x + iy$ en $x - iy$ verschillen een eenheid in R .
- Dus er bestaan gehele getallen a, b zodat $x + iy = \pm(a + bi)^2$ of $x + iy = \pm i(a + bi)^2$.
- Uitwerken geeft (op verwisselen van a en b na): $x + iy = a^2 - b^2 + 2abi$, en dus

$$x = a^2 - b^2; y = 2ab; z = a^2 + b^2.$$

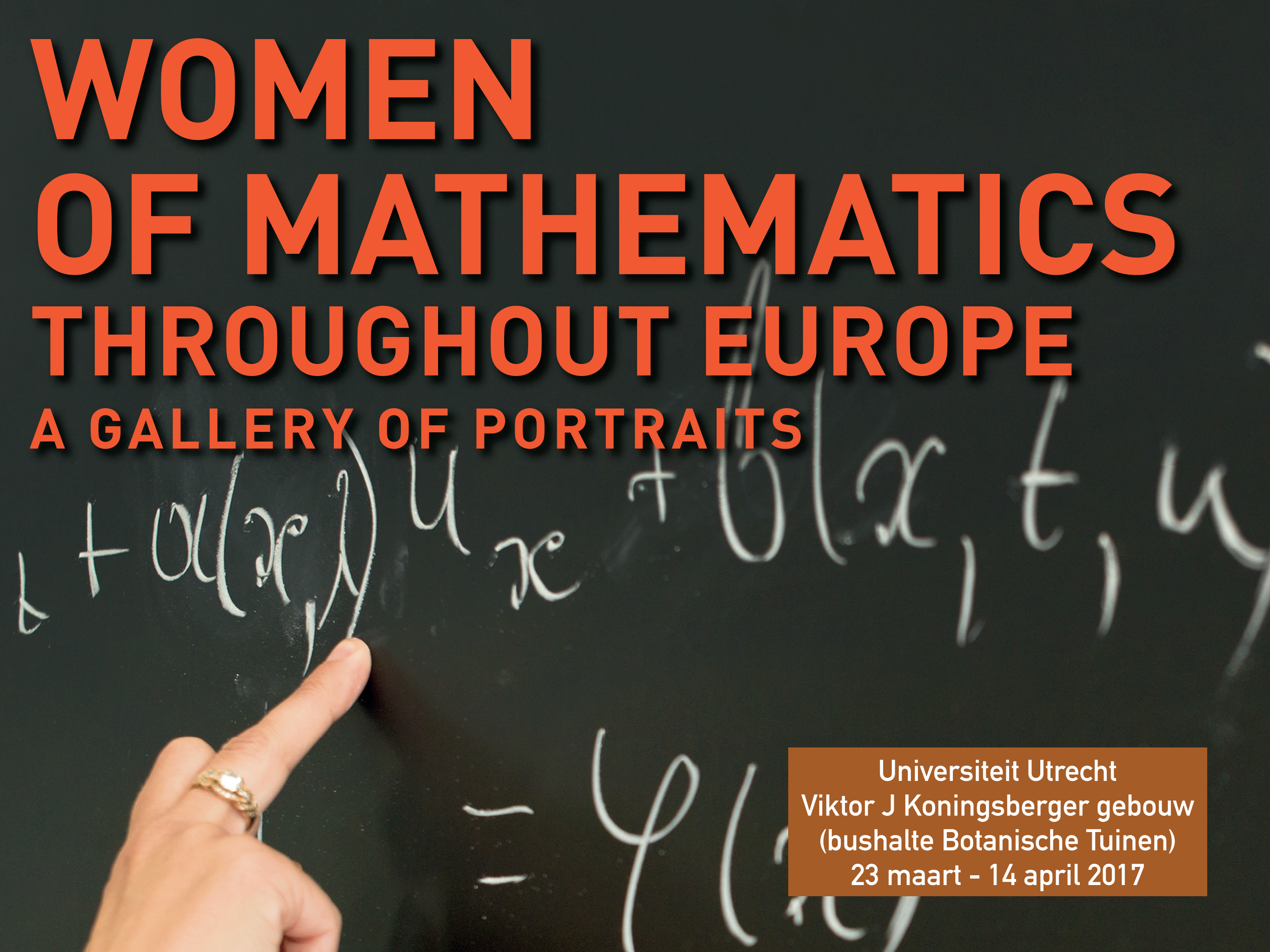
“

De kracht van je genialiteit leek in het bijzonder de grenzen van je geslacht te hebben geslecht. Daarom noemden we jou in Göttingen meestal, met eervolle spot, *der Noether*.

-Herman Weyl

WOMEN OF MATHEMATICS THROUGHOUT EUROPE

A GALLERY OF PORTRAITS

A hand with a gold ring points towards the left side of the image, which features a chalkboard with handwritten mathematical formulas in white chalk. The formulas include $t + \alpha(x)$, u_x , $+ \phi(x, t, u)$, and $= \gamma(x)$.

Universiteit Utrecht
Viktor J Koningsberger gebouw
(bushalte Botanische Tuinen)
23 maart - 14 april 2017