

De Mandelbrotverzameling: inzoomen op het inzoomen

Kees Temme

NWD 2017

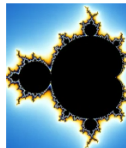


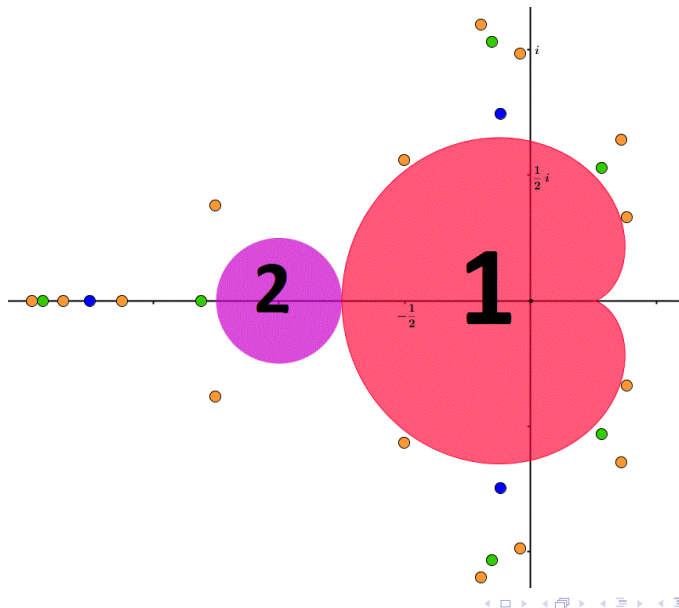
Bètasteunpunt Amsterdam ●●●●●

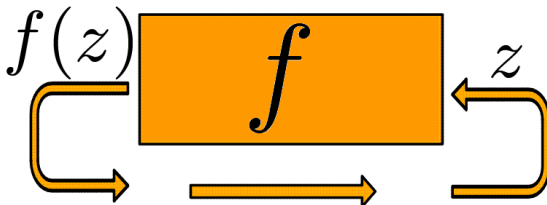
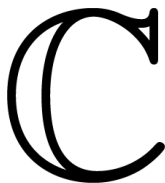
GEMEENTELIJK
GYMNASIUM
HILVERSUM



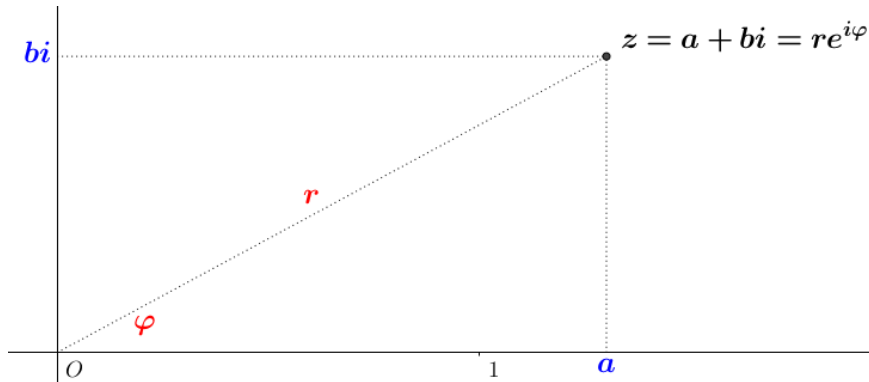
UvA Webklas





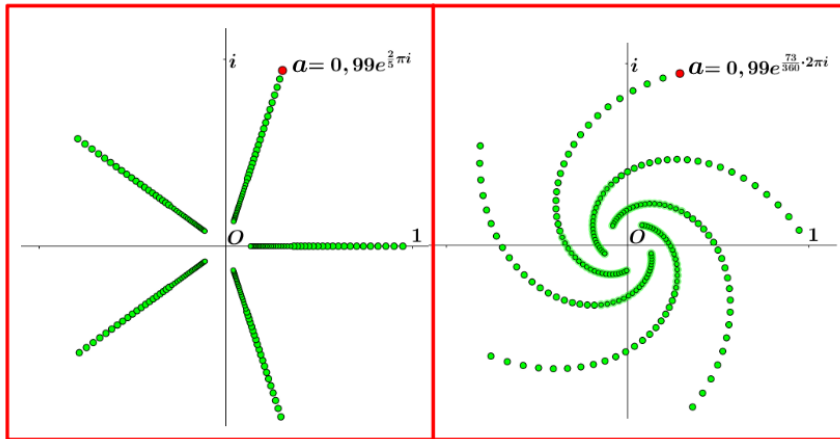


Het complexe vlak



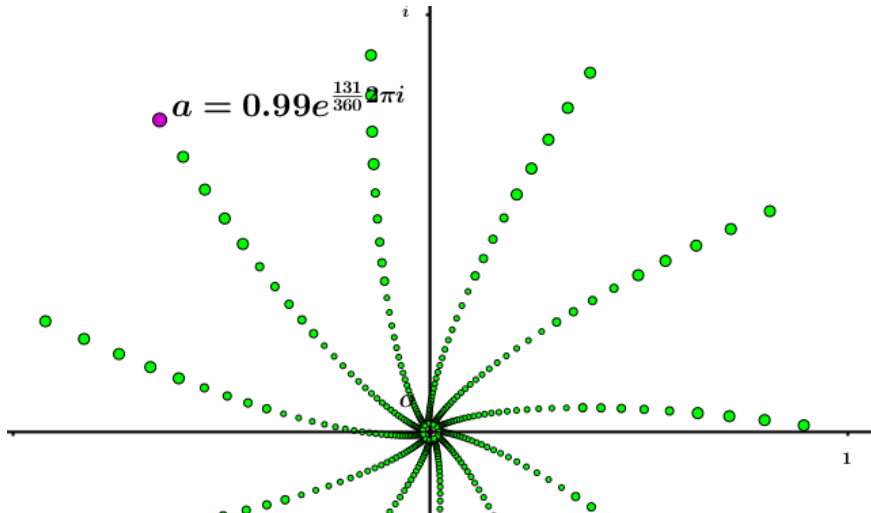
Machten

a^n voor $1 \leq n \leq 200$

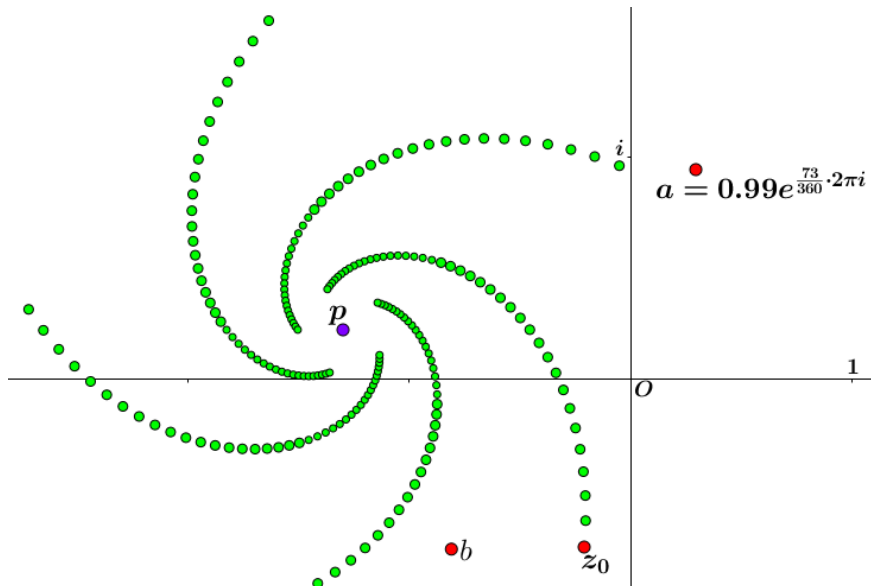


Machten met GeoGebra

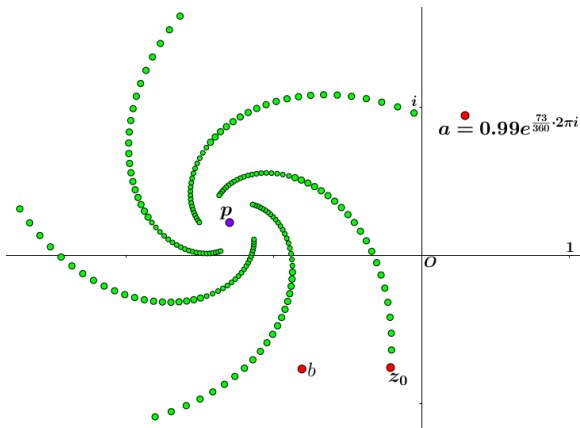
a^n voor $1 \leq n \leq 400$



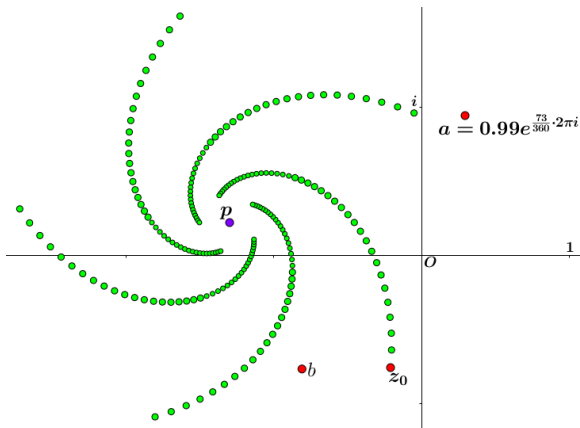
Iteratie van $f(z) = az + b$



Iteratie van $f(z) = p + a(z - p)$

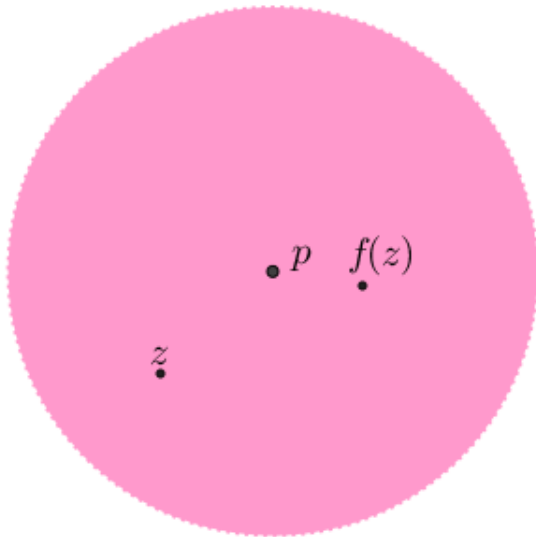


Iteratie van $f(z) = p + a(z - p)$

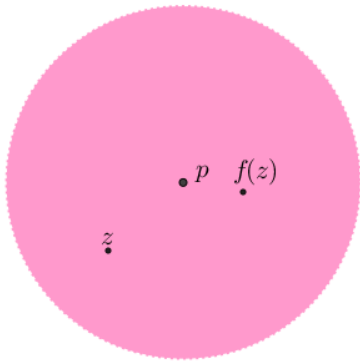


p is een aantrekkend vast punt $\iff |a| < 1$

Definitie van een aantrekkend vast punt



Definitie van een aantrekkend vast punt



Een vast punt p is aantrekkend als er een omgeving $D(p, r)$ van p is zodat:

$$|f(z) - p| < |z - p| \quad \text{voor elke } z \in D(p, r).$$

Iteratie van $f_c(z) = z^2 + c$

Bekijk de baan $\{f_c^n(0)\}$.

Iteratie van $f_c(z) = z^2 + c$

Bekijk de baan $\{f_c^n(0)\}$.

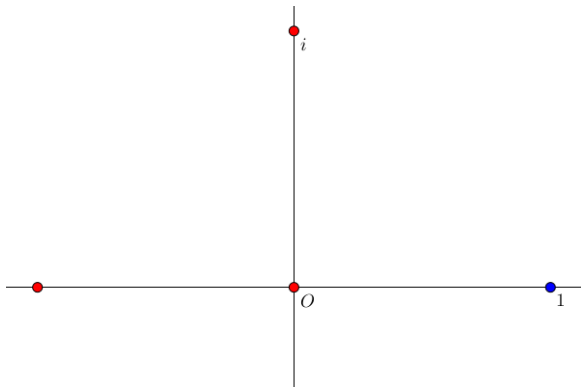
Voorbeelden: $c = 1$, $c = -1$ en $c = i$

Iteratie van $f_c(z) = z^2 + c$

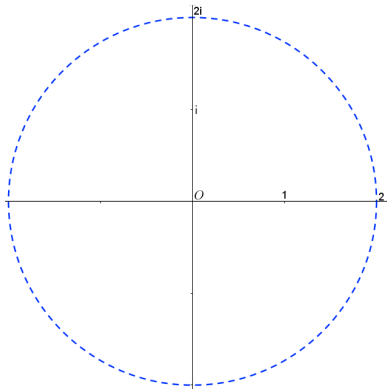
Bekijk de baan $\{f_c^n(0)\}$.

Voorbeelden: $c = 1$, $c = -1$ en $c = i$

Voor welke waarden van c is de baan $\{f_c^n(0)\}$ begrensd?



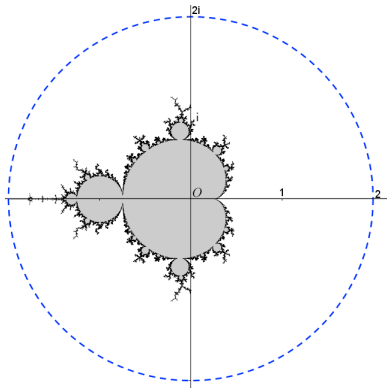
Stelling van de Verboden Cirkel



Voor begrensde banen $\{f_c^n(0)\}$ van $f_c(z) = z^2 + c$ geldt:

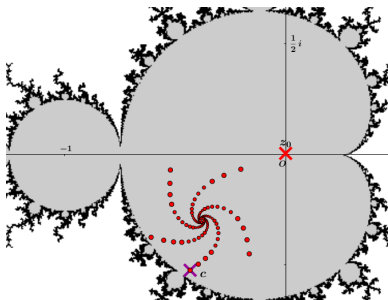
$$\{f_c^n(0)\} \subset \overline{D(0, 2)}.$$

De definitie van de Mandelbrotverzameling $\mathfrak{M}$

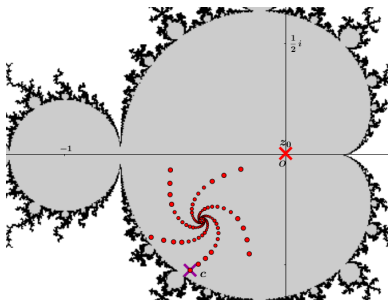


$$\mathfrak{M} := \{c \in \mathbb{C} \mid \text{de baan } \{f_c^n(0)\} \text{ is begrensd}\}$$

Onderzoek met Geogebra

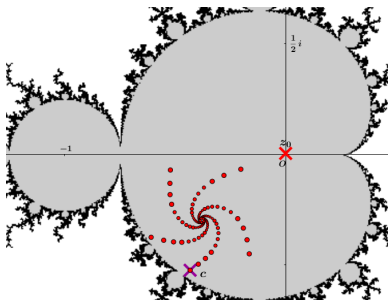


Onderzoek met Geogebra



Bij elke component hoort een periode

Onderzoek met Geogebra



Bij elke component hoort een periode

De hoofdcardioïde bevat de c -waarden waarvoor f_c een aantrekkend vast punt heeft.

Het punt w is een kritiek punt van f als $f'(w) = 0$

Het punt w is een kritiek punt van f als $f'(w) = 0$

Stelling (zonder bewijs).

Als f een aantrekkende vast punt p heeft dan is er een kritiek punt van f waarvoor geldt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(w) = p$

Het punt w is een kritiek punt van f als $f'(w) = 0$

Stelling (zonder bewijs).

Als f een aantrekkende vast punt p heeft dan is er een kritiek punt van f waarvoor geldt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(w) = p$

Gevolg: als $f_c = z^2 + c$ een aantrekkend vast punt heeft dan is $c \in \mathfrak{M}$.

Het punt w is een kritiek punt van f als $f'(w) = 0$

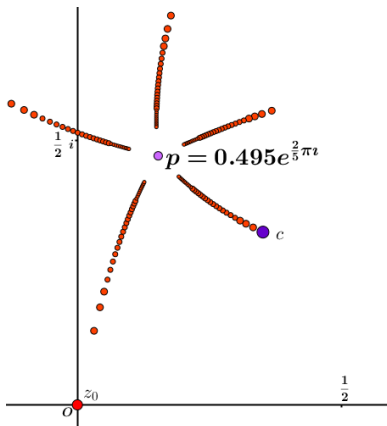
Stelling (zonder bewijs).

Als f een aantrekkende vast punt p heeft dan is er een kritiek punt van f waarvoor geldt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(w) = p$

Gevolg: als $f_c = z^2 + c$ een aantrekkend vast punt heeft dan is $c \in \mathfrak{M}$.

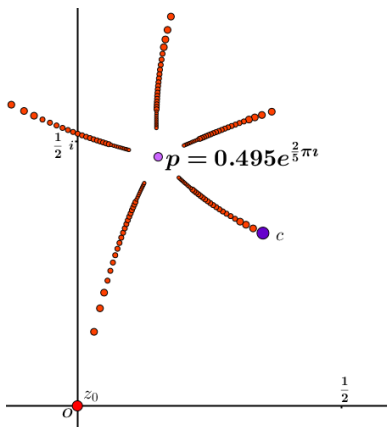
Op naar de hoofdcardioïde!

Welke waarde van c hoort bij deze situatie?



p is een vast punt,

Welke waarde van c hoort bij deze situatie?



p is een vast punt,

dus: $c = p - p^2$.

Herschrijven van $f(z) = z^2 + c$

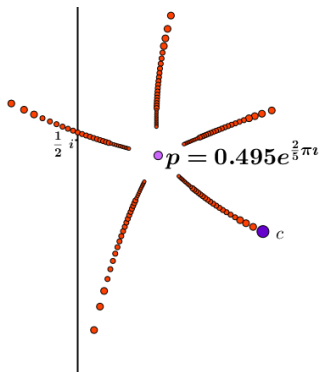
Er geldt: $z^2 + c = p + 2p(z - p) + (z - p)^2$.

Herschrijven van $f(z) = z^2 + c$

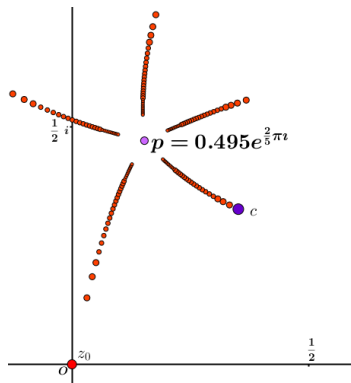
Er geldt: $z^2 + c = p + 2p(z - p) + (z - p)^2$.

Denk aan Taylorreeks:

$$f(z) = f(p) + f'(p)(z - p) + \frac{f''(p)}{2}(z - p)^2$$

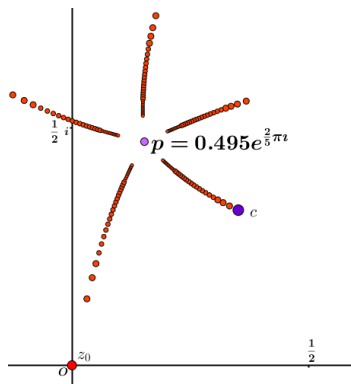


$$z^2 + c = p + 2p(z - p) + (z - p)^2$$



Conclusie: in de buurt van een aantrekkend vast punt lijkt iteratie van $f(z) = z^2 + c$ op die van $f(z) = p + 2p(z - p)$

$$z^2 + c = p + 2p(z - p) + (z - p)^2$$



Conclusie: in de buurt van een aantrekkend vast punt lijkt iteratie van $f(z) = z^2 + c$ op die van $f(z) = p + 2p(z - p)$

Alleen aantrekkend als $|2p| < 1$

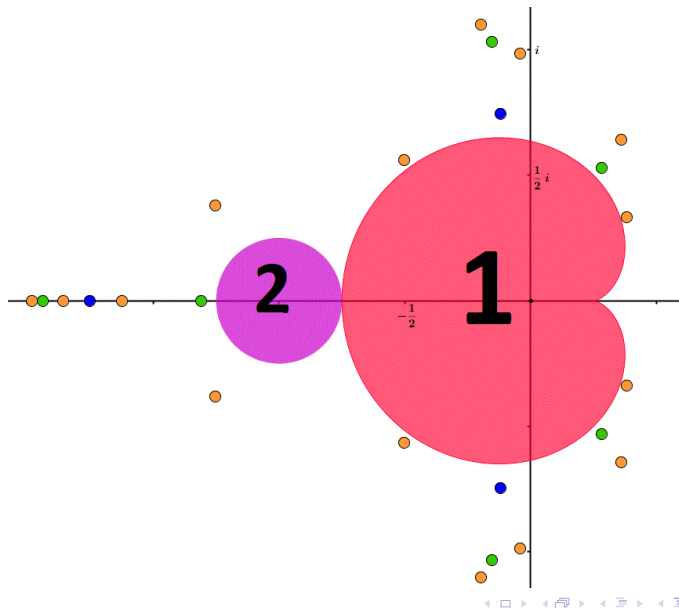
Blijkbaar geldt $\{ c = p - p^2 \mid p \in D(0, \frac{1}{2}) \} \subset \mathfrak{M}$.

Blijkbaar geldt $\{ c = p - p^2 \mid p \in D(0, \frac{1}{2}) \} \subset \mathfrak{M}$.

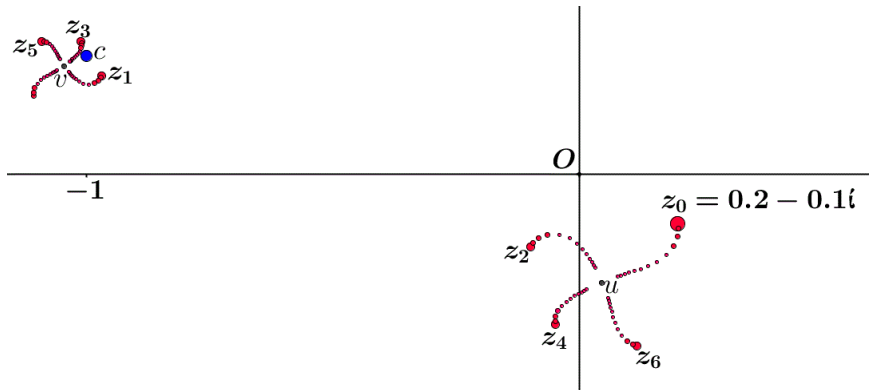
We tekenen de rand:

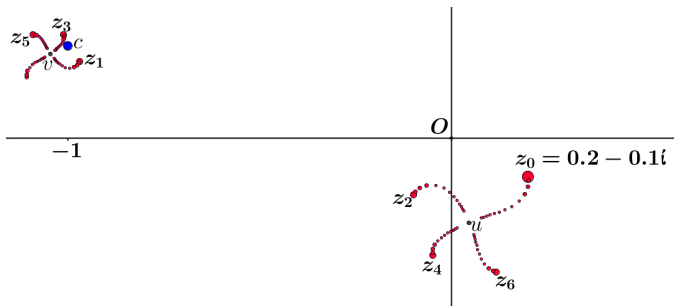
$$\{ c = p - p^2 \mid p \in C(0, \frac{1}{2}) \}$$

Nu naar periode 2

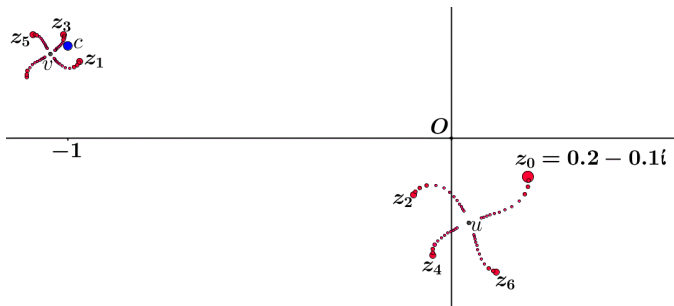


Een aantrekkend periodiek tweetal





Bepaal vaste punten v van f_c^2 die geen vast punt zijn van f_c
waarvoor $|(f_c^2)'(v)| < 1$



Bepaal vaste punten v van f_c^2 die geen vast punt zijn van f_c
waarvoor $|(f_c^2)'(v)| < 1$

Probeer het zelf in de opgaven!