

Grafieken schetsen met pen en papier: een (gemiste?) algebraïsche vaardigheid

Peter Kop

Email: koppmgm@iclon.leidenuniv.nl

NWD, Noordwijkerhout

Februari, 2017



Universiteit
Leiden

ICLON

ICLON, Interfacultair Centrum voor Lerarenopleiding, Onderwijsontwikkeling en Nascholing

Schets een (globale) grafiek bij de formule
eerst individueel

$$y = 2x + \frac{4}{x}$$

$$y = 2xe^{-x^2+4}$$

$$y = -2(x-3)^4 - 9$$

- Overleg over strategieën die je gebruikt.

Inhoud presentatie

- CV: Hoe tekenen experts grafieken bij een formule?
- CV: Hoe doen onze leerlingen uit het VO dit?
- CV: Waarom is grafieken tekenen met pen en papier belangrijk?
- CV: Ideeën over algebra onderwijs

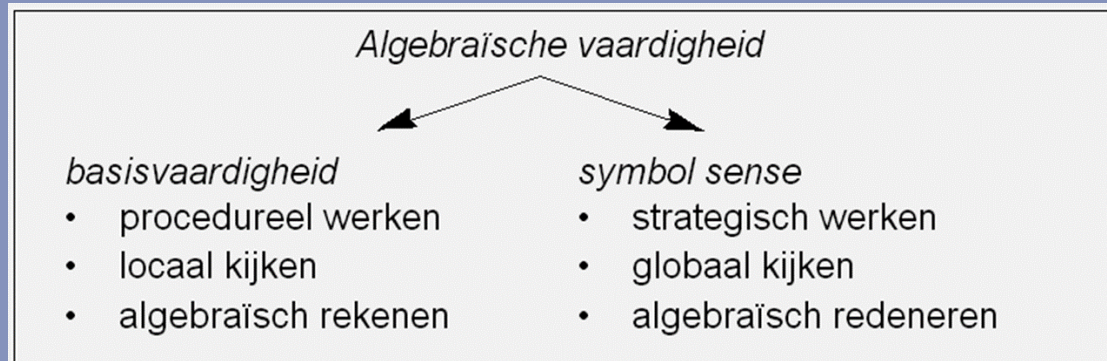
Wat weten we al?

Symbol sense is “the ability to read through algebraic expressions, to see the expression as a whole rather than a concatenation of letters, and to recognize its global characteristics” (Arcavi, 1994)

Symbol sense versus basis vaardigheden (Drijvers, 2013)

- strategisch werken
- globaal kijken (structuur zien, betekenis geven)
- (kwalitatief) algebraïsch redeneren (wat is sterker?, symmetrie, oneindig gedrag).

;



Wat weten we al?

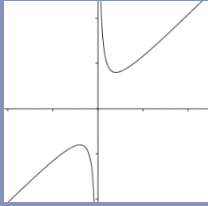
Experts hebben een superieur geheugen (o.a. De Groot et al., 1996)

Herkenning leidt het heuristisch zoeken (Berliner & Ebeling, 1989)

Experts gebruiken **categorieën** op basis van fundamentele kenmerken (Chi, 2011)

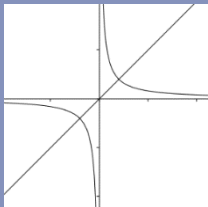
Niveaus van herkenning $y = 2x + 4/x$

A: directe herkenning



B: herkennen als lid van functie-familie

C: splits in sub-formules $y=2x$ en $y=4/x$



D. aspect van de grafiek is herkend (maar grafiek is nog onduidelijk)
bijv. scheve en verticale asymptoot

E: grafiek is niet herkend, maar strategisch onderzoek
bewust op zoek: bijv. oneindig gedrag,
nulpunten, extremen

F: geen herkenning

Zie ook Mason's structures of attention (2003, 2004, 2008)

2 dimensionaal framework van strategieën (Kop et al., 2015)

Heuristieken (sterk → zwak)						
(laag ← hoog) mate van herkenning	A	A1. Grafiek is direct bekend				
	B	B1. Herkenning van functie-familie en kennis van mogelijke grafieken	B2. Zoeken naar 'parameters' van de grafiek (zoals verschuiving of rekking)	B3. Zoeken naar kenmerken van grafiek zoals nulpunten		
	C	C1. Splits de formule in twee subformules die snel te schetsen zijn	C2. Maak grafiek uit twee subgrafieken door kwalitatief redeneren	C3. Maak grafiek uit twee subgrafieken door tabel		
	D	D1. Herkennen van kenmerken van de grafiek; rest is (nog) onbekend				
	E	E1. Grafiek wordt gemaakt door strategisch onderzoek van de formule	E2. Kwalitatief redeneren aan de hand van formule over bijv. Domein, verticale asymptoot, oneindig gedrag, stijgen/dalen	E3. Formule herschrijven	E4. Strategisch onderzoek naar bijv. Nulpunten en extreme waarden	E5. Berekenen van strategisch gekozen punten
	F	F1. Geen herkenning van grafiek of formule	F2. Standaard onderzoek van bijv. Nulpunten en extreme waarden	F3. Berekenen van random gekozen punten		

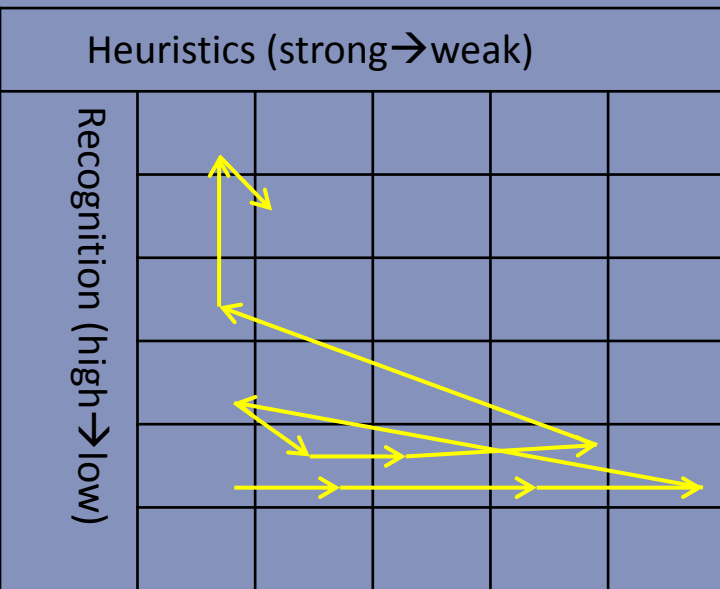
Onderzoeksvragen voor 1^e studie:

- Werkt dit framework om strategieën te beschrijven?
- Hoe ziet expertise er in dit domein van grafieken tekenen eruit?

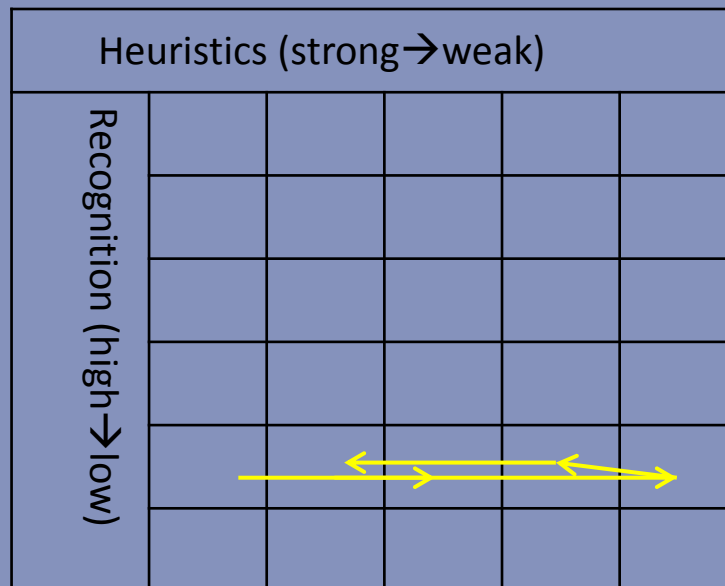
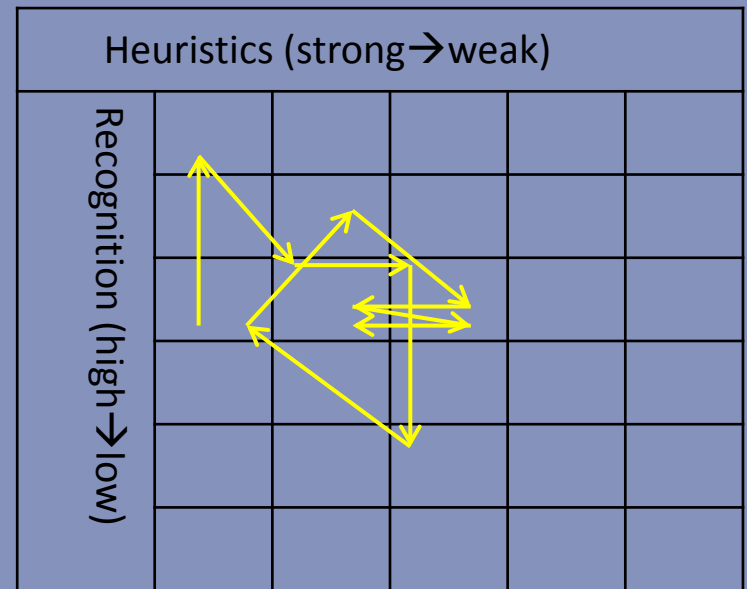
Deelnemers:

- 5 experts en 3 docenten
- Hardop denken; teken de grafiek van $y = 2x\sqrt{8-x} - 2x$

Tijd: 7:50



Tijd: 4:00



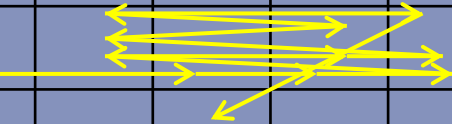
Drie experts

$$y = 2x\sqrt{8-x} - 2x$$

Tijd: 1:45

Tijd: 10:35; niet af

Heuristics (strong→weak)					
Recognition (high→low)					



Tijd: 3:00; correct

Heuristics (strong→weak)					
Recognition (high→low)					



Heuristics (strong→weak)					
Recognition (high→low)					



Drie docenten

$$y = 2x\sqrt{8-x} - 2x$$

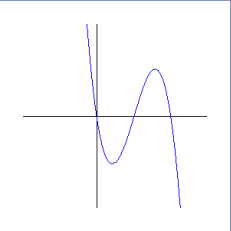
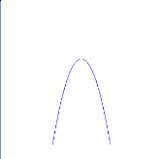
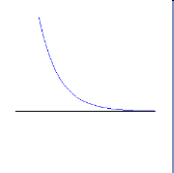
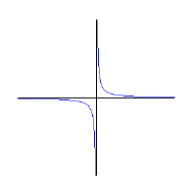
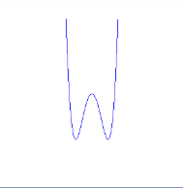
Tijd: 3:45;
gedeeltelijk goed

Conclusies

- Framework bruikbaar
- Expertise heeft te maken
 - een repertoire van direct te tekenen grafieken (IGF = instant graphable formulas),
 - met kwalitatief redeneren,
 - het kunnen switchen van strategie
- Niet alle docenten kunnen dit goed
- Berekenen van afgeleide wordt nauwelijks gebruikt en indien wel dan rekenfouten

Onderzoeksvragen voor 2e studie

- Hoe ziet het repertoire van direct te tekenen grafieken (IGFs) er bij experts uit?
(hoogste herkenningsniveaus uit framework)
- Waar letten experts op als ze IGFs herkennen, beschreven in prototypen en attributes (kenmerken)?
(Schwarz & Hershkowitz, 1999)

10^{-2x+5}	$1-5/(x+1)$	$2x^3(6-x)$	$6-2^x$	3A-4
x^4-16x^2+28	$2\sqrt[3]{x}$	$3x^{-2}$	$4\sqrt{10-x}$	
$(x^2-7)^2$	$(x+3)^4-9$	$(2x^{\frac{1}{3}})^5$	$(1-x)(2+x)+x^2$	
$2x\sqrt{x}$	$(100x)^{\frac{1}{2}}$	$x-4/x$	$\sqrt{8-x^2}$	
				

Which formula(s) can fit this graph

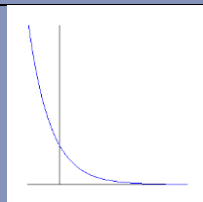
- a. $y = x(x-3)(x-6)$
- b. $y = -2x(x-2)(x-4)$
- c. $y = x(3-x)(x-6)$
- d. $y = -2x(x+3)(x+6)$

Kies uit 21 alternatieven de best passend

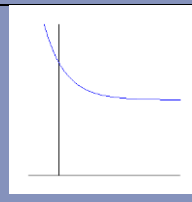
$$y = 2x(x-2)(x-4); y = 6x^2 - 2x^4; y = e^{2x} + 1$$

3B-3: Geef van elke grafiek aan of die bij de formule $y = 100 - 50 \cdot 0,75^x$ kan passen.

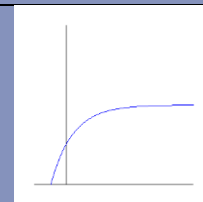
Meerkeuzevragen



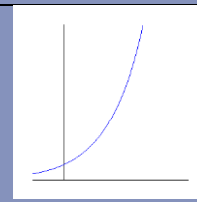
a



b



c



d

$$y = -2x(x - 2)(x - 4)$$

recognizing IGFs

GRAPH

FORMULA

manipulate formula
(part-whole reasoning)

attributes

translation or stretching
(vertical/horizontal)
or
reversion
location
domain,
vertical asymptote,
zero



domain
vertical asymptote
infinity behavior
zero
convavity (up/down)

$x > 0$
 $x \downarrow a, y \rightarrow -\infty$
 $y \rightarrow +\infty$
 $x = 1$
down

prototype

exemplar 1
exemplar 2
exemplar 3
.....

logarithmic function

translation or stretching
(vertical/horizontal)
or
reversion
location
min/max
zeroes



minimum
symmetry
concave

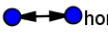
$(0, 0)$
 $x = 0$
up

prototype

exemplar 1
exemplar 2
exemplar 3
.....

polynomial function
with degree 2

translation or stretching
(vertical/horizontal)
or
reversion
location



horizontal asymptote
concave

$x \rightarrow -\infty, y \rightarrow 0$
up

prototype

exemplar 1
exemplar 2
exemplar 3
.....

exponential function

translation or stretching
(vertical/horizontal)
or
location
vertical asymptote
horizontal asymptote
zeroes



horizontal asymptote $y = 0$
vertical asymptote $x = 0$

prototype

exemplar 1
exemplar 2
exemplar 3
.....

broken function

Conclusies

- Experts' repertoire van IGFs lijken op basis functies van VO
- Experts gebruiken prototypes van de functie-families; op basis van kenmerken als tegengestelde, oneindig gedrag, nulpunten, bepalen ze dan de grafiek
- Experts werken efficient en letten niet op “wat geen invloed heeft” $y = 0,1x^4$

CV: wat weten/kunnen onze leerlingen in het VO over grafieken bij formules?

Pilot voor 3^e studie

- Deelnemers: klas wisA vwo 6 van gsgleovroman
- Pilot met 3 leerlingen
- Voormeting
- Onderwijs (5 lessen)
- Nameting (vergelijkbare taken als voormetin

Wat doen ze bijv. bij:

$$y = (x^2 - 4)(x^2 - 16) \quad y = 4e^{-x} \quad y = {}^2 \log(x)$$

Luca in pilot en voormeting

- Beperkt repertoire van IGFs en beperkt in strategieën: bijna uitsluitend covariatie-redeneren (als x toeneemt dan ...)
- Vergelijken van “sterkte”
- Weinig symbol sense
 - Herkent weinig kenmerken
 - Werkt haakjes uit: $y = (x^2 - 4)(x^2 - 6) = x^4 - 10x^2 + 24$

andere leerlingen

- zeer beperkt repertoire van IGFs
- weinig algemene denkmethoden zoals “bevragen” van formules
- vaak grafiek enkel rechts van y-as

Onderwijs

Lessenserie om “bevragingsschema” aan te leren (met opdrachten)

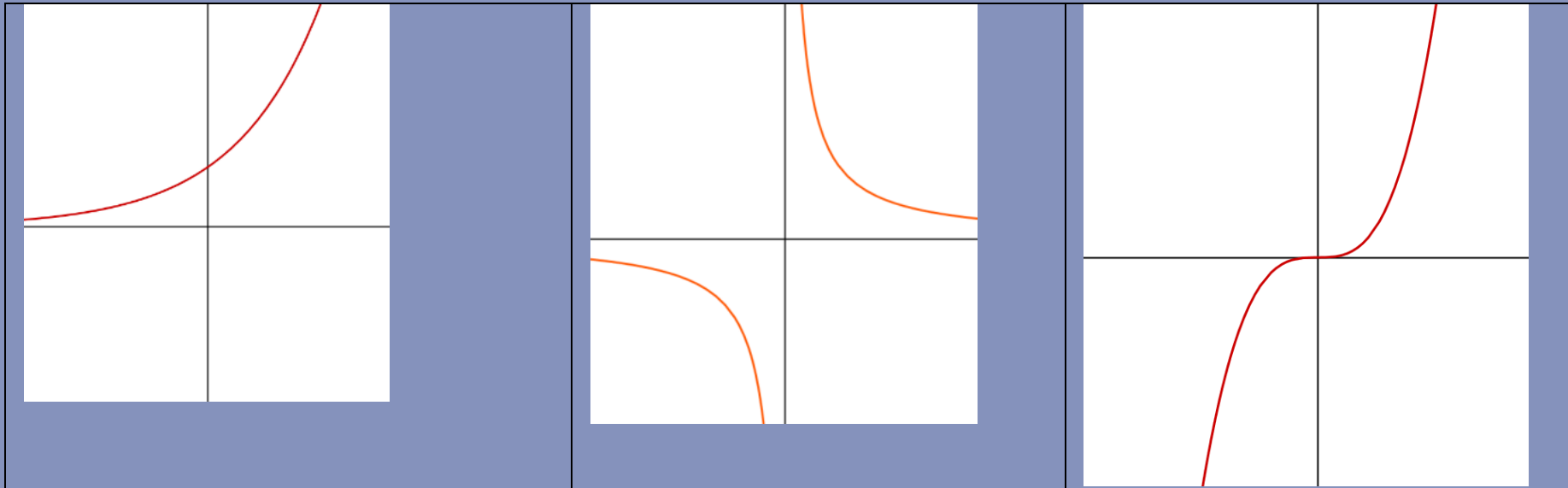
- Herken je een formule of functie-familie
- Kun je de formule splitsen
- Herken je kenmerken van de grafiek
- Kun je op zoek naar kenmerken van de grafiek (oneindig gedrag, symmetrie, domein, verticale asymptoten, nulpunten of extremen)
- Kun je punten berekenen

Opdracht 1

Basisgrafieken

Hieronder zie je een aantal globale grafieken van basisfuncties getekend. Noteer bij iedere formule een passende grafiek en geef de kenmerken.

$$y = 2^x; y = x^2; y = \sqrt{x}; y = x^3; y = x^4; y = \frac{1}{x}; y = 0,5^x; y = \ln(x); y = \sin(x); y = e^x$$



Opdracht 2

In hoeverre hetzelfde en verschillend?

Bekijk steeds een tweetal formules die enigszins op elkaar lijken. De grafieken kunnen echter verschillend zijn (of hetzelfde). Beschrijf de verschillen en schets de bijbehorende grafieken. (er zijn verschillende soorten hulp: hulp 1 is een algemene uitleg; hulp 2 gaat over horizontale rekking; hulp 3 geeft voorbeelden)

a) $y = -2x^3$ en $y = -2x^4$

b) $y = -3^x$ en $y = 3^{-x}$

c) $y = 3 \cdot \ln(x)$ en $y = \ln(x)$

d) $y = -(x+4)^4 + 2$ en $y = -(x+4)^4$

e) $y = 3^x - 2$ en $y = 3^{-x} - 2$

Opdracht 3

Splitsen van formules

Als we handig zijn in het tekenen van de grafieken van basisfuncties (met evt. een verschuiving en/of rekking) dan kunnen we soms die kennis gebruiken om complexere formules te schetsen.

We kunnen die complexere formules soms splitsen in eenvoudigere componenten.

- a) De formule $y = 2x + \frac{4}{x}$ is te splitsen in $y_1 = 2x$ en $y_2 = \frac{4}{x}$, die beide eenvoudig te schetsen zijn. Deze twee grafieken moet je dan optellen. Voer dit uit. Kun je dit niet dan vind je hieronder hulp 1.

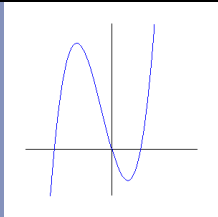
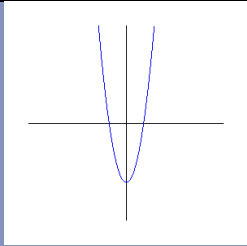
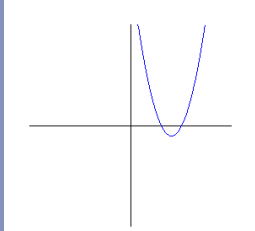
Opdracht 4

Welke kenmerken uit grafiek aflezen?

Hieronder zie je steeds twee gelijkwaardige formules en de bijpassende grafiek.

Welke eigenschappen van de grafiek kun je uit de formules aflezen; geef steeds aan of je een eigenschap uit de eerste, of tweede, of uit beide formules kunt aflezen.

Maak evt. de grafieken in geogebra of met GR en test je vermoedens.

$y = 2x(x-2)(x+4)$	$y = 2x^3 + 4x^2 - 16x$	
$y = 2 + 2(x+2)(x-2)$	$y = 2x^2 - 6$	
$y = (x-4)^2 - 1$	$y = (x-5)(x-3)$	
Verwerkingsopdracht: a) Geef minstens 3 voorbeelden van andere formules waaruit je eenvoudig de nulpunten van de functie (snijpunten met x-as) kunt aflezen.		

Opdracht 5

Oneindig gedrag

We onderzoeken hoe de “y”-waarden zich ontwikkelen als de “x”-waarden steeds groter worden (let op: bij de formules is steeds met andere letters gewerkt).

We onderscheiden vijf categorieën:

Als x steeds groter wordt dan

- A) $y \rightarrow +\infty$
- B) $y \rightarrow$ een grenswaarde ongelijk 0
- C) $y \rightarrow 0$
- D) $y \rightarrow -\infty$
- E) y waarden blijven “schommelen”.

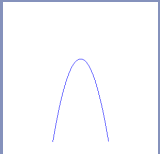
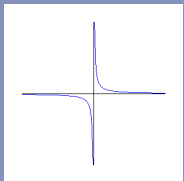
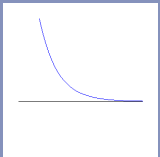
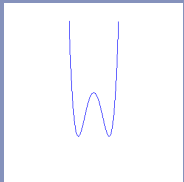
Bedeneer bij de volgende formules in welke categorie ze thuis horen en vul ze in de tabel in:

$$T = 19 - 13 \cdot 0,78^t$$

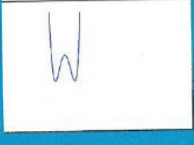
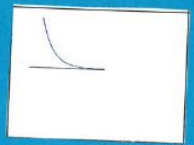
$$D = 15,6 \log(v) + 4,1$$

$$P = 100 (1 - 3^{-0,5t})$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 3 \cdot \frac{x}{x-1} & x + \frac{4}{x} & 2\sqrt{x} - 6 & 2(x-3)^2(x+3) & 2x\sqrt{x} & & \\
 -(x-1)^2 + 2(x-1) + 6 & 3(x^2-4)(x^2-6) & & & & & \\
 \frac{4x+2}{x} & 4\sqrt{10-x} & -x^3+2x & 3\sqrt{x+6} & \sqrt{8-x^2} & 2\sqrt[4]{x} & \\
 & 1+\frac{5}{x+1} & \frac{2}{x^4} & 8x^{-3} & \ln(x-3) & & \\
 (100x)^{\frac{1}{2}} & (x^2-7)^2 & (x+3)^4-9 & (x+5)(3-x) & 3(8-\frac{x}{5}) & & \\
 (x^2-7)(x-5) & (x-3)^2+2 & 4^{-3+x} & & -\ln(x) & & \\
 x(9-x) & 100-e^x & \frac{8}{3^x} & 8e^{-x} & x(x-3)(x+3) & & \\
 x+5(4-x) & 2 \cdot (\sqrt{2})^x & 2^{6-x} & 2x-3(x+2)(x-2) & 8\sqrt{x^3} & & \\
 18 \cdot 0,3^x + 12 & 3x^{-2} & {}^2\log(x-6) & & & & \\
 (2-x)^{\frac{1}{2}} + 2 & & & & & &
 \end{array}$$



Opdracht 7: categoriseren



$$\frac{4x+2}{x}$$

$$\frac{8}{3^x}$$

$$(x^2-7)^2$$

$$(x+5)(3-x)$$

$$x(x-3)(x+3)$$

$$(2-x)^{\frac{1}{2}}+2$$

$$3x^{-2}$$

$$\frac{2}{x^4}$$

$$2^{6-x}$$

$$3(x^2-4)(x^2-6)$$

$$(x-3)^2+2$$

$$(x^2-7)(x-5)$$

$$\sqrt{8-x^2}$$

$$1+\frac{5}{x+1}$$

$$18 \cdot 0,3^x + 12$$

$$3(x^2-4)(x^2-6)$$

$$(6-x)^2$$

$$(x^2-7)(x-5)$$

$$4\sqrt{10-x}$$

$$3 \cdot \frac{x}{x-1}$$

$$8e^{-x}$$

$$3(x^2-4)(x^2-6)$$

$$x(9-x)$$

$$(x^2-7)(x-5)$$

$$2\sqrt{x-6}$$

$$x+\frac{4}{x}$$

$$3(x^2-4)(x^2-6)$$

$$-(x-1)^2+2(x-1)+6$$

$$(x^2-7)(x-5)$$

$$3\sqrt{x+6}$$

$$8x^{-3}$$

$$3(x^2-4)(x^2-6)$$

$$(x+3)^4-9$$

$$(x^2-7)(x-5)$$

$$8\sqrt{x^3}$$

$$2(x-3)^2(x+3)$$

$$4^{-3+x}$$

$$3(8-\frac{x}{5})$$

$$3(x^2-4)(x^2-6)$$

$$2x-3(x+2)(x-2)$$

$$(x^2-7)(x-5)$$

$$2\sqrt[4]{x}$$

$$2 \cdot (\sqrt{2})^x$$

$$x+5(4-x)$$

$$3(x^2-4)(x^2-6)$$

$$2x-3(x+2)(x-2)$$

$$1+{}^2\log(x)$$

$$(100x)^{\frac{1}{2}}$$

$$4^{-3+x}$$

$$x+5(4-x)$$

$$3(x^2-4)(x^2-6)$$

$$2x-3(x+2)(x-2)$$

$${}^2\log(x-6)$$

$$2x\sqrt{x}$$

$$2 \cdot (\sqrt{2})^x$$

$$x+5(4-x)$$

$$3(x^2-4)(x^2-6)$$

$$2x-3(x+2)(x-2)$$

$${}^2\log(x-6)$$

$$2x\sqrt{x}$$

$$2 \cdot (\sqrt{2})^x$$

$$x+5(4-x)$$

$$3(x^2-4)(x^2-6)$$

$$2x-3(x+2)(x-2)$$

$${}^2\log(x-6)$$

$$2x\sqrt{x}$$

$$2 \cdot (\sqrt{2})^x$$

$$x+5(4-x)$$

$$3(x^2-4)(x^2-6)$$

$$2x-3(x+2)(x-2)$$

$${}^2\log(x-6)$$

$$2x\sqrt{x}$$

Nameting

Taak 1: schets

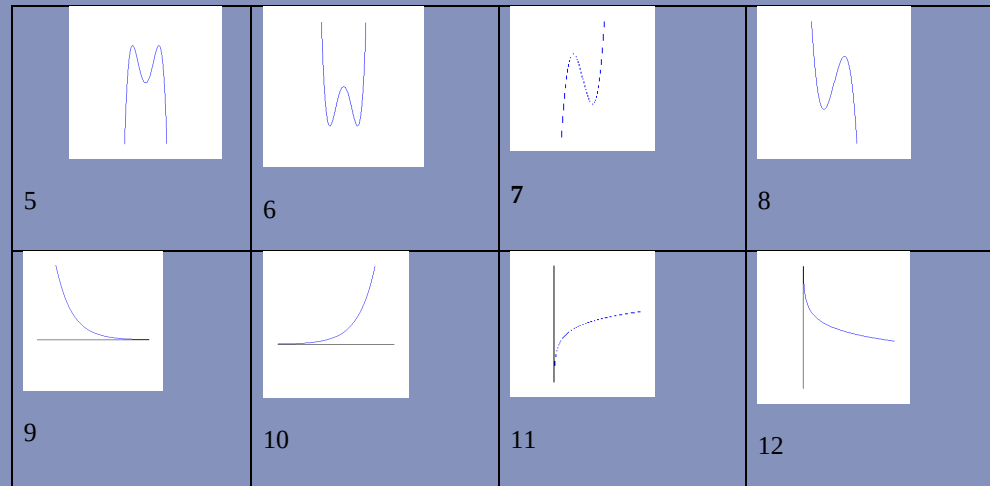
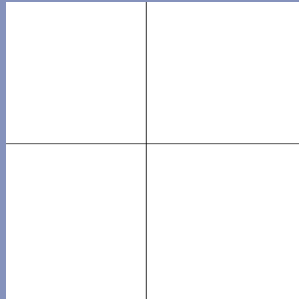
grafiek van

$$y = 20 \cdot 0,9^x + 10$$

$$y = (x^2 - 4)(x^2 - 6)$$

$$y = \sqrt{6 - 2x}$$

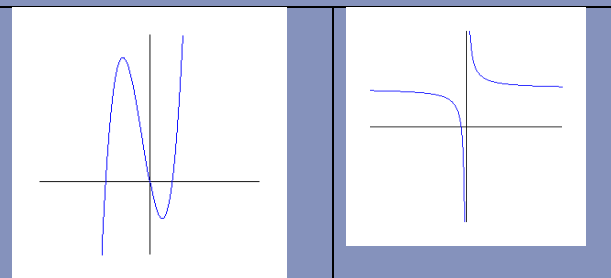
$$y = -x + e^x$$



Taak 2: kies de passende grafiek uit 21 alternatieven (20 grafieken en “geen van allen”)

formula	number of alternative
$y = 2x(x - 9)$	
$y = -2x(x - 2)(x + 4)$	
$y = x - 3(x + 2)$	
$y = 2x^{-4}$	
$y = 5x\sqrt{x}$	
$y = 4^x - 5$	
$y = x^2(6 - x^2)$	
$y = \ln(2x)$	

Taak 3 Vind een passende formule



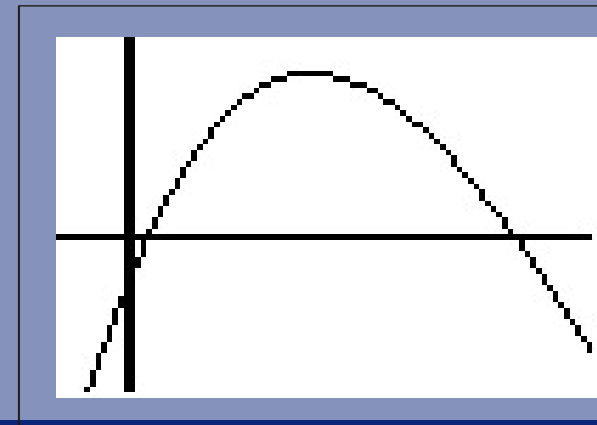
Luca in nameting

- Meer strategieën
- Meer gebruik van prototypen en meer grafiek als object zien (nodig voor familie-denken)
(hij is altijd negatief; het is een verschoven exponentiele functie)
- Meer symbol sense; meer herkenning van kenmerken als toppen, nulpunten, asymptoten
- Veel hoger tempo

Toen alles in vwo 5 wisB

Waarom is het tekenen van grafieken belangrijk?

- Betekenis geven aan algebraïsche formules want grafiek meer toegankelijk dan formule (Moschkovitch et al., 1993)
- Leren van symbol sense: dus globaal kijken, strategisch werken en algebraïsch redeneren (tbv herkennen van functie families en kwalitatief redeneren)
- Gebruik van grafieken bij probleem oplossen (Janvier, 1987; Stylianou and Silver, 2004)
- Link tussen formules en grafiek beter bij werken met pen & papier
- Redeneren bij gebruik van ICT
Grafiek van $f(x) = x^3 - 22x^2 + 100x - 30$



Kwalitatief redeneren (als WDA) in wisA examens: Beredeneer aan de hand van de formule

Een vuistregel waarmee de lengte van een mannetjessnoek kan worden berekend, is:

$$L = 87,0 - 87,0 \cdot e^{-0,188(t+0,357)}$$

Hierbij is L de lengte in cm op tijdstip t , en t de leeftijd in jaren.

- 18 Beredeneer met behulp van deze formule dat de grenswaarde voor de lengte van een mannetjessnoek 87,0 cm is.

$$A = \frac{4500}{5 + 310 \cdot 0,926^t}$$

Hierin is A het aantal actieve gebruikers in miljoenen en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 december 2005.

Volgens de formule zal het aantal actieve gebruikers blijven stijgen, uiteindelijk nauwelijks meer toenemen en een grenswaarde benaderen.

- 16 Beredeneer aan de hand van de formule dat het aantal actieve gebruikers blijft stijgen en bepaal de grenswaarde.

Wat heb ik geleerd?

- Belang en leren van herkennen (symbol sense nodig) en repertoire van IGFs (onze basis functies zijn prima)
- Belang en leren van algemene denkmethoden zoals ordenen van kennis (categoriseren), expliciet aanleren van “bevragingsschema” (herken ik hele formules, kan ik splitsen, zie ik kenmerken?)
- Belang en leren van kwalitatief redeneren
- Met deze opdrachten leren leerlingen te abstraheren (wat doet er toe en wat niet) $y = 0,1x^4$ $y = 2\sqrt{9-x} + 3$
- Welke beelden hebben leerlingen bij het lezen van formules??
- Leren we niet veel te snel en veel te gedetailleerd manipuleren (incl. extremen via afgeleide)??

Inhoud presentatie

- CV: Hoe tekenen experts grafieken bij een formule?
- CV: Hoe doen onze leerlingen uit het VO dit?
- CV: Waarom is grafieken tekenen met pen en papier belangrijk?
- CV: Ideeën over algebra onderwijs

Wat lijkt leerlingen te hinderen bij Algebra?

- algebra heeft weinig betekenis voor leerlingen
- veel lijkt bij vele leerlingen slecht te beklijven; veel fragmentarische kennis
- in boeken vaak van lokaal naar globaal (met eerst manipuleren) met veel oog voor details en complicaties

Wat zien je bij $y = 10 - (4 - x)^4$?

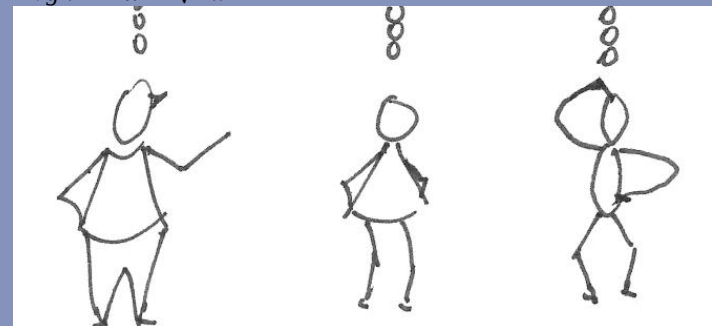
10 – “kwadraat”
4^egraads polynoom
Paraboolachtig top
(4,10)
Vgl: $4 - x = \sqrt[4]{\dots}$



$x \rightarrow 4 - x \rightarrow$
 $(4 - x)^4 \rightarrow \dots \rightarrow \dots$
???

$x?$ $y?$ $10?$ $4?$
Nog een 4?

???????



Ideeën voor algebra onderwijs

Ontwikkelen van samenhangende kennis en heuristieken voor:

- betekenis en symbol sense
- probleem oplossen

Hoe ontwikkel je deze kennis bij leerlingen?

Oplossen van vergelijkingen

Welke vergelijkingen lijken, qua oplossingsmethode, dan op elkaar?

Noteer eerste stap!

$$2(x-4)^2 - 2 = 12$$

$$3(x-2)(x+6) = 0$$

$$2(x-1)(x+1) = 10$$

$$x^2 - 18x = 0$$

$$x^2 + 2x = 12$$

$$4x(x-10) = -75$$

$$3(x-2)(2x+4) = 0$$

$$4x^2 - 12 = 8x$$

$$20 = 4(x+6)^2 - 5$$

$$(x-2)^2 - 3(x-2) - 10 = 0$$

$$2x(x+4) = 10(x+4)$$

$$(x-4)^2 = (2x+2)^2$$

Probleemverkenning bij oplossen van vergelijkingen

- zorgvuldige start met lineaire vergelijkingen in klas 2
- tweede graadsvergelijkingen in verschillende gedaanten in klas 3
- andere vergelijkingen per onderwerp (functie) in klassen 4,5,6
- leerlingen lijken in klas 4,5,6 nauwelijks (standaard)vergelijkingen te herkennen

Onderzoeksvraag

Kunnen we op basis van expertleerlingen een categorisering voor leerlingen ontwerpen?

Vier expert leerlingen denken hardop

$6 = (x^2 + 1)^3$	$(x^2 + 2)^{-0.5} = \frac{1}{2}$	$3(x-1) \cdot (x^2 + 1) = 0$
$(6x)^4 = (x+3)^4$	$\frac{\sin(x) - 1}{e^x} = 0$	$e^{3x-1} = e^{-2x+10}$
$2x^2 = 6x + 7$	$\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} = 4$	$5(x^2 + 1) = 2x \cdot (x^2 + 1)$

Resultaten (Data)

Indeling in categorieën van expertleerling

- 1) Noemers gelijk maken/ vermenigvuldigen met noemers
- 2) Haakjes wegwerken
- 3) Abc-formule
- 4) Buiten haakjes halen
- 5) Tegengestelde gebruiken
- 6) Vervangen
- 7) Gelijkstellen aan 0
- 8) Wegdenken
- 9) Gonio-kennis
- 10) Logaritme-kennis
- 11) Anders schrijven

Resultaat: (zie ook Handboek Wiskunde Didactiek)

Structureren in zes categorieën

Categorie 1:

links en rechts wegdenken

$$3^{2x+3} = 3^{-2x-6} \dots\dots\dots 2x + 3 = -2x - 6$$

Categorie 2:

terugwerken (met ketting)

$$e^{2x} = 16 \dots\dots\dots 2x = \ln(16)$$

Categorie 3:

meerdere dezelfde ‘bordjes’
zetten

$$\frac{\sin(x) - (\sin(x))^2}{(\sin(x))^2} = 3 \dots\dots\dots \frac{p - p^2}{p^2} = 3$$

Categorie 4:

‘product=0’ (of buiten haakjes
halen, ontbinden)

$$3(x-4)(x^2-6) = 0 \dots\dots\dots x = 4, x = \sqrt{6}, -\sqrt{6}$$

Categorie 5:

abc formule

Categorie 6:

eyecatchers: breuken, sinus,
logaritme, wortels

$$\frac{2x+4}{x^2+1} = 2 \dots\dots\dots 2x+4 = 2 \cdot (x^2+1)$$

Onderwijs

Mogelijke leerlijn (volgens Landa):

- a) Formuleer categorieën (vraag is wel wie dit doet)
- b) Leer categorieën (met standaardvergelijkingen)
met bijbehorende oplossingsalgoritmen
- c) Leer herkennen van categorieën

Categoriseren vergelijkingen in klas 5 en 6

$$2(x-1)^2 + 8 = 16$$

$$(x-1)^2 = (2x)^2$$

$$3(2x-1)(6-x) = 0$$

$$4x^2 - 16 = 6x^2 - 30$$

$$12 = 2x^2 + 3x$$

$$2(4+x) = 6(x^2 + 1)$$

$$(x-4)(4+x^2) - 14(x-4) = 0$$

$$40 = 10(x^2 - 1)$$

$$21 = 3x + 2(x-2)$$

$$2x + 4x = 8x - 12$$

$$6(2x+4) - 3(2x+4)^2 = -10$$

$$40 = 2(x-2)^2 + 30$$

$$4((x-2)^2 + 4) = 10(x-2)^2$$

$$2x^2 - 4x = 36 + 2x$$

$$16 = 8(2x+1)^2 - 8$$

$$5x(x-10) = 30(x-10)$$

$$(2x-5) + (x+4) = 0$$

$$(2x-5)(x+4) = 0$$

$$(3x-6) - (x-4) = 0$$

$$5(x-1)(x+4) = 25(x+4)$$

$$4x + 24 = 4x^2$$

$$2(x-6) \cdot (x^2 - 9) = 0$$

$$20 = 4(x+4)^2 - 8$$

$$2x^2 - 90x = 0$$

$$-10 + 4(x^2 - 4) = 32$$

$$(3x-8)^2 = x^2$$

$$\sqrt{x} = x + 6$$

$$\frac{x+12}{x} = x$$

$$4(x-7) + (x-7)^2 = 0$$

$$7(x^2 - 1) = 42$$

$$2x^2 - 2(x-3) = 2x$$

$$2(x^2 - 8) - 10 = 22 + x^2$$

$$2x^2 - x(x+1) = 6$$

$$2(x^2 - 4) = 5x \cdot (x^2 - 4)$$

$$2(x^2 - 2x - 8) = x^2 - 4x$$

$$4x^2 - 20 = -2x^2 + 40$$

$$3(x-2)(x-6) + 4(x-1)(x-6) = x-1$$

$$\frac{12}{x} + \frac{1}{x-1} = 7$$

$$\frac{1}{x-3} + x - 3 = 2$$

$$3(x-1)(x+1) - 8 = 0$$

$$^2\log(x) + 2 = ^2\log(x-1)$$

$$2x^2 = 6x + 7$$

$$\frac{\frac{1}{x} + x}{2x + 4} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} = 4$$

$$x^3 - 12x^2 + a \cdot x = 0$$

$$^3\log(ax) + 4 = 6$$

$$\sqrt{x+6} + x = 6$$

$$b = 2(x-a)^2$$

$$3(x-1) \cdot (x^2 + 1) = 0$$

$$\ln(x) + 2 = \ln(x+e)$$

$$(6-2x)^4 = 0$$

$$\sqrt{e^x - 2} = 0$$

$$6 = (x^2 + 1)^3 \quad a \cdot x - \frac{b}{x} = 0$$

$$2(x^2 + 3) = 6x + 2$$

$$2(x+1) + 3(x-1) = 4(x-1)$$

$$2\sqrt{2x-6} = x-9$$

$$(\sin(x))^2 - \frac{1}{2} \cdot \sin(x) = 0$$

$$2x^2 = bx$$

$$\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = -1$$

$$(e^x)^2 - b \cdot e^x = 0$$

$$(a-2x)^4 = 0 \quad (x^2 + 2)^{-0,5} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(2x) = \sin(x)$$

$$^2\log(x) = ^2\log(x-a)$$

$$4 \cdot (e^x + 1)^2 = 40$$

$$4(x-a) \cdot (x^2 - b) = 0 \quad e^{3x-1} = e^{-2x+10} \quad \frac{3x+8}{-3x+p} = 2$$

$$\frac{\sin(x)-1}{e^x} = 0$$

$$\frac{x^2-4}{x+2} = -4$$

$$4(\sin(x))^3 + 1 = 12(\sin(x))^3$$

$$4^3 \cdot 4^x = 4^{-x+6}$$

$$x^3 - 12x^2 + 20x = 0$$

$$6(x^2 + a) = 2x \cdot (x^2 + a)$$

$$e^{3x} = 6$$

$$^3\log(4x) + 4 = 6$$

$$\sqrt{3x} = \sqrt{-x+16}$$

$$(x-4)^2 - 3(x-4) = 10$$

$$\frac{2x+8}{-3x+10} = 3$$

$$(6x)^4 = (x+3)^4$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 40$$

$$\sqrt{x} = 6\sqrt[6]{x}$$

$$-2(x-p)^2 + 12 = 8$$

$$2x^2 = 6x$$

$$2x+6 = 6x-18$$

$$x^3 + 9x^2 + 18x + 8 = 0$$

Ontwerpen van Wiskundige Denkactiviteiten bronnenboek

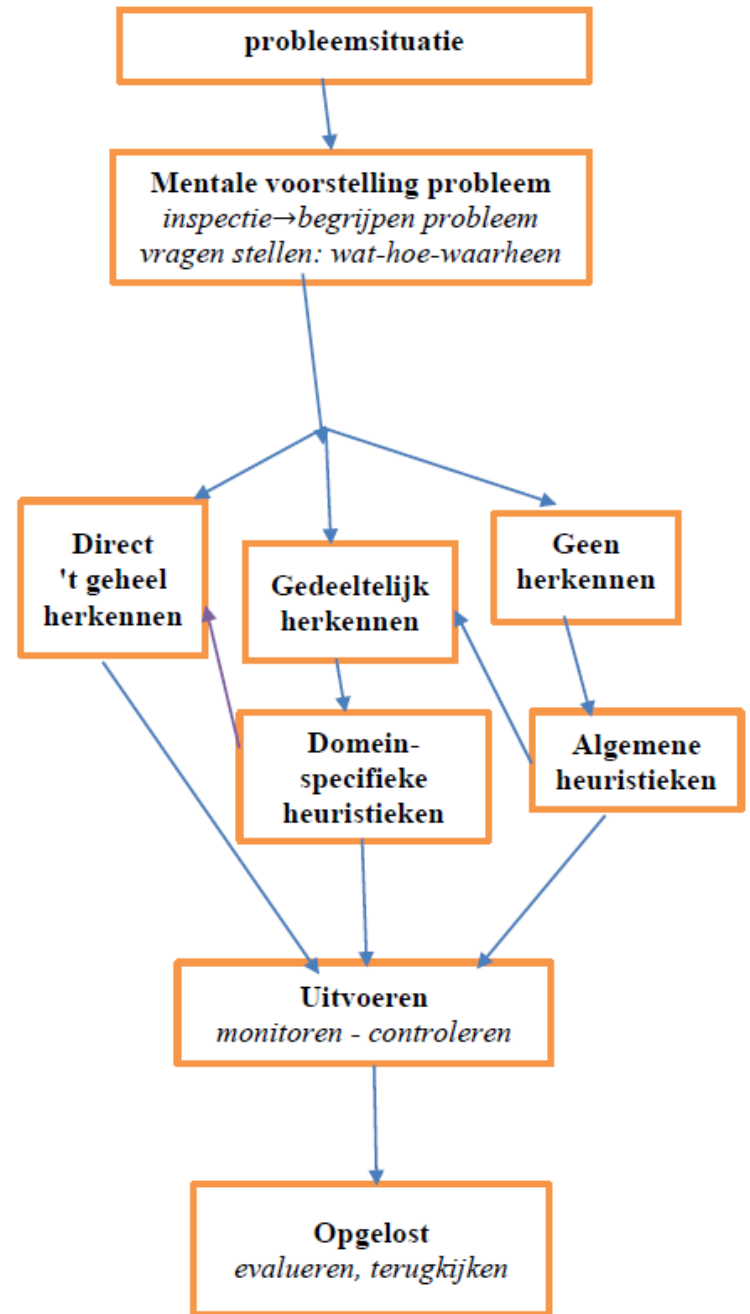
Deel 2: onderbouw havo-vwo

December 2016

Hoofdstuk Verbanden

Doel onderwijs
Ontwikkelen van
“gereedschapskistje” voor
leerlingen met wiskundige
concepten en heuristieken om
problemen aan te pakken

“Iedere leerling kan men laten beleven,
wat het is, op het *eigen verstand*
vertrouwend, een *eigen inzicht* in een
voor hem begrijpelijk gesteld probleem
te vormen en, eventueel, ook een eigen
oplossing te vinden
.....niet eerst aan ‘t eind van de cursus,
maar in het begin.”
(Ehrenfest-Afanassjewa, 1960)



In dit bronnenboek een leerlijn “bevorderen van wiskundig denken”

- *Van exploreren naar structuur*
Denkopgaven bij start nieuw deelgebied.
- *Van kennis naar probleem oplossen*
Denkopgaven om basiskennis te gebruiken in niet-standaard situaties.
- *Van exploreren naar redeneren/abstraheren*
Verdiepende denkopgaven in het logisch redeneren en/of abstraheren.

Voorbeelden van lineaire en kwadratische verbanden

De sponsorloop

Lineaire verband via sponsorloop

Tabel en grafiek

Opa betaalt je € 7 per rondje.

- a. Teken de bijbehorende grafiek.

Je moeder betaalt startbedrag € 20 en
daarbovenop nog € 5 per rondje.

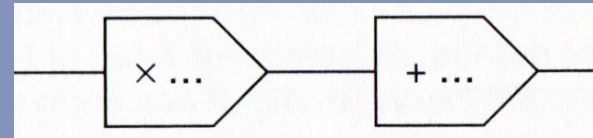
- b. Bij welk aantal rondjes krijg je
meer van je moeder dan van je opa?

$a = \text{het aantal rondjes}$	0	1	2	3	...
$b = \text{het bedrag}$					

Rekenpijlen

Je zus geeft je € 5 als startbedrag en € 6 per
rondje.

- c. Bereken met de ketting van rekenpijlen haar opbrengst bij 7 gelopen
rondjes.
d. Bereken het aantal rondjes als je moeder je € 85 uitbetaalt.



Formule

Je moeder rekent eigenlijk met de volgende formule:
bedrag b = aantal rondjes a keer $5 + 20$

Afgekort geeft dat de formule: **$b = a \times 5 + 20$**

*Van exploreren naar
structuur
Betekenis door
representaties te koppelen*

De lijnenwaaiers

- a. De formule $y = ax$ hoort bij een familie van grafieken die we een *lijnenwaaier* noemen. Teken in het assenstelsel een viertal leden van die familie.
- b. Een andere familie van grafieken die een lijnenwaaier vormen heeft de formule $y = ax + 2$. Teken in het zelfde assenstelsel een viertal leden van deze familie, waarvan de grafieken evenwijdig lopen aan die van de vorige vier.
- c. Welke formules horen bij deze 4 paren grafieken?
- d. Spiegel beide families in de y -as.
Krijg je dan twee andere families? Welke formules horen daarbij?

*Redeneren en abstraheren:
Functie families maken*

$$y = (x+a)(x-b)$$

nulpunten & top

De parabolen met formules $y = (x + a)(x - b)$ en $y = (-x + a)(x - b)$

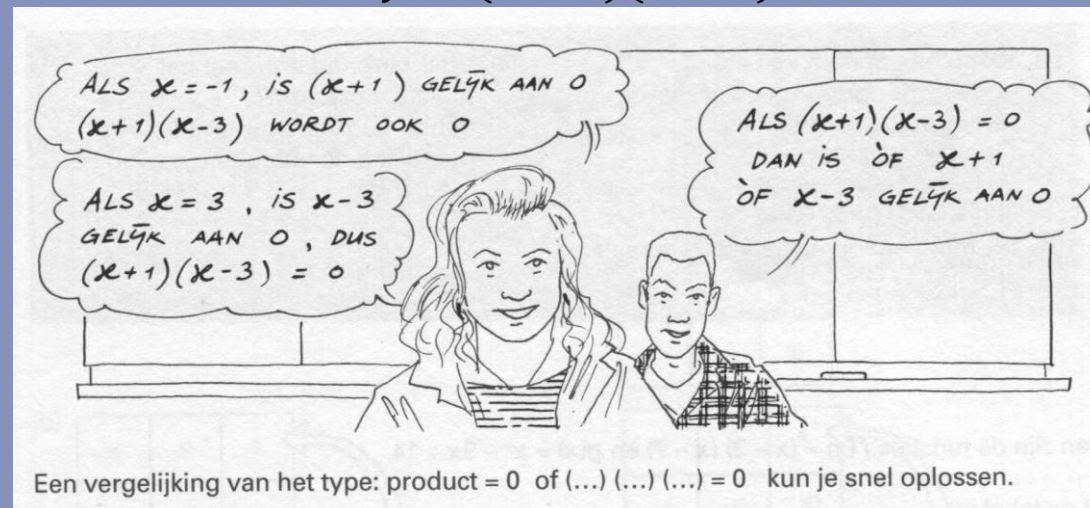
Dit type noemen we wel de ontbonden vorm, (...)(....).

De nulpunten en de top

Zoek bij elk van de volgende kwadratische formules eerst de coördinaten (x, y) van de nulpunten en daarna die van de top T. Schets daarna de grafiek.

- a. $y = (-x + 5)(x - 7)$.
- b. $y = (x + 3)(x - 1)$.
- c. $y = (-x - 4)(x - 6)$.
- d. $y = (x - 2)(x - 4)$.
- e. $y = (-x + 8)(x - 2)$.
- f. $y = x(x - 4)$.

Voorbeeld: $y = (x + 1)(x - 3)$



Naar structuur:

Betekenis geven aan formules door koppeling aan grafiek

Even wat anders

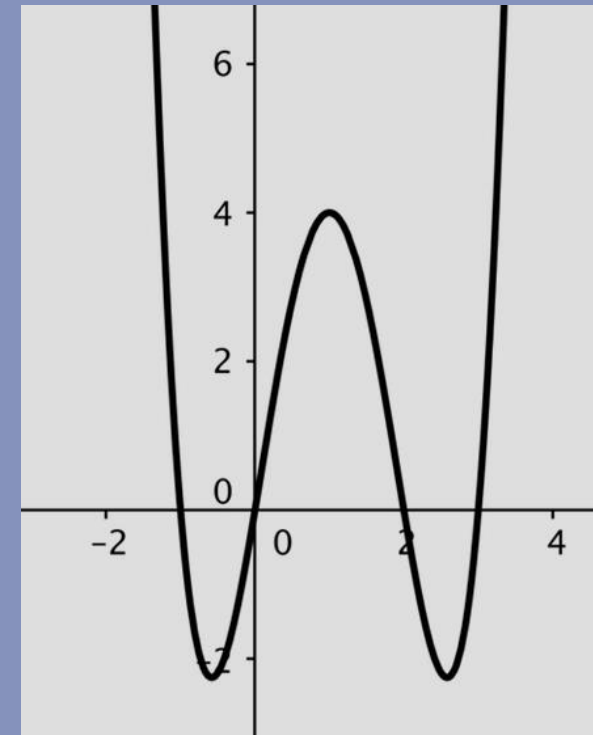
Je hebt gevonden dat je bij een kwadratische formule in de ontbonden vorm snel de nulpunten van de bijbehorende grafiek kunt berekenen. Dat geldt niet alleen voor kwadratische formules en parabolen.

a. Schets de grafiek bij de formule $y = (-x + 5)(x - 7)(x - 4)$.

Bereken eerst de nulpunten en maak een tabel totdat je weet hoe die grafiek loopt.

Een formule zoeken

Bedenk bij deze grafiek een formule.



Generaliseren naar

Schets van $y = (-x + 5)(x - 7)(x - 4)$

De parabolen met formules $y = (x - p)^2 + q$ en $y = -(x - p)^2 + q$

$$y = (x - p)^2 + q$$
$$(x - p)^2 = -q$$

De kwadratische vorm en de nulpunten

Uit de kwadratische vorm $y = (x - p)^2 + q$ of $y = -(x - p)^2 + q$ kun je niet alleen snel de coördinaten van de top T vinden, maar ook de coördinaten van de snijpunten met de x-as (de nulpunten), als die er zijn.

- Maak bij de formule $y = (x - 3)^2 - 4$ een tabel en zoek daarmee de coördinaten van de nulpunten.
- Je hebt nu de vergelijking $(x - 3)^2 - 4 = 0$ opgelost.
Dat kan ook direct door goed naar de vergelijking te kijken.
Bereken zo de oplossing.
- Bereken op dezelfde manier de nulpunten van $y = (x - 4)^2 - 7$. Stap voor stap opschrijven!
- Controleer je antwoord door de gevonden x-waarden in te vullen in de formule.



$$(\boxed{})^2 = 7$$

$$\boxed{} = \sqrt{7} \text{ of } \boxed{} = -\sqrt{7}$$

$$\boxed{} - 4 = \sqrt{7} \text{ of } \boxed{} - 4 = -\sqrt{7}$$

Naar structuur

Formule aan grafiek koppelen en vergelijkingen oplossen

Families van parabolen

Schets bij elke familie van kwadratische formules
5 grafieken en leg uit welke kenmerken zij
gemeenschappelijk hebben.

Voor welke waarden van p zijn er geen nulpunten?

- a. $f(x) = (x + 1)(x - 3) + p$
- c. $h(x) = 4x^2 + 2x + p$
- d. $k(x) = -2(x - p)^2 + 16$



Redeneren met parameters

- a. Gegeven is de familie van functies $f(x) = (x - a)^2 + 4 - a^2$
Toon aan dat alle grafieken van deze familie door één punt gaan.
- b. Gegeven is de familie van functies $f(x) = (x - a)^2 + 2a - 1$.
Geef een formule van de lijn door de toppen.

Redeneren/abstraheren

Schetsen van globale grafieken

x en/of y gaat naar plus of min oneindig

Zoek bij de volgende formules met getallenvoorbeelden uit wat de y -waarde doet als de x -waarde naar plus of min oneindig gaat.

Onderzoek ook of de y -waarde in de buurt van een bepaalde x -waarde naar plus of min oneindig gaat.

a. $y = x^2$

b. $y = x^3$

c. $y = 0,5^x$

d. $y = \frac{x+5}{x-4}$

e. $y = 2^{-x^2}$

f. $y = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-3)}$

Wie wint het?

De ene grafiek stijgt of daalt veel sneller dan de andere.

Dat hangt natuurlijk af van de formule.

Ga bij de volgende tweetallen formules na welke het op de duur wint, dus als $t \rightarrow +\infty$.

a. $V = 2500t$ en $K = 0,001x^2$

b. $P = t^3$ en $Q = 1,5^t$

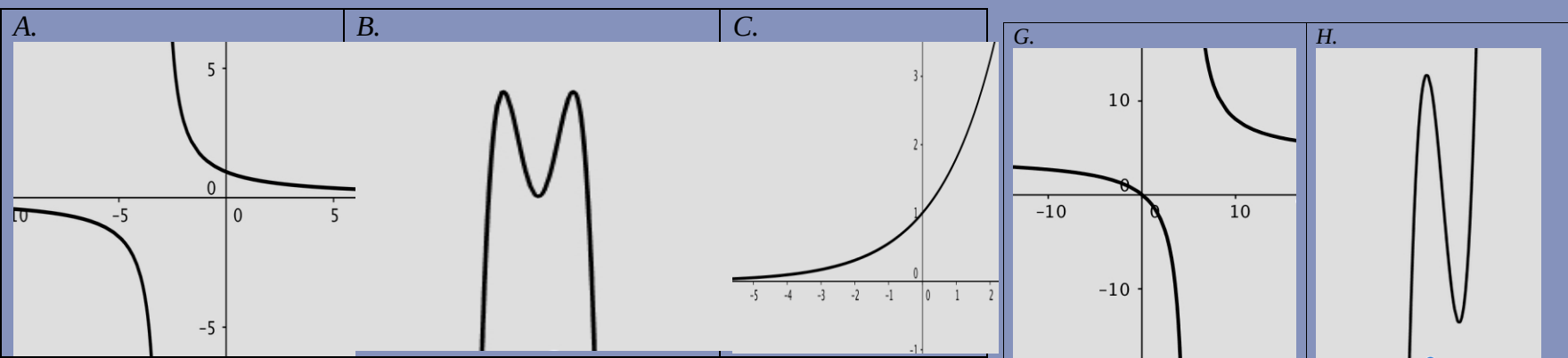
c. $L = \frac{3t+9}{t}$ en $M = \frac{t+1000}{t}$

*Oneindig gedrag en “sterkste”
Redeneren/abstraheren*

Formules en grafieken matchen

Zoek de grafieken en formules bij elkaar.

Formule	Keuze grafiek	Waarom die?
$y = 2x(x - 9)$		
$y = 2x(x - 2)(x + 4)$		
$y = x^2(6 - x^2)$		
$y = \frac{3}{x+3}$		
$y = \frac{4x}{x-5}$		



Andere voorbeelden

Tweede graadsfuncties

Hieronder zie je van verschillende tweedegraadsfuncties steeds vier kaartjes. Zoek de kaartjes bij elkaar die bij dezelfde tweedegraadsfuncties passen.

$$f(x) = x^2 - 2x - 24$$

$$f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$f(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

$$f(x) = 2(x-1)^2 + 4$$

$$f(x) = (x-1)^2 - 25$$

$$f(x) = (2x-1)^2$$

$$f(x) = (x-6)(x+4)$$

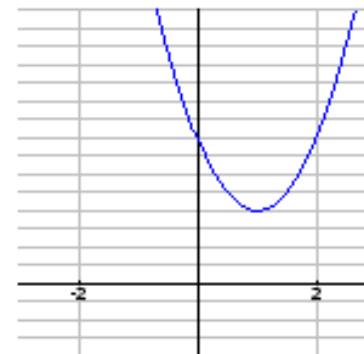
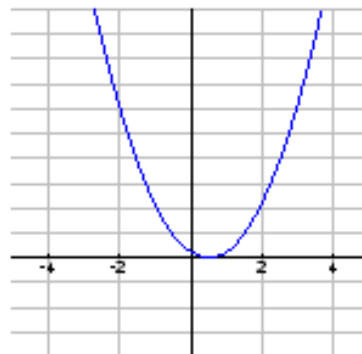
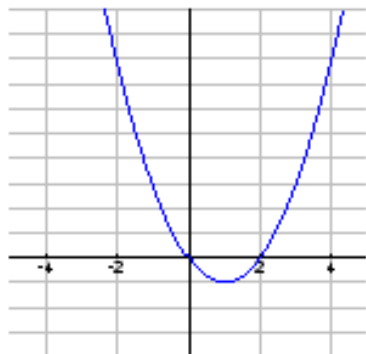
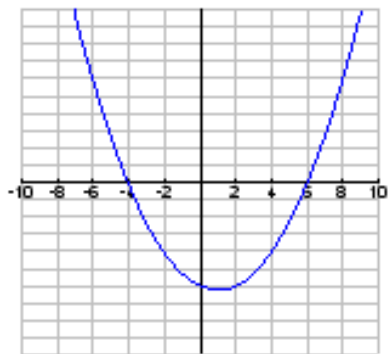
$$f(x) = 4x^2 - 8x$$

$$f(x) = x(4x-8)$$

$$f(x) = 4x^2 - 8x + 8$$

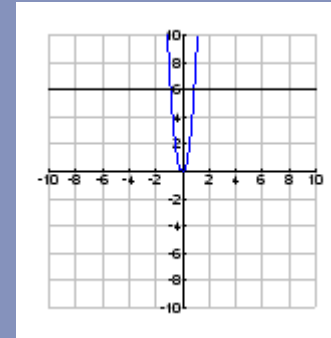
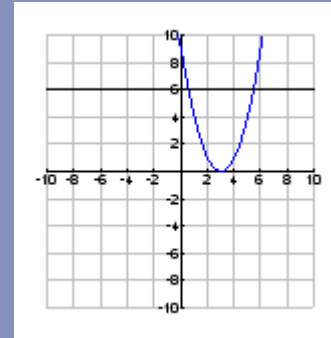
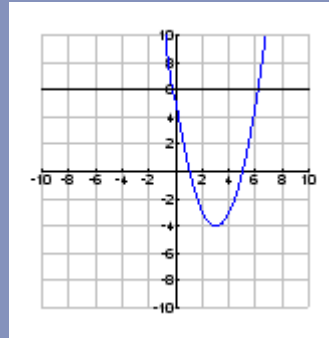
$$f(x) = 4(x-1)^2 - 4$$

$$f(x) = 4x(x-2) + 8$$



Lees de oplossing af uit de grafiek

$$(x-1)(x-5) = 6$$



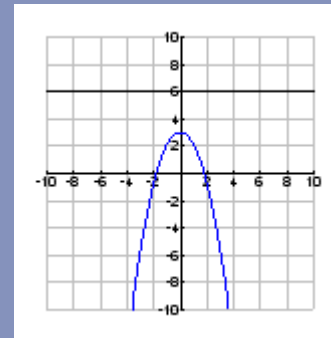
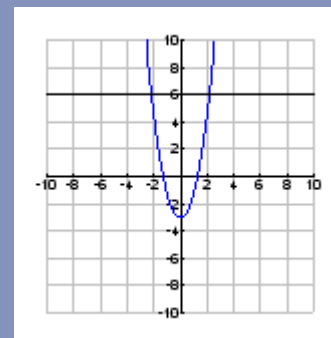
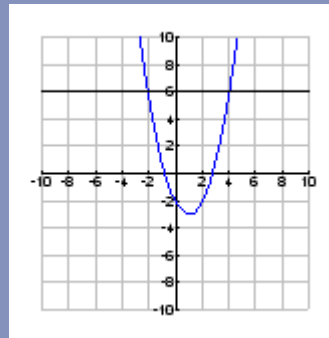
$$(x-1)^2 - 3 = 6$$

$$(x-3)^2 = 6$$

$$(-3x)^2 = 6$$

$$2x^2 - 3 = 6$$

$$3 - x^2 = 6$$



Ook internationaal

Mathematics Assessment
Project

<http://map.mathshell.org/>

*Look for and make use of
structure*

Card Set: Always, Sometimes, or Never True?

1 $x - 6 = 6 - x$	2 $x + 6 = y + 6$
3 $\frac{x}{6} = \frac{6}{x}$	4 $6 + 2x = 8x$
5 $2(x - 3) = 2x - 3$	6 $2(x + 3) = 2x + 6$
7 $\frac{x + 6}{2} = x + 3$	8 $x^2 = 2x$
9 $(x + 3)^2 = x^2 + 3^2$	10 $(x - 6)^2 = (6 - x)^2$

Statements to Discuss: True or False?

A1

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$$

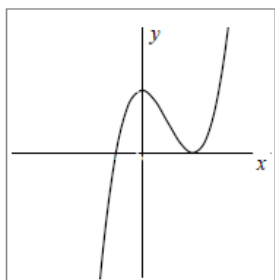
$$f(2) = 0 \Rightarrow (x+2) \text{ is a factor of } f(x)$$

A2

$$f(x) = 3x^3 - 9x - 6$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow (x-2) \text{ is a factor of } f(x)$$

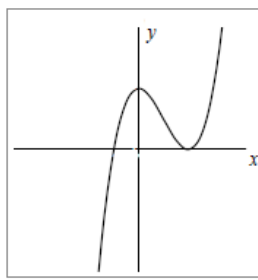
B1



A possible equation
for this graph is:

$$y = (x+1)(x-2)^2$$

B2



A possible equation
for this graph is:

$$y = (x-1)(x+2)^2$$

C1

If $f(x)$ is a cubic function
and $f(1) = 0$, $f(3) = 0$ and
 $f(4) = 0$,

$$\text{then } f(5) = 8$$

C2

If $f(x)$ is a cubic function
and $f(1) = 0$, $f(3) = 0$ and
 $f(4) = 0$,

then $f(5)$ could be any number
but zero.

Kwalitatief redeneren voor vwo 6 wisB

Opgave

Gegeven is de functie $f(x) = (2^{-2x} + x^2)^5 + 110x^{-6}$

Kies bij iedere uitspraak, zonder gebruik te maken van de GR, welk alternatief over de grafiek van functie f het meest juist is.

Geef een redenering als toelichting bij je keuze.

Uitspraak

1) Als x heel groot is dan lijkt de grafiek van f op de grafiek van

a) $y = x^{10}$

b) $y = x^7$

c) $y = 2^{-10x}$

d) $y = \frac{110}{x^6}$

e) Geen van de alternatieven a) tm d)

2) Als x in de buurt van $x=0$ dan lijkt de grafiek van f op de grafiek van

a) $y = x^{10}$

b) $y = x^7$

c) $y = 2^{-10x}$

d) $y = \frac{110}{x^6}$

e) Anders, namelijk

SE opgave in vwo 6 wisB

Samengevat:

Ideeën voor algebra onderwijs:

- Samenhangende kennis voor betekenis en symbol sense
- Start met geheel (leidt tot meer samenhangende kennis dan achteraf brokjes kennis samenvoegen)
- Leer leerlingen globaal te kijken naar formules, te categoriseren, te herkennen, kwalitatief te redeneren met en over formules
- Niet te snel en te veel technische complicaties
- Besteed aandacht aan "weten hoe" (probleemaanpak): niet "alles" hoeft in een aparte paragraaf (leerlingen en docent moeten vertrouwen krijgen in denken van leerlingen)
- "Meer" is niet altijd "beter" en Baas Boven Boek
- Succes met uw algebra onderwijs.